Analysis Mathematica, **33**(2007), 135–153
DOI: 10.1007/s10476-007-0204-0

Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$

И. И. ШАРАПУДИНОВ

Дагестанский научный центр РАН, e-mail: sharapud@iwt.ru

Поступило 28 наября 2005 г.

Резюме. В работе рассмотрены некоторые вопросы теории приближения в пространствах интегрируемых функций с переменным показателем. В частности, найдены необходимые и достаточные условия на переменный показатель, которые обеспечивают базисность тригонометрической системы в нормированных пространствах интегрируемых функций с переменным показателем. Это условие состоит в том, что периодический переменный показатель $p(x) > 1$ удовлетворяет на периоде условию Дини–Липшица.

1. Введение

Пусть E — множество, на котором задана мера Лебега $\mu(A)$. Через $L^{p(x)}(E)$ мы обозначим множество измеримых функций $f(x)$, определенных на E и таких, что

$$\int_{E\setminus B(p)} |f(x)|^{p(x)}\, d\mu(x) < \infty, \qquad \operatorname*{vrai\,max}_{x\in B(p)} |f(x)| < \infty,$$

где $1 \le p(x)$ — измеримая, существенно ограниченная на $E \setminus B(p)$ и обращающаяся в ∞ в точках множества $B(p)$ функция. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые задачи, связанные с приближением функций в метрике пространства $L^{p(x)}(E)$. Подобные задачи нами рассматривались ранее в работах [3]–[6]. В частности, в работе [3] была изучена топология пространства $L^{p(x)}(E)$,

0133–3852/\$ 20.00

где показано, что, если $p(x) \geq 1$, то $L^{p(x)}(E)$ является нормированным пространством, в котором одна из эквивалентных норм можно определить с помощью равенства

$$\|f\|_p(E) = \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_E \Big|\frac{f(x)}{\alpha}\Big|^{p(x)} d\mu(x) \leq 1\Big\}. \tag{1.0}$$

В [3] было показано, что если

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}\,,$$

то пространство $L^{q(x)}(E)$ является двойственным к $L^{p(x)}(E)$. Пользуясь этим результатом и методом двойственности С. М. Никольского, в работе [4] были исследованы некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$. В работе [5] было показано, что если функция $p(x)$ удовлетворяет для $x, y \in [0,1]$ условию Дини–Липшица

$$|p(x) - p(y)|\Big|\ln\frac{1}{|x-y|}\Big| \leq d, \tag{1.1}$$

то система Хаара образует базис в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$. В [6] было показано, что если $p(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то некоторые семейства операторов свертки равномерно ограничены в $L^{p(x)}([0,2\pi])$, в частности, сюда относятся семейства операторов свертки с классическими ядрами такими, как ядра Фейера, Абеля, В.А. Стеклова и другими. Ниже мы обобщим этот результат в той части, которая касается операторов Стеклова, распространяя его на семейство сдвигов функций Стеклова. Это, в свою очередь, позволит нам в пункте 3 ввести один из вариантов модуля непрерывности для функций $f \in L^{p(x)}(E)$. Далее, пусть $p = p(x)$ — измеримая 2π-периодическая и существенно ограниченная функция. Через $L_{2\pi}^{p(x)}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_{\pi+a}^{\pi+a} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty, \tag{1.2}$$

где a — произвольное действительное число. Норму в $L_{2\pi}^{p(x)}$ мы определим так

$$\|f\|_{p,\pi} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_{-\pi+a}^{\pi+a} \Big|\frac{f(x)}{\alpha}\Big|^{p(x)} dx \leq 1\Big\}. \tag{1.3}$$

Ниже мы рассмотрим задачу об ограниченности в $L^{p(x)}_{2\pi}$ оператора сопряженной функции $f \to \widetilde{f}$, где

$$\widetilde{f} = \widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}(t-x)}\, dt. \tag{1.4}$$

Следует отметить, что в течение последних 10–15 лет, прошедших после опубликования работ [3]–[6], теория пространств $L^{p(x)}(E)$ получила интенсивное развитие и важные приложения (см. [2] и цитированную там литературу). При этом доминирующую роль стало играть, обнаруженное в работах [4] и [6] условие Дини–Липшица (1.1). Далее нам понадобится следующее определение, введенное впервые в работе [5]. *Будем говорить, что показатель* $p(x)$ *удовлетворяет на множестве* E *условию Дини–Липшица порядка* α, если имеет место оценка

$$\omega(p, E, \delta)\Big(\ln\frac{1}{\delta}\Big)^{\alpha} \le c \quad (0 < \delta < 1), \tag{1.5}$$

где

$$\omega(p, E, \delta) = \sup\{|p(x_1) - p(x_2)| : \ x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| \le \delta\}, \tag{1.6}$$

c, $c(p)$, $c(p, \alpha, \dots, \beta)$ — положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, вообще говоря различные в разных местах. Множество всех 2π-периодических показателей $p = p(x) > 1$, удовлетворяющих на $E = [-\pi, \pi]$ условию (1.5), обозначим через $\mathcal{P}^{\alpha}_{\pi}$. *Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что оператор сопряженной функции* (1.4) *ограниченно действует в пространстве* $L^{p(x)}_{2\pi}$ *для каждого показателя* $p \in \mathcal{P}^{\alpha}_{\pi}$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha \ge 1$. Как следствие этого результата, покажем, что тригонометрическая система образует базис в пространстве $L^{p(x)}_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда показатель $p = p(x) > 1$ удовлетворяет на $[-\pi, \pi]$ условию Дини–Липшица (1.1). Эта задача была поставлена П.Л. Ульяновым еще в 1976 году и до сих пор оставалась нерешенной.

2. Некоторые результаты общего характера

Начнем с доказательства теорем, которые будут неоднократно использованы в дальнейшем. На протяжении всей работы $p(x)$ и $q(x)$ — измеримые функции на своих областях определения, $\underline{\varphi}(E) = \operatorname{vrai\,min}_{x \in E} \varphi(x)$, $\overline{\varphi}(E) = \operatorname{vrai\,max}_{x \in E} \varphi(x)$,

$$p'(x) = \begin{cases} p(x)/(p(x)-1), & (p(x) > 1), \\ \infty, & (p(x) = 1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — функции, заданные на E такие, что*

$$1 \le p(x) \le q(x) \le \overline{q}(E) < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in L^{q(x)}(E)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_p(E) \le r_{p,q}\|f\|_q(E), \tag{2.2}$$

где

$$r_{p,q} = \max\{1/\underline{\alpha}(E) + \mu(E)/\underline{\alpha}'(E), 1\}, \qquad \alpha(x) = q(x)/p(x),$$

$\mu(E)$ — мера множества E.

Доказательство. Для $\alpha(x) = q(x)/p(x)$ воспользуемся неравенством

$$ab \le \frac{|a|^{\alpha(x)}}{\alpha(x)} + \frac{|b|^{\alpha'(x)}}{\alpha'(x)} \qquad \Big(\frac{|b|^\infty}{\infty} = 0 \ \text{ при } \ |b| \le 1\Big). \tag{2.3}$$

Полагая здесь

$$a = |f(x)/\|f(x)\|_q|^{p(x)}, \qquad b = 1,$$

имеем

$$\Big|\frac{f(x)}{r_{p,q}\|f\|_q(E)}\Big|^{p(x)} = \frac{1}{r_{p,q}^{p(x)}}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_q(E)}\Big|^{p(x)} \le$$

$$\le \frac{1}{r_{p,q}^{p(x)}}\Big(\frac{1}{\alpha(x)}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_q(E)}\Big|^{q(x)} + \frac{1}{\alpha'(x)}\Big),$$

отсюда

$$\int_E \Big|\frac{f(x)}{r_{p,q}\|f\|_q(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x) \le$$

$$\le \frac{1}{r_{p,q}^{\underline{p}(E)}}\Big(\frac{1}{\underline{\alpha}(E)}\int_E \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_q(E)}\Big|^{q(x)} d\mu(x) + \int_E \frac{d\mu(x)}{\alpha'(x)}\Big) \le 1.$$

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $p(x) \ge 1$ и $f(x) \ge 0$ — измеримые существенно ограниченные функции, заданные на E, $\mu(E) < \infty$. Тогда*

$$\lim_{\underline{p}(E)\to\infty} \|f\|_p(E) = \overline{f}(E). \tag{2.4}$$

Доказательство. Если $\mu(E) = 0$ или $\overline{f}(E) = 0$, то справедливость равенства (2.4) очевидна. Будем считать, что

$$0 < \overline{f}(E) < \infty, \qquad \text{и} \qquad 0 < \mu(E) < \infty.$$

Поскольку

$$\int_E |f(x)/\overline{f}(E)|^{p(x)}\, d\mu(x) \le \mu(E) \tag{2.5}$$

то при $\mu(E) \le 1$ имеем

$$\|f\|_p(E) \le \overline{f}(E). \tag{2.6}$$

Если же $\mu(E) \ge 1$, то из (2.5) имеем

$$1 \ge \int_E \Big|\frac{f(x)}{(\mu(E))^{1/p(x)} f(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x) \ge \tag{2.7}$$

$$\ge \int_E \Big|\frac{f(x)}{(\mu(E))^{1/\underline{p}(E)} \overline{f}(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x).$$

Из (2.7) следует, что

$$\|f\|_p(E) \le (\mu(E))^{1/\underline{p}(E)} \overline{f}(E). \tag{2.8}$$

Сопоставляя (2.6) и (2.8), находим

$$\limsup_{\underline{p}(E)\to\infty} \|f\|_p(E) \le \overline{f}(E). \tag{2.9}$$

С другой стороны, из определения существенного максимума функции следует, что для некоторого множества $E_1 \subset E$ положительной меры выполняется неравенство

$$|f(t)| > \overline{f}(E) - \varepsilon, \quad \text{где} \ \ t \in E_1, \ 0 < \varepsilon \le \overline{f}(E).$$

Поэтому

$$1 \ge \int_E \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x) \ge \tag{2.10}$$

$$\ge \int_{E_1} \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x) \ge \int_{E_1} \Big|\frac{\overline{f}(E) - \varepsilon}{\|f\|_p(E)}\Big|^{p(x)} d\mu(x).$$

Возможны два случая:

$$1) \quad \overline{f}(E) - \varepsilon \le \|f\|_p(E), \tag{2.11}$$

$$2) \quad \overline{f}(E) - \varepsilon > \|f\|_p(E). \tag{2.12}$$

Если имеет место второй случай, то из (2.10) и (2.12) имеем:

$$(\overline{f}(E) - \varepsilon)^{\underline{p}(E)} \mu(E_1) \le (\|f\|_p(E))^{\underline{p}(E)}$$

или, что то же самое

$$(\overline{f}(E) - \varepsilon)(\mu(E_1))^{1/\underline{p}(E)} \le \|f\|_p(E). \tag{2.13}$$

Из (2.11) и (2.13) получим

$$\lim_{\underline{p}(E)\to\infty} \|f\|_p(E) \geq \overline{f}(E) - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$\lim_{\underline{p}(E)\to\infty} \|f\|_p(E) \geq \overline{f}(E). \tag{2.14}$$

Сопоставляя (2.9) и (2.14), убеждаемся в справедливости теоремы 2.2.

Теорему 2.2 дополняет следующая

Теорема 2.3. *Пусть $p_n(x) \geq 1 (n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность равномерно ограниченных функций, которая почти всюду на E $(\mu(E) < \infty)$ сходится к существенно ограниченной функции $p(x) \geq 1$. Если суммируемые на E функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что*

$$|f(x)|^{p_n(x)} \leq \varphi(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.15}$$

почти всюду на E, то

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}(E) = \|f\|_p(E). \tag{2.16}$$

Доказательство. Допустим, что (2.16) неверно. Для определенности можно считать, что

$$\liminf_{n\to\infty} \|f\|_{p_n}(E) < \|f\|_p(E). \tag{2.17}$$

Из (2.15) и равномерной ограниченности $p_n(x)$ почти всюду на E следует, что

$$\left|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\right|^{p_n(x)} \leq \frac{\varphi(x)}{(\|f\|_p(E))^{p_n(x)}} \leq M\varphi(x) \tag{2.18}$$

почти всюду на E, где $M > 0$ не зависит от n. Так как по условию теоремы при $n \to \infty$

$$\left|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\right|^{p_n(x)} \to \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\right|^{p(x)}$$

почти всюду на E, то в силу (2.18) и признака Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем при $n \to \infty$

$$\int_E \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\right|^{p_n(x)} d\mu(x) \to \int_E \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\right|^{p(x)} d\mu(x) = 1. \tag{2.19}$$

С другой стороны из неравенства (2.17) следует, что существуют сколь угодно большие n и $\nu > 1$, не зависящие от n, для которых

$$\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\Big|^{p_n(x)} \le \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_n}(E)}\Big|^{p(x)}\frac{1}{\nu^{p_n(x}} \tag{2.20}$$

почти всюду на E. Из (2.20) видно, что

$$\int_E\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_p(E)}\Big|^{p_n(x)}d\mu(x) \le \nu^{-\beta}\int_E\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_n}(E)}\Big|^{p(x)}d\mu(x) = \nu^{-\beta} < 1, \tag{2.21}$$

где

$$\beta = \inf_n \underline{p}_n(E) \ge 1.$$

Соотношения (2.19) и (2.21) противоречат друг другу. Аналогично доказывается, что не может иметь места и неравенство

$$\limsup_{n\to\infty}\|f\|_{p_n}(E) > \|f\|_p(E).$$

Теорема 2.3 доказана.

3. О равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ семейства сдвигов функций Стеклова

Нам понадобятся операторы Стеклова, которые можно определить следующим образом. Пусть $\lambda \ge 1$,

$$\Delta_\lambda = \Big[-\frac{1}{2\lambda},\frac{1}{2\lambda}\Big], \qquad k_\lambda(x) = \begin{cases}\lambda, & x\in\Delta_\lambda,\\ 0, & x\in[-\pi,\pi]\setminus\Delta_\lambda,\end{cases}$$

и продолжим $k_\lambda(x)$ 2π-периодически на $(-\infty,\infty)$. Тогда операторы Стеклова определяются равенством

$$S_\lambda f = (S_\lambda f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt.$$

Из результатов, полученных в работе [6], непосредственно вытекает, что если $p(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то семейство операторов Стеклова $\{S_\lambda(f)\}_{1\le\lambda<\infty}$ равномерно ограничено в $L_{2\pi}^{p(x)}$ и, стало быть,

$$\|f - S_\lambda f\|_{p,\pi} \to 0 \qquad (\lambda\to\infty).$$

Мы здесь докажем несколько более общий факт, который состоит в следующем.

Лемма 3.1. *Пусть $p(x)$ — 2π-периодическая функция, подчиненная для $x,y\in[-\pi,\pi]$ условию Дини–Липшица* (1.1), $\gamma>0$,

$$S_{\lambda,\tau}f=(S_{\lambda,\tau}f)(x)=(S_\lambda f)(x+\tau)= \tag{3.1}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x-\tau)\,dt=\lambda\int_{x+\tau-\frac{1}{2\lambda}}^{x+\tau+\frac{1}{2\lambda}} f(t)\,dt.$$

Тогда семейство операторов $\{S_{\lambda,\tau}(f)\}_{1\le\lambda<\infty,|\tau|\le\pi/\lambda^\gamma}$ равномерно ограничено в $L^{p(x)}$, точнее, имеет место оценка

$$\|S_{\lambda,\tau}(f)\|_{p,\pi}\le c(d)(2\pi+1)^{\bar p}\|f\|_{p,\pi}\quad (1\le\lambda<\infty,\ |\tau|\le\pi/\lambda^\gamma), \tag{3.2}$$

где здесь и далее c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\beta)$, … означают положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вобще говоря, различные в разных местах.

Доказательство. Пусть $N=[\lambda^\gamma]$ — целая часть λ^γ, $h=1/N$,

$$x_k=(kh-1)\pi, \tag{3.3}$$

$$s_k=\min\{p(x)|x_{k-2}\le x\le x_{k+2}\}, \tag{3.4}$$

$$p_t(x)=s_k\quad\text{при}\quad x_k-t\le x<x_{k+1}-t,\ \text{где } k=0,\pm1,\pm2,\dots. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$p_t(x)=p_0(x+t),$$

то из (3.3)–(3.5) следует, что $p_t(x)$ — ступенчатая функция, 2π-периодическая вместе с $p(x)$ и такая, что при $|t|\le 2\pi h$

$$p_t(x)\le p(x). \tag{3.6}$$

Пусть

$$\|f\|_{p,\pi}\le 1. \tag{3.7}$$

Тогда имеем из (3.1)

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}|(S_{\lambda,\tau}f)(x)|^{p(x)}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\lambda\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} f(t)\,dt\Big|^{p(x)}dx= \tag{3.8}$$

$$=\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\Big|\lambda\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} f(t)\,dt\Big|^{p(x)}dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\Big|\lambda\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} f(t)\,dt\Big|^{p(x)-s_k+s_k}dx.$$

Далее имеем

$$\Big|\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} f(t)\,dt\Big| \le \int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} |f(t)|\,dt \le \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt \le (2\pi+1)\|f\|_{p,\pi}, \tag{3.9}$$

$$\lambda^{p(x)-s_k} \le \lambda^{c(d)/\ln\lambda} \le c(d) \qquad (x_k \le x \le x_{k+1}). \tag{3.10}$$

Здесь мы воспользовались условием Дини–Липшица (1.1), неравенством (2.2) и равенством (3.4). Сопоставляя (3.7)–(3.10) и пользуясь неравенством Иенсена, получаем ($c = c(d)$)

$$\begin{aligned} J &\le c\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\Big|\lambda\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} f(t)\,dt\Big|^{s_k}dx \le \\ &\le c\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx\lambda\int_{x+\tau-1/(2\lambda)}^{x+\tau+1/(2\lambda)} |f(t)|^{s_k}\,dt = \\ &= c\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} |f(x+t)|^{s_k}\,dt = \\ &= c\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} dt\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x+t)|^{s_k}\,dx = \\ &= c\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} dt\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} |f(x)|^{s_k}\,dx = \\ &= c\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} dt\sum_{k=0}^{2N-1}\int_{x_k-t}^{x_{k+1}-t} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx = \\ &= c\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} dt\int_{-\pi-t}^{\pi-t} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx = \\ &= c\lambda\int_{\tau-1/(2\lambda)}^{\tau+1/(2\lambda)} dt\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p_t(x)}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t,\pi}}\Big|^{p_t(x)}(\|f\|_{p_t,\pi})^{p_t(x)}\,dx \le \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t,\pi}}\Big|^{p_t(x)}((2\pi+1)\|f\|_{p,\pi})^{p_t(x)}\,dx \le \\ &\le (2\pi+1)^{\bar p}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{f(x)}{\|f\|_{p_t,\pi}}\Big|^{p_t(x)}\,dx = (2\pi+1)^{\bar p}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) находим $J \le c(2\pi+1)^{\bar p}$. Лемма 3.1 доказана.

Пусть $p(x)$ — 2π-периодическая функция, подчиненная для $x,y\in[-\pi,\pi]$ условию Дини–Липшица (1.1). Для $f\in L^{p(x)}$ и $0<h\le 1$ положим $\lambda=1/h$, $\gamma>0$,

$$f_h(x)=S_\lambda(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt=\frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)\,dt \tag{3.13}$$

и определим следующую величину

$$\Omega^\gamma(f,0)_p=0,\quad \Omega^\gamma(f,\delta)_p=\sup_{\substack{h,\tau\\ 0\le|\tau|^{1/\gamma}\le h\le\delta}}\|f-f_h(*+\tau)\|_{p,\pi}, \tag{3.14}$$

которую назовем γ-*модулем непрерывности* функции $f\in L^{p(x)}_{2\pi}$.

Теорема 3.1. *Функция $g(\delta)=\Omega^\gamma(f,\delta)_p$ не убывает на $[0,\infty)$ и непрерывна в точке $\delta=0$.*

Доказательство. Тот факт, что функция $g(\delta)=\Omega^\gamma(f,\delta)_p$ не убывает на $[0,\infty)$ непосредственно вытекает из определения (3.14). Докажем непрерывность функции $g(\delta)$ в точке $\delta=0$, другими словами, покажем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega^\gamma(f,\delta)_p=0. \tag{3.15}$$

Прежде всего отметим, если функция $f=f(x)$ непрерывна на $[0,2\pi]$, то функция Стеклова $f_h(x+\tau)$ сходится к ней равномерно относительно $x\in[0,2\pi]$, при $|\tau|\le h^\gamma$ и $h\to 0$. Следовательно, если $|\tau|\le h^\gamma$, то

$$\|f-f_h(*+\tau)\|_{p,\pi}\to 0 \quad \text{при}\quad h\to 0.$$

Но, множество непрерывных функций всюду плотно в $L^{p(x)}_{2\pi}$, поэтому, если $f\in L^{p(x)}_{2\pi}$ и $|\tau|\le h^\gamma$, то в силу леммы 3.1 и теоремы Банаха–Штейнгауза

$$\|f-f_h(*+\tau)\|_{p,\pi}\to 0 \quad \text{при}\quad h\to 0.$$

Отсюда и вытекает соотношение (3.15). Теорема 3.1 доказана.

4. Преобразования Гильберта

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ множество показателей $p=p(x)>1$, заданных на вещественной оси $\mathbb{R}$, для каждого из которых найдется такое число $b\ge 0$, что $p(x)=p(b)$ при $|x|\ge b$, а на отрезке $E=[-b,b]$

$p(x)$ удовлетворяет условию (1.5) с $\alpha = 1$. Пусть $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ и $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$, тогда мы можем определить преобразование Гильберта

$$Hf = Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \tag{4.1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Хорошо известно, что функция $Hf(x)$ конечна для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Более того, из результатов, полученных в работе [1] для более общих операторов типа Кальдерона–Зигмунда, в частности, вытекает оценка

$$\|Hf\|_p(\mathbb{R}) \le c(p)\|f\|_p(\mathbb{R}) \qquad (p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})). \tag{4.2}$$

Пусть теперь $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$, $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$. Тогда мы можем определить преобразование Гильберта $H_a f$ следующего вида

$$H_a f = H_a f(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \qquad -\pi + a \le x \le \pi + a, \tag{4.3}$$

где a — произвольное число. Будем считать, что функция $H_a f(x)$ продолжена периодически на все $\mathbf{R}$. Если положим

$$f_a = f_a(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi + a \le x \le \pi + a, \\ 0, & x \notin [-\pi + a, \pi + a], \end{cases}$$

то $f_a \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$ и

$$H_a f(x) = Hf_a(x) \qquad (-\pi + a \le x \le \pi + a). \tag{4.4}$$

Пусть $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$ с $\alpha \ge 1$, и рассмотрим функцию

$$p_a = p_a(x) = \begin{cases} p(x), & -\pi + a \le x \le \pi + a, \\ p(\pi + a), & x \notin [-\pi + a, \pi + a]. \end{cases} \tag{4.5}$$

Тогда $p_a \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ и мы можем воспользоваться оценкой (4.2). Это дает

$$\|Hf_a\|_{p_a}(\mathbb{R}) \le c(p_a)\|f_a\|_{p_a}(\mathbb{R}). \tag{4.6}$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{p,\pi} = \|f_a\|_{p_a}(\mathbb{R}) \tag{4.7}$$

и в силу (4.4)

$$\|H_a f\|_{p,\pi} \le \|Hf_a\|_{p_a}(\mathbb{R}). \tag{4.8}$$

Сопоставляя (4.6)–(4.8), находим

$$\|H_a f\|_{p,\pi} \le c(p_a)\|f\|_{p,\pi}, \qquad p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha,\ \alpha \ge 1.$$

5. Сопряженная функция

Для $f \in L^{p(x)}_{2\pi}$ мы можем определить сопряженную функцию $\widetilde{f} = \widetilde{f}(x)$ с помощью равенства (1.4). Хорошо известно [7], что $\widetilde{f} = \widetilde{f}(x)$ конечна почти всюду на $\mathbb{R}$. Более того, если постоянное число $r > 1$, то известная теорема [7] Рисса утверждает, что

$$\|\widetilde{f}\|_{r,\pi} \le c(r)\|f\|_{r,\pi}.$$

Ниже мы покажем, что этот результат допускает обобщение на случай переменного показателя $p = p(x)$, если $p \in \mathcal{P}^{\alpha}_{\pi}$, где $\alpha \ge 1$. Точнее, справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha \ge 1$, $p \in \mathcal{P}^{\alpha}_{\pi}$. Тогда найдется такая постоянная $c(p)$, что для произвольной функции $f \in L^{p(x)}_{2\pi}$ имеет место оценка*

$$\|\widetilde{f}\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \tag{5.2}$$

где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}),\\ 0, & x \in (\frac{-\pi}{2}, \pi), \end{cases} \tag{5.3}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\\ 0, & x \in (-\pi, \frac{-\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi),\\ 0, & x \in (-\pi, \frac{\pi}{2}), \end{cases}$$

и продолжим $f_i(x)$ $(1 \le i \le 3)$ 2π-периодически на $\mathbb{R}$. Тогда из (1.4) и (5.2) имеем

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}_1(x) + \widetilde{f}_2(x) + \widetilde{f}_3(x), \tag{5.4}$$

Рассмотрим сначала $\widetilde{f}_2(x)$. Из (1.4) и (5.3) при $-\pi \le x \le \pi$ имеем

$$\widetilde{f}_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_2(x) = \tag{5.5}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_2(t)}{t-x}\,dt + \varphi_2(x),$$

где

$$|\varphi_2(x)| \le c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(t)|\,dt. \tag{5.6}$$

Сопоставляя (4.3) и (5.5), мы запишем

$$\widetilde{f}_2(x) = \frac{1}{\pi}H_0 f_2(x) + \varphi_2(x). \tag{5.7}$$

Далее, в силу (4.8)

$$\|H_0 f_2\|_{p,\pi} \le c(p)\|f_2\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}, \tag{5.8}$$

а из (2.2) и (5.6)

$$\|\varphi_2\|_{p,\pi} \le c(p)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(t)|\,dt \le \tag{5.9}$$

$$\le c(p)\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt \le c(p)\|f\|_{1,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}.$$

Из (5.7)–(5.9) имеем

$$\|\widetilde{f_2}\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.10}$$

Перейдем к рассмотрению $\widetilde{f_1}(x)$. Из (1.4) и (5.3) имеем

$$\widetilde{f_1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt. \tag{5.11}$$

Перепишем равенство (5.11) двумя способами, соответственно, при $-\pi \le x \le \pi/2$ и $\pi/2 \le x \le \pi$. А именно, при $-\pi \le x \le \pi/2$ имеем

$$\widetilde{f_1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \tag{5.12}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(t)}{t-x}\,dt + \varphi_1(x), \qquad -\pi \le x \le \pi/2,$$

где

$$|\varphi_1(x)| \le c\int_{-\pi}^{-\pi/2} |f(t)|\,dt \le c\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt, \tag{5.13}$$

а если $\pi/2 \le x \le \pi$, то

$$\widetilde{f_1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} \frac{f_1(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \tag{5.14}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_1(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{f_1(t)}{t-x}\,dt + \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{f_1(t)}{t-x}\,dt + \varphi_1(x), \qquad \pi/2 \le x \le \pi,$$

где

$$|\varphi_1(x)| \le c\int_{\pi}^{3\pi/2} |f(t)|\,dt \le c\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt. \tag{5.15}$$

Из (4.3) и (5.12) имеем

$$\widetilde{f_1}(x) = \frac{1}{\pi} H_0 f_1(x) + \varphi_1(x), \qquad -\pi \le x \le \pi/2, \tag{5.16}$$

а из (4.3) и (5.14)следует, что

$$\widetilde{f}_1(x) = \frac{1}{\pi} H_\pi f_1(x) + \varphi_1(x), \qquad \pi/2 \le x \le \pi, \tag{5.17}$$

Равенства (3.16) и (3.17) дают

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}_1\|_p([-\pi,\pi/2]) &\le \frac{1}{\pi}\|H_0 f_1\|_p([-\pi,\pi/2]) + \|\varphi_1\|_p([-\pi,\pi/2]), \\ \|\widetilde{f}_1\|_p([\pi/2,\pi]) &\le \frac{1}{\pi}\|H_\pi f_1\|_p([\pi/2,\pi]) + \|\varphi_1\|_p([\pi/2,\pi]), \end{aligned} \tag{5.18}$$

Далее,

$$\|H_0 f_1\|_p([-\pi,\pi/2]) \le \|H_0 f_1\|_p([-\pi,\pi]) = \|H_0 f_1\|_{p,\pi}, \tag{5.19}$$

$$\|H_\pi f_1\|_p([\pi/2,\pi]) \le \|H_\pi f_1\|_p([-\pi,\pi]) = \|H_\pi f_1\|_{p,\pi}. \tag{5.20}$$

С другой стороны, в силу (4.8)

$$\|H_0 f_1\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}, \qquad \|H_\pi f_1\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.21}$$

Кроме того, из (5.13), (5.13) и (2.2) имеем

$$\|\varphi_1\|_p([-\pi,\pi/2]) + \|\varphi_1\|_p([\pi/2,\pi]) \le c\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \le c\|f_1\|_{p,\pi}. \tag{5.22}$$

Сопоставляя (5.17)–(5.22), находим

$$\|\widetilde{f}_1\|_p([-\pi,\pi/2]) + \|\widetilde{f}_1\|_p([\pi/2,\pi]) \le c\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.23}$$

Замечая, что

$$\|\widetilde{f}_1\|_{p,\pi} \le \|\widetilde{f}_1\|_p([-\pi,\pi/2]) + \|\widetilde{f}_1\|_p([\pi/2,\pi]),$$

из (5.23) получаем

$$\|\widetilde{f}_1\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.24}$$

Теперь рассмотрим $\widetilde{f}_3(x)$. Имеем

$$\widetilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_3(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt. \tag{5.25}$$

Перепишем это равенство двумя способами. А именно, при $-\pi \le x \le \pi/2$ имеем

$$\widetilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \tag{5.26}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_3(t)}{t-x}\,dt + \varphi_3(x),$$

где

$$|\varphi_3(x)| \le c\int_{\pi/2}^{\pi} |f(t)|\,dt \le c\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt, \tag{5.27}$$

а если $-\pi \le x \le -\pi/2$, то

$$\widetilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-3\pi/2}^{-\pi} \frac{f_3(t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-3\pi/2}^{-\pi} \frac{f(t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \tag{5.28}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-3\pi/2}^{-\pi} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_3(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi}^{0} \frac{f_3(t)}{t-x}\,dt + \varphi_3(x),$$

где

$$|\varphi_3(x)| \le c\int_{-3\pi/2}^{\pi} |f(t)|\,dt \le c\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt. \tag{5.29}$$

Из (5.26) и (5.28) с учетом (4.3) имеем

$$\widetilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi}H_0 f_3(x) + \varphi_3(x), \qquad -\pi/2 \le x \le \pi, \tag{5.30}$$

$$\widetilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi}H_{-\pi} f_3(x) + \varphi_3(x), \qquad -\pi \le x \le -\pi/2, \tag{5.31}$$

Теперь проведем рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые, отправляясь от (5.16) и (5.17), привели нас к оценке (5.24). Это дает

$$\|\widetilde{f}_3\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \tag{5.32}$$

Утверждение теоремы 5.1 непосредственно вытекает из равенства (5.2) и оценок (5.10), (5.24) и (5.32).

6. О базисности тригонометрической системы в $L_{2\pi}^{p(x)}$

Здесь мы докажем, что тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является базисом пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$, если $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$ с $\alpha \ge 1$. Это вытекает из следующего результата для тригонометрических сумм Фурье $S_n(f)$.

Теорема 6.1. *Пусть $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$, $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$,*

$$S_n(f) = S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt, \tag{6.1}$$

где

$$D_n(v) = \frac{\sin(n+1/2)v}{2\sin(v/2)} \tag{6.2}$$

— ядро Дирихле. Тогда имеет место оценка

$$\|S_n\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}, \tag{6.3}$$

в которой постоянная $c(p)$ зависит только от показателя $p = p(x)$.

Доказательство. Положим

$$D_n^*(v) = D_n(v) - \frac{1}{2}\cos nv = \frac{\sin nv}{2\,\mathrm{tg}(v/2)}\,, \tag{6.4}$$

Тогда из (6.1) и (6.2) имеем

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n^*(t-x)\,dt + \tag{6.5}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt = S_n^*(f,x) + g_0(x),$$

где

$$|g_0(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt. \tag{6.6}$$

Пользуясь равенством

$$\sin n(t-x) = \sin nt \cos nx - \cos nx \sin nx,$$

перепишем $S_n^*(f,x)$ следующим образом:

$$S_n^*(f,x) = \frac{\cos nx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\sin nt}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt - \frac{\sin nx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\cos nt}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt. \tag{6.7}$$

Пусть

$$g_1(x) = f(t)\sin nt, \qquad g_2(x) = f(t)\cos nt,$$

тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\sin nt}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_1(t)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \widetilde{g}_1(x), \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\cos nt}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(t-x)}\,dt = \widetilde{g}_2(x). \tag{6.9}$$

Сопоставляя (6.5)–(6.9), имеем

$$S_n(f,x) = g_0(x) + \widetilde{g}_1(x) + \widetilde{g}_2(x). \tag{6.10}$$

Отсюда

$$\|S_n(f)\|_{p,\pi} \le \|g_0\|_{p,\pi} + \|\widetilde{g}_1\|_{p,\pi} + \|\widetilde{g}_2\|_{p,\pi}. \tag{6.11}$$

Далее, из оценок (2.2) и (6.6) следует, что

$$\|g_0\|_{p,\pi} \le \frac{1+2\pi}{\pi}\|f\|_{p,\pi}. \tag{6.12}$$

С другой стороны, из теоремы 5.1 выводим оценки

$$\begin{gathered} \|\widetilde{g}_1\|_{p,\pi} \le c(p)\|g_1\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}, \\ \|\widetilde{g}_2\|_{p,\pi} \le c(p)\|g_2\|_{p,\pi} \le c(p)\|f\|_{p,\pi}. \end{gathered} \tag{6.13}$$

Утверждение теоремы 6.1 вытекает из равенства (6.10) и оценок (6.12) и (6.13).

Рассмотрим вопрос об окончательности условия $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$ с $\alpha \ge 1$, содержащегося в теореме 6.1. Имеет место следующая

Теорема 6.2. *Тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является базисом пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$ с произвольным показателем $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 1$.*

Доказательство. *Достаточность* условий теоремы 6.1 для базисности тригонометрической системы в $L_{2\pi}^{p(x)}$ для каждого показателя $p \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$ с $\alpha \geq 1$ непосредственно вытекает из теоремы 6.1.

Докажем *необходимость.* Пусть $0 < \alpha < 1$. Покажем, что в классе $\mathcal{P}_\pi^\alpha$ найдется показатель $p_\alpha = p_\alpha(x)$, для которого тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ не является базисом пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. Положим $(0 < \alpha < 1)$

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{|\ln|x||^\alpha}, & \text{при} \quad -e/2 \leq x \leq 0, \\ 2 - \frac{1}{|\ln|x||^\alpha}, & \text{при} \quad 0 \leq x \leq e/2, \\ 2 + \frac{2(x+\pi)}{2\pi - e}(\ln\frac{e}{2})^{-\alpha}, & \text{при} \quad -\pi \leq x \leq -e/2, \\ 2 + \frac{2(x-\pi)}{2\pi - e}(\ln\frac{e}{2})^{-\alpha}, & \text{при} \quad e/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{6.14}$$

и продолжим $p_\alpha(x)$ 2π-периодически на все $\mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что $p_\alpha \in \mathcal{P}_\pi^\alpha$. Далее, рассмотрим функцию

$$\Psi\mu(x) = \Big(\sum_{\nu=-\infty}^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big)\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\mu i(\mathrm{sign}(\nu))}}{|\nu|^\mu}e^{i\nu x}. \tag{6.15}$$

В [7, стр. 119] показано, что при $0 < \mu < 1$ функция $\Psi_\mu(x)$ может быть представлена в виде

$$\Psi_\mu(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad -\pi \leq x \leq 0, \\ \varphi(x) + 2\pi x^{\mu-1}/\Gamma(\mu), & \text{при} \quad 0 < x \leq \pi, \end{cases} \tag{6.16}$$

где

$$|\varphi(x)| \leq c(\mu) \qquad (-\pi \leq x \leq \pi). \tag{6.17}$$

Полагая в (6.15) $\mu = 1/2$, мы можем записать

$$\psi = \psi(x) = \Psi_{1/2}(x) = \tag{6.18}$$

$$= 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\nu x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\nu}} = \sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu x + \sin\nu x}{\sqrt{\nu}}.$$

Из (6.14), (6.16) и (6.18) имеем $(0 < \alpha < 1)$

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|\psi(x)|^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\int_{-\pi}^{0}|\varphi(x)|^{p_\alpha(x)}\,dx + \int_0^\pi\Big|\varphi(x) + \frac{2\pi}{\Gamma(1/2)\sqrt{x}}\Big|^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\int_{-\pi}^{0} |\varphi(x)|^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^\pi \Big|\varphi(x) + \frac{2\pi}{\Gamma(1/2)\sqrt{x}}\Big|^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq c(\alpha) + \Big(\int_0^\pi |\varphi(x)|^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^\pi \Big(\frac{2\pi}{\Gamma(1/2)\sqrt{x}}\Big)^{p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq c(\alpha) + c(\alpha)\Big(\int_0^\pi x^{\frac{-1}{2}p_\alpha(x)}\,dx\Big)^{1/2} \leq c(\alpha),$$

так как

$$\int_0^{e/2} x^{\frac{-1}{2}p_\alpha(x)}\,dx = \int_0^{e/2} x^{-1+1/(2|\ln x|^\alpha)}\,dx < \infty.$$

Стало быть $\psi \in L_{2\pi}^{p_\alpha(x)}$. Покажем, что последовательность частичных сумм $S_n(\psi,x)$ ряда Фурье функции ψ не ограничена в топологии пространства $L_{2\pi}^{p_\alpha(x)}$. В силу (6.18)

$$S_n(\psi,x) = \sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos\nu x + \sin\nu x}{\sqrt{\nu}}\,. \tag{6.19}$$

Выберем $x \in (-\pi/2, 0)$ так, чтобы было

$$\cos\nu x \geq 2|\sin\nu x| \qquad \text{при всех} \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

Для этого достаточно потребовать $|\operatorname{tg} nx| < 1/2$ или, что то же,

$$|x| \leq \frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}.$$

Имеем

$$S_n(\psi,x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu x}{\sqrt{\nu}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\Big(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\Big)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\nu}} \geq c\sqrt{n}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\psi,x)|^{p_\alpha}\,dx > c\int\limits_{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}}^{0} n^{\frac{1}{2}p_\alpha(x)}\,dx =$$

$$= c\int_{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}}^{0} n^{1+\frac{1}{2|\ln|x||^\alpha}}\,dx \geq cn\int_{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2|\ln(\frac{1}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2})^\alpha}}\,dx \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\|S_n(\psi)\|_{p,\pi} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. *Для того, чтобы оператор сопряженной функции* $f \to \widetilde{f}$ *был ограниченным в* $L_{2\pi}^{p(x)}$ *для каждого показателя* $p \in \mathcal{P}_{\pi}^{\alpha}$, *необходимо и достаточно выполнение неравенства* $\alpha \geq 1$.

Литература

[1] L. Diening and M. Růžička, Calderon–Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics, *Preprint Mathematischen Fakultät, Albert-Ludwigs-University Freiburg*, 2002, 1–20.

[2] V. Kokilashvili and S. Samko, Singular integrals in weigted Lebesgue spaces with variable exponent, *Georgian Math. J.*, **10**(2003), 145–156.

[3] И. И. Шарапудинов, О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$, *Матем. заметки*, **26**(4)(1979), 613–632.

[4] И. И. Шарапудинов, Приближение функций в метрике пространства $L^{p(x)}([a,b])$ и квадратурные формулы, *Constructive function theory* , Proc. Conf. of Constructive Function Theory. Varna, 1981, 189–193.

[5] И. И. Шарапудинов, О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем, *Матем. сборник*, **130**(1986), 275–283.

[6] И. И. Шарапудинов, О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки, *Матем. заметки*, **59**(2)(1996), 291–302.

[7] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир (Москва, 1965).

Some aspects of approximation theory in the spaces $L^{p(x)}$

I. I. SHARAPUDINOV

Some aspects of approximation theory are studied in the paper for the spaces of integrable functions with variable exponent. In particular, necessary and sufficient conditions on the variable exponent are established that guarantee the basis property of the trigonometric system in the corresponding normed spaces. Namely, these conditions require that the periodic variable exponent $p(x) > 1$ satisfy the Dini–Lipschitz condition.