

DIAGRAMMES DE DIAMOND ET (φ, Γ) -MODULES

PAR

CHRISTOPHE BREUIL *

*C.N.R.S. & I.H.É.S. Le Bois-Marie, 35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette, France
courriel: breuil@ihes.fr*

RÉSUMÉ

Let ρ be a 2-dimensional continuous semi-simple generic representation of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ over $\overline{\mathbb{F}_p}$. The modulo p Langlands correspondence for $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ defined in [5], as realized in [9], can be reformulated as a quite simple recipe giving back the (φ, Γ) -module of the dual of ρ starting from the “Diamond diagram” associated to ρ . Let F be a finite unramified extension of \mathbb{Q}_p and ρ a 2-dimensional continuous semi-simple generic representation of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ over $\overline{\mathbb{F}_p}$. When one formally extends this recipe to the Diamond diagrams associated to ρ in [6], we show that one essentially finds the (φ, Γ) -module of the tensor induction from F to \mathbb{Q}_p of the dual of ρ .

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	350
2. Rappels sur les diagrammes et les diagrammes de Diamond	353
3. Rappels sur les (φ, Γ) -modules en caractéristique p	356
4. Diagrammes fortement principaux et (φ, Γ) -modules	359
5. Diagrammes de Diamond et (φ, Γ) -modules	366
6. Valeurs privilégiées de paramètres	373
7. Bref retour aux représentations de $\text{GL}_2(F)$	377
Références	381

* Cet article fait suite à un travail en collaboration avec V. Paškūnas ([6]) et l’auteur remercie ce dernier pour lui avoir appris l’importance des sommes (2) ci-après. Il remercie L. Berger pour son intérêt et ses remarques concernant la partie 3. Il remercie enfin J. de Jong et P. Cartier pour d’agréables discussions à Columbia et à l’I.H.É.S. sur le théorème 7.1 et la remarque qui suit.

Received December 5, 2008 and in revised form June, 23, 2009

1. Introduction

La correspondance de Langlands modulo p pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, définie initialement dans [5] dans sa version semi-simple, est maintenant bien comprise grâce à la théorie des (φ, Γ) -modules ([9]). En particulier, un résultat essentiel de [9] est la construction d'un foncteur permettant de passer de la représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ au (φ, Γ) -module de la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à laquelle elle correspond.

Si F est une extension finie non-ramifiée de \mathbb{Q}_p de degré f , l'étude et la classification des représentations lisses admissibles de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, initiée dans [2], [1], [5], [14], [13], se révèle bien plus complexe que lorsque $F = \mathbb{Q}_p$. Un phénomène troublant a lieu : dès que $f > 1$, il existe une très grande quantité de représentations lisses admissibles irréductibles supercuspidales (voir [6]). Leur classification est à ce jour inconnue.

Néanmoins, dans [6], une famille (en général infinie) de représentations lisses admissibles de $GL_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ est associée (de manière ad hoc) à une représentation continue ρ de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ lorsque cette dernière est suffisamment générique en partant de la généralisation des poids de Serre développée dans [7] (appelés ici poids de Diamond). La méthode est d'abord d'associer à ρ une famille de structures plus simples, introduites initialement dans [14] et appelées "diagrammes", puis de considérer ensuite la famille de toutes les représentations lisses admissibles de $GL_2(F)$ "engendrées" par l'un quelconque de ces diagrammes (essentiellement). Un diagramme D sera ici la donnée d'une représentation D_0 de $GL_2(\mathbb{F}_{p^f})$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ et d'une action de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ sur les invariants de D_0 par les matrices unipotentes supérieures $U(\mathbb{F}_{p^f})$. Une des propriétés cruciales des diagrammes associés à ρ (appelés diagrammes de Diamond) est que le socle de la $GL_2(\mathbb{F}_{p^f})$ -représentation D_0 est la somme directe des poids de Diamond associés à ρ .

Lorsque l'on examine le foncteur de [9] quand $F = \mathbb{Q}_p$ et ρ est semi-simple à la lumière des structures plus simples que sont les diagrammes de Diamond, on se rend compte qu'il existe une recette directe permettant de retrouver le (φ, Γ) -module du dual de ρ à partir du diagramme de Diamond associé à ρ (qui est unique quand $F = \mathbb{Q}_p$). Considérons le sous-espace suivant de la $GL_2(\mathbb{F}_p)$ -représentation D_0 :

$$V \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{socle de } D_0)^{U(\mathbb{F}_p)}.$$

Sous l'action des matrices triangulaires supérieures, V admet une base de vecteurs propres. Ces vecteurs propres sont reliés entre eux par l'action de sommes :

$$(1) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

où $s \in \{0, \dots, p - 1\}$. La recette pour retrouver le (φ, Γ) -module du dual de ρ est alors, grossièrement, de remplacer chaque somme (1) reliant deux vecteurs propres de V par une équation $\varphi(*) = s!X^{p-1-s}*$ reliant deux vecteurs de base du (φ, Γ) -module (voir exemple 4.8).

Que devient cette recette quand $f > 1$? On définit de manière analogue $V \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{socle de } D_0)^{U(\mathbb{F}_{p^f})}$ à partir d'un quelconque diagramme de Diamond D associé à ρ semi-simple mais les sommes reliant les vecteurs propres de V ont la forme :

$$(2) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{p^f}} \lambda^{s_0} \lambda^{ps_1} \dots \lambda^{p^{f-1}s_{f-1}} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

où $s_j \in \{0, \dots, p - 1\}$. Un théorème de Stickelberger (th. 7.1) suggère alors de remplacer chaque somme (2) par l'équation (voir §5 pour la construction précise) :

$$(3) \quad \varphi(*) = s_0!s_1! \dots s_{f-1}!X^{p-1-s_0+p-1-s_1+\dots+p-1-s_{f-1}} * .$$

On obtient ainsi un certain (φ, Γ) -module étale $M(D)$ (dépendant de D) et l'on peut calculer la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ qui lui correspond. Le théorème suivant est le résultat principal de l'article.

THÉORÈME 1.1 (cor. 5.4): *Soit ρ une représentation générique semi-simple de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, D un diagramme de Diamond associé, $M(D)$ le (φ, Γ) -module étale associé à D par la recette ci-dessus et $V(M(D))$ la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ correspondant à $M(D)$. On a :*

$$V(M(D))|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \simeq (\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1}))|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})}$$

où $\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})$ est l'induite tensorielle de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de $\rho \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}} (\det \rho)^{-1}$ et $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})$ le groupe d'inertie.

Notons que $\rho \otimes (\det \rho)^{-1}$ est isomorphe au dual de ρ . En général, $V(M(D))$ n'est pas isomorphe à $\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})$ (il faut vraiment prendre la restriction à l'inertie). Néanmoins, cela est vrai pour certains des diagrammes de

Diamond D associés à ρ et permet de faire une première sélection parmi les D : voir §6, en particulier le théorème 6.4. Mais cela n'est pas encore suffisant pour permettre d'isoler un diagramme unique pour un ρ fixé.

Le plan de l'article est le suivant : après quelques rappels concernant les diagrammes de Diamond et les (φ, Γ) -modules en caractéristique p aux §§2 et 3, on introduit au §4 une catégorie de diagrammes appelés "fortement principaux" auxquels on peut attacher de manière formelle des (φ, Γ) -modules étales par la recette (3). Au §5, on considère le cas particulier des diagrammes de Diamond lorsque ρ est générique semi-simple (qui sont fortement principaux) et on montre le théorème 1.1. Au §6, on montre une condition suffisante sur un diagramme de Diamond D associé à ρ pour que $V(M(D))$ soit exactement $\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})$. Enfin, au §7, on rappelle et montre un théorème de Stickelberger sur la trace de \mathbb{F}_{p^f} à \mathbb{F}_p qui, avec ce qui précède, suggère comment retrouver peut-être les (φ, Γ) -modules $M(D)$ par un vrai foncteur généralisant celui de [9].

Introduisons maintenant les principales autres notations de cet article.

Si $d \geq 1$ est un entier, on note \mathbb{Q}_{p^d} l'extension non-ramifiée de \mathbb{Q}_p de degré d . On note \mathcal{O}_F les entiers de $F = \mathbb{Q}_{p^f}$ et $q \stackrel{\text{d\'ef}}{=} p^f$. On note $K \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, $I \subset K$ le sous-groupe d'Iwahori et $I_1 \subset I$ (resp. $K_1 \subset K$) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. égales à l'identité) modulo p . On désigne par Π la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \overline{\mathbb{F}_p}$ le corps des coefficients (à ne pas confondre avec le $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$) et on fixe un plongement $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$ qui sera tacite dans tout l'article.

Si $\chi : I \rightarrow E^\times$ est un caractère, on note $\chi^s \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \chi(\Pi \cdot \Pi^{-1})$. On note $\alpha : I \rightarrow E^\times$ le caractère envoyant $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$ sur \overline{ad}^{-1} via le plongement précédent (où \overline{x} est la réduction modulo p de x). Si $x \in E^\times$, on note μ_x le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_{p^d}^\times$ envoyant p sur x .

Si σ est une représentation irréductible de K sur E et χ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1} supposé tel que $\chi \neq \chi^s$, on note $\sigma^{[s]}$ l'unique représentation irréductible de K sur E telle que I agit sur $(\sigma^{[s]})^{I_1}$ par χ^s . On note $\text{ind}_I^K \chi$ la E -représentation des fonctions $f : K \rightarrow E$ telles que $f(ik) = \chi(i)f(k)$ ($i \in I, k \in K$) avec action à gauche de K par $(kf)(k') = f(k'k)$.

On normalise l'inverse de l'application de réciprocité locale de telle sorte que p s'envoie sur un Frobenius géométrique.

On note Frob le Frobenius arithmétique absolu de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire l'automorphisme envoyant $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$ sur x^p . Si $d \geq 1$ est un entier, μ_x peut se voir comme le caractère non-ramifié de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ envoyant le Frobenius géométrique Frob^{-d} de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^d})$ sur $x \in E^\times$.

Pour $d \geq 1$, on note $\omega_d : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d}) \rightarrow E^\times$ le caractère envoyant g sur $\frac{g^{(p^d - \sqrt[d]{-p})}}{p^d - \sqrt[d]{-p}} \in \mathbb{F}_{p^d} \hookrightarrow E$. Lorsque $d = 1$, ω_1 s'identifie au caractère cyclotomique modulo p et on le note ω . Lorsque $d > 1$, ω_d dépend du choix d'un plongement $\mathbb{F}_{p^d} \hookrightarrow E$, mais ω_d interviendra soit dans des induites, auquel cas ce choix n'a pas d'importance, soit pour d divisant f , auquel cas on choisit le plongement induit par le plongement déjà fixé $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$. On a $\omega_d(p) = 1$ via la réciprocité locale.

Si ρ est une représentation continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie, on note enfin $\text{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\mathbb{Q}_p} \rho$ l'induite classique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de ρ et $\text{ind}_{\mathbb{Q}_{p^d}}^{\otimes \mathbb{Q}_p} \rho$ son induite tensorielle ([8]).

2. Rappels sur les diagrammes et les diagrammes de Diamond

On rappelle la définition des diagrammes ([14]) et des diagrammes de Diamond ([6]).

On désigne par N le normalisateur de I dans $\text{GL}_2(F)$, i.e. le sous-groupe engendré par I et la matrice Π .

Définition 2.1: On appelle diagramme un triplet (D_0, D_1, r) où D_0 est une représentation de KF^\times de dimension finie sur E telle que K_1 agit trivialement, D_1 une représentation de N sur E et $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ une injection IF^\times -équivariante qui induit un isomorphisme $D_1 \xrightarrow{\sim} D_0^{I_1} \hookrightarrow D_0$.

Ce que l'on appelle diagramme ici est en fait un cas particulier des "diagrammes fondamentaux" ("basic diagrams") de [6]. Comme nous n'utilisons pas d'autres diagrammes, nous avons préféré alléger la terminologie. Notons que D_0 est en fait une $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ représentation puisque K_1 agit trivialement.

Les diagrammes forment une catégorie additive (non-abélienne) en un sens évident. Des exemples aussi simples qu'importants de diagrammes sont donnés par les triplets $(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$ où π est une représentation lisse admissible de $\text{GL}_2(F)$ sur E et $\text{can} : \pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{K_1}$ l'inclusion canonique. Il faut comprendre

les diagrammes comme une version “enrichie” des modules de Hecke sur $E[I_1 \backslash \text{GL}_2(F)/I_1]$ (donnés par π^{I_1}) considérés par exemple dans [16].

Un aspect surprenant (et troublant) est que, lorsque $f > 1$, il y a beaucoup plus de diagrammes que lorsque $f = 1$, voir [6]. En particulier, si $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \rightarrow \text{GL}_2(E)$ est une représentation générique (cf. ci-dessous) et si $f > 1$, on attache à ρ dans [6] une famille infinie de diagrammes, que nous rappelons maintenant.

Soit donc ρ une représentation continue générique de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur E . Quitte à tordre ρ par un caractère, on peut l'écrire sous l'une des formes suivantes (voir [6, §11]) :

- (i) $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
avec $0 \leq r_j \leq p-3$ et $(r_j) \notin \{(0, \dots, 0), (p-3, \dots, p-3)\}$,
- (ii) $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q \sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} \end{pmatrix}$
avec $1 \leq r_0 \leq p-2$ et $0 \leq r_j \leq p-3, j > 0$,

avec de plus

$$\det(\rho) = \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j}$$

(notons que cela entraîne $p > 2$). À $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})}$ est associé dans [7] un ensemble de “poids”, c'est-à-dire de représentations irréductibles de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ - ou de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ - sur E , noté $\mathcal{D}(\rho)$. On associe alors une famille de diagrammes $D = (D_0, D_1, r)$ à ρ comme suit ([6]) :

- (i) D_0 est la plus grande représentation de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur E (pour l'inclusion) telle que $\text{soc } D_0 = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$ et telle que chaque $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ n'apparaît qu'une fois dans D_0 ,
- (ii) D_1 est l'unique représentation de N sur $D_0^{I_1}$ qui étend l'action de I ,
- (iii) $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ est une injection I -équivariante arbitraire.

En faisant agir $p \in F^\times$ trivialement (notons que p agit trivialement sur $\det(\rho)$ via la réciprocité locale), on obtient ainsi une famille de diagrammes au sens de la définition 2.1. De plus, on peut montrer que tous les facteurs de Jordan-Hölder de D_0 (et pas seulement ceux de son socle) apparaissent avec multiplicité 1 dans D_0 ([6, §13]) et que la représentation D_0 se décompose en une somme

directe :

$$(4) \quad D_0 = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} D_{0,\sigma}$$

où $\text{soc } D_{0,\sigma} = \sigma$.

Nous aurons besoin de la description explicite de $\mathcal{D}(\rho)$ lorsque ρ est semi-simple.

Soit (x_0, \dots, x_{f-1}) f variables (formelles). On définit d'abord deux ensembles $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ et $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ de f -uplets $\lambda = (\lambda_0(x_0), \dots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$ où $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$. On convient que $x_f = x_0$ et $\lambda_f(x_f) = \lambda_0(x_0)$ dans ce qui suit.

Si $f = 1$, $\mathcal{RD}(x_0) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x_0, p - 3 - x_0\}$ et $\mathcal{ID}(x_0) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x_0, p - 1 - x_0\}$.

Si $f > 1$, $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :

- (i) $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1, p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$,
- (ii) si $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$ alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p - 2 - x_{i+1}\}$,
- (iii) si $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$ alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p - 3 - x_{i+1}, x_{i+1} + 1\}$.

Si $f > 1$, $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ est l'ensemble des λ tels que :

- (i) si $0 < i$, $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1, p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1, p - 2 - x_0, p - 1 - x_0\}$),
- (ii) si $0 < i$ et $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$ (resp. $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1\}$), alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p - 2 - x_{i+1}\}$,
- (iii) si $0 < i < f - 1$ et $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$, alors $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p - 3 - x_{i+1}, x_{i+1} + 1\}$,
- (iv) si $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, p - 2 - x_0\}$, alors $\lambda_1(x_1) \in \{p - 3 - x_1, x_1 + 1\}$,
- (v) si $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{p - 2 - x_{f-1}, p - 3 - x_{f-1}\}$, alors $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0 - 1\}$.

L'ensemble $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ (resp. $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$) peut s'identifier à l'ensemble des parties J de $\{0, \dots, f - 1\}$ comme suit : $j \in J$ si et seulement si $\lambda_j(x_j) \in \{p - 2 - x_j, p - 3 - x_j\}$ (resp. si $j > 0$, $j \in J$ si et seulement si $\lambda_j(x_j) \in \{p - 2 - x_j, p - 3 - x_j\}$ et $0 \in J$ si et seulement si $\lambda_0(x_0) \in \{p - 2 - x_0, p - 1 - x_0\}$). Notons que, pour des raisons pratiques, ces identifications ne sont pas exactement les mêmes que celles choisies dans [6, §11].

Pour $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ou $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ on pose :

$$e(\lambda) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i)) \right) \text{ si } f-1 \notin J,$$

$$e(\lambda) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{2} \left(p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i)) \right) \text{ sinon.}$$

Si s_0, \dots, s_{f-1} sont f entiers dans $\{0, \dots, p-1\}$, on note (s_0, \dots, s_{f-1}) la repr\u00e9sentation irr\u00e9ductible de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$:

$$(\text{Sym}^{s_0} E^2) \otimes_E (\text{Sym}^{s_1} E^2)^{\text{Frob}} \otimes_E \dots \otimes_E (\text{Sym}^{s_{f-1}} E^2)^{\text{Frob}^{f-1}}$$

o\u00f9 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ agit sur $(\text{Sym}^{s_j} E^2)^{\text{Frob}^j}$ via $\begin{pmatrix} a^{p^j} & b^{p^j} \\ c^{p^j} & d^{p^j} \end{pmatrix}$ puis le plongement fix\u00e9 $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$.

Soit maintenant ρ g\u00e9n\u00e9rique semi-simple de dimension 2. Si ρ est comme dans (i) (avec $*$ = 0), on a :

$$\mathcal{D}(\rho) = \{(\lambda_0(r_0), \dots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})}, \lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})\}$$

et si ρ est comme dans (ii) on a :

$$\mathcal{D}(\rho) = \{(\lambda_0(r_0), \dots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})}, \lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})\}.$$

De plus, deux λ diff\u00e9rents donnent deux poids diff\u00e9rents de sorte que $\mathcal{D}(\rho)$ s'identifie aussi \u00e0 l'ensemble des parties de $\{0, \dots, f-1\}$ via le λ correspondant.

Il existe une autre d\u00e9finition plus conceptuelle de $\mathcal{D}(\rho)$ (d'o\u00f9 se d\u00e9duit la description technique ci-dessus) que nous n'utiliserons pas (cf. [7]).

3. Rappels sur les (φ, Γ) -modules en caract\u00e9ristique p

On rappelle la d\u00e9finition des (φ, Γ) -modules ([11]) en caract\u00e9ristique p et quelques unes de leurs propri\u00e9t\u00e9s.

On fixe $d \geq 1$ et on choisit un plongement $\mathbb{F}_{p^d} \hookrightarrow E$ (dans les applications, soit d sera un diviseur de f de sorte qu'un tel plongement est induit par le plongement fix\u00e9 $\mathbb{F}_q \hookrightarrow E$, soit le r\u00e9sultat sera ind\u00e9pendant du choix de ce plongement). Soit $\Gamma \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^d}(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_{p^d}) \simeq \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p)$ qui s'identifie \u00e0 \mathbb{Z}_p^\times par le caract\u00e8re cyclotomique p -adique ε .

D\u00e9finition 3.1: Un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_{p^d} est un $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ -module de type fini M muni d'un endomorphisme E -lin\u00e9aire φ et d'une action $\mathbb{F}_{p^d} \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ -lin\u00e9aire continue de Γ tels que :

- (i) $\varphi((aX^j \otimes b)v) = (a^p X^{pj} \otimes b)\varphi(v)$ si $v \in M$, $a \in \mathbb{F}_{p^d}$ et $b \in E$
- (ii) $\gamma((aX^j \otimes b)v) = (a((1 + X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1)^j \otimes b)\gamma(v)$ si $\gamma \in \Gamma$ et $v \in M$
- (iii) $\varphi \circ \gamma = \gamma \circ \varphi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

On dit que l'action de φ (resp. de Γ) est semi-linéaire. Les (φ, Γ) -modules pour \mathbb{Q}_{p^d} forment une catégorie abélienne en un sens évident. Notons qu'un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_p est simplement un $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un φ et d'une action de Γ comme ci-dessus. Un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_{p^d} peut toujours se réaliser sur $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ où \mathbb{F} est un corps fini contenu dans E .

Remarque 3.2: Les (φ, Γ) -modules sont d'habitude notés D . Nous adoptons la notation M car D désigne ici un diagramme.

L'isomorphisme :

$$\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E \simeq (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)^d, \quad aX^j \otimes b \mapsto (abX^j, a^{p^{-1}}bX^j, \dots, a^{p^{1-d}}bX^j)$$

fait que l'on peut écrire un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_{p^d} sous la forme $M = M^0 \times M^1 \times \dots \times M^{d-1}$ où M^j est un $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ -espace vectoriel de dimension finie, φ envoie circulairement M^j dans M^{j+1} et Γ préserve les M^j .

Un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_{p^d} M est dit étale si $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$. De manière équivalente, on a un isomorphisme $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ -linéaire (avec des notations évidentes) :

$$\text{Id} \otimes \varphi : (\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_{\varphi, \mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E} M \xrightarrow{\sim} M.$$

On vérifie facilement que cela entraîne que tous les M^j sont de même dimension sur $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$. En particulier M est alors libre de rang fini sur $\mathbb{F}_{p^d}((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$.

Le résultat principal de la théorie est le théorème suivant (en se rappelant qu'une représentation galoisienne sur E peut toujours se réaliser sur un corps fini contenu dans E).

THÉORÈME 3.3 ([11]): *La catégorie des (φ, Γ) -modules étales pour \mathbb{Q}_{p^d} est équivalente à la catégorie des représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur des E -espaces vectoriels de dimension finie.*

On note $M \mapsto V(M)$ le foncteur covariant associant une représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ à un (φ, Γ) -module étale. Il est exact et compatible aux sommes directes et aux produits tensoriels. On n'aura pas besoin ici de la description explicite de ce foncteur (voir e.g. [11] ou [9]).

Rappelons maintenant sans preuve quelques propriétés élémentaires (et bien connues) du foncteur V .

LEMME 3.4: *Soit ρ une représentation non-ramifiée de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie V . Le (φ, Γ) -module étale associé à ρ a la forme :*

$$M = ((\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V) \times \cdots \times ((\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V)$$

où $(s^j \in \mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E, v^j \in V)$:

$$\begin{aligned} &\varphi(s^0 \otimes v^0, \dots, s^{d-1} \otimes v^{d-1}) \\ &= \left(\varphi(s_{d-1}) \otimes \rho(\text{Frob}^{-d})(v^{d-1}), \varphi(s^0) \otimes v^0, \dots, \varphi(s^{d-2}) \otimes v^{d-2} \right) \end{aligned}$$

en notant encore Frob^{-d} un relevé dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ du Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^d})$ et où l'action de γ est l'action usuelle sur $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ et triviale sur V .

PROPOSITION 3.5: *Soit s un entier positif ou nul. Le (φ, Γ) -module étale associé à ω_d^{ps} a la forme :*

$$M = (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^0 \times (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^1 \times \cdots \times (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^{d-1}$$

où :

$$\begin{aligned} \varphi(F^j) &= F^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d-2, \\ \varphi(F^{d-1}) &= \frac{1}{X^{s(p-1)}} F^0 \end{aligned}$$

et où pour $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma(F^j) = \left(\frac{\omega(\gamma)X}{\gamma(X)} \right)^{s \frac{p^j(p-1)}{p^{d-1}}} F^j, \quad 0 \leq j \leq d-1.$$

Démonstration. Cela se déduit de [3, §2.1]. ■

L'action de Γ dans le lemme 3.5 peut se décrire plus simplement comme l'unique action semi-linéaire de Γ commutant à φ et telle que $\gamma(F^j) - F^j \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)F^j$ pour tout j .

LEMME 3.6: *Soit ρ une représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^d})$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie et $M = M^0 \times M^1 \times \cdots \times M^{d-1}$ son (φ, Γ) -module étale associé. Soit $(F_k^0)_{1 \leq k \leq t}$ une base de M^0 sur $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ et $F_k^j \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \varphi^j(F_k^0)$,*

$1 \leq j \leq d - 1$. Le (φ, Γ) -module étale pour \mathbb{Q}_p associé à $\text{ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_p} \rho$ a la forme $\bigoplus_{j=0}^{d-1} \left(\bigoplus_{k=1}^t (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) F_k^j \right)$ où, pour $1 \leq k \leq t$:

$$\begin{aligned} \varphi(F_k^j) &= F_k^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d - 2, \\ \varphi(F_k^{d-1}) &= \varphi^d(F_k^0) \end{aligned}$$

et où l'action de Γ sur les F_k^j provient de celle sur M .

Nous utiliserons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.7: Soit ρ une représentation non-ramifiée de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie $V = \bigoplus_{k=1}^t E F_k^0$ et soit s un entier positif ou nul. Le (φ, Γ) -module étale pour \mathbb{Q}_p associé à $\text{ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_d^s \otimes_E \rho)$ a la forme $\bigoplus_{j=0}^{d-1} \left(\bigoplus_{k=1}^t (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) F_k^j \right)$ où, pour $1 \leq k \leq t$:

$$\begin{aligned} \varphi(F_k^j) &= F_k^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d - 2, \\ \varphi(F_k^{d-1}) &= \frac{1}{X^{s(p-1)}} \rho(\text{Frob}^{-d})(F_k^0) \end{aligned}$$

en notant encore Frob^{-d} un relevé dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ du Frobenius géométrique et où pour $\gamma \in \Gamma$:

$$\gamma(F_k^j) = \left(\frac{\omega(\gamma)X}{\gamma(X)} \right)^{s \frac{p^j(p-1)}{p^d-1}} F_k^j, \quad 1 \leq k \leq t, \quad 0 \leq j \leq d - 1.$$

Démonstration. Le (φ, Γ) -module étale pour \mathbb{Q}_p associé à $\omega_d^{ps} \otimes_E \rho$ est le produit tensoriel (sur $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$) des (φ, Γ) -modules associés à ω_d^{ps} et ρ . Le résultat découle donc des lemmes 3.4, 3.6 et de la proposition 3.5 en remarquant que l'induite $\text{ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_d^{ps} \otimes_E \rho)$ est isomorphe à l'induite $\text{ind}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_d^s \otimes_E \rho)$ puisque ρ est non-ramifiée. ■

L'action de Γ dans le corollaire 3.7 est aussi l'unique action semi-linéaire commutant à φ et telle que $\gamma(F_k^j) - F_k^j \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E) F_k^j$ pour tout k, j .

4. Diagrammes fortement principaux et (φ, Γ) -modules

On associe des (φ, Γ) -modules étales pour \mathbb{Q}_p à certains diagrammes (§2).

Pour $0 \leq s \leq q - 1$, on pose (en convenant que $0^0 = 1$) :

$$S_s \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E[\text{GL}_2(F)].$$

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme. Rappelons que $\text{soc } D_0$ désigne le socle de la $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ -représentation D_0 .

LEMME 4.1: *Soit $v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$ un vecteur propre sous l'action de I . Il existe un entier s dans $\{0, \dots, q - 1\}$ tel que $S_s v \neq 0$ et $S_s v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$.*

Démonstration. Soit χ le caractère de I donnant son action sur Ev . Par réciprocity de Frobenius, la sous- K -représentation $\langle K\Pi v \rangle$ de D_0 engendrée par v est un quotient de l'induite $\text{ind}_I^K \chi^s$. Soit τ une représentation irréductible de K apparaissant dans le K -socle de $\langle K\Pi v \rangle$, donc aussi dans le K -socle de $\text{soc } D_0$. Par [6, Lem. 2.6, Lem. 2.7] il existe $s \in \{0, \dots, q - 1\}$ tel que :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi v$$

est un vecteur propre sous I dans τ . ■

Notons qu'un entier s comme dans le lemme 4.1 n'est en général pas unique pour un v non-nul donné.

Définition 4.2: On dit qu'un diagramme $D = (D_0, D_1, r)$ est principal si :

- (i) pour tout $v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$ vecteur propre de I il existe un unique $s(v) \in \{0, \dots, q - 1\}$ tel que $S_{s(v)} v \neq 0$ et $S_{s(v)} v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$,
- (ii) la fonction $v \mapsto s(v)$ est constante sur chaque sous-espace isotypique (pour I) de $(\text{soc } D_0)^{I_1}$.

Nous verrons que les diagrammes de Diamond sont principaux. Notons que si D et D' sont principaux, il n'en est pas obligatoirement de même pour $D \oplus D'$.

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme principal. Pour $\chi : I \rightarrow E^\times$ un caractère de I on note $V_\chi \subseteq (\text{soc } D_0)^{I_1}$ le sous-espace isotypique associé. Si $v \in V_\chi$, $s(v)$ ne dépend que de χ par hypothèse et on le note $s(\chi)$. L'application $S_{s(\chi)}$ envoie V_χ dans $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$ et définit une application E -linéaire $S : (\text{soc } D_0)^{I_1} \rightarrow (\text{soc } D_0)^{I_1}$ (rappelons que $(\text{soc } D_0)^{I_1} = \bigoplus_\chi V_\chi$).

Définition 4.3: On dit qu'un diagramme est fortement principal s'il est principal et si l'application S est un isomorphisme.

Nous verrons que les diagrammes de Diamond associés aux représentations génériques semi-simples de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (de dimension 2) sont fortement principaux (proposition 5.1).

On note dans la suite $S(\chi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \chi\alpha^{-s(\chi)}$ de sorte que $S : V_\chi \rightarrow V_{S(\chi)}$.

LEMME 4.4: Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal.

- (i) Pour tout χ l'application S induit un isomorphisme $S|_{V_\chi} : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$.
- (ii) Il existe un entier $n \geq 1$, des caract\u00e8res distincts χ_1, \dots, χ_n de I et des entiers $d_1 \geq 1, \dots, d_n \geq 1$ tels que, pour tout i , $S^j(\chi_i) \neq \chi_i$, $1 \leq j \leq d_i - 1$, $S^{d_i}(\chi_i) = \chi_i$ et tels que l'on ait un isomorphisme de I -repr\u00e9sentations :

$$(\text{soc } D_0)^{I_1} \simeq \bigoplus_{i=1}^n (V_{\chi_i} \oplus V_{S(\chi_i)} \oplus \dots \oplus V_{S^{d_i-1}(\chi_i)}).$$

D\u00e9monstration. (i) Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de caract\u00e8res de I \u00e0 valeurs dans E , il existe un plus petit entier $d \geq 1$ tel que $S^d(\chi) = S^{d'}(\chi)$ avec $0 \leq d' \leq d - 1$. Comme S est injectif par hypoth\u00e8se, les espaces $V_{S^j(\chi)}$ pour $d' \leq j \leq d - 1$ ont m\u00eame dimension. Si $d' > 0$, on a d'une part $S : V_{S^{d'-1}(\chi)} \hookrightarrow V_{S^{d'}(\chi)}$ et d'autre part $S : V_{S^{d-1}(\chi)} \xrightarrow{\sim} V_{S^{d'}(\chi)}$ ce qui est impossible puisque $S^{d-1}(\chi) \neq S^{d'}(\chi)$ et S est un isomorphisme. On a donc forc\u00e9ment $d' = 0$ i.e. $S^d(\chi) = \chi$. En particulier $V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$.

- (ii) Cela se d\u00e9duit ais\u00e9ment de la preuve du (i). ■

Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal. On munit le dual $((\text{soc } D_0)^{I_1})^*$ de l'action \u00e0 gauche de I donn\u00e9e par $hf(v) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f(h^{-1}v)$ si $f \in ((\text{soc } D_0)^{I_1})^*$, $v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$, $h \in I$. On pose :

$$M(D) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E ((\text{soc } D_0)^{I_1})^*.$$

Si χ est un caract\u00e8re de I tel que $V_\chi \neq 0$, on \u00e9crit $s(\chi) = \sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j$ avec $s_j \in \{0, \dots, p - 1\}$. On pose :

$$(5) \quad c(\chi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \prod_{i=0}^{f-1} s_i! \in E^\times$$

et, pour tout $f \in V_\chi^* \subseteq ((\text{soc } D_0)^{I_1})^*$:

$$(6) \quad \varphi(1 \otimes f) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} c(\chi) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes f \circ S^{-1}.$$

On voit que $\varphi(1 \otimes f) \in (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V_{S(\chi)}^* \subseteq M(D)$ si $f \in V_\chi^*$. On \u00e9tend φ \u00e0 tout $M(D)$ par semi-l\u00e9arit\u00e9 : $\varphi(y \otimes f) = \varphi(y)\varphi(f)$ et $\varphi(1 \otimes (f + g)) = \varphi(1 \otimes f) + \varphi(1 \otimes g)$. Cela est possible par le (i) du lemme 4.4.

On note dans la suite $|s(\chi)| \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{j=0}^{f-1} s_j$ et $\overline{\varphi}(f) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} c(\chi)f \circ S^{-1}$. Ainsi (6) se r\u00e9crit :

$$\varphi(1 \otimes f) = X^{f(p-1)-|s(\chi)|} \otimes \overline{\varphi}(f), \quad f \in V_\chi^*.$$

Passons maintenant \u00e0 l'action de Γ .

LEMME 4.5: *Soit $D = (D_0, D_1, r)$ un diagramme fortement principal. Il existe une unique action de $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ sur $M(D)$ semi-lin\u00e9aire (cf. \u00a73) et commutant avec φ telle que pour tout $f \in ((\text{soc } D_0)^{I_1})^*$ vecteur propre pour I et tout $\gamma \in \Gamma$:*

$$(7) \quad \gamma(1 \otimes f) - 1 \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes f.$$

Cette action est de plus continue.

D\u00e9monstration. Si $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, notons γ_a l'\u00e9l\u00e9ment de Γ associ\u00e9. L'\u00e9galit\u00e9 (7) est \u00e9quivalente \u00e0 :

$$\gamma_a(1 \otimes f) = U_{a,f} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$$

avec $U_{a,f} \in 1 + X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$. De plus, si $\lambda \in E$ et g est dans le m\u00eame espace isotypique (pour I) que f , les \u00e9galit\u00e9s $\gamma_a(1 \otimes \lambda f) = \lambda \gamma_a(1 \otimes f)$ et $\gamma_a(1 \otimes (f+g)) = \gamma_a(1 \otimes f) + \gamma_a(1 \otimes g)$ impliquent $U_{a,\lambda f} = U_{a,f} = U_{a,g} = U_{a,f+g}$. Un calcul facile donne si $v \in V_\chi$ et $a \in \mathbb{Z}_p^\times$:

$$S^{-1} \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \right) = \overline{a}^{s(\chi)} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}v = \overline{a}^{s(\chi)} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}v$$

(o\u00f9 \overline{a} est l'image de a dans E^\times) de sorte que si $f \in V_\chi^*$:

$$\begin{aligned} & \gamma_a(\varphi(1 \otimes f)) \\ &= c(\chi)U_{a,f \circ S^{-1}}\gamma_a(X)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}) \\ &= c(\chi)U_{a,f \circ S^{-1}}\overline{a}^{|s(\chi)|}\gamma_a(X)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right) \circ S^{-1} \\ &= c(\chi)U_{a,f \circ S^{-1}} \left(\frac{\gamma_a(X)}{\overline{a}X} \right)^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right) \circ S^{-1}. \end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi(\gamma_a(1 \otimes f)) = c(\chi)\varphi(U_{a,f})X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} \otimes \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right) \circ S^{-1},$$

on voit que l'égalité $\gamma_a \circ \varphi = \varphi \circ \gamma_a$ est équivalente à :

$$(8) \quad U_{a, f \circ S^{-1}} = \left(\frac{\overline{\alpha}X}{\gamma_a(X)} \right)^{f(p-1)-|s(\chi)|} \varphi(U_{a, f})$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, tout $\chi : I \rightarrow E^\times$ et tout $f \in V_\chi^*$. Montrons que cela détermine uniquement les unités $U_{a, f}$. Si $f \in V_\chi^*$, $U_{a, f}$ ne dépend que de χ (cf. début de la preuve) et on le note $U_{a, \chi}$. Soit d tel que $S^d(\chi) = \chi$ (cf. lemme 4.4) de sorte que $\overline{\varphi}^d|_{V_\chi^*}$ est un automorphisme E -linéaire de V_χ^* . Soit $f \in V_\chi^*$ un vecteur propre de $\overline{\varphi}^d$. Itérant (8), on obtient $U_{a, \overline{\varphi}^d(f)} = U_{a, \chi} = V_{a, \chi} \varphi^d(U_{a, \chi})$ où $V_{a, \chi} \in 1 + X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$ est une puissance entière de $\frac{\overline{\alpha}X}{\gamma_a(X)}$. Cela entraîne :

$$(9) \quad U_{a, \chi} = \prod_{m=0}^{+\infty} \varphi^{md}(V_{a, \chi}) \in 1 + X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$$

et on voit que les unités $U_{a, \chi}$ sont complètement déterminées. Cela montre l'unicité d'une action de Γ satisfaisant (7). L'existence consiste à vérifier que $\gamma_a(1 \otimes f) \stackrel{\text{déf}}{=} U_{a, \chi} \otimes \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$ avec $f \in V_\chi^*$ et $U_{a, \chi}$ comme en (9) commute à φ , ce qui revient finalement à "remonter" les calculs précédents. Les détails ainsi que la continuité de l'action sont laissés au lecteur intéressé. ■

On note encore $M(D)$ le (φ, Γ) -module étale pour \mathbb{Q}_p donné par le lemme 4.5.

Remarque 4.6: La construction du (φ, Γ) -module $M(D)$ n'utilise pas tout le diagramme D mais seulement la donnée de la I/I_1 -représentation $V \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{soc } D_0)^{I_1}$, des entiers $s(\chi)$ et de l'isomorphisme $S : V \xrightarrow{\sim} V$ envoyant V_χ sur $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$. On pourrait donc associer par exactement la même recette un (φ, Γ) -module à un triplet $(V, (s(\chi))_\chi, S)$ où V est un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action E -linéaire de I/I_1 , $s(\chi)$ un entier dans $\{0, \dots, q - 1\}$ pour chaque caractère $\chi : I/I_1 \rightarrow E^\times$ apparaissant sur V et $S : V \xrightarrow{\sim} V$ une bijection E -linéaire envoyant le sous-espace isotypique V_χ sur le sous-espace isotypique $V_{\chi\alpha^{-s(\chi)}}$. Néanmoins, ces structures n'ayant pas dans cet article d'intérêt propre en dehors des diagrammes, nous avons préféré ne pas les introduire.

La proposition suivante décrit la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondant au (φ, Γ) -module $M(D)$.

PROPOSITION 4.7: *Soit D un diagramme fortement principal, $n, \chi_1, \dots, \chi_n, d_1, \dots, d_n$ comme au lemme 4.4, $M(D)$ le (φ, Γ) -module étale associé et*

$V(M(D))$ la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondante (cf. §3). On définit pour $1 \leq i \leq n$:

$$c_i \in \{1, \dots, q-1\} \text{ tel que } \chi_i \left(\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda^{c_i} \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}_q^\times$$

$$(10) \quad s_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j} |s(S^j(\chi_i))|$$

et on note ρ_i la représentation non-ramifiée de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{d_i}})$ sur le E -espace vectoriel $V_{\chi_i}^*$ envoyant le Frobenius géométrique de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^{d_i}})$ sur $\overline{\varphi}^{d_i}|_{V_{\chi_i}^*}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, s_i est un entier et on a :

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_{d_i}^{s_i} \otimes_E \rho_i) \otimes \omega^{-(c_i+f)}$$

Démonstration. Puisque $S^j(\chi_i) = \chi_i \alpha^{-\sum_{j'=0}^{j-1} s(S^{j'}(\chi_i))}$ pour $1 \leq j \leq d_i$, on a $S^{d_i}(\chi_i) = \chi_i = \chi_i \alpha^{-\sum_{j=0}^{d_i-1} s(S^j(\chi_i))}$ et donc $\sum_{j=0}^{d_i-1} s(S^j(\chi_i))$ est divisible par $q-1$, donc par $p-1$. Puisque $s(S^j(\chi_i)) - |s(S^j(\chi_i))|$ est divisible par $p-1$, on en déduit que $\sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j} |s(S^j(\chi_i))|$ l'est aussi et donc que s_i est un entier. Puisque $\overline{\varphi}$ préserve $\bigoplus_{j=0}^{d_i-1} V_{S^j(\chi_i)}^*$, on déduit de la définition de φ (et du lemme 4.5) que :

$$M(D) = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

où $M_i \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{j=0}^{d_i-1} (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) \otimes_E V_{S^j(\chi_i)}^*$ est un (φ, Γ) -module facteur direct de $M(D)$. Il suffit donc de vérifier que $V(M_i) = \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_{d_i}^{s_i} \otimes_E \rho_i) \otimes \omega^{-(c_i+f)}$. Soit t_i la dimension de V_{χ_i} et $(f_k)_{1 \leq k \leq t_i}$ une base de $V_{\chi_i}^*$. On peut voir ρ_i comme la représentation non-ramifiée de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p^{d_i}})$ sur $\bigoplus_{k=1}^{t_i} E \frac{1}{X^f} \otimes f_k$ envoyant le Frobenius géométrique Frob^{-d_i} sur $(\frac{1}{X^f} \otimes f_k \mapsto \frac{1}{X^f} \otimes \overline{\varphi}^{d_i}(f_k))_{1 \leq k \leq t_i}$. Pour $1 \leq k \leq t_i$ posons $F_k^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{X^f} \otimes f_k$ et pour $1 \leq j \leq d_i - 1$:

$$F_k^j \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{X^{\sum_{j'=0}^{j-1} p^{j-1-j'} |s(S^{j'}(\chi_i))|}} \left(\frac{1}{X^f} \otimes \overline{\varphi}^j(f_k) \right).$$

On a $M_i = \bigoplus_{j=0}^{d_i-1} (\bigoplus_{k=1}^{t_i} (\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E) F_k^j)$ et un calcul donne pour $1 \leq k \leq t_i$:

$$\begin{aligned} \varphi(F_k^j) &= F_k^{j+1}, \quad 0 \leq j \leq d_i - 2 \\ \varphi(F_k^{d_i-1}) &= \frac{1}{X^{s_i(p-1)}} \rho_i(\text{Frob}^{-d_i})(F_k^0). \end{aligned}$$

De plus, par le lemme 4.5 et un calcul facile, $\gamma \in \Gamma$ agit sur M_i de telle sorte que $\gamma(F_k^j) - \omega(\gamma)^{-(c_i+f)} F_k^j \in X(\mathbb{F}_p[[X]] \otimes_{\mathbb{F}_p} E) F_k^j$ pour tout k, j . Par le corollaire 3.7, on reconnaît exactement le (φ, Γ) -module de la représentation $\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} (\omega_{d_i}^{s_i} \otimes_E \rho_i) \otimes \omega^{-(c_i+f)}$. ■

Exemple 4.8: Considérons $F = \mathbb{Q}_p$ et $D = (D_0, D_1, r)$ tel que :

- $$\text{Sym}^{r_0} E^2 \text{ --- } \text{Sym}^{p-3-r_0} E^2 \otimes \det^{r_0+1}$$
- (i) $D_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus \text{Sym}^{p-1-r_0} E^2 \otimes \det^{r_0} \text{ --- } \text{Sym}^{r_0-2} E^2 \otimes \det$
 où $r_0 \in \{1, \dots, p-2\}$, où le symbole “---” désigne l’unique K -extension non-scindée entre les deux poids (qui est une $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ -extension) et où l’on ignore les poids qui n’ont aucun sens (e.g. Sym^{-1}),
- (ii) $D_1 \stackrel{\text{déf}}{=} D_0^{I_1} = (\text{soc } D_0)^{I_1} = Ex^{r_0} \oplus Ex^{p-1-r_0}$ avec $\Pi x^{r_0} \stackrel{\text{déf}}{=} x^{p-1-r_0}$ et $\Pi x^{p-1-r_0} \stackrel{\text{déf}}{=} x^{r_0}$ (si $r_0 = (p-1)/2$, le lecteur notera qu’il y a un léger abus de notation),
- (iii) $r : D_1 \hookrightarrow D_0$ est l’injection canonique.

Le diagramme D est l’unique diagramme associé à ρ générique irréductible telle que $\det(\rho) = \omega^{r_0+1}$ lorsque $f = 1$ (cf. §2). Il est fortement principal et l’application S est donnée par (cf. [6, Lem.2.7(i)] par exemple) :

$$\begin{aligned} Sx^{r_0} &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{r_0} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{r_0} = (-1)^{r_0+1} \Pi x^{r_0} = (-1)^{r_0+1} x^{p-1-r_0}, \\ Sx^{p-1-r_0} &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{p-1-r_0} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{p-1-r_0} = -\Pi x^{p-1-r_0} = -x^{r_0}, \end{aligned}$$

ce qui donne par (6) pour φ :

$$\begin{aligned} \varphi(1 \otimes (x^{r_0})^*) &= r_0! X^{p-1-r_0} \otimes (-1)^{r_0+1} (x^{p-1-r_0})^*, \\ \varphi(1 \otimes (x^{p-1-r_0})^*) &= (p-1-r_0)! X^{r_0} \otimes -(x^{r_0})^*, \end{aligned}$$

où $((x^{r_0})^*, (x^{p-1-r_0})^*)$ est la base duale de (x^{r_0}, x^{p-1-r_0}) . En posant $F^0 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} X^{-1} \otimes (x^{r_0})^*$ et $F^1 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} X^{-r_0}(X^{-1} \otimes (-1)^{r_0+1}r_0!(x^{p-1-r_0})^*)$, on retrouve :

$$\begin{aligned} \varphi(F^0) &= F^1, \\ \varphi(F^1) &= \frac{-1}{X^{(p-1)(r_0+1)}}F^0. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'action de Γ , on voit avec le corollaire 3.7 qu'il s'agit du (φ, Γ) -module de la représentation $(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^2}^{\mathbb{Q}_p}(\omega_2^{r_0+1} \otimes \mu_{-1})) \otimes \omega^{-(r_0+1)} = \rho \otimes (\det \rho)^{-1}$.

5. Diagrammes de Diamond et (φ, Γ) -modules

On montre le r\'esultat principal de l'article, c'est-à-dire le calcul de $V(M(D))$ lorsque D est un diagramme de Diamond associ\'e à une repr\'esentation g\'en\'erique semi-simple de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ (§2). Quitte à tordre ρ , on suppose ρ sous l'une des deux formes du §2.

On d\'efinit une application bijective $\delta_{\text{r\'ed}}$ (resp. δ_{irr}) de l'ensemble des parties J de $\{0, \dots, f-1\}$ dans lui-m\^eme comme suit (avec la convention $(f-1)+1 = 0$) : $j \in \delta_{\text{r\'ed}}(J)$ si et seulement si $j+1 \in J$ (resp. si $j < f-1, j \in \delta_{\text{irr}}(J)$ si et seulement si $j+1 \in J$ et $f-1 \in \delta_{\text{irr}}(J)$ si et seulement si $0 \notin J$). Autrement dit $\delta_{\text{r\'ed}}(J)$ est le translat\'e d'un cran à gauche de J dans $\{0, \dots, f-1\}$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(J)$ est le translat\'e d'un cran à gauche de J où l'on prend ensuite le "n\'egatif" sur $f-1$).

Si ρ est semi-simple g\'en\'erique r\'eductible (resp. irr\'eductible), on a identifi\'e $\mathcal{D}(\rho)$ à l'ensemble des parties de $\{0, \dots, f-1\}$ au §2 (notons au passage la petite diff\'erence avec [6, §15] sur la d\'efinition de $\delta_{\text{irr}}(J)$ venant du changement de convention sur cette identification, cf. §2). On peut donc \'egalement voir $\delta_{\text{r\'ed}}$ (resp. δ_{irr}) comme une application bijective de $\mathcal{D}(\rho)$ dans lui-m\^eme : si $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ correspond à $J \subseteq \{0, \dots, f-1\}$, $\delta_{\text{r\'ed}}(\sigma) \in \mathcal{D}(\rho)$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(\sigma) \in \mathcal{D}(\rho)$) correspond à $\delta_{\text{r\'ed}}(J)$ (resp. $\delta_{\text{irr}}(J)$).

PROPOSITION 5.1: *Soit ρ une repr\'esentation g\'en\'erique de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur E et D un diagramme de Diamond associ\'e.*

- (i) *Le diagramme D est principal.*
- (ii) *Si ρ est semi-simple, le diagramme D est fortement principal.*

Démonstration. (i) Soit $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$, il existe un unique $\tau \in \mathcal{D}(\rho)$ tel que $\sigma^{[s]}$ apparaît dans $D_{0,\tau}$ (cela découle de la décomposition (4) de D_0 et du fait que $\sigma^{[s]}$ n'apparaît qu'une seule fois dans D_0 , cf. §2). Si χ désigne l'action de I sur σ^{I_1} , $v \in \sigma^{I_1} = V_\chi$ et $\langle K\Pi v \rangle$ est la sous- K -représentation de D_0 engendrée par Πv , on voit donc que $\langle K\Pi v \rangle \subseteq D_{0,\tau}$ est l'unique quotient de $\text{ind}_I^K \chi^s$ de socle irréductible τ (cf. la preuve du lemme 4.1). Par [6, Lem. 2.7], il existe un unique $s \in \{0, \dots, q-1\}$ tel que $S_s v \neq 0$ et $S_s v \in (\text{soc } D_0)^{I_1}$ car on a alors $S_s v \in \text{soc} \langle K\Pi v \rangle = \tau$. Comme tous les V_χ ont dimension 1 dans le cas des diagrammes de Diamond, la propriété (ii) de la définition 4.2 est trivialement satisfaite.

(ii) Soit ρ semi-simple réductible (resp. irréductible) et $\sigma, \tau \in \mathcal{D}(\rho)$ comme au (i). On a dans ce cas $\tau = \delta_{\text{réd}}(\sigma)$ (resp. $\tau = \delta_{\text{irr}}(\sigma)$) par [6, Lem.15.2] (avec les notations de loc. cit., on vérifie en effet que $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}^- = \emptyset$). Si $\sigma^{I_1} = V_\chi$, alors $V_{S(\chi)} = \delta_{\text{réd}}(\sigma)^{I_1}$ (resp. $V_{S(\chi)} = \delta_{\text{irr}}(\sigma)^{I_1}$) et puisque tous ces espaces sont de dimension 1, on a $S|_{V_\chi} : V_\chi \xrightarrow{\sim} V_{S(\chi)}$. En écrivant l'ensemble $\mathcal{D}(\rho)$, comme la réunion disjointe des orbites de l'application $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}), on voit donc que $(\text{soc } D_0)^{I_1}$ s'écrit comme dans le (ii) du lemme 4.4. En particulier D est fortement principal. ■

Grâce à la proposition 5.1 et aux constructions du §4, si ρ est générique semi-simple et D un diagramme de Diamond associé alors on dispose d'un (φ, Γ) -module étale $M(D)$ (pour \mathbb{Q}_p). On va appliquer la proposition 4.7 pour expliciter $V(M(D))$, mais il faut encore quelques préliminaires. Jusqu'à la fin de cette section, on fixe ρ (générique semi-simple), D et $M(D)$ comme ci-dessus.

On peut identifier l'ensemble des parties J de $\{0, \dots, f-1\}$ avec l'ensemble des parties J' de $\{0, \dots, 2f-1\}$ vérifiant la condition : pour chaque $i \in \{0, \dots, f-1\}$, J' contient un et un seul des deux éléments $i, i+f$. On passe de J à J' par $J' = J \amalg \{f+j, j \in \overline{J}\}$ où \overline{J} est le complémentaire de J dans $\{0, \dots, f-1\}$ et de J' à J par $J = J' \cap \{0, \dots, f-1\}$. L'application δ_{irr} est alors simplement la composée : $J \mapsto J'$ suivi du décalage d'un cran à gauche de J' dans $\{0, \dots, 2f-1\}$ suivi de l'intersection avec $\{0, \dots, f-1\}$.

Si $J \subseteq \{0, \dots, f-1\}$, on note $d_{\text{réd}}(J)$ (resp. $d_{\text{irr}}(J)$) le plus petit entier ≥ 1 tel que $\delta_{\text{réd}}^{d_{\text{réd}}(J)}(J) = J$ (resp. $\delta_{\text{irr}}^{d_{\text{irr}}(J)}(J) = J$). Par ce qui précède, si $J' \subseteq \{0, \dots, 2f-1\}$ correspond à J , on voit que $d_{\text{irr}}(J)$ est aussi le plus petit entier $d \geq 1$ tel que J' est égal à son translaté de d crans à gauche. Si $J \subseteq \{0, \dots, f-1\}$

(resp. $J' \subseteq \{0, \dots, 2f - 1\}$), on note :

$$\iota(J) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f - 1 - j, j \in J\} \quad (\text{resp. } \iota(J') \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{2f - 1 - j, j \in J'\}).$$

Il est clair que $d_{\text{r\u00e9d}}(\iota(J)) = d_{\text{r\u00e9d}}(J)$ et que $d_{\text{irr}}(\iota(J') \cap \{0, \dots, f - 1\}) = d_{\text{irr}}(J)$.

LEMME 5.2: Soit $J \subseteq \{0, \dots, f - 1\}$ et $J' \subseteq \{0, \dots, 2f - 1\}$ le sous-ensemble correspondant, alors :

- (i) $d_{\text{r\u00e9d}}(J)$ divise f dans \mathbb{Z} (resp. $d_{\text{irr}}(J)$ divise $2f$ dans \mathbb{Z}),
- (ii) $\frac{p^f - 1}{p^{d_{\text{r\u00e9d}}(J)} - 1}$ divise $\sum_{j \in \iota(J)} p^j$ dans \mathbb{Z} et le quotient est $\sum_{\substack{j \in \iota(J) \\ j < d_{\text{r\u00e9d}}(J)}} p^j$ (resp. $\frac{p^{2f} - 1}{p^{d_{\text{irr}}(J)} - 1}$ divise $\sum_{j \in \iota(J')} p^j$ dans \mathbb{Z} est le quotient est $\sum_{\substack{j \in \iota(J') \\ j < d_{\text{irr}}(J)}} p^j$).

D\u00e9monstration. (i) Soit \mathfrak{S} le groupe des permutations de l'ensemble $\{0, \dots, f - 1\}$, $\sigma_{\text{r\u00e9d}} \in \mathfrak{S}$ l'\u00e9l\u00e9ment qui envoie $i > 0$ sur $i - 1$ et 0 sur $f - 1$ et \mathfrak{S}_J le stabilisateur de J . Alors $d_{\text{r\u00e9d}}(J)$ est le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma_{\text{r\u00e9d}}^{d_{\text{r\u00e9d}}(J)} \in \mathfrak{S}_J$. Mais si G est un groupe fini, $G' \subseteq G$ un sous-groupe et $g \in G$, le plus petit entier $d \geq 1$ tel que $g^d \in G'$ divise toujours l'ordre de g dans G . Comme l'ordre de $\sigma_{\text{r\u00e9d}}$ dans \mathfrak{S} est f , on en d\u00e9duit le r\u00e9sultat pour $d_{\text{r\u00e9d}}(J)$. Dans le cas irr\u00e9ductible, soit σ_{irr} la permutation de $\{0, \dots, 2f - 1\}$ envoyant $i > 0$ sur $i - 1$ et 0 sur $2f - 1$, alors $d_{\text{irr}}(J)$ est le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma_{\text{irr}}^{d_{\text{irr}}(J)}$ est dans le stabilisateur de J' . La preuve est ensuite la m\u00eame que la pr\u00e9c\u00e9dente en remarquant que l'ordre de la permutation σ_{irr} est $2f$.

(ii) Posons $d \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} d_{\text{r\u00e9d}}(J) = d_{\text{r\u00e9d}}(\iota(J))$ pour all\u00e9ger les notations. Par (i), notons que $X^d - 1$ divise $X^f - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Il suffit de montrer que $\sum_{j \in J} X^j = \frac{X^f - 1}{X^d - 1} (\sum_{\substack{j \in J \\ j < d}} X^j)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ puis de sp\u00e9cialiser en $X = p$ et de l'appliquer \u00e0 $\iota(J)$. Comme $\delta_{\text{r\u00e9d}}^d(J) = J$, on a dans $\mathbb{Z}[X]/(X^f - 1) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}]$:

$$(11) \quad \sum_{j \in J} X^j = \sum_{\substack{j \in J \\ j \geq d}} X^{j-d} + \sum_{\substack{j \in J \\ j < d}} X^{j+f-d}$$

qui est une \u00e9galit\u00e9 dans $\mathbb{Z}[X]$ puisque les puissances de X qui apparaissent sont toutes de degr\u00e9 $< f$. L'\u00e9galit\u00e9 (11) se r\u00e9crit en multipliant par X^d des deux c\u00f4t\u00e9s (dans $\mathbb{Z}[X]$) :

$$X^d \left(\sum_{j \in J} X^j \right) = \sum_{j \in J} X^j + (X^f - 1) \left(\sum_{\substack{j \in J \\ j < d}} X^j \right).$$

On a donc dans $\mathbb{Z}[X]$ puisque $X^d - 1$ divise $X^f - 1$:

$$\sum_{j \in J} X^j = \frac{X^f - 1}{X^d - 1} \left(\sum_{\substack{j \in J \\ j < d}} X^j \right)$$

d'où le résultat. La preuve dans le cas irréductible est la même en travaillant avec J' et dans $\mathbb{Z}[X]/(X^{2f} - 1) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2f\mathbb{Z}]$. ■

On note $n_{\text{réd}}$ (resp. n_{irr}) le nombre d'orbites de l'application $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) sur l'ensemble des parties de $\{0, \dots, f - 1\}$.

Rappelons que p agit sur $\det(\rho)$ par l'identité et que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- (i) $\rho \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} \mu_\alpha & 0 \\ 0 & \mu_{\alpha^{-1}} \end{pmatrix}$, $0 \leq r_j \leq p - 3$,
 $(r_j) \notin \{(0, \dots, 0), (p - 3, \dots, p - 3)\}$, $\alpha \in E^\times$
- (ii) $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q \sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} \end{pmatrix}$,
 $1 \leq r_0 \leq p - 2$, $0 \leq r_j \leq p - 3$, $j > 0$.

Dans le cas (ii), la condition sur $\det(\rho)$ implique que l'on a exactement :

$$(12) \quad \rho \cong \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{2f}}^{\mathbb{Q}_p^f} (\omega_{2f}^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j} \otimes \mu_{-1}).$$

THÉORÈME 5.3: (i) *Supposons ρ réductible. Choisissons $n_{\text{réd}}$ sous-ensembles $J_1, \dots, J_{n_{\text{réd}}}$ de $\{0, \dots, f - 1\}$, un dans chaque orbite de $\delta_{\text{réd}}$ et notons $d_i \stackrel{\text{déf}}{=} d_{\text{réd}}(J_i)$. Alors, pour tout i , $\omega_f^{\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j}$ est une puissance entière de ω_{d_i} , et il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{\text{réd}}}$ dans E^\times tels que :*

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}} \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \right) \otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)} \mu_{\alpha_i}.$$

(ii) *Supposons ρ irréductible. Choisissons n_{irr} sous-ensembles $J_1, \dots, J_{n_{\text{irr}}}$ de $\{0, \dots, f - 1\}$, un dans chaque orbite de δ_{irr} , et notons $J'_1, \dots, J'_{n_{\text{irr}}}$ les sous-ensembles correspondant dans $\{0, \dots, 2f - 1\}$ et $d_i \stackrel{\text{déf}}{=} d_{\text{irr}}(J_i)$. Alors, pour tout i , $\omega_{2f}^{\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j}$ est une puissance entière de ω_{d_i} , et il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_{\text{irr}}}$ dans E^\times tels que :*

$$V(M(D)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}} \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{2f}^{(\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \right) \otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)} \mu_{\alpha_i}.$$

Démonstration. Le fait que $\omega_f^{\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j}$ (resp. $\omega_{2f}^{\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j}$) est une puissance entière de ω_{d_i} découle immédiatement du (ii) du lemme 5.2. Dans les deux cas, on calcule s_i et c_i pour tout i (cf. (10)) puis on applique la proposition 4.7. On note $\sigma_i \in \mathcal{D}(\rho)$ le poids associé à J_i .

(i) On note δ au lieu de $\delta_{\text{réel}}$. Soit $\lambda_i \stackrel{\text{déf}}{=} (\lambda_{i,j}(x_j)) \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ le f -uplet associé à σ_i (cf. §2) et $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}|(J_i \cup \delta(J_i)) \setminus (J_i \cap \delta(J_i))|$. On peut voir que h_i est le nombre de séquences $p-2-\cdot, p-3-\cdot, \dots, p-3-\cdot, \cdot+1$ dans λ_i .

Calculons d'abord s_i . Si J est un sous-ensemble quelconque de $\{0, \dots, f-1\}$, $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ le poids correspondant, χ le caractère donnant l'action de I sur σ^{I_1} , $\lambda = (\lambda_j(x_j)) \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ le f -uplet associé à σ et $\delta(\lambda) = (\delta(\lambda)_j(x_j))$ celui associé à $\delta(\sigma)$, un examen de la position de $\delta(\sigma)$ dans l'induite $\text{ind}_I^K \chi^s$ (de socle σ et co-socle $\sigma^{[s]}$) montre, en utilisant [6, Lem. 2.7], que l'on a $s(\chi) = 0$ si $\delta(\sigma) = \sigma$ et, si $\delta(\sigma) \neq \sigma$:

$$(13) \quad |s(\chi)| = \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq f-1 \\ \delta(\lambda)_k(x_k) = p-2-x_k}} (r_k + 1) \right) + \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq f-1 \\ \delta(\lambda)_k(x_k) = x_k + 1}} (p - 2 - r_k) \right).$$

Des formules (13) et (10), on déduit alors :

$$s_i = h_i(1 + p + \dots + p^{d_i-1}) + \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j} \Delta_j$$

où :

$$\Delta_j \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{0 \leq k \leq f-1 \\ \delta^{j+1}(\lambda_i)_k(x_k) = p-2-x_k}} (r_k + 1) - \sum_{\substack{0 \leq k \leq f-1 \\ \delta^{j+1}(\lambda_i)_k(x_k) = x_k + 1}} (r_k + 1).$$

Un calcul montre que, dans l'expression $\frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{d_i-1} p^{d_i-1-j} \Delta_j$, le coefficient de $(r_j + 1)$, $0 \leq j \leq f-1$ est congru modulo $p^{d_i} - 1$ (dans \mathbb{Z}) à $p^j \sum_{\substack{k \in J_i \\ k < d_i}} p^{d_i-1-k}$ si $j \notin J_i$ et à $-(1 + p + \dots + p^{d_i-1}) + p^j \sum_{\substack{k \in J_i \\ k < d_i}} p^{d_i-1-k}$ si $j \in J_i$. On a donc :

$$(14) \quad s_i \equiv \left(h_i - \sum_{j \in J_i} (r_j + 1) \right) (1 + p + \dots + p^{d_i-1}) + \left(\sum_{\substack{k \in J_i \\ k < d_i}} p^{d_i-1-k} \right) \left(\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j \right) (p^{d_i} - 1).$$

Comme $\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j = \frac{p^f - 1}{p^{d_i} - 1} \sum_{\substack{j \in \iota(J_i) \\ j < d_i}} p^j$ ((ii) du lemme 5.2) et :

$$\sum_{\substack{j \in \iota(J_i) \\ j < d_i}} p^j = \sum_{\substack{f-1-j \in J_i \\ j < d_i}} p^j = \sum_{\substack{d_i-1-j \in J_i \\ j < d_i}} p^j = \sum_{\substack{k \in J_i \\ k < d_i}} p^{d_i-1-k},$$

on voit avec (14) que :

$$\begin{aligned} \omega_{d_i}^{s_i} &= \omega_{d_i}^{(h_i - \sum_{j \in J_i} (r_j + 1)) \frac{p^{d_i} - 1}{p - 1}} \left(\sum_{\substack{k \in J_i \\ k < d_i}} p^{d_i-1-k} \right) (\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j) \omega_{d_i} \\ &= \omega^{h_i - \sum_{j \in J_i} (r_j + 1)} \frac{p^f - 1}{p^{d_i} - 1} \left(\sum_{\substack{j \in \iota(J_i) \\ j < d_i}} p^j \right) (\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j) \omega_f \\ &= \omega^{h_i - |J_i| - \sum_{j \in J_i} r_j} \omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j) (\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j)}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant c_i . Rappelons que l'on a $\sigma_i = (\lambda_{i,j}(r_j)) \otimes \det^{e_i}$ avec $e_i \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} e(\lambda_i)(r_0, \dots, r_{f-1})$ (cf. §2). On v\u00e9rifie facilement :

$$\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j) p^j \equiv - \sum_{j \in J_i} (r_j + 1) p^j + \sum_{j \notin J_i} r_j p^j - |J_i| + 2h_i \quad (p - 1)$$

et de la formule pour $e(\lambda_i)$ (cf. §2), un calcul donne :

$$e_i = \sum_{j \in J_i} (r_j + 1) p^j - \sum_{\lambda_{i,j}(x_j) = x_j + 1} p^j \equiv \sum_{j \in J_i} (r_j + 1) p^j - h_i \quad (p - 1).$$

Comme $c_i = \sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j) p^j + e_i$, on obtient finalement :

$$(15) \quad c_i \equiv \sum_{j \notin J_i} r_j - |J_i| + h_i \quad (p - 1).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p, d_i}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{d_i}^{s_i}) \otimes \omega^{-(c_i + f)} \\ &\simeq \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p, d_i}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j) (\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j)} \right) \otimes \omega^{-(\sum_{j \in J_i} r_j) - (\sum_{j \notin J_i} r_j) - f} \\ &\simeq \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p, d_i}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j) (\sum_{j=0}^{f-1} (r_i + 1) p^j)} \right) \otimes \omega^{-\sum_{j \in J_i} (r_j + 1) p^j}. \end{aligned}$$

Le r\u00e9sultat pour (i) d\u00e9coule alors de la proposition 4.7 puisque les repr\u00e9sentations non-ramifi\u00e9es $\rho_i = \mu_{\lambda_i}$ sont ici toutes de dimension 1.

(ii) On note δ pour δ_{irr} et $\lambda_i \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\lambda_{i,j}(x_j)) \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ le f -uplet associ\'e à σ_i . Remarquons d'abord que :

$$\sum_{j \in \iota(\delta(J'_i))} p^j = \sum_{j \in \delta^{-1}(\iota(J'_i))} p^j \equiv p \left(\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j \right) \pmod{p-1},$$

et on voit qu'il est \'equivalent de d\'emontrer le th\'eor\eme pour $\delta(J_i)$ ou pour J_i . Quitte à remplacer ainsi J_i par $\delta^s(J_i)$ pour s convenable, on peut toujours supposer $\lambda_{i,0}(x_0) \in \{0, p-2-x_0\}$. Notons encore h_i le nombre de s\'equences $p-2-\cdot, p-3-\cdot, \dots, p-3-\cdot, \cdot+1$ dans λ_i . Le calcul de c_i est alors le m\eme qu'en (i) et en particulier c_i v\'erifie la congruence (15). Passons à s_i . Si J est un sous-ensemble quelconque de $\{0, \dots, f-1\}$, $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$ le poids correspondant, χ le caract\ere donnant l'action de I sur σ^{I_1} , J' le sous-ensemble de $\{0, \dots, 2f-1\}$ associ\'e à J , $\lambda' = (\lambda'_j(x_j)) \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{2f-1})$ le $2f$ -uplet formellement associ\'e à J' par la m\eme r\egle que dans le cas r\'eductible du §2 mais avec $2f$ au lieu de f et $\delta(\lambda') = (\delta(\lambda')_j(x_j)) = (\lambda'_{j+1}(x_{j+1}))$, un examen de la position de $\delta(\sigma)$ dans l'induite $\text{ind}_I^K \chi^s$ montre, en utilisant comme pr\'ec\'edemment [6, Lem. 2.7], que l'on a :

$$(16) \quad |s(\chi)| = \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq f-1 \\ \delta(\lambda')_k(x_k) = p-2-x_k}} r_k + 1 \right) + \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq f-1 \\ \delta(\lambda')_k(x_k) = x_k + 1}} p - 2 - r_k \right) + \varepsilon^+ r_0 + \varepsilon^-(p-1-r_0)$$

où $\varepsilon^+ = 1$ (resp. $\varepsilon^- = 1$) si $\delta(\lambda')_0(x_0) = p-2-x_0$ (resp. $\delta(\lambda')_0(x_0) = x_0+1$) et $\varepsilon^+ = 0$ (resp. $\varepsilon^- = 0$) sinon. Des formules (16) et (10), on d\'eduit alors par un calcul similaire à celui en (i) :

$$s_i = (h_i(1 + p + \dots + p^{d_i-1}) + C_0) + \left(C_0 r_0 + \sum_{j=1}^{f-1} C_j(r_j + 1) \right)$$

où :

$$C_j \equiv p^j \left(\sum_{\substack{k \in \iota(J'_i) \\ k < d_i}} p^k \right) \pmod{p-1} \text{ si } j \notin J_i,$$

$$C_j \equiv -(1 + p + \dots + p^{d_i-1}) + p^j \left(\sum_{\substack{k \in \iota(J'_i) \\ k < d_i}} p^k \right) \pmod{p-1} \text{ si } j \in J_i.$$

On montre alors comme au (i) en utilisant le (ii) du lemme 5.2 que l'on a :

$$\left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{d_i}^{s_i}\right) \otimes \omega^{-(c_i+f)} = \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{2f}^{(\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_i+1)p^j)}\right) \otimes \omega^{-\sum_{j \in J_i} (r_j+1)p^j}$$

et le résultat découle de la proposition 4.7. ■

On en déduit le résultat cherché :

COROLLAIRE 5.4: *On a un isomorphisme :*

$$V(M(D))|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \simeq \left(\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}}(\det \rho)^{-1})\right)|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})}.$$

Démonstration. Un calcul évident à partir des expressions pour $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})}$ données juste avant le théorème 5.3 donne :

$$(i) \left(\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})\right)|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \\ \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}} \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in J_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)}\right) \otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)},$$

$$(ii) \left(\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})\right)|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})} \\ \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}} \left(\text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{2f}^{(\sum_{j \in J'_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)}\right) \otimes \omega^{-\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)},$$

suivant les cas (i) ρ scindée et (ii) ρ irréductible. Comme $(\iota \circ \delta_{\text{réd}}^s)(J_i) = (\delta_{\text{réd}}^{-s} \circ \iota)(J_i)$ (resp. $(\iota \circ \delta_{\text{irr}}^s)(J'_i) = (\delta_{\text{irr}}^{-s} \circ \iota)(J'_i)$), l'application $J_i \mapsto \iota(J_i)$ (resp. $J'_i \mapsto \iota(J'_i) \cap \{0, \dots, f-1\}$) envoie une orbite de $\delta_{\text{réd}}$ (resp. de δ_{irr}) sur une autre orbite et induit une permutation sur les orbites de $\delta_{\text{réd}}$ (resp. de δ_{irr}). Puisque l'on somme sur toutes les orbites, on a donc :

$$(i) \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in J_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \\ \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)},$$

$$(ii) \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{2f}^{(\sum_{j \in J'_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \\ \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \omega_{2f}^{(\sum_{j \in \iota(J'_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)},$$

d'où le résultat par le théorème 5.3. ■

6. Valeurs privilégiées de paramètres

On montre qu'il existe des valeurs "privilégiées" de certains des paramètres apparaissant sur les diagrammes de Diamond associés à ρ , valeurs qui assurent que $V(M(D))$ est isomorphe à $\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p}(\rho \otimes (\det \rho)^{-1})$ (et non plus seulement en restriction à l'inertie).

Soit ρ semi-simple générique et D un diagramme de Diamond associé comme au §5. Soit $n_{\text{réd}}, (J_i), (d_i), 1 \leq i \leq n_{\text{réd}}$ (resp. $n_{\text{irr}}, (J_i), (d_i), 1 \leq i \leq n_{\text{irr}}$) comme dans le théorème 5.3. Notons χ_i l'action de I sur $\sigma_i^{I_1}$ où $\sigma_i \in \mathcal{D}(\rho)$ est le poids associé à J_i . Pour tout i , rappelons que l'on a en particulier des isomorphismes $S^{d_i} : V_{\chi_i} \xrightarrow{\sim} V_{\chi_i}$. Comme $\dim_E V_{\chi_i} = 1$, on voit que S^{d_i} est la multiplication par un scalaire $\nu_i \in E^\times$. Si l'on remplace χ_i par $S^s(\chi_i)$, cela ne change pas la valeur de ν_i , qui ne dépend donc que de l'orbite de $\delta_{\text{réd}}$ (resp. δ_{irr}) contenant J_i . On dit que les ν_i sont des "paramètres" associés au diagramme de Diamond choisi.

LEMME 6.1: Si $d_i = 2$ alors $\nu_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j}$.

Démonstration. Notons indifféremment δ pour $\delta_{\text{réd}}$ ou δ_{irr} et soit λ_i le f -uplet associé à σ_i (comme dans la preuve du théorème 5.3). Puisque $d_i = 2$, on a $\delta(J_i) \neq J_i$ et $\delta^2(J_i) = J_i$ ce qui force les deux cas suivants, quitte à remplacer peut-être J_i par $\delta(J_i)$:

- (i) ρ réductible, f pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = p - 2 - x_j$ si j pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = x_j + 1$ si j impair,
- (ii) ρ irréductible, f impair, $\lambda_{i,0}(x_0) = x_0$, $\lambda_{i,j}(x_j) = x_j + 1$ si $j > 0$ pair, $\lambda_{i,j}(x_j) = p - 2 - x_j$ si j impair.

En particulier, on a $\delta(\sigma_i) = \sigma_i^{[s]}$ et, écrivant $\sigma_i = (\lambda_{i,j}(r_j)) \otimes \det^{e_i}$:

$$\begin{aligned} \chi_i \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \bar{a}^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} (\bar{a}\bar{d})^{e_i}, \\ S(\chi_i) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \bar{d}^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} (\bar{a}\bar{d})^{e_i}. \end{aligned}$$

Soit v_i une base quelconque de V_{χ_i} , la surjection naturelle $\text{ind}_I^K \chi_i^s \rightarrow \langle K\Pi v_i \rangle$ (voir preuve du lemme 4.1) n'est pas injective, sinon on aurait $\delta(\sigma_i) = \sigma_i$. Elle envoie donc le socle de $\text{ind}_I^K \chi_i^s$ sur 0. Par [6, Lem. 2.7(i)], cela implique l'égalité dans $\langle K\Pi v_i \rangle$:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i + (-1)^{e_i + \sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \Pi v_i = 0.$$

On a une égalité analogue avec Πv_i au lieu de v_i . On en déduit :

$$S(v_i) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i = (-1)^{1+e_i + \sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \Pi v_i,$$

$$S(\Pi v_i) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{q-1 - \sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)p^j} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi v_i = (-1)^{1+e_i} \Pi^2 v_i$$

d'où :

$$S^2(v_i) = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} \lambda_{i,j}(r_j)} \Pi^2 v_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j} v_i$$

puisque par hypothèse $\Pi^2 = p$ agit trivialement (voir aussi l'exemple 4.8). ■

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ et ρ est générique irréductible comme dans l'exemple 4.8, le lemme 6.1 explique pourquoi il n'y a qu'un seul diagramme de Diamond associé à ρ dans ce cas. Lorsque $d_i \neq 2$, les ν_i peuvent par contre prendre des valeurs quelconques dans E^\times .

Reprenons maintenant les scalaires α_i apparaissant dans le théorème 5.3. Notons que seul $\alpha_i^{d_i}$ est bien défini puisque l'on peut toujours "faire rentrer" le caractère non-ramifié μ_{α_i} dans l'induite. On peut calculer explicitement les scalaires $\alpha_i^{d_i}$ en fonction des paramètres ν_i .

LEMME 6.2: (i) *Supposons ρ réductible et soit*

$$h_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} |(J_i \cup \delta_{\text{réd}}(J_i)) \setminus (J_i \cap \delta_{\text{réd}}(J_i))|,$$

alors pour tout i on a :

$$\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f} \sum_{j=0}^{f-1} r_j} \nu_i^{-1}.$$

(ii) *Supposons ρ irréductible et soit $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} |(J_i \cup \delta_{\text{irr}}(J_i)) \setminus (J_i \cap \delta_{\text{irr}}(J_i))|$, alors pour tout i on a :*

$$\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{2f} (1 + \sum_{j=0}^{f-1} r_j)} \nu_i^{-1}.$$

Démonstration. Par la proposition 4.7, α_i est tel que $\overline{\varphi}^{d_i}(f_i) = \alpha_i^{d_i} f_i$ où $V_{\chi_i}^* = E f_i$. De la définition de $\overline{\varphi}$ (cf. §4), on déduit :

$$(17) \quad \alpha_i^{d_i} = \left(\prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i)) \right) \nu_i^{-1}.$$

(i) Un calcul utilisant (13) ainsi que (5) fournit :

$$\prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i)) = \left(\prod_{j=0}^{f-1} (r_j + 1)!(p - 2 - r_j)! \right)^{\frac{d_i h_i}{f}} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f} \sum_{j=0}^{f-1} r_j}$$

(notons que h_i est bien divisible par f/d_i par “périodicité”). Avec (17) on a donc $\alpha_i^{d_i} = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f} \sum_{j=0}^{f-1} r_j} \nu_i^{-1}$.

(ii) Un calcul analogue au précédent utilisant (16) et (5) fournit cette fois :

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{d_i-1} c(S^j(\chi_i)) &= \left(r_0!(p - 1 - r_0)! \prod_{j=1}^{f-1} (r_j + 1)!(p - 2 - r_j)! \right)^{\frac{d_i h_i}{2f}} \\ &= (-1)^{\frac{d_i h_i}{2f} (1 + \sum_{j=0}^{f-1} r_j)} \end{aligned}$$

et on conclut de même avec (17). ■

La preuve du lemme suivant est un calcul explicite que l’on laisse au lecteur à partir des expressions de ρ données avant le théorème 5.3 (rappelons que \overline{J}_i désigne le complémentaire de J_i dans $\{0, \dots, f - 1\}$).

LEMME 6.3: (i) Si ρ est réductible, on a :

$$\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p} \rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{réd}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \left(\omega_f^{(\sum_{j \in J_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \otimes \mu_{\alpha^{(|J_i| - |\overline{J}_i|) \frac{d_i}{f}}} \right).$$

(ii) Si ρ est irréductible, on a :

$$\text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p} \rho \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_{\text{irr}}} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \left(\omega_{2f}^{(\sum_{j \in J'_i} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \otimes \mu_{(-1) \frac{d_i}{2}} \right).$$

Notons que, dans le cas réductible, $|J_i|$ et $|\overline{J}_i|$ sont toujours divisibles par f/d_i , de sorte que $(|J_i| - |\overline{J}_i|) \frac{d_i}{f}$ est un entier, qui de plus ne dépend que de l’orbite de J_i sous $\delta_{\text{réd}}$. De même, dans le cas irréductible, d_i est toujours divisible par 2 (exercice!).

Une des questions importantes du programme de Langlands modulo p pour $\text{GL}_2(F)$ est de savoir si certaines valeurs des paramètres apparaissant sur les diagrammes de Diamond, en particulier les paramètres ν_i , jouent un rôle privilégié. On peut combiner le théorème 5.3 avec les résultats précédents pour “distinguer” certaines valeurs des ν_i :

THÉORÈME 6.4: Pour que $V(M(D)) \simeq \text{ind}_F^{\otimes \mathbb{Q}_p} (\rho \otimes_{\mathbb{F}_p} (\det \rho)^{-1})$, il suffit que l’on ait les valeurs suivantes pour les ν_i :

- (i) si ρ réductible, $\nu_i = (-1)^{\frac{d_i h_i}{f}} \sum_{j=0}^{f-1} r_j \alpha^{(|\overline{J}_i| - |J_i|) \frac{d_i}{f}}$ pour tout i ,
- (ii) si ρ irréductible, $\nu_i = (-1)^{\frac{d_i}{2} + \frac{d_i h_i}{2f}} (1 + \sum_{j=0}^{f-1} r_j)$ pour tout i .

Démonstration. Sous la condition (i), on a en effet par le lemme 6.2 pour tout $i \in \{0, \dots, n_{\text{réd}}\}$:

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \left(\omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \otimes \mu_{\alpha^{(|J_i| - |\overline{J}_i|) \frac{d_i}{f}}} \right) \\ \simeq \text{ind}_{\mathbb{Q}_p^{d_i}}^{\mathbb{Q}_p} \left(\omega_f^{(\sum_{j \in \iota(J_i)} p^j)(\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j)} \otimes \mu_{\alpha^{d_i}} \right) \end{aligned}$$

en remarquant que, si $\iota(i)$ est l'indice de l'orbite de $\delta_{\text{réd}}$ contenant $\iota(J_i)$, on a $d_{\iota(i)} = d_i$, $|J_{\iota(i)}| = |J_i|$ et $|\overline{J_{\iota(i)}}| = |\overline{J}_i|$. Le résultat pour (i) découle donc du lemme 6.3 et du théorème 5.3. La preuve de (ii) est similaire. ■

Lorsque $d_i = 1$, ce qui n'arrive que si ρ est réductible, le théorème 6.4 donne la condition $\nu_i = \alpha$ si $J_i = \emptyset$ (c'est-à-dire si $\sigma_i = (r_0, \dots, r_{f-1})$) et $\nu_i = \alpha^{-1}$ si $J_i = \{0, \dots, f-1\}$ (c'est-à-dire si $\sigma_i = (p-3-r_0, \dots, p-3-r_{f-1}) \otimes \det^{\sum_{j=0}^{f-1} (r_j+1)p^j}$). Ces conditions sont bien connues dans le cas $f = 1$ (cf. [6, §10, §20] par exemple).

PROPOSITION 6.5: *Lorsque $d_i = 2$, les conditions du théorème 6.4 sont automatiquement réalisées.*

Démonstration. Lorsque $d_i = 2$, on peut calculer que l'on a $h_i = |J_i| = |\overline{J}_i| = f/2$ si ρ est réductible et $h_i = f$ si ρ est irréductible. Dans les deux cas, le théorème 6.4 donne $\nu_i = (-1)^{\sum_{j=0}^{f-1} r_j}$ qui est bien aussi la valeur donnée par le lemme 6.1. ■

Malheureusement, pour $f > 1$, il y a en général bien d'autres "paramètres" dans D que les ν_i précédent, de sorte que fixer les valeurs du théorème 6.4 ne suffit pas à privilégier un unique diagramme de Diamond D pour une représentation ρ donnée. Le seul cas pour $f > 1$ où D est complètement déterminé par les ν_i est $f = 2$ et ρ irréductible. Il n'y a alors qu'un paramètre $\nu_1 = \nu$ et le théorème 6.4 fournit la valeur "privilégiée" $\nu = (-1)^{r_0+r_1+1}$.

7. Bref retour aux représentations de $\text{GL}_2(F)$

Cette partie, d'ordre essentiellement heuristique, esquisse un scénario pour tenter de retrouver les (φ, Γ) -modules du §5 à partir de représentations de $\text{GL}_2(F)$ sur E .

Soit W un E -espace vectoriel sur lequel le monoïde $\begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit E -linéairement à gauche et W^* son dual. Si $f \in W^*$ et $h \in \text{GL}_2(F)$ tel que $h^{-1} \in \begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on note $hf \in W^*$ la fonction $hf(w) \stackrel{\text{déf}}{=} f(h^{-1}w)$. Soit $s \in \{0, \dots, q-1\}$ et $S : W \rightarrow W$ l'application $w \mapsto \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w$. Supposons pour simplifier S bijectif, alors on a tautologiquement :

$$(18) \quad f = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}).$$

Si l'on pose $\varphi(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f$ comme dans [9] ou [4], (18) se réécrit formellement :

$$(19) \quad \varphi(f) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -[\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (f \circ S^{-1}).$$

Soit $U(\mathbb{F}_p)$ l'unipotent supérieur de $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On pose dans $\mathbb{F}_p[U(\mathbb{F}_p)] \otimes_{\mathbb{F}_p} E \simeq E[U(\mathbb{F}_p)]$:

$$X \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $E[U(\mathbb{F}_p)] \simeq E[X]/X^p$.

THÉORÈME 7.1 (Stickelberger): *Écrivons $s = \sum_{j=0}^{f-1} s_j p^j$ avec $0 \leq s_j \leq p-1$ et soit $c(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i=0}^{f-1} s_i! \in \mathbb{F}_p^\times$. Alors il existe $U(X) \in 1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$ (dépendant de s) tel que dans $E[U(\mathbb{F}_p)]$:*

$$(20) \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\text{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{f-1} c(s) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-s_j} U(X)$$

où tr désigne la trace de \mathbb{F}_q à \mathbb{F}_p .

Démonstration. Le résultat est vrai pour $f = 1$ car on a alors l'égalité (pour un certain $U(X)$ dépendant de s) :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{p-1} (-j)^s (1+X)^j = s! X^{p-1-s} U(X).$$

Supposons $f > 1$. On retranscrit dans notre contexte la preuve du théorème 2.1 de [12, §1.2]. Notons

$$G_s \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\text{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $s = q - 1$, on a $G_{q-1} = -1 + G_0 = -1 + 0 = -1$ et $(-1)^{f-1} c(s) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p^{j-1} - s_j} = (-1)^{f-1} (-1)^f = -1$: l'égalité est vraie (avec $U(X) = 1$). Si $s = q - 2$, on a :

$$G_{q-2} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{q-2} (1 + X)^{-\text{tr}(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{q-2} (1 - \text{tr}(\lambda)X + X^2 P(X))$$

(pour un certain $P(X) \in E[X]/X^p$). Si $\lambda \neq 0$ on a $\lambda^{q-2} \text{tr}(\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j} = \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j-1}$ d'où on déduit :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} -\lambda^{q-2} \text{tr}(\lambda) = - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{j=0}^{f-1} \lambda^{p^j-1} = - \sum_{j=0}^{f-1} \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{p^j-1} \right) = 1.$$

Ainsi $G_{q-2} = X + X^2 P(X) = XU(X)$ qui est bien ce que l'on retrouve à droite. On fait maintenant une récurrence descendante en supposant le résultat vrai pour $s \geq k + 1 \geq 2$ et en le démontrant pour $s = k \geq 1$ (et en notant indifféremment $U(X)$ toutes les unités de $1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$ qui apparaissent, leurs valeurs précises ne jouant aucun rôle ici). On distingue deux cas.

Premier cas : $q - 1 - k = p(q - 1 - k')$ avec $k < k' < q - 1$.

Alors :

$$\begin{aligned} G_k &= G_{pk' - (p-1)(q-1)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{pk'} \begin{pmatrix} 1 & -\text{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{k'} \begin{pmatrix} 1 & -\text{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = G_{k'} \end{aligned}$$

puisque $\text{tr}(\lambda) = \text{tr}(\lambda^p)$. Comme $c(k) = c(k')$ et comme la puissance de X est la même pour k ou k' , on voit que l'égalité pour k découle de celle pour k' , qui est vraie par récurrence.

Deuxième cas : $(q - 1 - k, p) = 1$.

Un calcul classique sur les sommes de Gauss donne $G_s G_{s'} = G_{s+s'} J_{s,s'}$ où $J_{s,s'} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s (1 - \lambda)^{s'}$ lorsque $0 \leq s, s' \leq q - 1$ et $s + s'$ n'est pas divisible par $q - 1$. Comme $G_k = G_{q-2+k+1}$ (car $k \geq 1$) et $k + q - 1$ n'est pas divisible par $q - 1$ puisque $0 < k < q - 1$, on a $J_{q-2,k+1} G_k = G_{q-2} G_{k+1}$. Par ailleurs :

$$J_{q-2,k+1} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{-1} (1 - \lambda)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} \lambda^{j-1} = k_0 + 1$$

si l'on écrit $k = \sum_{j=0}^{f-1} k_j p^j$. Comme $(k + 1, p) = 1$, on a en particulier $k_0 < p - 1$ d'où $k_0 + 1 \neq 0$ dans \mathbb{F}_p . Du cas $s = q - 2$ et de l'hypothèse de récurrence pour

$k + 1$, on déduit :

$$G_k = \frac{1}{k_0 + 1} (XU(X))(-1)^{f-1} c(k + 1) X^{p-2-k_0} X^{\sum_{j=1}^{f-1} p-1-k_j}$$

$$= (-1)^{f-1} c(k) X^{\sum_{j=0}^{f-1} p-1-k_j} U(X)$$

qui est l'égalité cherchée pour $k \geq 1$. Enfin l'égalité est trivialement vraie pour $k = 0$ puisque l'on a 0 des deux côtés. ■

À torsion près par $(-1)^{f-1}$, l'égalité (20) avec l'égalité (19) "où l'on a pris la trace" sont à rapprocher de la définition de φ en (6) et motivent cette dernière. L'unité $U(X)$ est inutile dans (6) (et n'y apparaît donc pas) car, à changement de base près, on peut vérifier qu'elle ne modifierait pas le (φ, Γ) -module $M(D)$ du §4.

Remarque 7.2: L'égalité (20) se réécrit dans $E[U(\mathbb{F}_p)]$:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^s \begin{pmatrix} 1 & -\text{tr}(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{f-1} V(X) \prod_{j=0}^{f-1} \left(\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{s_j} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

pour une unité $V(X) \in 1 + XE[U(\mathbb{F}_p)]$. Il est même possible que l'on puisse en fait prendre $V(X) = 1$ dans cette dernière égalité.

Soit maintenant ρ une représentation générique de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ sur E , D un diagramme de Diamond associé (cf. §2) et π une représentation lisse admissible de $\text{GL}_2(F)$ sur E vérifiant les 3 conditions $\text{soc}_K \pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$, $(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$ contient le diagramme D ("can" est l'injection canonique $\pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{K_1}$) et π est engendrée par D_0 . On sait par [6] que de telles représentations existent mais leur étude semble très délicate lorsque $f > 1$. On peut néanmoins formellement poser comme dans [9] (voir aussi [10]) :

$$M_F(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} p^n & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_0 \right)^*$$

(dual algébrique). C'est un E -espace vectoriel naturellement muni d'une structure de $E[[U(\mathcal{O}_F)]]$ -module où $E[[U(\mathcal{O}_F)]]$ est l'algèbre d'Iwasawa sur E de $U(\mathcal{O}_F) = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La trace de \mathcal{O}_F à \mathbb{Z}_p induit un morphisme E -linéaire d'algèbres d'Iwasawa :

$$E[[U(\mathcal{O}_F)]] \rightarrow E[[U(\mathbb{Z}_p)]]$$

que l'on peut composer avec l'inclusion $E[[U(\mathbb{Z}_p)]] \subset \text{Frac}(E[[U(\mathbb{Z}_p)]]) \simeq E((X))$. Les considérations précédentes suggèrent d'étudier le $E((X))$ -espace vectoriel suivant (dont j'ignore s'il est de dimension finie quand $f > 1$) :

$$M(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} M_F(\pi) \otimes_{E[[U(\mathcal{O}_F)]]} \text{Frac}(E[[U(\mathbb{Z}_p)]]).$$

Il est muni d'une action semi-linéaire de $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p^\times$ via l'action de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (noter que $\text{tr}(ax) = a\text{tr}(x)$ si $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $x \in \mathcal{O}_F$). On a par ailleurs un morphisme :

$$M_F(\pi) \rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} p^{n+1} & p\mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_0 \right)^*$$

où la flèche est $f \mapsto f \circ \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui induit un morphisme :

$$M(\pi) \rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} p^{n+1} & p\mathcal{O}_F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_0 \right)^* \otimes_{E[[U(p\mathcal{O}_F)]]} \text{Frac}(E[[U(p\mathbb{Z}_p)]]).$$

S'il y a moyen d'“étendre” ce morphisme à la manière de [9] (pour $F = \mathbb{Q}_p$) ou de [15] en une application $\varphi : M(\pi) \rightarrow M(\pi)$ et si de plus $M(\pi)$ est de dimension finie sur $E((X))$, on peut imaginer qu'il s'agit de l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_p((X)) \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ à $E((X))$ d'un (φ, Γ) -module pour \mathbb{Q}_p qui, lorsque ρ est semi-simple, a peut-être un lien avec le (φ, Γ) -module étale “combinatoire” $M(D)$ du §5.

Références

- [1] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of GL_2 of a local field*, Duke Mathematical Journal **75** (1994), 261–292.
- [2] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case*, Journal of Number Theory **55** (1995), 1–27.
- [3] L. Berger, *On some modular representations of the Borel subgroup of $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Compositio Mathematica **146** (2000), 58–80.
- [4] L. Berger, *Représentations modulaires de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2*, Astérisque **330** (2010), 263–279.
- [5] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* I, Compositio Mathematica **138** (2003), 165–188.
- [6] C. Breuil and V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2* , à paraître à Memoirs of the American Mathematical Society.
- [7] K. Buzzard, F. Diamond and F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, à paraître à Duke Mathematical Journal.

- [8] M. Collins, *Tensor induction and transfer*, The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series **40** (1989), 275–279.
- [9] P. Colmez, *Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque **330** (2010), 281–509.
- [10] M. Emerton, *On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ in characteristic p* , prépublication 2008.
- [11] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux I*, Progress in Mathematics **87** (1990), 249–309.
- [12] S. Lang, *Cyclotomic fields I and II*, Springer-Verlag, combined second edition, 1990.
- [13] R. Ollivier, *Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $GL_n(F)$ en caractéristique p* , Journal of Algebra **304** (2006), 39–72.
- [14] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of $GL_2(F)$* , Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série **99** (2004).
- [15] P. Schneider and M.-F. Vignéras, *A functor from smooth \mathfrak{o} -torsion representations to (φ, Γ) -modules*, prépublication 2008.
- [16] M.-F. Vignéras, *Representations of the p -adic group $GL(2, F)$ modulo p* , Computational Mathematics **140** (2004), 333–358.