Michael Neubrand

“Mathematical literacy”/ „Mathematische Grundbildung“

Der Weg in die Leistungstests, die mathematikdidaktische Bedeutung, die Rolle als Interpretationshintergrund für den PISA-Test

Zusammenfassung
PISA, das „Programme for International Student Assessment“ der OECD hat deutlicher als manche andere vergleichende Studie formuliert, dass sich die Leistungsfähigkeit der Bildungssysteme an einem normativen Anspruch grundlegender Bildung zu bewähren hat. Dies ist eine Weiterentwicklung komparativer Untersuchungen, die bisher eher von einem deskriptiv bestimmten Kerncurriculum ausgingen. PISA stellt daher den Begriff „literacy“ ins Zentrum. „Mathematical literacy” baut in PISA auf mathematikdidaktischen Modellen und Forderungen auf, die zunächst dargestellt werden. Im nationalen Ergänzungstest in Deutschland wurde der Begriff „mathematical literacy“ ausdifferenziert und erweitert zu einem auch in der deutschen Allgemeinbildungsdiskussion zu verankernden Begriff „mathematischer Grundbildung“. Dieser konkretisiert sich in der Forderung, dass ausgewogene Performanz in drei Typen mathematischen Arbeitens erreicht werden soll, in den technischen Fertigkeiten sowie bei rechnerisch bzw. begrifflich orientierten Modellierungs- und Problemlöseaufgaben. Diese Beschreibung mathematischer Grundbildung erlaubt es, die PISA-Daten inhaltlich nach mehreren Gesichtspunkten hin zu interpretieren, so dass auch die praktische Relevanz von PISA deutlich werden kann. Die bisherigen Interpretationsansätze werden abschließend kurz vorgestellt.

Summary
Mathematical Literacy/Fundamental Mathematical Education: Performance testing, importance for mathematical didactics, role as background for interpretation of PISA-study
Performance in education systems has to stand the test of fundamental educational norms (“*Bildung*”). PISA, the OECD “programme for international student assessment” formulated this requirement more clearly than many other comparative studies have done previously. Because it focuses on the term “literacy”, the study is an improvement on the usual comparative investigations which often begin from the concept of a descriptive core curriculum. The concept of “mathematical literacy” in PISA is developed from didactic requirements and models for mathematics, which will be presented here. In the national extended study in Germany the term “mathematical literacy” was elaborated to arrive at a definition of fundamental mathematical education. This concept has direct relevance for general educational debates on educational science in Germany. It formulates the requirement for a balanced performance in three types of mathematical work: in technical skills, as in modelling and problem-solving activities on a procedural or a conceptual basis. This description of mathematical literacy facilitates the interpretation of PISA-data from various perspectives and makes the practical relevance of PISA clearer. Recent approaches to interpretation of the data will be presented in the final section of this paper.

Mehr als in manchen anderen Ländern wurde PISA, das „Programme for International Student Assessment“ (OECD 1999), in der deutschen Öffentlichkeit beachtet. Die Rezeption beschränkte sich im öffentlichen Diskurs allerdings oft auf die Kenntnisnahme der Platzierung Deutschlands im unteren Mittelfeld auf der Liste der teilnehmenden Staaten. Die Intentionen hinter PISA, nämlich – über mehrere Domänen hinweg – Indikatoren zu gewinnen, die konstruktive Hinweise auf den Stand der Bildung in den teilnehmenden Ländern ermöglichen, wurden dagegen eher am Rande diskutiert. Dabei hat gerade PISA deutlicher als manche andere vergleichende Studie formuliert, dass die Leistungsfähigkeit der Bildungs*systeme* nicht lediglich mittels an curricularen Vorgaben orientierten Leistungstests bestimmt werden kann, sondern sich messen muss an einem Anspruch grundlegender Bildung für eine moderne, entwickelte Gesellschaft. Schlüssel dafür ist der bei PISA in variierenden Bezügen benutzte Begriff „literacy".

Diese Ausrichtung gilt für alle drei in PISA erfassten Inhaltsbereiche, Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften. Für den Bereich der Mathematik steht am Beginn der internationalen Rahmenkonzeption diese Begriffsbestimmung: „*Mathematical literacy* is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgments and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen." (OECD 1999, S. 41)

Ziel dieses Aufsatzes ist es, diese Begriffsbestimmung im mathematikdidaktischen Feld zu verorten. Dabei werden insbesondere die Erweiterungen im Framework für die nationale PISA-Option in Deutschland berücksichtigt. Aus dieser Sicht heraus erweist sich schließlich „mathematical literacy"/„mathematischer Grundbildung" als eine Interpretationsfolie, vor der die Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler im internationalen Rahmen inhaltlich zur Geltung gebracht werden können, und die auch die praktische Relevanz von PISA sichtbar macht.

1 „Mathematical literacy" als Orientierung für internationale Leistungsvergleiche: Das Problem der Curriculum-Ferne

Zwar wurde bereits TIMSS, die im Jahr 1994 durchgeführte „Third International Mathematics and Science Study", auf einem relativ breiten, insbesondere auch pragmatisch ausgerichteten Bild der Bedeutung von Mathematik in der Schule aufgebaut: „Die Mathematik ist als Werkzeug gewissermaßen Teil der kulturellen Alphabetisierung." (BAUMERT u.a. 1997, S. 58) Dennoch waren es die curricularen Vorgaben, aus denen bei TIMSS die Testaufgaben gewonnen wurden: „Bei aller Variabilität innerhalb und zwischen Ländern gibt es so etwas wie ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe, das in sehr unterschiedlicher Form im Lehrplan, im Lehrbuch oder im professionellen Selbstverständnis von Mathematiklehrern verankert sein kann (SCHMIDT u.a. 1996). Dieses rekonstruierte internationale Kerncurriculum ist Konstruktionsrichtlinie und externes Validitätskriterium der TIMSS-Leistungstests." (BAUMERT u.a. 1997, S. 58) Mit dem Konstrukt des „internationalen Kerncurriculums" wird dabei solcher Stoff abgegrenzt, der in der Mehrzahl der Länder zum Unterrichtsbestand gehört, aber auch Stoff erfasst, der in einzelnen Ländern nicht lehrplankonform[1] ist, also durch die allgemeine mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler erschlossen werden muss.

Von der Orientierung am Kerncurriculum zu „literacy" als Basis internationaler Vergleichstests zu kommen, ist eine Weiterentwicklung der komparativen Ansätze. Erstmals explizit zu diesem Zweck wurde das Konstrukt „mathematical literacy" 1994 bei TIMSS-

III verwendet; das ist die Komponente von TIMSS, bei der die Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarschulzeit untersucht wurden (vgl. MULLIS u.a. 1998; BAUMERT u.a. 2000). TIMSS-III unterscheidet explizit zwischen zwei Untersuchungssträngen: „Parallel zu den Tests zur mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundbildung (mathematics and science literacy) […] wurden mathematische und physikalische Testaufgaben entwickelt, die den Lehrstoff voruniversitärer Fachkurse am Ende der Sekundarstufe II abbilden sollen.“ (KLIEME 2000, S. 57) Neben den stärker curricular orientierten Test zur „voruniversitären Mathematik“ trat also ein „literacy“-Test. Dessen Rahmenkonzeption wurde in einem eigenen Framework dargestellt. Es heißt dort: „Unlike both other components of TIMSS and other IEA-Studies, the mathematics and science literacy study is not curriculum based. That is, it is not an attempt to measure what has been taught and learned in a given year of schooling or in a given age group of students. Instead, it is a study of the mathematics and science learning that final year students have retained regardless of their current areas of study. [...] The MSL [mathematics and science literacy] study could not be based on a specific intended curriculum.“ (ORPWOOD/ GARDEN 1998, S. 10-11).

Mit dem Begriff „mathematical literacy“ soll also zum Ausdruck gebracht werden, dass es in einem Test gerade nicht um die in den Curricula festgelegten Wissenselemente und Fertigkeiten geht. PISA macht diese Distanz bereits in der Rahmenkonzeption explizit: „Der Begriff Grundbildung (literacy) wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise.“ (OECD 1999, nach der deutschen Übersetzung, S. 47) Freilich sind auch dies keine per se curriculumfremden Elemente, wenn man die allgemeinen Ziele mit heranzieht, die in den Lehrplänen, in Deutschland oft in den so genannten „Präambeln“, niedergelegt sind. Somit greift auch ein „literacy“-Test – zumindest indirekt – zurück auf unterrichtliche Gegebenheiten in einem Land, einer Schulform, einer Schule. Allerdings geschieht dieser Rückgriff weniger auf einzelne stoffliche Festlegungen, vielmehr hingegen auf das jeweilige Umfeld, in das diese Stoffelemente eingebettet werden. Es ist also durchaus legitim, Leistungen der Schülerinnen und Schüler an einem nicht direkt an curriculare Einzelstoffe gebundenen Ziel zu messen. Dies ist vor allem dann angemessen, wenn man die Qualität der mathematischen Fähigkeiten beschreiben und aus den Testresultaten schließlich positive Anregungen für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts gewinnen will. Die administrativen Rahmensetzungen, die Vorgaben in den Lehrplänen und die daraus entstehenden Beschreibungen von Einzelstoffen und Kenntnissen in den Curricula sind ja letztlich Hilfsmittel, solche allgemeinen Ziele zu erreichen.

Der Rückgriff auf die allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts bringt für internationale Vergleichsuntersuchungen eine spezifische Problematik mit sich. Die generellen Ziele des Mathematikunterrichts sind innerhalb einer Gesellschaft normativ gesetzt. Sie reflektieren Anforderungen, die auf ein ganzes Bündel von Aspekten zurückgreifen, auf mathematische – insoweit sie sich auf eine Bestimmung der Domäne Mathematik berufen, auf psychologische – insoweit das Lehren und Lernen in der Schule ein Bild menschlichen Lernens voraussetzt, auf pädagogische – insoweit auch und gerade durch eine Domäne eine umfassende Ausbildung angestrebt wird, auf gesellschaftliche – insoweit mit jeder schulischen Ausbildung auch Voraussetzungen für die Artikulationsfähigkeit und Partizipation in einer Gesellschaft geschaffen werden sollen, auf anthropologische – insoweit Bildung auch in einer Domäne nicht ohne ein „Bild vom Menschen" (WINTER 1975) auskommt. Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts sind dabei jeweils lokal auf den Konsens in der jeweiligen Bezugskommunität angewiesen. Innerhalb eines „nationalen" Rahmens[2] ist das im Allgemeinen auch der Fall. Im internationalen Rahmen können sich aber Inkongruenzen bei diesen allgemeinen Rahmensetzungen ergeben, die man bei Erstellung und Auswertung gerade eines auf „literacy" bezogenen Tests zu berücksichtigen hat.[3] Die Kategorien der Auswertung internationaler Tests sind somit auch darauf hin zu bestimmen, inwieweit sie in der Lage sind, internationale Unterschiede von einer theoretisch fundierten, jedoch möglichst wenig vom nationalen „bias" beeinflussten Basis aus zu erkennen.

Speziell PISA ist allerdings hinsichtlich der letztgenannten Problematik in einer relativ komfortablen Lage, weil die teilnehmenden Länder, von einigen wenigen Ausnahmen abgesehen (z.B. Brasilien, Mexiko), im Wesentlichen die westlichen, hochentwickelten Industriestaaten sind. Mathematisches Denken stellt in allen diesen Ländern in relativ ähnlicher Weise eine zentrale Basiskompetenz dar. Aber diese kann unterschiedlich entwickelt werden. Daher interessieren gerade hier Auswertungsstrategien, die in der Lage sind, strukturelle Differenzen in den Leistungen der einzelnen Länder aufzuzeigen. Beispielsweise ist die Frage, welche Komponenten des mathematischen Denkens betont werden, ein derartiges Struktur-Problem.

2 Mathematikdidaktische Hintergründe von „mathematical literacy" und „mathematischer Grundbildung"

2.1 FREUDENTHALS Modell des Lehrens und Lernens von Mathematik: Realitätsbezüge als Bedingung für die Ausbildung mathematischer Begriffe

Die Bedeutung der oben aus dem PISA-Framework zitierten, zunächst reichlich allgemein klingenden Definition für „mathematical literacy" wird einsehbarer, wenn man die mathematikdidaktische Hintergrundphilosophie, aus der das internationale PISA-Framework maßgeblich stammt, mit bedenkt. Diese ist in wesentlichen Teilen durch die von FREUDENTHAL seit den 1970er-Jahren dargelegte grundsätzliche Position beeinflusst (vgl. FREUDENTHAL 1977, 1981, 1983).

FREUDENTHAL propagiert ein das Lehren und Lernen von Mathematik beschreibendes und organisierendes Modell.[4] Dessen Grundgedanken sind folgende: Um eine tragfähige Basis für das Lehren und Lernen mathematischer Begriffe zu gewinnen, sollte man sich zunächst an der, wie FREUDENTHAL (1983) sich ausdrückt, „didaktischen Phänomenologie der mathematischen Begriffe" orientieren. Diese Analysen sollen aufzeigen, wie mathematische Begriffe „in der Welt" verankert und aus einem zunehmend reflektierten Gebrauch in kontextbezogenen Problemsituationen heraus entstanden sind. Dies sei, so FREUDENTHAL (1983, IX), "a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind". Nicht eine vorweg genommene Abstraktion und die anschließende Anwendung, sozusagen von außen und im Nachhinein, oder wie FREUDENTHAL (1983, X) sagt, ein nur das „Fertige" rezipierendes "concept attainment", regieren also den Erwerb mathematischer Begriffe, sondern der Gebrauch in geeigneten Situationen und die zunehmende Lösung von diesen, ohne den Kontextbezug je ganz aufzugeben. FREUDENTHAL (vgl. 1981) nennt diesen Prozess „progressive Schematisierung". Dies zielt ab auf die Ausbildung tragfähiger „mental objects" (FREUDENTHAL 1983, X) als Grundlage der mathematischen Begriffe und deren Gebrauch. FREUDENTHALS Grundkonzept beinhaltet also zwar eine Orientierung „an der Welt", erschöpft sich aber keineswegs darin, sondern sieht dies als Bedingung dafür, die mathematischen Begriffe als "mental objects" zu erfassen.[5] Nicht von ungefähr ist daher das vierte von FREUDENTHALS "major problems of mathematical education": "How to keep open the sources of insight during the training process" (FREUDENTHAL 1981, S. 141).

Es handelt sich somit in FREUDENTHALS Konzeption nicht einfach um vordergründigen Einbezug von „Anwendungen" in den Unterricht. Im Konzept der "realistic mathematics education" (vgl. DE LANGE 1987), wie das auf FREUDENTHALS Ideen aufbauende Unterrichtskonzept in den Niederlanden genannt wird, gibt es nämlich einen entscheidenden Gedanken: "The real world problem will be used to develop mathematical concepts. [...] The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts." (DE LANGE 1996, S. 90)

Das Konstrukt "mathematical literacy" im Sinne des internationalen PISA-Frameworks bezieht sich daher deutlich auf die begriffsbildenden Seiten der Mathematik. Dies kommt auch in den Items zum Ausdruck (vgl. OECD 2002; siehe auch Abschnitt 3 in diesem Aufsatz). Im PISA-Framework (vgl. OECD 1999, S. 41) wird dazu eine Aussage FREUDENTHALS wieder zitiert: "Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world." (FREUDENTHAL 1983, IX) Dies kann in zweierlei Weisen gelesen werden. Einerseits wird beschrieben, dass der Bezug zur "real world" vielfältig ist und über eine Anwendung auf das sog. „Lebensweltliche" weit hinausgeht. Andererseits betont diese Aussage abermals, dass es gerade die Begriffe sind, die als "tools" zur Erschließung „der Welt" in Frage kommen, und nicht etwa allein das Beherrschen alltagstauglicher Rechenverfahren.

Es wird nun zwingend, dass die in den traditionellen Curricula oft vorherrschend unterrichteten isolierten prozeduralen Fertigkeiten ohne Kontextbezug nicht den Focus von PISA bilden können. "Skills and routines" werden daher im internationalen PISA-Test nicht isoliert erfasst, sondern sind stets eingebunden in kontextgebundene, problemorientierte Aufgaben und Aufgabenkomplexe.

2.2 „Literate citizenship" und „mathematical proficiency": Umfassende Ansprüche an mathematische Fähigkeiten für alle in der internationalen Diskussion

FREUDENTHAL pointiert seine Auffassungen über das Lehren und Lernen von Mathematik letztlich aus einem (seinem) Bild der Mathematik heraus: Mathematik wird nur durch aktive Auseinandersetzung angeeignet und dieser Prozess ist daher auf Bedeutungen, Kontexte, situativen und funktionalen Gebrauch – sei es innerhalb, sei es außerhalb der Mathematik – angewiesen. Das konsequente Durchhalten dieser Position charakterisiert FREUDENTHALS Arbeiten.

Dass es bei jeder Bestimmung dessen, was mit Mathematik in der Ausbildung für alle erreicht werden soll, stets um ein wechselseitiges Durchdringen von Situationen, Kontexten und Problemen mit mathematischen Begriffen und Verfahren geht, wird von vielen Autoren aus unterschiedlichen Positionen heraus betont. Aus der amerikanischen Mathematikdidaktik, die sich im Zuge der Erstellung der "Principles and Standards for School Mathematics" (NCTM 2000) mit diesem Problem besonders nachdrücklich konfrontiert sah, seien zwei prominente derartige Meinungen herausgegriffen.

SCHOENFELD (vgl. 2001) argumentiert zunächst von biographischen Erfahrungen her (vgl. auch SCHOENFELD 1988). Er habe wohl in der Schule einen isolierten – also nicht kontextorientierten – und verfahrensbezogenen – also nicht problemhaltigen – Mathematikunterricht erhalten. Betrachte man aber, welche Art von "quantitative literacy" (STEEN 2001) man tatsächlich in öffentlichen Diskursen benötige, dann zeige sich, dass es gerade die Fähigkeit sei "to make use of various modes of mathematical thought and knowledge to make sense of situations we encounter as we make our way through the world" (SCHOENFELD 2001, S. 51). Und weiter (S. 53): "Interestingly, every one of the items I would have profited from as a mathematician-in-training is absolutely essential for literate citizenship." Er zählt dann auf, dass man gerade als "literate citizen" Probleme bewältigen muss, für die keine vorgefertigten Lösungen vorhanden sind, Entscheidungen zu treffen und Daten zu analysieren hat, wozu gerade der verständige und flexible Gebrauch moderner Technologien gelernt sein will, und dass schließlich die Fähigkeit zu überzeugender Darstellung seiner Gedanken wichtig für jeden Beruf ist. "In short, the mathematical skills that will enhance the preparation of those who aspire to careers in mathematics are the very same skills that will help people become informed and flexible citizens, workers, and consumers." (SCHOENFELD 2001, S. 53)

Konsequenterweise sind diese breit gefächerten Fähigkeiten, die "quantitative literacy" und somit erst recht "mathematical literacy" ausmachen, auch im Unterricht anzusprechen, in idealer Weise in allen Fächern, wann immer die Kontexte sich anbieten. Freilich setzt das Bewusstheit über ein entsprechend breites Bild der Mathematik voraus. Ein Rückzug auf ein Denken, das die Funktion des Mathematikunterrichts nur im Bereitstellen von Verfahren sieht, und nicht gleich auch die Diskussionen in Problemkontexten mit einschließt, verbietet sich demnach.

In einem Bericht an den National Research Council, die sog. "Mathematics Learning Study" (KILPATRICK/SWAFFORD/FINDELL 2001) werden ebenfalls Teilfähigkeiten, sog. "strands", zusammengestellt, die umschreiben, wie weit der Rahmen zu ziehen ist, um mathematische Bildung für alle wirklich zu erfassen. KILPATRICK (2002, S. 66) kommt auf das Problem zurück, welcher der Begriffe "mathematical literacy", "quantitative literacy", "numeracy" etc. geeignet sei, die Breite der Anforderungen am prägnantesten zu umschreiben. Neben durchaus vorhandenen spezifischen Konnotationen einzelner solcher Begriffe kämen aber doch die wesentlichen Komponenten immer wieder vor, weshalb er den Begriff der "mathematical proficiency" bevorzuge. "The five strands of mathematical proficiency are (a) conceptual understanding, which refers to the student's comprehension of mathematical concepts, operations, and relations; (b) procedural fluency, or the student's skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; (c) strategic competence, the student's ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; (d) adaptive reasoning, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments; and (e) productive disposition, which includes the student‘s habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one‘s own efficacy as a doer of mathematics.“ (KILPATRICK 2002, S. 66)

Diese Aufzählung ist insofern bemerkenswert, weil sie sozusagen spiegelbildlich zu FREUDENTHALs und SCHOENFELDs Vorgehen auch aus einer inneren Sicht der Mathematik heraus argumentiert und dennoch dazu kommt, dass der verständige Gebrauch der mathematische Kenntnisse in Problem- und Anwendungskontexten essentiell zur “mathematical proficiency“ gehört. Eben diese breitere Ansatzweise ist Basis der in Deutschland in jüngerer Zeit geführten Diskussionen zur mathematischen Allgemeinbildung. Die PISA-Definition für “mathematical literacy“ ist demgegenüber tatsächlich spezifischer, indem sie explizit die Rolle des Bürgers in der (westlichen, entwickelten) Gesellschaft in die Definition aufnimmt und die innermathematische Strukturierungsfähigkeit weniger betont.

2.3 Der Allgemeinbildungsanspruch des Mathematikunterrichts in der deutschen Diskussion

Eine Bestimmung der Rolle, die der Mathematik als Bestandteil allgemeiner Bildung zukommt, kann nicht ohne Überlegungen zum epistemologischen Status diese Faches auskommen. Eine solche Bestimmung wurde z.B. im Gutachten zur Vorbereitung des BLK-Modellversuchs „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ vorgenommen (BLK 1997). Dort wird davon ausgegangen, dass sich Mathematik charakteristischerweise im Spannungsfeld von „Abbildfunktion und systemischem Charakter“ (vgl. BLK 1997, Kap. 5.1.) bewegt: Einerseits tritt Mathematik als eine in vielen Bereichen anwendbare Wissenschaft auf; andererseits verdankt die Mathematik diese breite Anwendbarkeit gerade ihrem abstrakten und formalen Charakter, also dem begrifflich und strukturell bestimmten Zugriff auf die Probleme. Mathematik stellt die Modelle bereit, aber auch die Methoden, diese Modelle in sich zu sichern, zu verknüpfen, weiter zu entwickeln und zu begründen (vgl. Kap. 5.1. in BLK 1997; NEUBRAND 1997).[6] Mathematik pendelt also in charakteristischer Weise zwischen Orientierung an „der Welt“ und dem Herstellen einer innermathematischen „Ordnung“, mit der diese Orientierung reflektiert und strukturiert wird. Gerade in dieser Spannung liegt der Anspruch und der Reiz, aber auch die Problematik der Mathematik in der Schule.

Aus einem vollkommen anderen Zusammenhang heraus kann man den Verweis auf die Komplementarität und Spannung spezifisch-gegenstandsgebundener Kenntnisse und formaler Denkweisen auch folgendermaßen lesen: TENORTH (vgl. 1994) macht den Allgemeinbildungsanspruchs der Schule an zwei Polen fest, der Sicherung eines Minimalbestands an Kenntnissen auf der einen Seite, andererseits aber an der „Kultivierung der Lernfähigkeit“ (TENORTH 1994, S. 94ff.). Dabei geht es „um die gesellschaftliche Sicherung von ‚Lernfähigkeit‘ als einer individuellen Verhaltensdisposition, d.h. um die Generalisierung eines Lern- und Verhaltensstils spezifischer Art: Er zeichnet sich dadurch aus, dass Menschen im Umgang mit Schwierigkeiten und Problemen kognitive Lösungswege und Strategien bevorzugen [...]“ (TENORTH 1994, S. 101), eben den „lernenden Umgang“. Eine Kultivierung der Lernfähigkeit im pädagogischen Prozess zunehmend zu erreichen, hieße aber, über die Realisierungsstandards und die Praxis nachzudenken: „Denn der kognitive, lernende Umgang mit Problemen kennt seine eigene Graduierung. Es reicht zwar zu qualitativen Unterscheidung [gemeint wohl: in Abgrenzung von einem nur umfangreicheren Kenntnisstand; M.N.] aus, dass man weiß, wo man Wissen holt und sucht, statt vor Problemen zu verzweifeln, aber zwischen dem Nachschlagen in einem Lexikon, dem gemeinsamen Ratschlag und dem Arrangement eigener Experimente bestehen doch graduelle Differenzen, die den Pädagogen nicht ohne Grund wichtig sind“ (TENORTH 1994, S. 101f.).

Bezieht man diese Überlegungen auf ein Fach, hier die Mathematik, wie anders lässt sich dann Lernfähigkeit kultivieren, als dadurch, dass die spezifische Art der Durchdringung der Gegenstände durch das Fach im Unterricht selbst zur Geltung gebracht wird; eben dies ist ja der Kern des „lernenden Umgangs“. Für die Mathematik spezifisch ist die begriffliche Vernetzung, sei es durch das Modellieren/Mathematisieren von Situationen – und auch hier: mit der Tendenz der Herausbildung mathematischer Begriffe, wie FREUDENTHALs oben dargestellte Position sagt, sei es durch die Herstellung einer innermathematische Ordnung selbst – die gerade den „Prozess“ des Mathematiktreibens ausmacht; vgl. oben KILPATRICKs “strands”. Lernfähigkeit zu kultivieren ohne ein breites Bild von Mathematik – Verfahren, Modellierungen und innermathematische Strukturierungen umfassend – wird also nicht realisierbar sein. Didaktische Möglichkeiten hierzu gibt es aber, auch auf der Ebene des konkreten Stoffbezugs (vgl. NEUBRAND 2000; SJUTS 2003).

In der mathematik-didaktischen Diskussion im engeren Sinne ist die oben angesprochene Komplementarität und Breite des Anspruchs an mathematische Allgemeinbildung so aufgegriffen und gebündelt worden: „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen;
2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen;
3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“ (WINTER 1995, S. 37)

Dabei[7] ist in (1) die Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin angesprochen, und tatsächlich ist sie in dieser Hinsicht von universeller Reichweite. Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik aber erst, wenn erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann. Der Modellcharakter mathematischer Problemlösungen darf also nicht verhüllt werden oder undeutlich bleiben. Kenntnisse und Fertigkeiten aus Arithmetik, Algebra, Stochastik, Geometrie und Analysis sind notwendig für solche Modellbildungen. Mit (2) ist sozusagen die innere Welt der Mathematik angesprochen. Jeder Schüler sollte erfahren, dass Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen, oder anders formuliert: dass strenge Wissenschaft überhaupt möglich ist.[8] Mit (3) ist angesprochen, was früher der formale Bildungswert der Mathematik genannt worden ist: Mathematik als Schule des Denkens. Dabei bestand und besteht der Anspruch, die Übung im strengen Denken innerhalb der Mathematik diszipliniere die allgemeine – also auch außermathematische – Praxis des Denkens. Tatsächlich ist es aber wohl so, dass ein weiter Transfer sich nicht von selbst einstellt, vielmehr ausdrücklich gewollt und durch geeignete didaktische Interventionen gefördert werden muss.[9]

Es ist unschwer zu erkennen, dass der von TENORTH angeschlagene Grundton der „Kultivierung der Lernfähigkeit“ in allen drei Komponenten enthalten ist. Sowohl der Bezug zur Welt als auch das Erkennen der innermathematischen Ordnung zielen auf die Verwendung „kognitiver Lösungswege und Strategien“ (TENORTH 1994) als des bevorzugten Umgangsstils mit Problemen. Diese allgemeine Forderung wird also gerade durch ein Bestehen auf der Breite der Auffassung von Mathematik konkretisiert.

HEYMANN (vgl. 1996) betrachtet das Problem der mathematischen Allgemeinbildung hingegen aus einem anderen Blickwinkel. Er kommt demnach zu einer anderen Auffassung von „Breite“. Die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts wird durch den sozusagen zuliefernden Beitrag der Mathematik bestimmt. „Breite“ ist also nicht die intern definierte Spannweite mathematischen Arbeitens sondern ergibt sich aus der Vielfalt der Anforderungen an den allgemeinbildenden Unterricht,[10] und diese reichen von der praktischen Brauchbarkeit bis zur Entwicklung einer Weltsicht.

2.4 Bündelung „mathematischer Grundbildung“ in drei Typen mathematischen Arbeitens in der Rahmenkonzeption der deutschen PISA-Ergänzung

Wie auch immer man auf die Rolle der Mathematik in der schulischen Ausbildung zugreift, von einer spezifischen, die mathematische Aktivität betonenden Sicht auf die Mathematik aus, wie FREUDENTHAL, oder von dem Gebot eines „aufklärenden“ und dadurch allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, wie WINTER, in allen Fällen, auch bei den anderen zitierten Auffassungen über “mathematical literacy“, “mathematical proficiency“ etc., stößt man darauf, dass keine einzelne Funktion die Reichweite der mathematischen Ausbildung in der Schule erfassen kann. Ein Test, der sich wie PISA die Aufgabe stellt, die mathematischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler als “Knowledge and Skills for Life“ (OECD 2000) zu beschreiben, ist somit auf eine breite Sichtweise der Mathematik angewiesen.

Im internationalen PISA-Framework für den Test PISA-2000 (vgl. OECD 1999) wird diese Breite eingelöst durch die Klassifizierung der Aufgaben nach mathematikdidaktischen Gesichtspunkten: In den so genannten Kompetenzklassen wird mit der Unterscheidung “reproduction – connection – generalization“ ein mathematikdidaktisch begründeter Anspruch an den in einer Aufgabe vorzunehmenden Modellierungsprozess formuliert. Das Framework für den nationalen Ergänzungstest in PISA (vgl. NEUBRAND u.a. 2001), das die Grundlage für die Neukonstruktion zusätzlicher Items war,[11] hat diesen Gedanken aufgenommen, bringt aber Differenzierungen und Erweiterungen des internationalen Ansatzes an.

Die Differenzierung in der deutschen Rahmenkonzeption bezieht sich darauf, dass in die Klassifizierung der Aufgaben auch die Unterschiedlichkeit der kognitiven Prozesse eingeht, die bei der Aufgabenlösung stattfinden werden. Um die Ziele eines auf „mathematische Grundbildung“ bezogenen Mathematikunterrichts, wie sie etwa in dem obigen Zitat von WINTER zum Ausdruck kommen, in der ganzen Breite abzudecken, und auch um – in Anschluss an die kognitionspsychologische Forschung – das Potential der mathematischen Fähigkeiten insgesamt abzubilden (vgl. J. NEUBRAND 2002), sind solche Differenzierungen nützlich. Eine Erweiterung des internationalen Frameworks wird vorgenommen, indem neben die in PISA-international verwendeten kontext-bezogenen Aufgaben nun auch mehr Aufgaben mit sog. „innermathematischen Kontexten“, also innermathematisch problemhaltige Aufgaben, sowie zusätzliche Items, die ausschließlich „technische Fertigkeiten“ verlangen, treten.

Auch die nationale Rahmenkonzeption von PISA ist also „mathematischer Grundbildung“ verpflichtet, legt diese aber – anknüpfend an die oben in 2.3 dargestellten Elemente der deutschen Diskussionen zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht – breiter aus als es „mathematical literacy“ nach der internationalen Definition tut.

Das nationale Framework in seiner ursprünglichen Fassung (vgl. NEUBRAND u.a. 2001) differenziert die Aufgaben nach fünf Kompetenzklassen aus, indem es die drei internationalen Kompetenzklassen teilweise zerlegt, entsprechend der jeweils vorwiegenden kognitiven Aktivität, die in den Items verlangt wird. Im späteren Verlauf, z.B. in den PISA-Berichten (vgl. KLIEME u.a. 2001; vgl. NEUBRAND u.a. 2002; NEUBRAND/KLIEME 2002; KNOCHE u.a. 2003; ROST u.a. 2003) wurden diese fünf Kompetenzklassen nochmals gebündelt – nun aber quer zu den internationalen Kompetenzklassen – und als die so genannten „drei Typen mathematischen Arbeitens“ aufgeführt. Diese bestehen aus der Bearbeitung der

– „technischen Aufgaben“
– „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“,
– „begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“.

„Technische“ Aufgaben sind dabei am leichtesten zu erklären. Es sind diejenigen Aufgaben, bei denen ein vorgegebener Ansatz mittels bekannter mathematischer Prozeduren (Rechnen, Konstruieren nach vorgegebenen Regeln) kalkülhaft durchzuführen ist. Die „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“ stellen die Anwendungsaufgaben oder die innermathematisch problemhaltigen Aufgaben dar, bei denen die Mathematisierung bzw. das Erstellen eines Lösungsschemas auf einen Ansatz führt, der rechnerisch, oder allgemeiner: prozedural, zu bearbeiten ist. Bei außermathematischen Aufgaben ist dies im Wesentlichen die Klasse der so genannten „Textaufgaben“, wenngleich das Format nicht unbedingt einen „Text“ im üblichen Sinn als Ausgangspunkt haben muss; eine „klassische“ Textaufgabe läuft nämlich meist darauf hinaus, die gesuchte Größe aus einem nach dem Verstehen der Situation zu gewinnenden Ansatz heraus zu *berechnen*.

Mit dem Ausdruck „begrifflich“ sind Aufgaben bezeichnet, bei denen die Modellierung oder die Problemlösung mittels des Einsatzes begrifflichen Denkens – das kann das Herstellen begrifflicher Zusammenhänge, eine Argumentation, das Aufstellen einer durchdachten Systematik etc. sein – zu Ende gebracht werden kann. Essentiell für „begriffliches mathematisches Arbeiten“ in diesem Sinne ist, dass ein *Zusammenhang* zwischen Wissenselementen hergestellt werden muss, und dass dieser Zusammenhang sich nicht nach Durchführen eines Algorithmus erschließt, sondern aufgrund einer erkannten oder erst konstruierten *Beziehung* zwischen den Gegenständen. Diese Art des Vorgehens ist ebenso charakteristisch für mathematisches Arbeiten wie das rechnerische Verarbeiten eines Ansatzes. Gemeint ist also nicht Wissen, *dass* ein bestimmtes Datum unter ein bestimmtes „Konzept“ fällt, wie es oft in der Kognitionspsychologie als Konzeptwissen definiert wird, sondern Wissen, *wie* etwas in sich oder mit anderen Gegenständen *zusammenhängt*.

Die sonst in der Wissenspsychologie gern benutzte Konzept-Prozess-Dichotomie zeigt im Bereich der Mathematik nicht auf die entscheidenden qualitativen Differenzen des Wissens. Denn gerade die beiden Arten von „Prozessen“, das Herstellen eines gedanklichen Zusammenhangs einerseits und das Durchführen eines Algorithmus, meist einer Rechnung, andererseits, sind es, die die kognitive Spannweite mathematischen Arbeitens ausmachen. Ersteres wird von HIEBERT (1986) als “conceptual knowledge“ bezeichnet, und wenn diese Aktivität vorwiegend in einer Aufgabe erforderlich ist, sprechen wir von einer „begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgabe“, das Zweite nennt HIEBERT “procedural knowledge“, und dieses kommt sowohl in den „technischen“ Aufgaben als auch – nach einem Mathematisierungsprozess – in den „rechnerischen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben“ zum Zuge.

Für den Aufbau eines Tests mit der Intention, „mathematische Grundbildung“ zu erfassen, ist dann also erforderlich, Aufgaben aus allen drei Kategorien des mathematischen Arbeitens in ausgewogener Anzahl zusammenzustellen. PISA tat dies sowohl im internationalen Teil, dort allerdings – wie gesagt – ohne die technischen Aufgaben, als auch im nationalen Teil und unterscheidet sich damit im Charakter der getesteten Mathematik deutlich von den Tests, die in manchen Bundesländern auf strikt curricularer Basis konstruiert wurden (vgl. KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE 2000, S. 164, Abb. 3.5.). PISA ist also unter diesem Vergleichsmaßstab ein spezifisch auf eine breite, Mathematik möglichst umfassend berücksichtigende Grundbildung, mithin auf „literacy“ im oben geschilderten breiten Sinn ausgelegter Test.

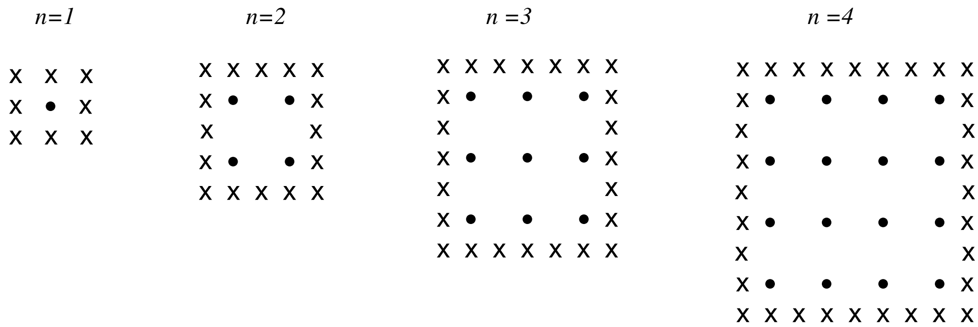
3 Eine Beispielaufgabe aus PISA: „Mathematische Grundbildung“ als Realisierung eines breiten Spektrums mathematischen Arbeitens

Ein Apfelbaum wird gepflanzt (Abbildung 1) und zu seinem Schutz vor dem Wind werden 8 Fichten ringsherum gepflanzt.[12] Was ist daran lebensnah? – Vermutlich nichts, denn sogleich ist von „quadratischem Muster“, von der „beliebigen Anzahl *n*“ die Rede und nicht mehr vom Obstanbau, und vermutlich doch vieles, nämlich dass Fähigkeiten zum Erkennen und Strukturieren von Daten gefordert werden (vgl. SCHOENFELDS Zitate oben). Daher gilt die Aufgabe wohl vielen[13] als interessant, weil sie so aspektreich ist. Ist es nur die schöne Verpackung oder kommt der Aspektreichtum von der qualitativen Vielfalt der mathematischen Anforderungen?

Abbildung 1: Eine Aufgabe aus dem internationalen PISA-2000-Test
(Quellen: OECD 2001, 2002; KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE 2001)

Ä P F E L

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum. Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl *(n)* von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



x = Nadelbaum
• = Apfelbaum

Frage 1:
Vervollständige die Tabelle:

n	Anzahl Apfelbäume	Anzahl Nadelbäume
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

Frage 2:
Es gibt zwei Formeln, die man verwenden kann, um die Anzahl der Apfelbäume und die Anzahl der Nadelbäume für das oben beschriebene Muster zu berechnen:
Anzahl der Apfelbäume = n^2, Anzahl der Nadelbäume = $8n$,
wobei n die Anzahl der Apfelbaumreihen bezeichnet.
Es gibt einen Wert für n, bei dem die Anzahl der Apfelbäume gleich groß ist wie die Anzahl der Nadelbäume. Bestimme diesen Wert und gib an, wie du ihn berechnet hast.

Frage 3:
Angenommen, der Bauer möchte einen viel größeren Obstgarten mit vielen Reihen von Bäumen anlegen. Was wird schneller zunehmen, wenn der Bauer den Obstgarten vergrößert: die Anzahl der Apfelbäume oder die Anzahl der Nadelbäume? Erkläre, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

In der Tat lebt die Aufgabe von den unterschiedlichen mathematischen Aktivitäten, die angesprochen werden. Die Abzählaufgabe in Frage 1 mündet in natürlicher Weise in die Frage „Wie geht es weiter?“ und dies fordert auf zum erst visuellen, dann auch algebraischen Strukturieren: Offenbar steht an der einen Seite des Gartens vor jedem Apfelbaum ein Nadelbaum, aber zum besseren Schutz auch noch dazwischen, und schließlich noch ein Nadelbaum an der Ecke. Das wiederholt sich noch dreimal. Wenn es n Apfelbäume sind, sind es also $2n$ Nadelbäume an der Seite, und dies kommt vier Mal vor; das ergibt $8n$ Nadelbäume. Auch wenn diese Beziehung in der PISA-Aufgabe gar nicht als algebraische Formel herzuleiten ist, so ist doch zwischen den Zahlen aus der Tabelle in Frage 1 ein Zusammenhang herzustellen und es sind – auf welchen Wegen auch immer dies einzelne Schüler machen werden – Beziehungen zu erkennen. Die Frage erfordert folglich “conceptual knowledge“ nach HIEBERT (1986), es ist eine „begriffliche“ Aufgabe in der Sprechweise von 2.4. Aus der Allgemeinbildungsperspektive in 2.3 wird in diesem Teil der Äpfel-Aufgabe auch heuristisches Denken und Problemlösen, der Bereich (3) nach WINTER (1995; siehe oben), angesprochen. Denn ein Vorgehen etwa wie das oben genannte ist halb experimentell, halb konzeptuell, wie es oft charakteristischerweise bei heuristischen Zugängen ist. Auch dass es um das Sehen, Erkennen und Strukturieren eines Musters geht, deutet auf die heuristische Perspektive hin. Ebenfalls zur mathematischen Grundbildung wurde in 2.3 die Perspektive des Herstellens einer innermathematischen Ordnung gerechnet. Bei diesem Aufgabenteil kommt diesbezüglich wenigstens implizit der zentrale Begriff der Funktion vor, als eine Möglichkeit, Ordnung in ein Feld zu bringen.[14]

Bei der zweite Teilaufgabe (Frage 2) überwiegt schließlich das Rechnerische, wenngleich man hier keineswegs auf ein schematisches Vorgehen beschränkt ist. Hier und in der wieder vorwiegend „begrifflichen“ Frage 3 stehen jedenfalls als potentielle Aktivitäten des Aufgabenlösers die diversen Vergleichsmöglichkeiten zwischen Funktionen an: quadratische Funktion vs. lineare Funktion. Auch dies ist unter der Perspektive mathematischer Grundbildung zu sehen, weil einerseits eine Verbindung von formalem und inhaltlichem Denken, algebraischen und geometrischen Aspekten (sich schneiden, Steilheit, ...), stattfinden kann, andererseits käme man so auch wieder auf die Lebensbedeutung zurück: Wie hängen die beiden Größen zusammen? Hier sind es Anzahlen von Apfel- und Nadelbäumen, allgemein ist die Abhängigkeit zweier Größen voneinander aber eine der zentralen Fragen in nahezu allen Anwendungsbereichen.

Urteile über eine Aufgabe von der Art, wie sie soeben vorgenommen wurden, können sich in einem Leistungstest wie PISA allerdings nicht auf eine direkte empirische Beobachtung authentischer Schülerlösungen stützen. Das ist bei einem large-scale-Test im Hauptstrang der Untersuchung prinzipiell weder möglich noch angestrebt. Es besteht allenfalls die Möglichkeit, Begleitstudien zum subjektiven Lösungsverhalten anzuschließen. Einschätzungen von Aufgaben, aus der Sicht der Aufgabenkonstrukteure bzw. Testauswerter müssen vielmehr dazu dienen, das kognitive und mathematische Profil eines Tests festzulegen bzw. zu beschreiben. Die Beschreibungskategorien sollen dann aber so sein, dass die Verteilungen der Antworten in bestimmten Populationen inhaltlich aussagekräftige Rückschlüsse auf die Strukturen der Leistungen erlauben. Nicht alle Aufgabenmerkmale tun das in gleicher Weise.[15] Die Unterscheidung grundlegender Aspekte kognitiver mathematischer Aktivität, wie sie in den drei Typen mathematischen Arbeitens zum Ausdruck kommt, erlaubt aber, auf wesentliche Dimension der mathematischen Leistung zurückzuschließen, und dies zudem von einem (relativ) objektiven, wenig national geprägten Standpunkt[16] aus.

4 „Mathematische Grundbildung“ als Interpretationsfolie für die PISA-Resultate

Im Abschnitt 2.4 wurde die Erfassung „mathematischer Grundbildung“ durch die Beachtung der drei Typen mathematischen Arbeitens und die Einforderung einer ausgewogenen Performanz in diesen Typen konkretisiert. Tatsächlich hat diese Unterscheidung in den PISA-Berichten tieferen Einblick in die Strukturen mathematischer Leistung erlaubt, und zwar in mehrfacher Hinsicht, deskriptiv und analytisch:

1) Von KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE (2001) wurden die Ergebnisse des PISA-2000-Tests in Deutschland unter anderem dadurch auf ihre praktische Relevanz hin dargestellt, dass versucht wurde, ein so genanntes „*Regelniveau*[17] *mathematischer Grundbildung*“ zu definieren.

Die Bestimmung eines solchen „Regelniveaus“, also eines Kenntnisstandes, der auf mittlerem Niveau ausreichende und wesentliche Komponenten mathematischer Grundbildung erfasst, wird zwar immer nur durch einen Konsens der Beteiligten (Schüler, Lehrer, Eltern, Ausbilder, Didaktiker usw.) zu erreichen sein, nicht in Form einer deduktiven Ableitung. Innerhalb der drei Typen mathematischen Arbeitens kann man aber dennoch präziser argumentieren und „die Erwartungen“ genauer spezifizieren. Zugleich ist durch Berücksichtigung aller drei Typen sichergestellt, dass ein breites, von den theoretischen Ideen einer „mathematischen Grundbildung“ getragenes Spektrum mathematischer Fähigkeiten erfasst wird. „Mathematische Grundbildung“ stellt daher eine argumentative Basis zur Verfügung, von der aus man das Erreichen des Regelniveaus als eine Möglichkeit der inhaltlichen Interpretation von PISA-Daten ansprechen kann. Ohne hier in Einzelheiten zu gehen (vgl. zu den konkreten Bestandteilen des Regelniveaus KLIEME/NEUBRAND/ LÜDTKE 2001 und NEUBRAND 2002) zeigte sich bekanntlich an den PISA-Daten, dass im internationalen Vergleich in Deutschland beim Erreichen des Regelniveaus offenbar strukturelle Schwächen bestehen.

Die mathematische Leistung wird dann nicht nur als Punkt auf einer linearen Skala oder als abstrakte Verteilung begriffen, sondern die Art der Verteilung erhält einen inhaltlichen Sinn. Gerade in Hinblick auf die anstehenden Diskussionen um „Standards“ (KLIEME 2003) wird über dieses Problem noch mehr zu diskutieren sein. Die Konzeptionen von „mathematischer Grundbildung“ können dann eine Folie abgeben, vor der diese – wenn schon zwangsläufig norm- und meinungsgebundene – Diskussion rational geführt werden kann (vgl. NEUBRAND 2003).

2) Die *Beschreibung von Kompetenz-Stufen,* also des Inhalts eines bestimmten Fähigkeitsniveaus der Probanden, kann zwar auch global über ein abstraktes Konstrukt „mathematische Fähigkeit“ erfolgen, wie das noch KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE (vgl. 2001) durchführten.

Wenn man die Beschreibung der auf einer Stufe erreichten mathematischen Fähigkeiten aber jeweils separat für die drei Typen mathematischen Arbeitens, also in Anlehnung an die gewählte Struktur „mathematischer Grundbildung“, vornimmt, dann wird diese Beschreibung übersichtlicher, weil unterscheidbare mathematische Denkweisen auch getrennt aufgeführt werden, nachvollziehbarer, weil man sich dann direkt an einem theoretisches Gerüst der mathematischen Fähigkeiten orientiert, und auch brauchbarer für Zwekke der konkreten Unterrichtsplanung, weil die jeweils betrachteten Aufgabenmengen homogener und somit leichter variierbar werden. Bei NEUBRAND (vgl. 2002) und KNOCHE u.a. (vgl. 2002) sind solche Beschreibungen der Kompetenzstufen durchgeführt. Sie dienen dazu, das ganze Spektrum „mathematischer Grundbildung“ auf der Basis der PISA-Items darzustellen.

3) Dass die oben beschriebene Struktur „mathematischer Grundbildung“ als ausgewogene Performanz in den drei Typen mathematischen Arbeitens, sich auch empirisch im PISA-Test abbildete, zeigten Analysen der *Schwierigkeitsentwicklung* von NEUBRAND u.a. (vgl. 2002).

Jeweils andere, zentrale, auf den Modellierungs- und Problemlöseprozess selbst und auf bestimmte mathematische Tätigkeiten bezogene Item-Merkmale erklärten nach multiplen Regressionsanalysen die Schwierigkeit der Items in den drei Klassen der Items. Es ist von Standpunkt der „mathematischen Grundbildung“ aus also durchaus erheblich, in welcher der drei Typen mathematischen Arbeitens ein bestimmtes Niveau erreicht wird. Für die Verwendung der empirischen Daten in der Bildungsdiskussion ist auch dies ein wichtiger Hinweis, weil damit für die Notwendigkeit der Ausbildung vielfältiger mathematischer Aktivitäten auch empirisch argumentiert werden kann.

4) Weitere Berechnungen von KNOCHE u.a. (vgl. 2002) zeigten darüber hinaus, dass die Unterschiede in der Performanz auf den drei Typen mathematischen Arbeitens sich auch auf *individueller Ebene* andeuten.

Die Leistungen der Probanden auf den technischen Aufgaben einerseits und den begrifflichen Modellierungs- und Problemlöseaufgaben andererseits hängen nicht so stark zusammen, wie oft angenommen. Das zeigt umso mehr, dass – nun ins Normative gerichtet – auf eine gleichmäßige Ausbildung aller Facetten „mathematischer Grundbildung“ geachtet werden muss.

5) Selbst auf *Bundesländerebene* sind Unterschiede in den drei Typen mathematischen Arbeitens zu erkennen, wie ROST u.a. (vgl. 2003) durch entsprechend separierte Vergleiche herausgearbeitet haben.

„Mathematische Grundbildung“ ist demnach nicht in allen Bundesländern in gleicher Weise verwirklicht. In den ostdeutschen Bundesländern ist in Mathematik ein relativer Vorteil gegenüber den westdeutschen Ländern bei den technischen Aufgaben zu erkennen, eine Profilstruktur, die sich analog auch in Teilkompetenzen des naturwissenschaftlichen Wissens abzeichnet. Ebenso schälen sich bei näherer Datenanalyse entlang der drei Typen mathematischen Arbeitens im *internationalen Vergleich* unterschiedliche Profile mathematischer Leistung heraus (vgl. NEUBRAND/NEUBRAND 2003). Analysen von Itemmerkmalen zeigen darüber hinaus auch Gründe für solche Unterschiede auf. Solche Einblicke in die Feinstruktur „mathematischer Grundbildung“ stellen wichtige Indizien für eine gezielte Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts dar.

Anmerkungen

1 NEUBRAND/NEUBRAND/SIBBERNS (vgl. 1997, S. 21, Figur 2) zeigen für Deutschland im Einzelnen die Verhältnisse von curricular validen, curricular nichtvaliden und über das Kerncurriculum hinaus be-

arbeiteten Stoffen bei TIMSS-II, der Untersuchung der Schülerinnen und Schüler im achten Schuljahr, auf.

2 In Deutschland muss das in spezifischen Einzelheiten u.U. sogar als „bundeslandbezogen“ gelesen werden.

3 U.a. weist JABLONKA (vgl. 2003) explizit auf dieses Problem hin, indem sie die Abhängigkeit eines wie auch immer zu bestimmenden Begriffs von „mathematical literacy“ von der jeweiligen sozialen Praxis festhält.

4 FREUDENTHALS Ideen betreffen allerdings wohl eher die Lernprozess-Ebene. In ihrer ursprünglichen Herkunft sind sie eher nachrangig auf die Verwendung für die Testkonstruktion ausgerichtet (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN für assessment in Unterrichtsansätzen, die FREUDENTHALS Konzeption entsprechen).

5 Dies ist wohl der Grund dafür, dass KAISER (1986, S. 84) FREUDENTHAL einer „wissenschaftlich-humanistischen Richtung“ zuordnet – als Gegenpol zu einer „pragmatischen Richtung“ des anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts.

6 Gewissermaßen wird ein altes, ARCHIMEDES zugeschriebenes Motto wieder aufgegriffen und entfaltet: „Die Mathematik ist das Schattenbild der wirklichen Welt auf dem Bildschirm des Verstandes.“ (vermutlich ARCHIMEDES; wiedergefunden als Vorsatz vor die Kurzgeschichte „Reise in ein dunkles Herz“ von Peter HØEG 2003, S. 7).

7 Im Folgenden werden – relativ textnah und mit Heinrich WINTERs Einverständnis – Passagen aus WINTER (vgl. 1995) paraphrasiert.

8 Ein besonderes und früh zugängliches Erlebnis ist die Erkenntnis, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss. Der erstmals vor über 2000 Jahren gedachte Gedanke, dass und warum jede vorgelegte Menge von endlich vielen Primzahlen unmöglich alle enthalten kann, ist eine deduktive Figur, die etwas von der Kraft autonomen Denkens verspüren lässt. Bis heute hat sich überdies die Leitfunktion der Geometrie als die erste deduktive Wissenschaft erhalten.

9 Es weist aber – möglicherweise gegen den “popular belief“ – gerade die Mathematik mit ihrem hohen Grad an innerer Vernetzung und ihren vielfältigen Beziehungen zur außermathematischen Realität einen besonders großen Reichtum für solche Reflexionen auf.

10 Vielleicht ist es diese andere Herangehensweise, die die auch von HEYMANN selbst nicht vertretene, seinerzeit dennoch heftig diskutierte These provozierte, sieben Jahre Mathematik seien genug.

11 Im Mathematikteil von PISA- 2000 wurden 31 internationale Aufgaben und 86 Aufgaben im nationalen Ergänzungstest verwendet. Alle Aufgaben sind ausschließlich für den PISA-Test entwickelt worden (vgl. KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE 2001).

12 Dieser Abschnitt folgt, ähnlich wie einige Absätze in 2.3, mit dem Einverständnis von Heinrich WINTER einer Interpretation der Apfel-Aufgabe, die WINTER im Januar 2003 in einem Vortrag vor dem Arbeitskreis „Vergleichsuntersuchungen“ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Essen gegeben hat.

13 Nur Mathematik-Didaktikern?

14 Allerdings sind Test-Aufgaben nicht ohne weiteres als Lern-Aufgaben oder gar als Unterrichtsaufgaben zu verwenden. Denn sind die einen auf eine zeitlich eingeschränkte, auf Performanz gerichtete Bearbeitung ausgelegt, so stehen für die anderen auch die freie Vernetzung oder der soziale Austausch als Mittel zur Verfügung. Alleine durch Testaufgaben wird sich also keine tiefere Begriffsbildung anregen lassen.

15 So wird etwa die bei PISA-international eingeführte Klassifikation der „Situationen“ nach der Distanz vom Lebens-Umfeld des Schülers (persönlich – Familie – Schule – lokale Gemeinschaft – Gesellschaft) in Hinblick auf Strukturen mathematischer Leistung kaum mehr erbringen können als eine gleichmäßige Verteilung der Kontexte im Test. Das ist dafür eine Kategorie, die evtl. allgemeine lernpsychologische Probleme abbilden kann.

16 Siehe zu dieser Problematik die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 1.

17 Ursprünglich wurde dieses Niveau als „Standard mathematischer Grundbildung“ bezeichnet (KLIEME/NEUBRAND/LÜDTKE 2001, S. 161). Dies könnte jedoch zu Interferenzen mit den neuerdings vieldiskutierten „Standards“ für Schule und Unterricht führen. Die Bezeichnung „Regelniveau“ ist kompatibel mit dem Sprachgebrauch in der Expertise von KLIEME (vgl. 2003).

Literatur

BAUMERT, J./BOS, W./LEHMANN, R. (Hrsg.) (2000): TIMSS/III – Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie: Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. – 2 Bde. – Opladen.

BAUMERT u.a. 1997 = BAUMERT, J./LEHMANN, R./LEHRKE, M./SCHMITZ, B./CLAUSEN, M./HOSENFELD, I./KÖLLER, O./NEUBRAND, J. (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich: Deskriptive Befunde. – Opladen.

BAUMERT u.a. 2001 = BAUMERT, J./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./STANAT, P./TILLMANN, K.-J.,/WEIß, M. (Hrsg.) (2001): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. – Opladen.

BAUMERT u.a. 2002 = BAUMERT, J./ARTELT, C./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./TILLMANN, K.-J.,/WEIß, M. (Hrsg.) (2002) : PISA 2000 – Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich. – Opladen.

BAUMERT u.a. 2003 = BAUMERT, J./ARTELT, C./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./TILLMANN, K.-J.,/WEIß, M. (Hrsg.) (2003) : PISA 2000 – Ein differenzierter Blick auf die Länder der Bundesrepublik Deutschland. – Opladen.

BAZZINI, L./WHYBROW INCHLEY, C. (Eds.) (2002): Mathematics Literacy in the Digital Era (Proceedings CIEAEM-53, Verbania, Italy, July 2001). – Milano.

BEATON u.a. 1996 = BEATON, A. E./MULLIS, I.V.S./MARTIN, M.O./GONZALES, E.J./KELLY, D.L./SMITH, T.A. (1996): Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study. – Chestnut Hill, MA.

BLK 1997 = BUND-LÄNDER-KOMMISSION FÜR BILDUNGSPLANUNG UND FORSCHUNGSFÖRDERUNG (Hrsg.) (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" (= BLK – Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60). – Bonn. (Kapitel 5.1. als separater Auszug auch bei: NEUBRAND, M. (1997): Mathematik im Rahmen einer modernen Allgemeinbildung. – Arbeiten aus dem Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg, Heft 10/Dezember 1997).

FREUDENTHAL, H. (1977): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bde. 1 und 2. – Stuttgart.

FREUDENTHAL, H. (1981): Major problems of mathematical education. In: Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, pp. 133-150.

FREUDENTHAL, H. (1983): Didactical phenomenology of mathematical structures. – Dordrecht.

HEYMANN, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. – Weinheim.

HIEBERT, J. (Ed.) (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. – Hillsdale.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. VAN DEN (1996): Assessment and realistic mathematics education. – Utrecht.

HØEG, P. (2003): Hommage à Bournonville – Erzählungen. – Reinbek.

JABLONKA E. (2003): Mathematical Literacy. In: BISHOP, A. J./CLEMENTS, M. A./KEITEL, C./LEUNG, F. K. S. (Eds.): Second International Handbook of Mathematics Education. – Dordrecht, pp. 77-104

KAISER, G. (1986): Anwendungen im Mathematikunterricht – Band 1: Theoretische Konzeptionen. – Bad Salzdetfurth.

KILPATRICK, J. (2002): Understanding mathematical literacy: The contribution of research. In: BAZZINI, L./WHYBROW INCHLEY, C. (Eds.) (2002): Mathematics Literacy in the Digital Era (Proceedings CIEAEM-53, Verbania, Italy, July 2001). – Milano, S. 62-72.

KILPATRICK, J./SWAFFORD, J./FINDELL, B. (2001): Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. – Washington.

KLIEME, E. (2000): Fachleistungen im voruniversitären Mathematik- und Physikunterricht: Theoretische Grundlagen, Kompetenzstufen du Unterrichtsschwerpunkte. In: BAUMERT, J./BOS, W./LEHMANN, R. (Hrsg.) (2000): TIMSS/III – Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie: Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band 2. – Opladen, S. 57-180.

KLIEME, E. (Koordinator) (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – Eine Expertise. – Frankfurt a. M. URL: http://www.dipf.de/ Download vom 10.06.03.

KLIEME, E./NEUBRAND, M./LÜDTKE, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: BAUMERT, J./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./STANAT, P./TILLMANN, K.-J.,/WEIß, M. (Hrsg.) (2001): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. – Opladen. S. 141-191.

KNOCHE u.a. 2002 = KNOCHE, N./LIND, D./BLUM, W./COHORS-FRESENBORG, E./FLADE, L./LÖDING, W./MÖLLER, G./NEUBRAND M./WYNANDS, A. (Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik) (2002): Die PISA-2000-Studie: Einige Ergebnisse und Analysen. In: Journal für Mathematikdidaktik, 23. Jg., S. 159-202.

LANGE, J. DE (1987): Mathematics, Insight and Meaning. – Utrecht.

LANGE, J. DE (1996): Real problems with real world mathematics. In: C. ALSINA et al. (Eds.), Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla July 1996. – Sevilla, pp. 83-110.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Ed.) (2000): Principles and Standards for School Mathematics. – Reston.

NEUBRAND, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen – Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. – Hildesheim.

NEUBRAND, J./NEUBRAND, M./SIBBERNS, H. (1998): Die TIMSS-Aufgaben aus mathematik-didaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler. In: BLUM, W./NEUBRAND, M. (Hrsg.): TIMSS und der Mathematikunterricht – Informationen, Analysen, Konsequenzen. – Hannover, S. 17-27.

NEUBRAND, J./NEUBRAND, M. (2003): Profiles of mathematical achievement in the PISA-2000 mathematics test and the different structure of achievement in Japan and Germany. Paper presented at AERA-2003 – Annual Meeting, Chicago.

NEUBRAND, M. (2000): Reflecting as a Didaktic construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In: WESTBURY, I./HOPMANN, S./RIQUARTS, K. (Eds.): Teaching as a Reflective Practice: The German Didaktik Tradition – Mahwah, pp. 251-265.

NEUBRAND, M. (2002): Mathematikunterricht nach PISA: Konzepte, Resultate, Konsequenzen. In: BUCHEN, H. /HORSTER, L./PANTEL, G./ROLFF, H.-G. (Hrsg): Unterrichtsentwicklung und PISA. – Stuttgart, S. 45 – 63.

NEUBRAND, M. (2003): PISA und die „Standards". – Arbeiten aus dem Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg, Heft 15.

NEUBRAND u.a. 2001 = NEUBRAND M./BIEHLER, R./BLUM, W./COHORS-FRESENBORG, E./FLADE, L./KNOCHE, N./LIND, D./LÖDING, W./MÖLLER, G./WYNANDS, A. (Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik) (2001): Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33 Jg., S. 33-45.

NEUBRAND u.a. 2002 = NEUBRAND, M./KLIEME, E./LÜDTKE, O./NEUBRAND, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung. In: Unterrichtswissenschaft, 30. Jg., S. 100-119.

NEUBRAND, M./KLIEME, E. (2002): Mathematische Grundbildung. In: BAUMERT, J./ARTELT, C./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./TILLMANN, K.-J./WEIß, M. (Hrsg.) (2002): PISA 2000 – Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich. – Opladen, S. 95-127.

OECD 1999 = Organization for Economic Cooperation and Development (Ed.) (1999): Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment. – Paris. In deutscher Sprache als: OECD/DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM (Eds.) (2000): Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten. – Berlin.

OECD 2001 = Organization for Economic Cooperation and Development (Ed.) (2001): Knowledge and Skills for Life: First results from the OECD Programme for International Student Assessment (PISA) 2000. – Paris.

OECD 2002 = Organization for Economic Cooperation and Development (Ed.) (2002): PISA-2000: Sample-Items. – Paris.

ORPWOOD, G. & GARDEN, R.A. (1998): Assessing mathematics and science literacy (TIMSS-monograph No. 4). – Vancouver.

ROST u.a. 2003 = ROST, J./CARSTENSEN, C. H./BIEBER, G./NEUBRAND, M./PRENZEL M. (2003): Naturwissenschaftliche Teilkompetenzen im Ländervergleich. In: BAUMERT, J./ARTELT, C./KLIEME, E./NEUBRAND, M./PRENZEL, M./SCHIEFELE, U./SCHNEIDER, W./TILLMANN, K.-J.,/WEIß, M. (Hrsg.) (2003) : PISA 2000 – Ein differenzierter Blick auf die Länder der Bundesrepublik Deutschland. – Opladen, S. 109-130.

SCHMIDT, W. H./MCKNIGHT, C. C./VALVERDE, G. A./HOUANG, R. T./WILEY, D. E. (1996): Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics. – Dordrecht.

SCHOENFELD, A. H. (2001): Reflections on an Impoverished Education. In: STEEN, L. A. (Ed.): Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy. – Princeton, pp. 49-54.

SCHOENFELD, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of ‘well taught’ mathematics classes. In: Educational Psychologist, Vol. 23, pp. 145-166.

SJUTS, J. (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 24. Jg., S. 18-40.

STEEN, L. A. (Ed.): Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy. – Princeton NJ.

TENORTH, H. (1994): „Alle alles zu lehren“: Möglichkeiten und Perspektiven allgemeiner Bildung. – Darmstadt.

WINTER, H. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7. Jg., S. 106-116.

WINTER, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, S. 37-46.

Anschrift des Autors: Prof. Dr. Michael Neubrand, Universität Flensburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Auf dem Campus 1, D-24943 Flensburg, Tel.: 0461/805-2239, Fax: 0461/805-2144, E-mail: neubrand@uni-flensburg.de