

Construction de Valeurs Propres Doubles du Laplacien de Hodge-de Rham

Pierre Jammes

Received: 16 March 2007 / Published online: 3 April 2009
© Mathematica Josephina, Inc. 2009

Abstract On any compact manifold of dimension greater than 3, we exhibit a metric whose first positive eigenvalue for the Laplacian acting on p -forms is of multiplicity 2. As a corollary, we prescribe the volume and any finite part of the spectrum of the Hodge Laplacian with multiplicity 1 or 2.

Keywords Differential forms · Hodge Laplacian · Multiplicity of eigenvalues

Mathematics Subject Classification (2000) 58J50 · 58C40

1 Introduction

Y. Colin de Verdière a montré dans [7] que pour toute variété riemannienne compacte M de dimension supérieure ou égale à 3 et tout entier $N \geq 1$, il existe une métrique sur M telle que la multiplicité de la première valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions de M soit égale à N , et a généralisé ce résultat en montrant qu'on peut en fait prescrire toute partie finie du spectre du laplacien, la multiplicité des valeurs propres pouvant être choisie arbitrairement (voir [8]).

Le problème de prescription de la multiplicité des valeurs propres a aussi été étudié pour des opérateurs de Schrödinger [5, 11], et les résultats de prescription de spectre ont été adaptés par P. Guérini au laplacien de Hodge-de Rham—agissant sur les formes différentielles—dans [14] et par M. Dahl à l'opérateur de Dirac [12]. Mais pour ces deux derniers opérateurs les valeurs propres prescrites sont simples (en se restreignant par exemple aux formes coexactes de degré fixé en ce qui concerne le

P. Jammes (✉)

Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie (EA 2151), Université d'Avignon et des pays de Vaucluse, 84018 Avignon, France
e-mail: Pierre.Jammes@univ-avignon.fr

laplacien de Hodge-de Rham) ; le problème de créer des valeurs propres multiples sur une variété quelconque dans ces deux cas n'a pas encore été résolu.

Le but de cet article est d'apporter un début de réponse au problème de multiplicité en expliquant comment construire des métriques telles qu'une valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham soit de multiplicité 2. La construction assure que cette multiplicité possède une certaine stabilité, ce qui permet finalement de prescrire le début du spectre avec multiplicité 1 ou 2.

Comme dans [16], on ne cherchera à prescrire le spectre du laplacien qu'en restriction aux formes coexactes. En effet, si on note

$$0 < \mu_{p,1}(M, g) \leq \mu_{p,2}(M, g) \leq \dots \quad (1)$$

les valeurs propres du laplacien agissant sur les p -formes coexactes de M , le spectre non nul du laplacien agissant sur l'ensemble des p -formes est $(\mu_{p-1,i}(M, g))_{i \geq 1} \cup (\mu_{p,i}(M, g))_{i \geq 1}$, et la multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est le p -ième nombre de Betti de M . On ne considérera que des variétés sans bord. Comme la dualité de Hodge impose que $\mu_{p,i}(M, g) = \mu_{n-p-1,i}(M, g)$, on peut donc se restreindre aux degrés p plus petits que $\frac{n}{2}$.

Théorème 2 *Soit M une variété compacte, connexe, orientable et sans bord de dimension $n \geq 3$, V un réel strictement positif et $N \geq 1$ un entier. On se donne pour tout entier $1 \leq p < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (ou $p = 1$ si $n = 3$) une suite de réels $0 < \nu_{p,1} \leq \nu_{p,2} \leq \dots \leq \nu_{p,N}$, chaque valeur apparaissant au plus deux fois pour p donné.*

Il existe une métrique g sur M telle que

- $\mu_{p,i}(M, g) = \nu_{p,i}$ pour tout $i \leq N$ et $1 \leq p < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$;
- $\text{Vol}(M, g) = V$.

La construction de valeurs propres doubles s'appuiera sur l'apparition d'un phénomène spectral lié à la présence de multiplicité, baptisé "diabolo" dans [4], dont on peut par exemple trouver la description dans [3] (Appendice 10) et [10] (Chap. 5).

Dans [9], Y. Colin de Verdière formalise une notion de transversalité remontant à Arnol'd et définit deux propriétés de transversalité—resp. forte et faible, que nous rappellerons dans la Sect. 4—pour les valeurs propres multiples d'une forme quadratique. Il remarque dans [10] que dans le cas où l'hypothèse forte est vérifiée pour une multiplicité 2, on peut montrer que cette multiplicité est stable mettant en évidence un point diabolo. D'une certaine manière, notre démarche sera inverse : on va construire un point diabolo sans faire intervenir d'hypothèse de transversalité, et on pourra vérifier *a posteriori* que la valeur propre double vérifie l'hypothèse faible de transversalité.

Il serait bien sûr intéressant de savoir si on peut construire des valeurs propres de multiplicité plus grande sur toute variété. La technique que nous utiliserons est cependant spécifique à la multiplicité 2 et ne semble pas pouvoir s'adapter à des multiplicités plus grandes (voir Remarque 15). Il convient toutefois de remarquer que sur certaines variétés, la multiplicité de la première valeur propre peut être arbitrairement grande.

Théorème 3 *Pour tout entier $n \geq 4$, et tout $1 \leq p < n/2$, il existe une variété compacte M de dimension n telle que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une métrique g sur M telle que $\mu_{p,1}(M, g)$ soit de multiplicité k .*

En général, on ne peut donc pas majorer la multiplicité de la première propre en fonction de la topologie comme c'est le cas sur les surfaces. Mais les exemples du Théorème 3 ont une topologie particulière (variétés produits) et on ne contrôle la multiplicité de la première valeur propre que pour certains degrés qu'on ne peut pas choisir indépendamment de la topologie. En ce sens, le Théorème 2 qui prescrit les premières valeurs propres avec multiplicité 1 ou 2 pour tous les degrés simultanément et sur n'importe quelle variété, y compris en dimension 3, est beaucoup plus précis.

Ces résultats permettent de mieux cerner le problème de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham et de dégager quelques questions qui restent en suspens. Par exemple :

Question 4 La multiplicité de la première valeur propre de la sphère peut-elle être arbitrairement grande quel que soit le degré ?

Question 5 Si M est une variété de dimension 3, la multiplicité de $\mu_{1,1}(M, g)$ est-elle nécessairement bornée ? Si oui, comment varie la multiplicité maximale de $\mu_{1,1}(M, g)$ en fonction de la topologie ?

La Sect. 2 sera consacrée au rappel des outils techniques que nous utiliserons. Dans les Sects. 3 et 4, nous expliquerons comment construire une valeur propre double, et pourquoi sa multiplicité est stable. Enfin, dans les Sects. 5 et 6, nous démontrerons les Théorèmes 2 et 3.

2 Convergence de Valeurs Propres et d'Espaces Propres

Nous allons rappeler ici les outils techniques qui vont intervenir dans la construction de valeurs propres doubles. Le premier est le résultat de convergence de valeurs propres et d'espaces propres obtenu par C. Anné et B. Colbois dans [2] pour les variétés compactes reliées par des anses fines, des arguments classiques de théorie de Hodge permettant d'en déduire une convergence spectrale en restriction aux formes coexactes : on se donne une famille finie de variétés compactes $(M_j, g_j)_{j=1}^K$ qu'on relie entre elles par des anses fines, isométriques au produit d'une sphère $(S^{n-1}, \varepsilon^2 g_{\text{can}})$ par un intervalle. En notant $(\tilde{M}, g_\varepsilon)$ la variété obtenue, qui est diffeomorphe à $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_K$, on a :

Théorème 6 *Si, pour $p \in \{1, \dots, n-1\}$, on note $\mu'_{p,1} \leq \mu'_{p,2} \leq \dots$ la réunion des spectres $(\mu_{p,i}(M_j, g_j))_{i,j}$, on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{p,i}(\tilde{M}, g_\varepsilon) = \mu'_{p,i},$$

et il y a convergence des espaces spectraux.

Ce théorème a déjà été utilisé pour prescrire le spectre du laplacien de Hodge-Rham sans multiplicité dans [14] et [16].

Pour obtenir de la multiplicité, on aura besoin d'un contrôle sur la vitesse de convergence des valeurs propres et des espaces propres. Ce contrôle découle de la Proposition 3.10 ainsi que des Corollaires 3.11 et 3.12 de [2] (voir aussi les Propositions 1 et 2 de [1]. Nous renvoyons aussi à [1] pour une définition précise de la convergence des espaces propres). Si I est un intervalle de \mathbb{R}^+ , E_I^ε l'espace engendré par les p -formes propres de $(\tilde{M}, g_\varepsilon)$ de valeur propre contenue dans I et E_I l'espace engendré par les p -formes propres des (M_j, g_j) de valeur propre contenue dans I , la distance entre E_I et E_I^ε vérifie $d(E_I, E_I^\varepsilon) \leq C\tau(\varepsilon)$ avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(\varepsilon) = 0$ et où C est une constante dépendant des bornes de I et de leur distance au spectre $(\mu'_{p,i})_i$. En particulier, si deux valeurs propres de $(\tilde{M}, g_\varepsilon)$ sont proches l'une de l'autre mais assez éloignées du reste du spectre, il est difficile de localiser les formes propres mais la somme des deux espaces propres converge rapidement.

Ces résultats seront appliqués à la variété obtenue en attachant à M des sphères munies de métriques bien choisies. Plus précisément, on utilisera les "haltères de Cheeger généralisées" définies par P. Guérini dans [14] : pour tous entiers $n \geq 3$ et $0 \leq p < [\frac{n-1}{2}]$ et tout réel $u > 0$ petit, on considère le domaine $\Omega_{p,u}$ de \mathbb{R}^{n+1} formé par la réunion d'un $\frac{1}{5}$ -voisinage tubulaire de la sphère unité $S^p \subset \mathbb{R}^{p+1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et du produit de boules $B^{p+1}(0, 1) \times B^{n-p}(0, u) \subset \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p}$. Après lissage de son bord, le domaine $\Omega_{p,u}$ est difféomorphe à une boule B^{n+1} et $\partial\Omega_{p,u}$ est une sphère (voir la Sect. 2.1 de [14] pour les détails de la construction). La famille de métriques induites sur le bord a la propriété de produire une petite valeur propre :

Proposition 7 [14] *La famille $\partial\Omega_{p,u}$ vérifie*

$$\lim_{u \rightarrow 0} \mu_{p,1}(\partial\Omega_{p,u}) = 0$$

et il existe des constantes $c(n) > 0$ et $v(n) > 0$ telle que

$$\mu_{p,2}(\partial\Omega_{p,u}) \geq c \quad \text{et} \quad \mu_{q,1}(\partial\Omega_{p,u}) \geq c$$

pour tout u et tout $q \neq p$, et

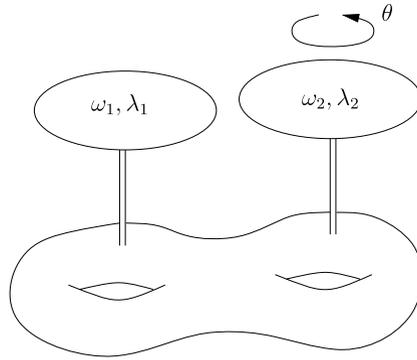
$$\text{Vol}(\partial\Omega_{p,u}) < v$$

pour tout u .

Si on note Υ l'isométrie de \mathbb{R}^{n+1} définie par $\Upsilon(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_p, -x_{p+1}, -x_{p+2}, x_{p+3}, \dots, x_{n+1})$, cette application préserve le domaine $\Omega_{p,u}$, la sphère $\partial\Omega_{p,u}$ et donc la droite propre associée à la valeur propre $\mu_{p,1}(\partial\Omega_{p,u})$. En notant $\omega_{p,u}$ une forme propre associée, on a donc $\Upsilon^* \omega_{p,u} = \pm \omega_{p,u}$. Par construction, la forme $\omega_{p,u}$ est proche de la p -forme harmonique du bord du $\frac{1}{5}$ -voisinage tubulaire de la sphère S^p . Comme cette forme harmonique est antisymétrique relativement à l'isométrie Υ , on en déduit le

Fait 8 *La sphère $\partial\Omega_{p,u}$ est invariante par Υ et $\Upsilon^* \omega_{p,u} = -\omega_{p,u}$.*

FIG. 1 Adjonction de sphères à la variété



Cette propriété de la forme $\omega_{p,u}$ sera un élément clef de la construction de valeurs propres doubles.

Le cas de la dimension 3 doit être traité différemment, la construction précédente ne fonctionnant pas. Sur la sphère $S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1\}$, on considère la fibration de Hopf définie par les orbites de l'action $\theta \cdot (a, b) = (e^{i\theta}a, e^{i\theta}b)$ et on note ω la forme de connexion de cette fibration qui est une forme propre du laplacien. L'isométrie $\Upsilon : (a, b) \mapsto (\bar{a}, \bar{b})$ préserve cette fibration et $\Upsilon^*\omega = -\omega$. Quand on contracte la métrique dans la direction de la fibre (métriques de Berger), ces propriétés de symétrie sont préservées et la valeur propre associée à ω tend vers 0 (les autres valeurs propres étant minorée, cf. [6]). Le Fait 8 reste donc vrai en dimension 3.

3 Création d'Une Valeur Propre Double

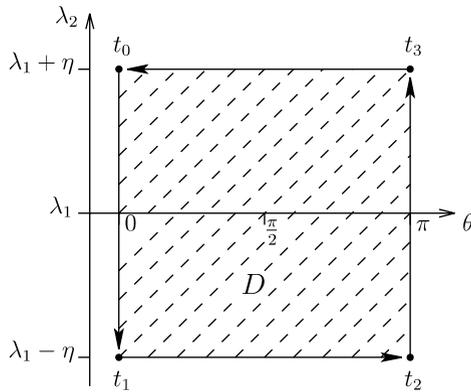
On va maintenant utiliser les outils présentés dans la section précédente pour construire une valeur propre double.

On se donne une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$ quelconque et un intervalle ouvert I ne rencontrant pas le spectre du laplacien agissant sur les p -formes coexactes de (M, g) , et on va créer une valeur propre double dans cet intervalle. En appliquant des homothéties aux sphères $\partial\Omega_{p,u}$ de la Proposition 7 (ou aux sphères de Berger en dimension 3), on obtient sur la sphère S^n deux métriques g_1 et g_2 , ayant chacune une valeur propre λ_i , $i = 1, 2$ dans l'intervalle I de forme propre ω_i , toutes les autres valeurs propres étant plus grandes que I . En attachant les sphères (S^n, g_1) et (S^n, g_2) à (M, g) par des anses fines de rayon ε , on obtient la variété difféomorphe à M représentée sur la Fig. 1.

Le principe de la construction est de faire interagir les formes propres induites sur M par λ_1 et λ_2 . On pourrait n'attacher qu'une seule sphère et faire interagir sa valeur propre avec une valeur propre de la variété initiale. Mais pour les applications à la prescription du spectre nous aurons besoin d'un contrôle précis du spectre qui est permis par l'ajout d'une seconde sphère.

On prend soin de choisir comme point d'attache des anses sur les sphères un point fixe de l'isométrie Υ , le recollement entre l'anse et la sphère étant alors déterminé à une isométrie de S^{n-1} près. On fixe cette isométrie arbitrairement sur la 1^{re} sphère,

FIG. 2 Espace des métriques



et on se laisse la liberté de faire varier cette isométrie dans un sous-groupe de $SO(n)$ isomorphe à S^1 pour la 2^e sphère, en notant θ le paramètre naturel sur le cercle. Ce groupe correspond aux rotations dans le plan (e_{p+1}, e_{p+2}) dans la construction faite dans la Sect. 2. La métrique ainsi définie sur M est paramétrée par $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon$ et θ . On peut en outre remarquer qu'on ne modifie pas cette métrique en remplaçant θ par $\theta + \pi$, du fait de la symétrie de la métrique g_2 (cf. Fait 8).

On fixe λ_1 dans l'intervalle I et on choisit un réel $\eta > 0$ tel que $\lambda_1 \pm \eta \in I$. On va créer de la multiplicité en faisant varier λ_2 dans l'intervalle $[\lambda_1 - \eta, \lambda_1 + \eta]$ et θ dans l'intervalle $[0, \pi]$. On fixe ε suffisamment petit pour que M n'ait que deux valeurs propres μ_1 et μ_2 dans l'intervalle I , proches de λ_1 et λ_2 , et que la somme de leurs espaces propres soit proche de l'espace engendré par ω_1 et ω_2 . Quand les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont distinctes, on posera $\mu_1 < \mu_2$ et on notera φ_1 et φ_2 leurs formes propres respectives. On peut en outre choisir ε de sorte que si $\lambda_2 = \lambda_1 + \eta$ (resp. $\lambda_1 - \eta$), φ_1 est proche de ω_1 (resp. ω_2). Au final, on ne fera varier la métrique que dans le domaine D de dimension 2 représenté sur la Fig. 2, et c'est dans ce domaine qu'on va trouver une valeur propre double.

Proposition 9 *Il existe un point de D pour lequel $\mu_1 = \mu_2$.*

Démonstration L'idée est de considérer la famille à un paramètre de métriques (g_t) obtenue en suivant le bord du domaine D et de suivre l'évolution des μ_i et φ_i . On note t_i les valeurs prises par t à chaque coin de D (voir Fig. 2). Pour toutes les métriques paramétrées par D , l'espace engendré par les φ_i est proche de celui engendré par les ω_i , il existe donc une isométrie naturelle entre les deux qui permet de les identifier et de représenter les φ_i et ω_i dans un même plan, comme dans la Fig. 3.

Quand $t = t_0$ on a $\lambda_2 = \lambda_1 + \eta$, donc μ_1 et φ_1 sont proches de λ_1 et ω_1 respectivement (voir Figs. 3 et 4).

Quand on passe de t_0 à t_1 , il est possible—mais improbable—qu'on croise un point pour lequel $\mu_1 = \mu_2$. Si c'est le cas, la proposition est démontrée. Sinon, les deux valeurs propres restent distinctes et évoluent comme sur la Fig. 4 : pour $t = t_1$, les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont proches de $\lambda_2 = \lambda_1 - \eta$ et λ_1 respectivement. La forme φ_1 s'est donc déplacée et est maintenant proche de ω_2 comme sur la Fig. 3 (quitte à changer la convention de signe sur ω_2).

FIG. 3 Évolution des formes propres

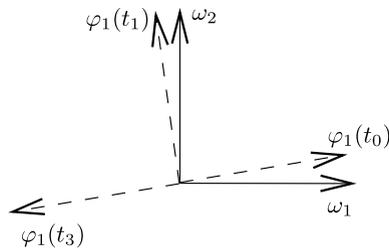
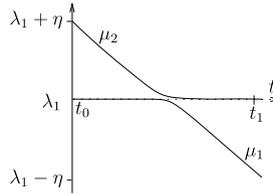


FIG. 4 Évolution des valeurs propres



On passe ensuite de t_1 à t_2 , c'est-à-dire qu'on fait tourner la 2^e sphère d'un demi-tour autour du point d'attache à l'anse sans modifier λ_1 et λ_2 . La forme φ_1 reste donc proche de ω_2 . Il faut noter que les métriques g_{t_1} et g_{t_2} sont isométriques, et donc qu'on peut identifier les espaces propres en t_1 et t_2 , mais que ω_2 et φ_1 ont changé de signe par rapport à cette identification (cf. Fait 8).

On va ensuite de t_2 à t_3 en faisant passer λ_2 de $\lambda_1 - \eta$ à $\lambda_1 + \eta$. Par rapport au chemin $[t_1, t_0]$, la différence est que θ a varié de π , c'est-à-dire qu'on passe par des métriques isométriques à celle de $[t_1, t_0]$. Les valeurs propres varient donc exactement comme dans la Fig. 4 en inversant l'axe temporel (en particulier, les valeurs propres μ_1 et μ_2 restent distinctes). Les espaces propres subissent aussi l'évolution inverse de celle du parcours $t_0 \rightarrow t_1$. Mais φ_1 a changé de signe entre t_1 et t_2 , c'est donc $-\varphi_1$ qui est proche de ω_1 en t_3 . Les métriques g_{t_0} et g_{t_3} sont isométriques, mais la forme φ_1 a changé de signe entre t_0 et t_3 .

Entre t_3 et t_0 , la forme φ_1 reste proche de $-\omega_1$ puisque λ_1 et λ_2 ne varient pas. Quand la métrique suit le bord de D , la forme φ_1 associée à la valeur propre μ_1 varie donc continûment jusqu'à prendre finalement, la valeur opposée à sa valeur initiale.

Considérons maintenant le fibré vectoriel trivial au dessus de D de fibre \mathbb{R}^2 , en identifiant la fibre à l'espace engendré par ω_1 et ω_2 , c'est-à-dire au plan représenté par la Fig. 3. Comme il n'y a pas de multiplicité en restriction à ∂D , le sous-fibré en droite, de fibre $\mathbb{R}\varphi_1$ est bien défini. On vient de montrer que ce fibré est non orientable.

Supposons maintenant que $\mu_1 \neq \mu_2$ pour toutes les valeurs de λ_2 et θ dans D . Le fibré en droite induit par φ_1 est alors défini sur le domaine D entier. Or, ce domaine est contractile, donc ce fibré est trivial. En particulier, sa restriction à ∂D ne peut pas être non orientable. On en déduit par l'absurde qu'il existe un point à l'intérieur de D pour lequel $\mu_1 = \mu_2$. □

Remarque 10 Il existe une interprétation de l'apparition de cette valeur propre double en termes de tresses quantiques (voir [17], Sect. 5).

4 Stabilité de la Multiplicité

Commençons par rappeler les définitions des hypothèses de transversalité données par Y. Colin de Verdière dans [9] pour les valeurs propres multiples (voir aussi la Sect. 3 de [1]).

On se donne un intervalle I de \mathbb{R} , une famille de métrique g_a , où le paramètre a prend ses valeurs dans un compact K d'une variété, que l'on supposera homéomorphe à une boule, et on suppose que pour une valeur a_0 du paramètre, on a une unique valeur propre λ_0 du laplacien dans I pour la métrique g_0 , de multiplicité n_0 , et d'espace propre E_0 . Pour a proche de a_0 , la somme E_a des espaces propres de valeurs propres contenu dans I est proche de E_0 , ce qui permet de les identifier par une isométrie naturelle (voir [9] ou [1] pour sa définition explicite) et on note $q_a \in \mathcal{Q}(E_0)$ la forme quadratique ainsi induite sur E_0 par le laplacien. On note $\Phi : K \rightarrow \mathcal{Q}(E_0)$ l'application $a \mapsto q_a$ ainsi définie.

Définition 11 La valeur propre λ_0 vérifie l'hypothèse forte (resp. faible) de transversalité si Φ est une submersion en $a = a_0$ (resp. Φ est essentielle en a_0).

Comme dans [1] on dira dans la suite de ce texte qu'une telle valeur propre est *fortement* (resp. *faiblement*) *stable*. La définition d'une application essentielle en a_0 utilisée dans [9] est que si pour tout $\Psi : K \rightarrow \mathcal{Q}(E_0)$ tel que $\|\Psi - \Phi\|_\infty < \varepsilon$ on a $\Phi(a_0) \in \Psi(K)$ (nous dirons ici qu'une telle application est *métriquement essentielle*). Nous utiliserons une notion plus forte, que nous nommerons *topologiquement essentielle*, qui est que la restriction de Φ à ∂K n'est pas homotopiquement triviale dans $\mathcal{Q}(E_0) \setminus \{\Phi(a_0)\}$. On peut vérifier que si Φ est topologiquement essentielle en a_0 elle est aussi métriquement essentielle, et que si deux applications sont topologiquement essentielles en a_0 et b_0 respectivement, alors leur produit l'est aussi en (a_0, b_0) .

Proposition 12 La valeur propre double de la Proposition 9 est faiblement stable.

Démonstration Dans la section précédente, le compact K est le domaine D , l'espace E_0 est l'espace engendré par ω_1 et ω_2 représenté par la Fig. 3. Pour normaliser le problème, on se ramène par homothétie à des formes quadratiques sur E_0 de trace fixée, c'est-à-dire qu'on pose $\mu_1 + \mu_2 = c^{1e}$. Cet espace est de dimension 2, on peut l'assimiler à un plan dont un seul point représente une forme quadratique telle que $\mu_1 = \mu_2$. Le reste du plan peut être paramétré en coordonnées polaire par la différence entre les deux valeurs propres et la direction de la droite propre correspondant par exemple à μ_2 (attention : en faisant tourner la droite propre d'un demi-tour, on revient à la forme quadratique initiale, c'est-à-dire qu'on a fait une tour complet dans le plan des formes quadratiques). En faisant tourner les droites propres comme l'indique la Fig. 3, on a en fait montré que Φ envoie ∂D sur une courbe du plan qui entoure la forme quadratique q_0 de multiplicité 2, c'est-à-dire que l'indice de la courbe $\Phi(\partial D)$ par rapport à q_0 est non nul. L'application Φ est donc topologiquement essentielle en un point de D d'image q_0 , et la multiplicité est faiblement stable (on retrouve au passage l'existence de la valeur propre double). Dans le cas où la multiplicité apparaît sur l'axe $\theta = 0$, on la fait disparaître en changeant l'origine due paramètre θ ou en perturbant la métrique g sur la variété M . \square

Remarque 13 La stabilité forte d'une valeur propre multiple est une notion différentielle, alors que la stabilité faible est seulement topologique. Tous les arguments que nous avons utilisé dans cette section et la précédente sont de nature purement topologique, il ne semble donc pas envisageable de montrer que la stabilité est forte par ces moyens.

Remarque 14 La stabilité de la multiplicité donnée par la Proposition 9 peut s'exprimer d'une autre manière : si on déforme légèrement le domaine D dans l'espace des métriques de sorte que le fibré en droite au dessus du bord ∂D reste non trivial, l'argument topologique utilisé reste valable, il y a donc toujours à l'intérieur du domaine un point donnant une valeur propre double.

Remarque 15 Une condition nécessaire pour qu'une multiplicité soit stable est que $\dim K \geq \dim \mathcal{Q}(E_0)$ (ou $\dim \mathcal{Q}(E_0) - 1$ si on se restreint à des formes quadratiques de trace fixée). En particulier, la dimension de K doit croître au moins quadratiquement par rapport à la multiplicité. La technique que nous avons utilisée pour construire une valeur propre double ne semble donc pas pouvoir se généraliser à des multiplicités supérieures. En effet, si on attache un plus grand nombre de sphères à la variété, le nombre de paramètres disponibles restera une fonction affine du nombre de sphères, même en déplaçant le point d'attache sur la variété et en utilisant tous les degrés de liberté à la jonction des anses.

On peut déduire des résultats obtenus jusqu'ici l'énoncé suivant, qui sera la base de la démonstration du Théorème 2 :

Lemme 16 *Soit M une variété de dimension $n \geq 3$, p un entier tel que $1 \leq p < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (ou $p = 1$ si $n = 3$) et $C > \nu > 0$ et $V > 0$ trois réels. Il existe une métrique g sur M telle que*

- la valeur propre $\mu_{p,1}(M, g) = \nu = \mu_{p,2}(M, g)$ est de multiplicité 2 et faiblement stable ;
- $\mu_{p,3}(M, g) > C$, et $\mu_{q,1}(M, g) > C$ pour $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$ et $q \neq p$;
- $\text{Vol}(M, g) < V$.

Démonstration On commence par choisir sur M une métrique g telle que $\text{Vol}(M, g) < V/10$ et $\mu_{q,1}(M, g) > 2C$ pour tout q . On applique ensuite la construction de la Sect. 3 en considérant l'intervalle $I =]\frac{\nu}{2}, \frac{3\nu}{2}[$, en attachant des sphères de volume inférieur à $V/10$ et telle que leurs valeurs propres qui ne sont pas dans I soient plus grandes que $2C$ (la Proposition 7 le permet) et en choisissant le rayon ε des anses de sorte que le volume total soit inférieur à $4V/10$. Les Propositions 9 et 12 nous disent qu'il y a alors une valeur propre $\mu_{p,1}(M, g)$ de multiplicité 2 faiblement stable dans l'intervalle I . Une homothétie permet de ramener cette valeur propre à $\mu_{p,1}(M, g) = \nu$ et les conclusions du lemme sont vérifiées. \square

Remarque 17 Le même énoncé pour une valeur propre simple découle immédiatement de la Proposition 7, la stabilité étant trivialement vérifiée dans ce cas.

5 Prescription du Spectre

En s'appuyant sur le Lemme 16 et en utilisant les techniques habituelles de stabilité spectrale, on peut prescrire le début du spectre avec multiplicité 1 ou 2.

Démonstration du Théorème 2 On fixe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\delta < \inf_{p < k, v_{p,i} \neq v_{p,j}} \left\{ \frac{|v_{p,i} - v_{p,j}|}{2} \right\} \quad \text{et} \quad \delta < \frac{V}{2} \quad (18)$$

et une constante $C > \sup_{p,i} v_{p,i}$. On notera v un paramètre variant dans l'intervalle $[V - \delta, V + \delta]$.

Soit m le nombre total de valeurs propres à prescrire, tous degrés confondus mais sans compter la multiplicité. Pour chaque $i \leq m$, on note v la valeur propre correspondante, on se donne une sphère munie de la métrique donnée par le Lemme 16 si la valeur propre est double et la Remarque 17 si elle est simple, avec un volume v_i inférieur à $V/2m$: si on note E_i l'espace propre correspondant et q_i la forme quadratique sur E_i de valeur propre v , il existe un compact K_i , une famille de métriques g_{a_i} paramétrée par $a_i \in K_i$, un point $\bar{a}_i \in K_i$ et une application $\Phi_i : K_i \rightarrow \mathcal{Q}(E_i)$ tels que Φ soit essentielle en \bar{a}_i avec $\Phi_i(\bar{a}_i) = q_i$, $\Phi_i(a_i)$ étant la forme quadratique induite sur E_i par le laplacien pour une métrique g_{a_i} sur la sphère. On choisit K_i suffisamment petit pour que les valeurs propres de $\Phi_i(a_i)$ restent dans l'intervalle $I_i = [v - \delta, v + \delta]$. Par définition de δ les intervalles I_i sont tous disjoints.

On munit la variété M d'une métrique g telle que $\text{Vol}(M, g) = v - \sum_{i=1}^m v_i$ et $\mu_{p,1}(M, g) > C$ pour $1 \leq p \leq n/2$ en utilisant les résultats de [13] (le Théorème 1 de [13] est énoncé pour $n \geq 4$, mais la démonstration est valable pour les 1-formes coexactes en dimension 3) et on attache les m sphères précédemment obtenues, munies d'une métrique g_{a_i} avec $a_i \in K_i$, à (M, g) par des anses de rayon ε . On obtient une variété difféomorphe à M , munie d'une métrique qu'on notera g_ε et qui dépend non seulement de ε mais aussi des a_i .

La convergence du spectre et des espaces propres donnée par le Théorème 6 permet de définir ainsi une application

$$\Phi_\varepsilon : \left(\prod_{i=1}^k K_i \right) \times [V - \delta, V + \delta] \rightarrow \left(\prod_{i=1}^k \mathcal{Q}(E_i) \right) \times \mathbb{R}, \quad (19)$$

dont les premières composantes sont données par le spectre de (M, g_ε) et la dernière étant le volume de M , qui converge simplement—et donc uniformément d'après le théorème de Dini—vers l'application $(\prod_{i=1}^k \Phi_i) \times Id$ qui est topologiquement, donc métriquement, essentielle en $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, V)$. On en déduit que pour ε suffisamment petit, le début du spectre et le volume souhaités sont donnés par un élément de l'image de Φ_ε et que les autres valeurs propres sont plus grandes que C . \square

6 Grandes Multiplicités

Pour finir, on va démontrer le Théorème 3. Étant donnés $n \geq 4$ et $1 \leq p < n/2$, on considère une variété N_1 de dimension 3 et une variété N_2 de dimension $n - 3$

telle que $b_p(N_2) = 1$, on pose $M = N_1 \times N_2$ et on fixe un entier k quelconque. Comme la variété N_1 est de dimension 3, on peut la munir d'une métrique g_1 telle que la première valeur propre non nulle $\mu_{0,1}(N_1, g_1)$ du laplacien agissant sur les fonctions soit de multiplicité k (cf. [7]). Une particularité de la dimension 3 est qu'on peut choisir cette métrique de sorte que $\mu_{1,1}(N_1, g_1) > \mu_{0,1}(N_1, g_1)$. En effet, les métriques qui interviennent dans la construction de la valeur propre multiple sont obtenues par des déformations conformes à partir d'une famille (g_a) de métriques bien choisies, le volume de (N_1, g_1) pouvant être arbitrairement petit (voir la partie 4 de [7]). Or, selon [15], si pour toute métrique g sur N_1 on pose $C(g) = \inf_{\theta \in \Omega^1(N_1)} \sup_{d\zeta=0} (\|d\theta\|_{\frac{2}{3}}^2 / \|\theta - \zeta\|_3^2)$ où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme L^p , on a $\mu_{1,1}(N_1, \tilde{g}) \text{Vol}(N_1, \tilde{g})^{\frac{2}{3}} \geq C(g) > 0$ pour toute métrique \tilde{g} appartenant à la classe conforme de g . On peut en outre choisir la famille (g_a) telle qu'elle soit petite pour la distance de Lipschitz. La constante $C(g)$ sera alors clairement minorée sur cette famille, on a donc une minoration uniforme $\mu_{1,1}(N_1, \tilde{g}) \text{Vol}(N_1, \tilde{g})^{\frac{2}{3}} \geq C > 0$ pour toute métrique \tilde{g} conforme à une métrique g_a , et en particulier on peut choisir g_1 telle que $\mu_{1,1}(N_1, g_1) \geq C / \text{Vol}(N_1, g_1)^{\frac{2}{3}} > \mu_{0,1}(N_1, g_1)$.

On munit ensuite N_2 d'une métrique g_2 telle que le spectre non nul de (N_2, g_2) soit plus grand que $\mu_{0,1}(N_1, g_1)$. Si M est muni de la métrique produit $g_M = g_1 \oplus g_2$, la formule de Künneth nous dit que les valeurs propres non nulles inférieures ou égales à $\mu_{0,1}(N_1, g_1)$ sur les p -formes coexactes de M sont données par les produits de la p -forme harmonique de N_2 par les premières fonctions propres de N_1 . Par conséquent, $\mu_{p,1}(M, g_M) = \mu_{0,1}(N_1, g_1)$ et la multiplicité de $\mu_{p,1}(M, g_M)$ est égale à celle de $\mu_{0,1}(N_1, g_1)$.

Remarque 20 La multiplicité k étant stable sur N_1 , on peut la transplanter sur la somme connexe de M avec une autre variété à l'aide du Théorème 6.

Bibliographie

1. Anné, C. : Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité. *Commun. Partial Differ. Equ.* **15**(11), 1617–1630 (1990)
2. Anné, C., Colbois, B. : Spectre du laplacien agissant sur les p -formes différentielles et écrasement d'anses. *Math. Ann.* **303**(3), 545–573 (1995)
3. Arnol'd, V. : Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. Mir, Moscow (1976)
4. Berry, M.V., Wilkinson, M. : Diaboloical points in the spectra of triangles. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **392**(1802), 15–43 (1984)
5. Besson, G., Colbois, B., Courtois, G. : Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2 . *Trans. Am. Math. Soc.* **350**(1), 331–345 (1998)
6. Colbois, B., Courtois, G. : Petites valeurs propres des p -formes différentielles et classe d'Euler des S^1 -fibrés. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33**(5), 611–645 (2000)
7. Colin de Verdière, Y. : Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien. *Comment. Math. Helv.* **61**(2), 254–270 (1986)
8. Colin de Verdière, Y. : Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **20**(4), 99–615 (1987)
9. Colin de Verdière, Y. : Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd. *Comment. Math. Helv.* **63**(2), 184–193 (1988)
10. Colin de Verdière, Y. : Spectres de graphes. Cours spécialisés, vol. 4. SMF (1998)

11. Colin de Verdière, Y., Torki, N. : Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. *Sém. Théor. Spectr. Géom.* **11**, 9–18 (1993)
12. Dahl, M. : Prescribing eigenvalues of the Dirac operator. *Manuscr. Math.* **118**(2), 191–199 (2005)
13. Gentile, G., Pagliara, V. : Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p . *Proc. Am. Math. Soc.* **123**(12), 3855–3858 (1995)
14. Guérini, P. : Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37**(2), 270–303 (2004)
15. Jammes, P. : Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham. *Manuscr. Math.* **123**(1), 15–23 (2007)
16. Jammes, P. : Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme. *Comment. Math. Helv.* **83**(3), 521–537 (2008)
17. Jammes, P. : Sur la multiplicité des valeurs propres d'une variété compacte. *Sém. Théor. Spectr. Géom.* **26** (à paraître)