Monatsh. Math. 139, 151–167 (2003)
DOI 10.1007/s00605-002-0493-0

Monatshefte für
Mathematik
Printed in Austria

À propos de l'indice de composition des nombres

Par

Jean-Marie De Koninck[1] et **Nicolas Doyon**

Université Laval, Québec, Canada

Reçu le 17 décembre 2001; en forme révisée le 23 mars 2002
Publié en ligne le 11 octobre 2002

Abstract. We define the index of composition $\lambda(n)$ of an integer $n \geqslant 2$ as $\lambda(n) = \log n/\log \gamma(n)$, where $\gamma(n)$ stands for the product of the primes dividing n, and first establish that λ and $1/\lambda$ both have asymptotic mean value 1. We then establish that, given any $\varepsilon > 0$ and any integer $k \geqslant 2$, there exist infinitely many positive integers n such that $\min(\lambda(n), \lambda(n+1), \ldots, \lambda(n+k-1)) > \frac{k}{k-1} - \varepsilon$. Considering the distribution function $F(z,x) := \#\{n < x : \lambda(n) > z\}$, we prove that, given $1 < z < 2$ and $\varepsilon > 0$, then, if x is sufficiently large,

$$\exp\left\{2(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\} < \frac{F(z,x)}{x^{1/z}} < \exp\left\{2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\}, \qquad (*)$$

this last inequality also holding if $z \geqslant 2$. We then use these inequalities to obtain probabilistic results and we state a conjecture. Finally, using $(*)$, we show that the probability that the *abc* conjecture does not hold is 0.

2000 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11K65, 11N25, 11N37, 11N60
Key words: Arithmetic function, prime factorisation, distribution function, *abc* conjecture

1. Introduction

Pour introduire le concept de la conjecture *abc*, Browkin [1] écrit qu'un entier $n > 1$ est *très composé* si l'expression $\frac{\log n}{\log \gamma(n)}$ est "grande". Ici $\gamma(n)$ désigne le produit des nombres premiers qui divisent n. Ceci nous amène à définir l'*indice de composition* d'un entier $n > 1$ comme étant la quantité $\lambda(n) := \frac{\log n}{\log \gamma(n)}$. Par commodité, on pose $\lambda(1) = 1$. L'indice de composition d'un nombre est en quelque sorte une mesure de la multiplicité de ses facteurs premiers. Ainsi, un entier $n > 1$ est d'indice de composition supérieur à 1 si et seulement s'il n'est pas libre de carrés. Par ailleurs, les carrés parfaits > 1, de même que les nombres puissants > 1 (i.e. les nombres $n > 1$ tels que $p^2 | n$ pour chaque diviseur premier p de n), ont un indice de composition $\geqslant 2$. Tout récemment, Ribenboim [7] a également étudié cette fonction $\lambda(n)$ en l'appellant le *radical index of n*.

Nous obtenons d'abord une bonne compréhension de la fonction λ en rappelant quelques-unes de ses propriétés élémentaires déjà obtenues par Ribenboim [7] et en en établissant d'autres. Dans un deuxième temps, nous démontrons que la

[1]Research supported in part by a grant from NSERC.

valeur asymptotique moyenne de λ est 1 et qu'il en est de même pour $1/\lambda$. Nous abordons ensuite l'étude du comportement local de λ en étudiant la quantité $\min(\lambda(n),\lambda(n+1),\ldots,\lambda(n+k-1))$, où $k \geqslant 2$ est un entier donné. Nous raffinons l'étude de λ en produisant un encadrement assez précis de la fonction de répartition $F(z,x) := \#\{n<x : \lambda(n)>z\}$ (voir (16)). Ensuite, nous utilisons ce dernier résultat pour statuer quant à la probabilité que certaines affirmations soient vraies et nous formulons une conjecture. Enfin, nous donnons un argument probabiliste en faveur de la conjecture *abc*.

2. Résultats élémentaires

Ribenboim [7] a déjà établi que l'indice de composition d'un nombre est soit un entier, soit un nombre irrationnel, et de plus que l'ensemble $\{\lambda(n) : n = 1,2,\ldots\}$ est dense dans l'ensemble des nombres réels $\geqslant 1$.

Ici, nous présentons d'autres propriétés élémentaires intéressantes de la fonction λ, lesquelles font l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 1. *La fonction* λ *satisfait à*:

(*a*) $\lambda(mn) \leqslant \lambda(m)+\lambda(n)$ *quels que soient les entiers positifs* m *et* n;
(*b*) $\lambda(mn) \leqslant \lambda(m)\lambda(n)$ *si* m *et* n *sont des entiers positifs relativement premiers.*

Démonstration. Il est clair que les deux inégalités sont vérifiées si un des deux entiers m ou n est égal à 1. On peut donc supposer que m et n sont supérieurs à 1. On démontre en premier lieu la partie (a). On a

$$\begin{aligned}
\lambda(mn) &= \frac{\log m + \log n}{\log \gamma(mn)} \\
&\leqslant \frac{\log m + \log n}{\max(\log \gamma(m), \log \gamma(n))} \\
&= \frac{\log m}{\max(\log \gamma(m), \log \gamma(n))} + \frac{\log n}{\max(\log \gamma(m), \log \gamma(n))} \\
&\leqslant \frac{\log m}{\log \gamma(m)} + \frac{\log n}{\log \gamma(n)} \\
&= \lambda(m)+\lambda(n),
\end{aligned}$$

comme souhaité.

Pour démontrer la partie (b), on procéde comme suit. En fait, on veut montrer que si $(m,n)=1$, alors (comme $\gamma(mn)=\gamma(m)\gamma(n)$)

$$\lambda(mn) = \frac{\log m + \log n}{\log \gamma(m) + \log \gamma(n)} \leqslant \frac{\log m}{\log \gamma(m)} \times \frac{\log n}{\log \gamma(n)}. \tag{1}$$

Or cette dernière relation sera vraie, si on peut montrer que, pour tout quadruplet de nombres réels positifs a, b, c, d avec $c \leqslant a$ et $d \leqslant b$, on a

$$\frac{a+b}{c+d} \leqslant \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}. \tag{2}$$

Pour démontrer cette dernière relation, posons $r = \frac{a}{c} \geqslant 1$ et $s = \frac{b}{d} \geqslant 1$, auquel cas on a

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{rc+sd}{c+d} \leqslant \frac{rsc+rsd}{c+d} = rs = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d},$$

ce qui prouve (2) et par le fait même (1).

Lemme 2. *Étant donné un nombre réel fixe $\delta > 0$, la somme des réciproques des entiers positifs dont l'indice de composition est $\geqslant 1+\delta$ converge. En particulier, la somme des réciproques des nombres puissants converge vers $\zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6) \approx 1.9436$, où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.*

Démonstration. Examinons d'abord le cas particulier de la somme des réciproques des nombres puissants. Ici, par convention, 1 est considéré comme un nombre puissant. Il est clair que tout nombre puissant n peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$n = m^2 r^3, \tag{3}$$

pour un certain entier positif m et un certain entier positif r libre de carrés. On a donc que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu^2(r)}{r^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^3}\right) \times \zeta(2) = \frac{\zeta(3)}{\zeta(6)} \times \zeta(2),$$

où μ désigne la fonction de Moebius et où le produit infini parcourt tous les nombres premiers p. Par le même type de déploiement, il est facile d'obtenir que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \tag{4}$$

pour tout nombre réel $\alpha > 1/2$ fixé.

Pour le cas général, on remarque d'abord que tout entier positif n tel que $\lambda(n) \geqslant 1+\delta$ peut s'écrire sous la forme $n = \nu s$, où $\nu \geqslant 4$ est un nombre puissant et s un nombre libre de carrés relativement premier avec ν, auquel cas on a

$$\lambda(\nu s) = \frac{\log \nu + \log s}{\log \gamma(\nu) + \log s} \geqslant 1 + \delta,$$

ce qui est équivalent à

$$s \leqslant \frac{\nu^{1/\delta}}{\gamma(\nu)^{1+1/\delta}}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \lambda(n) \geqslant 1+\delta}}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{\substack{\nu=4 \\ \nu \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{\substack{(s,\nu)=1 \\ s \leqslant \frac{\nu^{1/\delta}}{\gamma(\nu)^{1+1/\delta}}}} \frac{\mu^2(s)}{s} \leqslant \sum_{\substack{\nu=4 \\ \nu \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{s \leqslant \nu^{1/\delta}} \frac{1}{s} < \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{\nu=4 \\ \nu \text{ puissant}}}^{\infty} \frac{1 + \log \nu}{\nu}.$$

Or cette dernière série converge à la lumière de (4), puisqu'on a trivialement $\log \nu \ll \nu^{1/4}$.

3. Les valeurs moyennes asymptotiques de λ et de $1/\lambda$

Théorème 1. *La valeur moyenne asymptotique de la fonction* λ *est* 1. *Plus précisément*, *lorsque* $x \to \infty$, *on a*

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = x + c\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

avec $c = \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \approx 0.75536$, *où la somme infinie parcourt tous les nombres premiers* p.

Démonstration. En utilisant la formule (2.11) de De Koninck et Sitaramachandrarao [3], on a qu'il existe des constantes positives b_0 et b_1 telles que

$$S(x) := \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\log \gamma(n)} = b_0 \frac{x}{\log x} + b_1 \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right), \tag{5}$$

où $b_0 = G(0)$ et $b_1 = -G'(0)$, avec, pour chaque nombre réel $t > -1$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{t+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{\psi(n)}\left(\frac{\gamma(n)}{n}\right)^t \\ &= \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{t+1}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2(1+\frac{1}{p})p^t}+\frac{1}{p^3(1+\frac{1}{p})p^{2t}}+\frac{1}{p^4(1+\frac{1}{p})p^{3t}}+\cdots\right), \end{aligned} \tag{6}$$

où, pour $n \geqslant 2$,

$$\psi(n) = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right), \quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est puissant,} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

$\gamma(1) = \psi(1) = \chi(1) = 1$. Il découle de ces représentations que

$$b_0 = 1 \tag{7}$$

et

$$b_1 = 1 + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)}. \tag{8}$$

En effet, les fonctions χ et ψ étant multiplicatives, on a

$$\begin{aligned} b_0 = G(0) &= \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{\psi(n)} = \frac{1}{\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2(1+\frac{1}{p})}+\frac{1}{p^3(1+\frac{1}{p})}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{\zeta(2)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} = 1, \end{aligned}$$

ce qui établit (7). Par ailleurs, en utilisant (6), on a

$$\log G(t) = \log(1/\zeta(2)) - \log(t+1) + \sum_p \log\left(1 + \frac{1}{p^2(1+\frac{1}{p})p^t} + \frac{1}{p^3(1+\frac{1}{p})p^{2t}} + \frac{1}{p^4(1+\frac{1}{p})p^{3t}} + \cdots\right),$$

de sorte que, en dérivant par rapport à t de chaque côté,

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = -\frac{1}{t+1} + \sum_p \frac{-\frac{\log p}{p^2\left(1+\frac{1}{p}\right)p^t} - \frac{2\log p}{p^3\left(1+\frac{1}{p}\right)p^{2t}} - \frac{3\log p}{p^4\left(1+\frac{1}{p}\right)p^{3t}} - \cdots}{1 + \frac{1}{p^2\left(1+\frac{1}{p}\right)p^t} + \frac{1}{p^3\left(1+\frac{1}{p}\right)p^{2t}} + \cdots},$$

et ainsi que

$$\begin{aligned} G'(0) &= -1 - \sum_p \log p \left(\frac{\frac{1}{p^2\left(1+\frac{1}{p}\right)} + \frac{2}{p^3\left(1+\frac{1}{p}\right)} + \frac{3}{p^4\left(1+\frac{1}{p}\right)} + \cdots}{1/\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}\right) \\ &= -1 - \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)}, \end{aligned}$$

ce qui établit (8), puisque $b_1 = -G'(0)$.

La relation (5) peut donc s'écrire sous la forme

$$S(x) = \frac{x}{\log x} + (1+c)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right), \tag{9}$$

où la constante c est définie dans l'énoncé du théorème.

En utilisant (9) et une sommation partielle, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{\log n}{\log \gamma(n)} &= S(x)\log x - 2S(2) - \int_2^x \frac{S(u)}{u}\,du \\ &= x + (1+c)\frac{x}{\log x} - \int_2^x \left(\frac{1}{\log u} + (1+c)\frac{1}{\log^2 u}\right)du \\ &\quad + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \\ &= x + (1+c)\frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \\ &= x + c\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du théorème 1.

Remarque 1. Il est facile de démontrer qu'il découle du théorème 1 que pour tout entier positif k et tout nombre réel $\delta > 0$, il existe une infinité d'entiers positifs n satisfaisant

$$k \leqslant \lambda(n) + \lambda(n+1) + \cdots + \lambda(n+k-1) < k + \delta.$$

Théorème 2. *La valeur moyenne asymptotique de la fonction* $1/\lambda$ *est* 1. *Plus précisément, lorsque* $x \to \infty$, *on a*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\lambda(n)} = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Démonstration. On a

$$R(x) := \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \log \gamma(n) = \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \sum_{p|n} \log p = \sum_{p \leqslant x} \log p \left[\frac{x}{p}\right]$$
$$= x \sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leqslant x} \log p \left(\frac{x}{p} - \left[\frac{x}{p}\right]\right). \tag{10}$$

Par ailleurs, il découle des inégalités de Tchebycheff que

$$\sum_{p \leqslant x} \log p = O(x) \tag{11}$$

et du théorème des nombres premiers que

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1). \tag{12}$$

En substituant (11) et (12) dans (10), on obtient aussitôt

$$R(x) = x \log x + O(x).$$

Par sommation partielle, il suit alors que

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\lambda(n)} = \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{\log \gamma(n)}{\log n} = \frac{R(x)}{\log x} - \frac{R(2)}{\log 2} + \int_2^x \frac{R(t)}{t \log^2 t} dt = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

comme souhaité.

4. Le comportement local de $\lambda(n)$

Théorème 3. *Pour tout entier* $k \geqslant 2$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une infinité d'entiers positifs* n *tels que*

$$Q_k(n) := \min(\lambda(n), \lambda(n+1), \ldots, \lambda(n+k-1)) > \frac{k}{k-1} - \varepsilon.$$

Auparavant, énonçons sans démonstration le lemme suivant, lequel est essentiellement une conséquence des inégalités de Tchebycheff.

Lemme 3. *Soit* $k \geqslant 2$ *un entier et* $\varepsilon > 0$ *un nombre réel arbitraire inférieur à* 1. *Alors il existe un nombre premier* q_1 *tel que la suite de nombres premiers consécutifs* $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ *satisfait à* $q_1 > q_k^{1-\varepsilon}$.

Démonstration du Théorème 3. Soit donc $k \geqslant 2$ et $0 < \varepsilon < 1$ fixés. Soit $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ des nombres premiers consécutifs, et soit a un entier positif à déterminer. D'après le théorème du reste chinois, le système de congruences

$$\begin{aligned} &x \equiv 0 \pmod{q_1^a} \\ &x \equiv -1 \pmod{q_2^a} \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ &x \equiv -(k-1) \pmod{q_k^a} \end{aligned}$$

admet une solution $x = n < q_1^a q_2^a \cdots q_k^a$.

Il reste à choisir q_1 et a convenablement.

D'abord on observe que, puisque $\gamma(rs) \leqslant \gamma(r)\gamma(s)$ quels que soient les entiers positifs r et s, et comme $\frac{n}{q_1^a} < q_2^a \cdots q_k^a$,

$$\begin{aligned} \lambda(n) = \lambda\left(q_1^a \cdot \frac{n}{q_1^a}\right) &= \frac{a \log q_1 + \log(n/q_1^a)}{\log \gamma(n)} \geqslant \frac{a \log q_1 + \log(n/q_1^a)}{\log q_1 + \log \gamma(n/q_1^a)} \\ &\geqslant \frac{a \log q_1 + \log(n/q_1^a)}{\log q_1 + \log(n/q_1^a)} \geqslant \frac{a \log q_1 + \log(q_2^a q_3^a \ldots q_k^a)}{\log q_1 + \log(q_2^a q_3^a \ldots q_k^a)} \\ &\geqslant \frac{a \log q_1 + \log(q_k^{a(k-1)})}{\log q_1 + \log(q_k^{q(k-1)})} = \frac{a \log q_1 + a(k-1) \log q_k}{\log q_1 + a(k-1) \log q_k}. \end{aligned}$$

De même, pour chaque entier positif $i \leqslant k-1$, on obtient que

$$\lambda(n+i) = \lambda\left(q_i^a \cdot \frac{n+i}{q_1^a}\right) \geqslant \frac{a \log q_i + a(k-1) \log q_k}{\log q_i + a(k-1) \log q_k} \geqslant \frac{a \log q_1 + a(k-1) \log q_k}{\log q_1 + a(k-1) \log q_k},$$

de sorte que

$$Q_k(n) \geqslant \frac{a \log q_1 + a(k-1) \log q_k}{\log q_1 + a(k-1) \log q_k}.$$

C'est pourquoi, pour compléter la démonstration, il suffit de montrer qu'il est possible de choisir a et q_1 de telle façon que

$$\frac{a \log q_1 + a(k-1) \log q_k}{\log q_1 + a(k-1) \log q_k} > \frac{k}{k-1} - \varepsilon,$$

laquelle inégalité peut s'écrire sous la forme

$$\left(a - \frac{k}{k-1} + \varepsilon\right) \log q_1 > a(k-1)\left(\frac{k}{k-1} - \varepsilon - 1\right) \log q_k = a(1 - k\varepsilon + \varepsilon) \log q_k,$$

ce qui est équivalent à

$$q_1 > q_k^{(a - ak\varepsilon + a\varepsilon)/\left(a - \frac{k}{k-1} + \varepsilon\right)} = q_k^{1-\delta},$$

où

$$\delta = \frac{ak\varepsilon - a\varepsilon - \frac{k}{k-1} + \varepsilon}{a - \frac{k}{k-1} + \varepsilon}.$$

Afin d'avoir $\delta > 0$, il suffit de s'assurer que $ak\varepsilon - a\varepsilon - \frac{k}{k-1} + \varepsilon > 0$, i.e. que $a > \frac{-\varepsilon + k/(k-1)}{(k-1)\varepsilon}$. Avec un tel choix de a, il ne reste qu'à faire appel au lemme 3, lequel garantit l'existence d'une suite de nombres premiers consécutifs $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ tels que $q_1 > q_k^{1-\varepsilon}$, ce qui complète la démonstration du théorème 3.

Remarque 2. Dans le cas $k=3$, cela veut dire que, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit,

$$Q_3(n) = \min(\lambda(n), \lambda(n+1), \lambda(n+2)) > \frac{3}{2} - \varepsilon \tag{13}$$

pour une infinité de nombres n. Nous conjecturons toutefois que le membre de droite de cette dernière inégalité peut être replacé par $\frac{3}{2}$, ce qui constituerait d'une certaine manière un résultat optimal, car selon la conjecture *abc*, il ne peut exister une infinité d'entiers positifs n tels que

$$Q_3(n) > \frac{3}{2} + \varepsilon. \tag{14}$$

Rappelons dans un premier temps l'énoncé de la conjecture *abc*.

Conjecture *abc. Soit* $\delta > 0$. *Il existe une constante positive* $M = M(\delta)$ *telle que, pour tout triplet d'entiers* (a, b, c) *premiers entre eux et vérifiant les conditions* $0 < a < b < c$ *et* $a + b = c$, *on ait*

$$c < M \cdot \left(\prod_{p \mid abc} p \right)^{1+\delta}. \tag{15}$$

Supposons donc que la conjecture *abc* est vraie et qu'il existe une infinité d'entiers positifs n vérifiant (14). On aurait alors, étant donné un nombre $\delta > 0$ arbitraire et en prenant $a = 1, b = n(n+2)$ et $c = (n+1)^2$ dans (15), qu'il existe une constante positive $M = M(\delta)$ telle que, pour chacun des entiers n satisfaisant (14),

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 = n(n+2) + 1 &< M(\delta)(\gamma(n(n+1)(n+2)))^{1+\delta} \\
&\leqslant M(\delta)(\gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2))^{1+\delta} \\
&= M(\delta)\left(n^{1/\lambda(n)}(n+1)^{1/\lambda(n+1)}(n+2)^{1/\lambda(n+2)}\right)^{1+\delta} \\
&< M(\delta)(n(n+1)(n+2))^{\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{4}{9}\varepsilon^2\right)(1+\delta)} \\
&< M(\delta) \cdot (n+2)^{2\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{4}{9}\varepsilon^2\right)(1+\delta)},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$n + 1 < \sqrt{M(\delta)} \cdot (n+2)^{\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{4}{9}\varepsilon^2\right)(1+\delta)},$$

ce qui est impossible si δ est suffisamment petit et n suffisamment grand.

Mentionnons en conclusion de cette remarque qu'il existe 40 nombres $n < 10^9$ tels que

$$Q_3(n) := \min(\lambda(n), \lambda(n+1), \lambda(n+2)) > \frac{3}{2},$$

les trois plus petits étant $n = 48$, 1375 et 13375 (avec respectivement $Q_3(n) = 1.698\ldots, 1.622\ldots$ et $1.512\ldots$), alors que $Q_3(85016574) = 1.72085\ldots$ est la plus grande valeur de $Q_3(n)$ obtenue parmi tous les nombres $n < 10^9$, et possiblement la valeur maximale de $Q_3(n)$ parmi tous les nombres n.

5. Fonction de répartition

Étant donné un nombre réel $z > 1$, on considère la fonction de répartition

$$F(z,x) := \#\{n < x : \lambda(n) > z\} \quad (x \geqslant 2).$$

Notre objectif est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Soit* $1 < z < 2$ *un nombre réel fixe. Alors, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x_0 = x_0(\varepsilon) \geqslant e^e$ *tel que, si* $x \geqslant x_0$,

$$\exp\left\{2(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\} < \frac{F(z,x)}{x^{1/z}} < \exp\left\{2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\}. \tag{16}$$

De plus, la borne supérieure tient également pour chaque $z \geqslant 2$.

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme 4. *Soit* $z > 1$ *un nombre réel fixe. Alors, pour tout nombre réel* $x \geqslant 2$, *on a*

$$F(z,x) < x^{1/z} + x^{1/z} \sum_{n < x^{1-1/z}L(x)} \frac{1}{\gamma(n)}, \tag{17}$$

où $L(x) := \sum_{n<x} \frac{1}{\gamma(n)}$.

Démonstration. D'entrée de jeu, on observe que l'on a toujours

$$F(z,x) = \sum_{n<x, \lambda(n)>z} 1 = \sum_{n<x, \gamma(n)<n^{1/z}} 1 = \sum_{d<x^{1/z}} \mu^2(d) \sum_{d^z<n<x, \gamma(n)=d} 1. \tag{18}$$

De cette égalité, il découle que

$$F(z,x) < \sum_{d<x^{1/z}} \sum_{n<x, \gamma(n)=d} 1 = \sum_{d<x^{1/z}} \sum_{m<x/d, \gamma(m)|d} 1, \tag{19}$$

où on a effectué le changement de variable $m = n/d$. En interchangeant l'ordre de sommation, il suit que

$$\begin{aligned} F(z,x) &< \sum_{m<x} \sum_{\substack{d<\frac{x}{m}, d<x^{1/z} \\ d\equiv 0 \pmod{\gamma(m)}}} 1 \\ &= \sum_{m<x^{1-1/z}} \sum_{\substack{d<x^{1/z} \\ d\equiv 0 \pmod{\gamma(m)}}} 1 + \sum_{x^{1-1/z}\leqslant m<x} \sum_{\substack{d<x/m \\ d\equiv 0 \pmod{\gamma(m)}}} 1 \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2, \end{aligned} \tag{20}$$

disons. Or, d'une part on a trivialement

$$\Sigma_1 < x^{1/z} \sum_{m<x^{1-1/z}} \frac{1}{\gamma(m)}, \tag{21}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que $x^{1-1/z}L(x) < x$ (ce qui découle immédiatement de la première inégalité de (27) ci-dessous),

$$\Sigma_2 = \sum_{x^{1-1/z} \leqslant m \leqslant x^{1-1/z}L(x)} \sum_{\substack{d<x/m \\ d \equiv 0 \pmod{\gamma(m)}}} 1 + \sum_{x^{1-1/z}L(x) < m < x} \sum_{\substack{d<x/m \\ d \equiv 0 \pmod{\gamma(m)}}} 1 = \Sigma_3 + \Sigma_4, \tag{22}$$

disons. Comme

$$\Sigma_3 \leqslant \sum_{x^{1-1/z} \leqslant m \leqslant x^{1-1/z}L(x)} \frac{x}{m\gamma(m)} \leqslant x^{1/z} \sum_{x^{1-1/z} \leqslant m \leqslant x^{1-1/z}L(x)} \frac{1}{\gamma(m)} \tag{23}$$

et

$$\Sigma_4 \leqslant \sum_{x^{1-1/z}L(x) < m < x} \frac{x}{x^{1-1/z}L(x)\gamma(m)} = \frac{x^{1/z}}{L(x)} \sum_{x^{1-1/z}L(x) < m < x} \frac{1}{\gamma(m)} \leqslant x^{1/z}, \tag{24}$$

en ramenant les inégalités (23) et (24) dans (22), on obtient

$$\Sigma_2 \leqslant x^{1/z} + x^{1/z} \sum_{x^{1-1/z} \leqslant m < x^{1-1/z}L(x)} \frac{1}{\gamma(m)}. \tag{25}$$

Enfin en utilisant les inégalités (21) et (25) dans (20), on obtient (17), ce qui complète la démonstration du lemme 4.

L'inégalité de droite du théorème 4 découle alors du lemme 4 si on utilise le résultat suivant de de Bruijn [2]:

$$\log L(x) = 2(1 + o(1))\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}}. \tag{26}$$

En effet, il découle de (26) que pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $x_1 = x_1(\varepsilon_1) \geqslant e^e$ tel que

$$L(x) < x^{\varepsilon_1} \quad \text{et} \quad \log L(x) < 2(1+\varepsilon_1)\sqrt{\frac{2\log x}{\log\log x}} \quad (x \geqslant x_1). \tag{27}$$

En utilisant à tour de rôle chacune de ces inégalités, on a

$$\begin{aligned} x^{1/z} \sum_{n < x^{1-1/z}L(x)} \frac{1}{\gamma(n)} &< x^{1/z} \sum_{n < x^{1-1/z+\varepsilon_1}} \frac{1}{\gamma(n)} \\ &= x^{1/z} L(x^{1-1/z+\varepsilon_1}) = x^{1/z} \exp\{\log L(x^{1-1/z+\varepsilon_1})\} \\ &< x^{1/z} \exp\left\{2(1+\varepsilon_1)\sqrt{\frac{2(1-1/z+\varepsilon_1)\log x}{\log\log x + \log(1-1/z+\varepsilon_1)}}\right\} \\ &\qquad (x \geqslant x_1). \end{aligned}$$

Or comme cette dernière quantité est inférieure à

$$x^{1/z} \exp\left\{2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\}$$

pour tout $x \geqslant x_1$ si ε_1 est suffisamment petit, l'inégalité de droite de (16) découle alors du lemme 4.

La démonstration de l'inégalité de gauche du théorème 4 fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 5. *Pour tout nombre réel z fixé*, $1 < z < 2$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*, *pour x suffisamment grand*,

$$F(z,x) > x^{1/z} \exp\left\{2(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2(1-1/z)\log x}{\log\log x}}\right\} \tag{28}$$

Démonstration. On fait d'abord appel à la représentation de $F(z,x)$ donnée par (18) pour obtenir, en restreignant les bornes de sommation,

$$F(z,x) = \sum_{d < x^{1/z}} \mu^2(d) \sum_{d^z < n < x, \gamma(n)=d} 1 > \sum_{\substack{d < \frac{x^{1/z}}{2^{1/z}} \\ 2|d}} \mu^2(d) \sum_{x/2 < n < x, \gamma(n)=d} 1. \tag{29}$$

Comme chaque entier n dans cette dernière sommation est pair, on peut l'écrire sous la forme $n = 2^a \cdot m$ avec m impair et $a \geqslant 1$. De plus, comme $n < x$ et $\gamma(n) = d$, alors $m < x/2$ et $\gamma(m) = d/2$. Réciproquement, pour tout entier m tel que $m < x/2$ et $\gamma(m) = d/2$, il existe un et un seul entier positif a tel que $x/2 < m \cdot 2^a < x$ et $\gamma(m \cdot 2^a) = d$.

Voilà pourquoi nous pouvons réécrire la dernière sommation à droite de (29) sous la forme $\sum_{m < x/2, \gamma(m)=d/2} 1$, de sorte qu'à partir de (29), on obtient

$$F(z,x) > \sum_{\substack{d < \frac{x^{1/z}}{2^{1/z}} \\ 2|d}} \mu^2(d) \sum_{m < x/2, \gamma(m)=d/2} 1 \geqslant \sum_{\substack{d < \frac{x^{1/z}}{2} \\ d \text{ pair}}} \mu^2(d) \sum_{\substack{r < x/d \\ \gamma(r)|d/2}} 1 = \sum_{r < x} \sum_{\substack{d < \min\left(\frac{x}{r}, \frac{x^{1/z}}{2}\right) \\ d \equiv 0 \pmod{2\gamma(r)}}} \mu^2(d),$$

où on a posé $r = 2m/d$, de sorte que

$$\begin{aligned} F(z,x) &> \sum_{r < x^{1-1/z}} \sum_{\substack{d < \frac{x^{1/z}}{2} \\ d = 2k\gamma(r)}} \mu^2(d) \geqslant \sum_{r < x^{1-1/z}} \sum_{\substack{k < x^{1/z}/4\gamma(r) \\ (k,r)=1}} \mu^2(k) \\ &> \sum_{r < x^{1-1/z}} \sum_{\substack{p < x^{1/z}/4\gamma(r) \\ (p,r)=1}} 1 = \sum_{r < x^{1-1/z}} \left(\pi\left(\frac{x^{1/z}}{4\gamma(r)}\right) - \sum_{\substack{p|r \\ p < x^{1/z}/4\gamma(r)}} 1\right), \end{aligned} \tag{30}$$

où on a posé $k = d/(2\gamma(r))$. Comme pour $z < 2$, on a

$$\pi\left(\frac{x^{1/z}}{4\gamma(r)}\right) > \pi\left(\frac{x^{1/z}}{4x^{1-1/z}}\right) = \pi\left(\frac{x^{2/z-1}}{4}\right) \quad \text{et} \quad \log x = o\left(\pi\left(\frac{x^{2/z-1}}{4}\right)\right),$$

il suit que

$$\sum_{r < x^{1-1/z}} \left(\pi\left(\frac{x^{1/z}}{4\gamma(r)}\right) - \log x\right) \gg \sum_{r < x^{1-1/z}} \pi\left(\frac{x^{1/z}}{4\gamma(r)}\right) \gg \frac{x^{1/z}}{\log x} \sum_{r < x^{1-1/z}} \frac{1}{\gamma(r)}. \tag{31}$$

En combinant (30) et (31) avec le résultat de de Bruijn donné en (26), la démonstration du lemme 5 est complète, de même que celle du théorème 4.

6. Résultats probabilistes

Nous allons maintenant voir que le théorème 4 permet de statuer quant à la probabilité que certains résultats soient vrais.

Pour établir nos conclusions, nous faisons l'*hypothèse d'indépendance* suivante: *Pour tout entier positif k, valeurs de* $\lambda(n), \lambda(n+1), \ldots, \lambda(n+k-1)$ *sont des variables aléatoires indépendantes.*

Soit $z>1$. Il est clair que, pour un entier positif n donné, la probabilité $P(\lambda(n)>z)$ est égale à $\frac{F(z,n)}{n}$. Il découle donc du théorème 4 que, pour $1<z<2$, il existe un entier positif n_0 tel que

$$P(\lambda(n)>z)>n^{\frac{1}{z}-1} \quad (n \geqslant n_0). \tag{32}$$

De plus, il découle du lemme 4 que, pour tout $z>1$,

$$F(z,n)<n^{1/z}+n^{1/z}\sum_{m<n^{1-1/z}L(n)}\frac{1}{\gamma(m)}<n^{1/z}+n^{1/z}L(nL(n)) \quad (n \geqslant 1),$$

où $L(n) := \sum_{m<n} 1/\gamma(m)$. En posant $G(n) := L(nL(n)) + 1$, on a alors

$$P(\lambda(n)>z)<n^{\frac{1}{z}-1}G(n) \quad (n \geqslant 1). \tag{33}$$

Par ailleurs, compte tenu de la première inégalité de (27), on a que, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tel que $G(n)<n^{\varepsilon}$ pour tout $n \geqslant n_1$. C'est pourquoi, pour tout $z>1$ fixe,

$$P(\lambda(n)>z)<n^{\frac{1}{z}-1+\varepsilon} \quad (n \geqslant n_1). \tag{34}$$

Théorème 5 (Théorème probabiliste). *Pour chaque entier* $k \geqslant 2$, *la probabilité qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers positifs n tels que*

$$Q_k(n) := \min(\lambda(n), \lambda(n+1), \ldots, \lambda(n+k-1)) > \frac{k}{k-1} \tag{35}$$

est nulle.

Démonstration. Considérons d'abord le cas $k=2$. On sait qu'il existe une infinité de nombres puissants n tels que $n+1$ est également un nombre puissant; il s'agit là d'une observation faite par Golomb [5] (voir aussi Ivić and Shiu [6]). Toutefois ce résultat ne garantit pas l'inégalité stricte exigée par (35). Or celle-ci peut être établie en considérant les solutions (x_ℓ, y_ℓ) de l'équation de Pell $x^2-2y^2=1$ (avec $(x_1,y_1)=(3,2)$), dont le rang ℓ satisfait à $\ell \equiv 3 \pmod 6$, et en observant qu'on a alors $\min(\lambda(2y_\ell^2), \lambda(x_\ell^2))>2$, puisque d'une part on a toujours que $8|2y^2$ et d'autre part parce que $9|x_\ell$, un résultat qui se démontre facilement par induction.

On peut donc supposer que $k \geqslant 3$. Tout d'abord, il découle de (32) que, pour chaque entier non négatif $i \leqslant k-1$,

$$P\left(\lambda(n+i)>\frac{k}{k-1}\right)>(n+k)^{\frac{k-1}{k}-1}=\frac{1}{(n+k)^{1/k}} \quad (n \geqslant n_0).$$

Or par notre *hypothèse d'indépendance*, les probabilités $P(\lambda(n+i) > \frac{k}{k-1})$ et $P(\lambda(n+j) > \frac{k}{k-1})$ sont indépendantes pour $i \neq j$. C'est pourquoi, pour chaque entier $n \geqslant n_0$,

$$P\left(Q_k(n) > \frac{k}{k-1}\right) = \prod_{i=0}^{k-1} P\left(\lambda(n+i) > \frac{k}{k-1}\right) > \left(\frac{1}{(n+k)^{1/k}}\right)^k = \frac{1}{n+k}.$$

On a donc

$$P\left(Q_k(n) \leqslant \frac{k}{k-1}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{n+k}. \tag{36}$$

Supposons donc qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers positifs n tels que $Q_k(n) > \frac{k}{k-1}$, auquel cas il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a $Q_k(n) \leqslant \frac{k}{k-1}$. Il s'ensuit alors, en raison de (36), que la probabilité P^* que $Q_k(n) \leqslant \frac{k}{k-1}$ pour tout $n \geqslant N$ satisfait à

$$P^* \leqslant \prod_{n \geqslant N} \left(1 - \frac{1}{n+k}\right),$$

lequel produit diverge vers 0, puisque $\sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n+k} = +\infty$, ce qui complète la démonstration du théorème 5.

Avant d'énoncer le prochain résultat, mentionnons un lemme classique de la théorie des probabilités.

Lemme 6 (Inégalité De Markov). *Étant donné une variable aléatoire $Y \geqslant 0$ dont l'espérance mathématique, notée $E[Y]$, est finie, on a pour tout $t > 0$,*

$$P(Y \geqslant tE[Y]) \leqslant \frac{1}{t},$$

de sorte que, en particulier,

$$P(Y = +\infty) = 0.$$

Démonstration. Voir Galambos [4, p. 150].

Théorème 6 (Théorème probabiliste). *Pour chaque entier $k \geqslant 2$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la probabilité qu'il existe une infinité d'entiers n tels que*

$$Q_k(n) > \frac{k}{k-1} + \delta \tag{37}$$

est nulle.

Démonstration. Soit donc $k \geqslant 2$ et $\delta > 0$ fixes. Posons $\delta_1 = \delta \times (k-1)$ de sorte que

$$\frac{k}{k-1} + \delta = \frac{k+\delta_1}{k-1}.$$

Soit par ailleurs $\varepsilon > 0$ un nombre réel satisfaisant

$$\varepsilon < \frac{\delta_1}{3(k+\delta_1)}.$$

Il découle de l'inégalité (34) que, si $n \geqslant n_1$,

$$P\left(\lambda(n+i) > \frac{k+\delta_1}{k-1}\right) < n^{(k-1)/(k+\delta_1)-1+\varepsilon} \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1),$$

de sorte que, puisque $\frac{k-1}{k+\delta_1} - 1 + \varepsilon < \frac{-1-2\delta_1/3}{k+\delta_1}$, on a

$$P\left(\lambda(n+i) > \frac{k+\delta_1}{k-1}\right) < n^{(-1-2\delta_1/3)/(k+\delta_1)} \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1; n \geqslant n_1).$$

En utilisant notre *hypothèse d'indépendance*, on obtient

$$P\left(Q_k(n) > \frac{k+\delta_1}{k-1}\right) = \prod_{i=0}^{k-1} P\left(\lambda(n+i) > \frac{k+\delta_1}{k-1}\right) < n^{(-k-2k\delta_1/3)/(k+\delta_1)} \quad (n \geqslant n_1).$$

Étant donné $x > n_1$, l'espérance mathématique du nombre d'entiers $n < x$ satisfaisant (37) est donc inférieure à

$$\sum_{n<x} n^{(-k-2k\delta_1/3)/(k+\delta_1)} < n_1 - 1 + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^{(k+2k\delta_1/3)/(k+\delta_1)}},$$

laquelle série converge puisque $\frac{k+2k\delta_1/3}{k+\delta_1} > 1$. En faisant appel au lemme 6, la démonstration du théorème 6 est alors complétée.

À la lumière des théorèmes 3, 5 et 6, nous sommes maintenant justifiés de formuler la conjecture suivante.

Conjecture. *Pour chaque entier* $k \geqslant 2$,

$$\limsup_{n\to\infty} Q_k(n) = \frac{k}{k-1}.$$

7. Un argument probabiliste en faveur de la conjecture *abc*

Pour chaque nombre réel $\delta > 0$, désignons par $N(\delta)$ le nombre de triplets $\{a,b,c\}$ avec $(a,b) = 1$ et $a+b = c$ tels que $\log c > (1+\delta)\log\gamma(abc)$.

Notre objectif consiste à établir que la probabilité que la conjecture *abc* soit fausse est nulle. Or il est clair que cet objectif sera réalisé aussitôt que les trois résultats suivants seront démontrés.

Théorème 7. *Pour tout* $\delta > 0$, $E[N(\delta)] < +\infty$.

Corollaire. *Pour tout* $\delta > 0$, $P(N(\delta) < +\infty) = 1$.

Théorème 8. *La conjecture abc est vraie si et seulement si pour tout* $\delta > 0$, $N(\delta) < +\infty$.

Démonstration du Théorème 7. Remarquons d'entrée de jeu que comme $(a,b) = 1$, l'inégalité $\log c > (1+\delta)\log\gamma(abc)$ est équivalente à

$$\log c > (1+\delta)(\log\gamma(a) + \log\gamma(b) + \log\gamma(c)). \tag{38}$$

En utilisant l'identité $\gamma(n) = n^{1/\lambda(n)}$, (38) devient

$$\log c > (1+\delta)\left(\frac{\log a}{\lambda(a)} + \frac{\log b}{\lambda(b)} + \frac{\log c}{\lambda(c)}\right).$$

En isolant $\lambda(b)$, on obtient

$$\lambda(b) > \frac{(1+\delta)\lambda(a)\lambda(c)\log b}{\lambda(a)\lambda(c)\log c - (1+\delta)\lambda(a)\log c - (1+\delta)\lambda(c)\log a}. \tag{39}$$

Nous introduisons maintenant la fonction de fréquence

$$f(n,x) := \frac{1}{n}\#\{m < n : \lambda(m) = x\}.$$

Avec ces notations, on obtient que la probabilité P_* que l'inégalité (39) tienne satisfait à

$$P_* = \int_1^\infty f(c,z) \int_1^\infty f(a,x) \int_R^\infty f(b,y)\, dy\, dx\, dz,$$

où

$$R := \frac{(1+\delta)xz\log b}{xz\log c - (1+\delta)x\log c - (1+\delta)z\log a}.$$

Par ailleurs, il découle du lemme 4 que $F(z,x) < x^{1/z}G(x)$, où $G(x) = 1 + L(xL(x))$, de sorte que $P(\lambda(n) > z) < n^{1/z-1}G(n)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P_* &< \int_1^\infty f(c,z) \int_1^\infty f(a,x) b^{\frac{xz\log c - (1+\delta)x\log c - (1+\delta)z\log a}{(1+\delta)xz\log b}-1} G(b)\, dx\, dz \\ &= \frac{c^{1/(1+\delta)}G(b)}{b} \int_1^\infty f(c,z)c^{-1/z} \int_1^\infty f(a,x)a^{-1/x} dx\, dz. \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned} P_* &< \frac{c^{1/(1+\delta)}G(b)}{b}\int_1^\infty f(c,z)c^{-1/z}\left(\left[-\frac{P(\lambda(a)>x)}{a^{1/x}}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{a^{-1/x}}{x^2}P(\lambda(a)>x)dx\right)dz \\ &< \frac{c^{1/(1+\delta)}G(b)}{b}\int_1^\infty f(c,z)c^{-1/z}\left(\frac{1}{a} + \int_1^\infty \frac{G(a)}{ax^2}dx\right)dz \\ &= \frac{c^{1/(1+\delta)}(G(a)+1)G(b)}{ab}\int_1^\infty f(c,z)c^{-1/z}dz \\ &< \frac{c^{1/(1+\delta)}(G(a)+1)(G(c)+1)G(b)}{abc} \end{aligned} \tag{40}$$

Comme $G(n)$ est une fonction croissante et comme $c > a, c > b$, il est clair que $(G(a)+1)(G(c)+1)G(b) < (G(c)+1)^3$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b \geqslant c/2$, de sorte que $\frac{1}{abc} \leqslant \frac{2}{ac^2}$ et par conséquent il découle de (40) que

$$P_* < \frac{2c^{1/(1+\delta)}(G(c)+1)^3}{ac^2}.$$

Nous avons ainsi établi que

$$E[N(\delta)] < \sum_{c=2}^{\infty}\sum_{a=1}^{c/2}\frac{2c^{1/(1+\delta)}(G(c)+1)^3}{ac^2} < \sum_{c=2}^{\infty}\frac{2c^{1/(1+\delta)}(G(c)+1)^3\log c}{c^2}. \tag{41}$$

Or, il découle de (26) que $L(n)$ croît moins rapidement que toute puissance de n et, par conséquent, qu'il en est de même pour la fonction $G(n) = L(nL(n))$. Il existe donc une constante $c_0 = c_0(\delta)$ telle que

$$(G(c)+1)^3\log c < c^{\delta/(2(1+\delta))} \quad (c \geqslant c_0).$$

En utilisant ceci dans (41), il s'ensuit que

$$E[N(\delta)] < \sum_{2\leqslant c<c_0}\frac{2c^{1/(1+\delta)}(G(c)+1)^3\log c}{c^2} + 2\sum_{c\geqslant c_0} c^{-2+1/(1+\delta)+\delta/(2(1+\delta))}.$$

Or comme $-2+1/(1+\delta)+\delta/(2(1+\delta)) = -1-\frac{\delta}{2(1+\delta)} < -1$, cette dernière série converge, complétant ainsi la démonstration du théorème 7.

Démonstration du Corollaire. Ce résultat découle immédiatement du théorème 7 en faisant appel au lemme 6.

Démonstration du Théorème 8. Supposons d'abord que la conjecture *abc* soit vraie. Dans ce cas, pour tout $\delta_1 > 0$, il existe une constante positive $M = M(\delta_1)$ telle que $c < M\gamma(abc)^{1+\delta_1}$, auquel cas en prenant les logarithmes,

$$\log c - \log M < (1+\delta_1)\log\gamma(abc). \tag{42}$$

Or il existe une constante $c_1 = c_1(\delta_1)$ telle que,

$$\log c - \log M > \frac{1}{1+\delta_1}\log c \quad (c > c_1). \tag{43}$$

En combinant (42) et (43), on en déduit que

$$\log c < (1+2\delta_1+\delta_1^2)\log\gamma(abc) \quad (c > c_1), \tag{44}$$

laquelle inéalité implique que $N(2\delta_1+\delta_1^2) < +\infty$ pour tout $\delta_1 > 0$. En posant $\delta = 2\delta_1+\delta_1^2$, on peut donc conclure que la conjecture *abc* implique que $N(\delta) < +\infty$ pour tout $\delta > 0$.

Pour démontrer la réciproque, on se donne un nombre $\delta > 0$ arbitraire. Par hypothèse, on a $N(\delta) < +\infty$, auquel cas l'inégalité $\log c > (1+\delta)\log\gamma(abc)$ n'a qu'un nombre fini de solutions $\{a,b,c\}$ avec $(a,b)=1$ et $a+b=c$; désignons cet ensemble de solutions par S_δ. Choisissons ensuite

$$M(\delta) > \max_{\{a,b,c\}\in S_\delta}\exp\{\log c-(1+\delta)\log\gamma(abc)\}.$$

Avec un tel choix de $M(\delta)$, on aura alors $\log c < (1+\delta)\log\gamma(abc) + \log M(\delta)$, c'est-à-dire

$$c < M(\delta)\gamma(abc)^{1+\delta},$$

ce qui est précisément ce qu'affirme la conjecture *abc*, complétant ainsi la démonstration du théorème 8.

Références

[1] Browkin J (2000) The *abc*-conjecture. In: Bambah RP et al. (eds) Number Theory, pp 75–105. Basel: Birkhäuser

[2] de Bruijn NG (1962) On the number of integers $\leqslant x$ whose prime factors divide n. Illinois J Math **6**: 137–141

[3] De Koninck JM, Sitaramachandrarao R (1987) Sums involving the largest prime divisor of an integer. Acta Arith **48**: 1–8

[4] Galambos J (1984) Introductory Probability Theory. New York: Dekker

[5] Golomb SW (1970) Powerful numbers. Amer Math Monthly **77**: 848–852

[6] Ivić A, Shiu P (1982) The distribution of powerful numbers. Illinois J Math **26**: 576–590

[7] Ribenboim P (2001) The ABC conjecture and the radical index of integers. Acta Arith **96**: 389–404

[8] Rosser JB, Schoenfeld L (1962) Approximate formulas for some functions of prime numbers. Illinois J Math **6**: 64–94

Authors' address: Jean-Marie De Koninck and Nicolas Doyon, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec G1K 7P4, Canada, e-mail: jmdk@mat.ulaval.ca