

Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik

Thomas Bauer · Ulrich Partheil

Eingegangen: 25. September 2008 / Angenommen: 24. Oktober 2008 / Online: 2. Dezember 2008
© Springer-Verlag 2008

Zusammenfassung Im Zuge der Reform der Lehramtsausbildung in Hessen wurde insbesondere die Einführung von *Schnittstellenmodulen* in den Studienplan ermöglicht. Dabei handelt es sich um Module, die sowohl fachwissenschaftliche als auch fachdidaktische Studienanteile beinhalten. Die Autoren diskutieren Konzeption und Chancen solcher Module in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Zur Verdeutlichung werden konkrete Beispiele aus einem Schnittstellenmodul *Analysis* vorgestellt, das die Autoren entwickelt und durchgeführt haben. Dieses Modul ist seither fester Bestandteil des Lehramtsstudiengangs Mathematik an der Universität Marburg.

1 Ausgangslage: Aktuelle Herausforderungen in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik

Das Problem der doppelten Diskontinuität. In den letzten Jahren hat sich die Diskussion um Reformbedarf und Reformbemühungen in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik spürbar intensiviert (siehe etwa [2] und [15, Abschn. 7]). Der Ausgangspunkt für die Überlegungen und Vorschläge, die die Autoren zu diesem Problemkreis im vorliegenden Text beschreiben werden, ist das bekannte Problem, dass Studierende des Lehramts die Übergänge

Schulmathematik \longrightarrow universitäre Mathematik \longrightarrow Schulmathematik

am Beginn und Ende ihres Studiums als Bruchstellen erleben. Das Problem äußert sich darin, dass viele Lehramtsstudierende Schulmathematik und universitäre Mathe-

T. Bauer (✉) · U. Partheil
Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Straße,
D-35032 Marburg, Deutschland
e-mail: tbauer@mathematik.uni-marburg.de
e-mail: partheil@mathematik.uni-marburg.de

matik als voneinander getrennte Welten wahrnehmen, sowohl während ihres Studiums als auch danach. Bedenklich ist die Beobachtung, dass Lehrkräfte – als mögliche Folge dieser Wahrnehmung – bei ihrem Eintritt in das Berufsleben den in der eigenen Schulzeit erlebten Unterricht reproduzieren (siehe [5]). Die in einem langjährigen Schülerdasein entstandenen inneren Skripts vom Lehrerhandeln wirken dann offenbar stärker als das in der Ausbildungsphase erworbene Bild von Mathematik und vom Mathematiklernen (siehe auch Seidel in [23] mit analogen Beobachtungen im Physikunterricht). Felix Klein hat dieses Problem bereits 1924 in der Einleitung zu [19] formuliert und dabei den Begriff *Doppelte Diskontinuität* geprägt:

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergisst er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.“

Obgleich sich seit Kleins Kritik sowohl der schulische Mathematikunterricht als auch die universitäre Mathematikausbildung gravierend verändert haben, scheint das Problem im Kern weiterhin zu bestehen (siehe z.B. [9, 15] und [24]).

Diskontinuität auf mehreren Ebenen. Da die Kluft zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik für unsere Überlegungen grundlegend ist, kann es von Nutzen sein, genauer zu analysieren, worin diese Kluft eigentlich im Einzelnen besteht. Wir verorten sie auf drei Ebenen:

(I) *Inhaltsebene.* Unterschiede kann man sofort hinsichtlich der verhandelten Inhalte ausmachen – offensichtliches Beispiel hierfür ist die Geometrie: Während sie in der Schulmathematik als *Elementargeometrie* oder *Analytische Geometrie* auftritt, liegt der Fokus der universitären Mathematik auf den forschungsaktiven Gebieten *Algebraische Geometrie* und *Differentialgeometrie*.¹

(II) *Ebene der Ziele.* Selbst in den Fällen, in denen in Schul- und Hochschulmathematik dieselben Themen behandelt werden, kann dies mit unterschiedlichen, im jeweiligen Kontext sehr berechtigten, Zielen geschehen. Als Folge ergibt sich eine Art „Ziel-Diskontinuität“. Hierfür ein Beispiel aus der Analysis: Bei der Behandlung der Integrationstheorie innerhalb einer Analysis-Vorlesung werden u.a. folgende Ziele von einiger Bedeutung sein:

- die Eigenschaften des Riemann-Integrals nachweisen können;
- Beispiele für nicht-integrierbare Funktionen angeben können;
- Kriterien für Integrierbarkeit kennen, beweisen und anwenden können.

¹ Solche „Inhalts-Diskontinuität“ gibt es auch in anderen Unterrichtsfächern, wie die Autoren kürzlich bei einer Diskussion mit Fachdidaktikern anderer Unterrichtsfächer erfahren konnten.

In der Behandlung der Integralrechnung in der gymnasialen Oberstufe spielen solche Ziele dagegen systembedingt keine Rolle; beispielsweise wird die Bedeutung der Stetigkeit der betrachteten Funktionen üblicherweise erst bei der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung angesprochen werden (vgl. [18, Abschn. 5.2.1]).

(III) *Argumentationsebene*. In der universitären Mathematik gibt der angestrebte axiomatisch-deduktive Aufbau den argumentativen Rahmen vor. Dieser vollständige und lückenlose Aufbau der Theorie ist ein Wesensmerkmal von Mathematik als Wissenschaftsdisziplin; ein neues mathematisches Teilgebiet erlernen bedeutet immer auch, die Durchführung des deduktiven Aufbaus in diesem Gebiet zu verstehen. Affektive Einstellungen von Mathematikern gegenüber mathematischen Theorien beruhen – neben den Resultaten, die diese hervorgebracht hat – wesentlich darauf, „wie dort argumentiert wird“, d.h. auf der Ästhetik des erzielten deduktiven Aufbaus. In der Schule präsentiert sich Mathematik auf ganz andere Art: Hier ist Argumentieren auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen angebracht und üblich; anschauliche, heuristische Argumentationen stehen gleichberechtigt neben vollständigen Beweisen. Man führe sich die Situation am Beispiel des Zwischenwertsatzes vor Augen: Falls man den Satz im Unterricht überhaupt herausstellt, so wird man vermutlich nicht über das Plausibilitätsargument hinausgehen, dass jede Parallele zur x -Achse den Graphen einer stetigen Funktion im betrachteten Bereich schneiden „muss“.² Dieselbe Überlegung wird man auch in einer Analysis-Vorlesung finden, jedoch in völlig anderer Rolle, nämlich als heuristische Vorüberlegung, die zum Zwischenwertsatz *hinführt*. Der eigentliche *Beweis* im deduktiven Rahmen zeigt dann, wie die Stetigkeit der Funktion und die Vollständigkeit der reellen Zahlen in die Begründung eingehen.

Selbstverständlich sind die drei Ebenen nicht völlig unabhängig voneinander. Insbesondere sind die angestrebten Ziele von der jeweils eingenommenen Argumentationsebene beeinflusst. Die Argumentationsebenen ihrerseits stehen dabei in Zusammenhang mit den zugehörigen Stufen im Lernprozess.

Während Diskontinuität in Inhalten und Zielen offenbar auch in anderen Unterrichtsfächern vorkommt, scheint uns die „Argumentations-Diskontinuität“ ein Spezifikum des Fachs Mathematik zu sein. Möglicherweise ist sie dafür verantwortlich, dass in anderen Fächern ein Analogon zum Problem der doppelten Diskontinuität nicht – oder nicht im selben Maße – diskutiert zu werden scheint. Von Studierenden wird nach unserer Erfahrung jedenfalls gerade dieser Aspekt als besonders gravierend empfunden.

Mögliche Folgen für die Ausbildung. Nach unserer Beobachtung führt die Kluft zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik häufig dazu, dass Lehramtsstudierende Fachwissenschaft und Fachdidaktik als scharf getrennte Studienanteile mit deutlich verschiedenen Zielen sehen:

²Dass dieses Argument naheliegend ist, mag man beispielsweise auch daran ersehen, dass Cauchy in seinem *Cours d'Analyse* [6, S. 50f] als Beweis für den Zwischenwertsatz zunächst genau diese geometrisch-anschauliche Begründung gibt, bevor er einen zweiten – aus heutiger Sicht stichhaltigeren – Beweis vorlegt, der auf das Intervallschachtelungspostulat Bezug nimmt [6, S. 378ff]. Wir verdanken diesen Aspekt D. Spalt.

- Fachdidaktik wird als derjenige Studienanteil gesehen, der sich mit dem Lehren und Lernen von *Schulmathematik* befasst – sie wird in diesem Sinne als professionsorientierte Komponente der Ausbildung betrachtet und überwiegend sehr positiv aufgenommen.
- Der fachwissenschaftliche Ausbildungsanteil wird – mindestens in Teilen – eher „examensorientiert“ gesehen: als eine Komponente der Ausbildung, die zum Bestehen des Staatsexamens gefordert wird, deren Relevanz für das angestrebte Berufsfeld jedoch teils fraglich scheint.

Die Probleme, die aus dieser Trennung bereits unmittelbar innerhalb der Ausbildung resultieren, manifestieren sich in unserer Lehrerfahrung auf beiden Seiten der imaginären „Trennwand“:

- In fachwissenschaftlichen Veranstaltungen sehen Studierende oft nicht die didaktische Perspektive der gebotenen Inhalte, was zu einem gravierenden Motivationsproblem führen kann, das den Lernprozess erwartungsgemäß beeinträchtigt. Dies gilt umso mehr, wenn Lehrende fachdidaktische Aspekte nur in einer Fernperspektive in Aussicht stellen.³
- In fachdidaktischen Veranstaltungen ist der fachliche Hintergrund für die vorgesehenen fachdidaktischen Überlegungen oft nicht zugreifbar. Bemühungen seitens der Lehrenden, fachliche Grundlagen zu reaktivieren, gestalten sich mühsam und scheinen manchmal gar unwillkommen. Bei fachdidaktisch Lehrenden kann dies zu Frustrationen über den Leistungsstand der Studierenden und/oder zu Kritik am Lehrerfolg der Fachwissenschaft führen. Im Ergebnis bedeutet dies oft, dass fachliche Hintergründe für didaktische Fragen nicht nutzbar gemacht werden; Studierende greifen dann stattdessen auf andere Bewältigungskonzepte zurück – etwa auf ihre Erinnerung an die Schulmathematik oder auf Ad-Hoc-Überlegungen.

Was ist zu tun? Ausgehend von den beschriebenen Diskontinuitäten und ihren beobachtbaren Folgen scheint folgende These naheliegend:

These: *Die Verbindungen*

Schulmathematik \longleftrightarrow *Mathematik als Wissenschaft*

und

Fachdidaktik \longleftrightarrow *Fachwissenschaft*

stellen sich (bei der Mehrheit der Lehramtsstudierenden) nicht von selbst ein. Vielmehr müssen die hierfür notwendigen gedanklichen Prozesse geeignet initiiert werden.

Während diese These bei den mit dem hier verhandelten Problem befassten Personen geradezu Allgemeingut sein dürfte (vgl. Blum und Henn in [3]), entspricht sie

³ Bemerkenswerterweise scheinen Diplom- bzw. Bachelorstudierende analoge Probleme der Berufsfeldrelevanz weitaus weniger zu artikulieren. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Untersuchung [7], die bei Diplomstudierenden ein größeres fachbezogenes Selbstvertrauen feststellt als bei Lehramtsstudierenden. Diese Beobachtung wird nochmals bestätigt durch [21].

nach unserem Eindruck noch nicht der Mehrheitsmeinung der an der Lehramtsausbildung insgesamt beteiligten Dozenten. Andererseits wurde sie, so weit sie die Verbindung von Schulmathematik und universitärer Mathematik betrifft, offenbar bereits von Felix Klein vertreten – stellt er doch fest, dass der Student „*diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann*“ (a.a.O.).

Folgt man der o.g. These, so stellt sich die Frage, welche Maßnahmen dazu beitragen könnten, um die „Trennwand“ in den Köpfen der Studierenden nach Möglichkeit gar nicht erst entstehen zu lassen. Naheliegender scheint als allererster

„**Schritt 0:**“ *Explizieren der Verbindungen durch die Dozenten in den fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen.*

Die Autoren gehen diesen „Schritt 0“, der ein Aufeinanderzugehen aus beiden Richtungen beinhaltet, seit geraumer Zeit. Positive Effekte sind durchaus spürbar und durch Vorlesungsbefragungen bestätigt; so erweist sich in fachwissenschaftlichen Veranstaltungen das explizite Eingehen auf die schulische Relevanz der aktuell behandelten Inhalte und der Hinweis auf deren fachdidaktische Aspekte als sichtbar motivationsfördernd. Wir stellen jedoch fest, dass dem so Erreichbaren Grenzen gesetzt sind:

- In fachwissenschaftlichen Veranstaltungen lässt sich die Bedeutung der fachlichen Inhalte für fachdidaktische Weiterarbeit oft nur andeuten oder in einer Fernperspektive in Aussicht stellen. Der Effekt als Brückenschlag und die motivationsfördernde sinnstiftende Wirkung bleiben dann begrenzt.
- In fachdidaktischen Veranstaltungen fällt das Anknüpfen an fachliche Hintergründe oft schwer, wenn diese in einem Modul vermittelt wurden, das Studierende bereits mehrere Semester zuvor abgeschlossen haben: Zum einen kann es sich als schwierig erweisen, solche Hintergründe zu reaktivieren, zum anderen scheinen innere Einstellungen über einen möglicherweise angenommenen „mangelnden Gebrauchswert“ dieser Studienanteile dann bereits verfestigt und schwer korrigierbar. Diese verfestigte Haltung trägt auch zu einem verkürzten Verständnis von Fachdidaktik bei, das einseitig die methodische Seite betont und die notwendige Verflechtung von fachlich-inhaltlichen und unterrichtsmethodischen Überlegungen verkennt.

Angesichts dieser Grenzen schlagen wir als nächsten, weitergehenden Schritt vor:

„**Schritt 1:**“ *Gleichzeitige Behandlung von fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Inhalten.*

Im weiteren Text werden wir mit dem Konzept der *Schnittstellenmodule* einen Ansatz für die Umsetzung dieses Vorschlags beschreiben.

2 Konzeption und Chancen von Schnittstellenmodulen

Neue Rahmenbedingungen als Notwendigkeit und Chance zur Neustrukturierung. Der formal-organisatorische Ausgangspunkt für die Umsetzung unserer

Überlegungen war das Hessische Lehrerbildungsgesetz [16] aus dem Jahr 2004, das beginnend mit dem Wintersemester 2005/06 ein Lehramtsstudium in (teil-)modularisierter Form forderte. Dadurch ergab sich für uns die Notwendigkeit und Chance zur Neustrukturierung des Lehramtsstudiengangs im Fach Mathematik am Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg. Zwei Aspekte der gesetzlichen Vorgaben sind für die hier angestellten Überlegungen von besonderer Bedeutung:

a) *Neue Gewichtung der Studienanteile.* Für die Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik stehen 90 Leistungspunkte (ECTS-Punkte) zur Verfügung, von denen

- 60 Leistungspunkte auf den fachwissenschaftlichen und
- 30 Leistungspunkte auf den fachdidaktischen Studienanteil

entfallen.

b) *Schnittstellenmodule.* In der zum Lehrerbildungsgesetz [16] gehörigen Umsetzungsverordnung [17] findet sich in §4(5) die folgende Formulierung:

„Fachdidaktische und fachwissenschaftliche Studienanteile können in je eigenständigen Modulen oder gemeinsam in ein Modul integriert organisiert werden.“

Das Zentrum für Lehrerbildung der Philipps-Universität Marburg prägte daraufhin in den für die Lehramtsstudiengänge maßgeblichen Allgemeinen Bestimmungen [22] den Begriff der *Schnittstellenmodule*, verbunden mit einer inhaltlichen Zielsetzung:

„Pflicht- und Wahlpflichtmodule können als Schnittstellenmodule zwischen den Studienanteilen der universitären Ausbildung [. . .] durchgeführt werden, insbesondere mit dem Ziel der Verknüpfung fachlicher und berufspraktischer Kompetenzen.“

Schnittstellenmodule als Chance. Unsere Idee war es nun, den durch die Schnittstellenmodule gegebenen formal-organisatorischen Rahmen und die durch die Verteilung der Leistungspunkte gegebene Situation für Brückenschläge zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik zu nutzen, um den oben beschriebenen Problemen der Diskontinuität zu begegnen. Wir haben daher in den Studienplan, der die Ausbildung für das gymnasiale Lehramt im Fach Mathematik in Marburg regelt, zwei Schnittstellenmodule aufgenommen: Analysis und Elementare Stochastik. Im weiteren Text stellen wir das Modul zur Analysis vor, das die Autoren konzipiert und durchgeführt haben.

Kurz gefasst sind unsere Ziele, bezogen auf das Modul Analysis, die folgenden:

- Die fachwissenschaftlichen Inhalte der Vorlesung Analysis sollen in Bezug zur Schulanalysis gesetzt werden. Aus der Schulmathematik Bekanntes soll im neuen Rahmen eingeordnet, reflektiert und vertieft werden. Der frühe Bezug auf den Mathematikunterricht soll motivationsfördernd wirken.
- Fachdidaktische Fragestellungen sollen in einem frühem Stadium der Ausbildung und in direktem Bezug zum fachlichen Hintergrund angesprochen werden, damit Fachinhalte und didaktische Reflexion in günstige Wechselwirkung treten können.

In der *Intention* ist unser Ansatz verwandt zum Gießen–Siegener Projekt [2] von Beutelspacher und Danckwerts, in der *Umsetzung* ist es verwandt zu dem von Prediger und Leufer in [20] beschriebenen Projekt, auf das wir nach der Erstdurchführung des Moduls aufmerksam wurden und zu dem wir erfreuliche Parallelen feststellten. Die Hauptunterschiede zu [2] und [20] lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

- Der Umfang der Restrukturierung ist deutlich geringer als in [2]. Unser Ansatz kommt daher ohne externe Finanzierung aus, da kaum mehr Ressourcen als vorher benötigt werden. Er ist daher mit den „Bordmitteln“ eines üblichen mathematischen Fachbereichs realisierbar.
- Es handelt sich nicht um ein einmalig durchgeführtes *Projekt*, sondern um eine dauerhaft im Studienplan verankerte *Reform*. (Auch aus diesem Grund war es für uns wichtig, eine drittmittelunabhängige Lösung zu finden.)

Einzelheiten zur Konzeption. Das Modul Analysis wird in Marburg in mehreren Studiengängen benötigt:

1. Diplom/Bachelor Mathematik
2. Diplom/Bachelor Wirtschaftsmathematik
3. Mathematik für das Lehramt an Gymnasien
4. Diplom/Bachelor Physik

Man könnte diskutieren, ob das Anbieten von separaten Vorlesungen für die einzelnen Studiengänge wünschenswert wäre, um die Erfordernisse der jeweiligen Zielgruppe besonders berücksichtigen zu können, oder ob sich eine solche frühe Trennung nach Studiengängen als eher kontraproduktiv erweisen würde. Da in unserer Situation eine separate Vorlesung für Lehramtsstudierende kapazitär ohnehin nicht leistbar war, erwies sich die abschließende Beurteilung dieser Frage als nicht aktuell erforderlich.⁴

Eine Vorlesung, die für mehrere Studiengänge gemeinsam vorgesehen ist, wird nur begrenzt fachdidaktische Elemente aufnehmen können. Möglich ist aber durchaus:

- Das in Abschn. 1 als „Schritt 0“ bezeichnete Herausstellen der Verbindungen kann selbstverständlich in der Vorlesung weiterhin und verstärkt geschehen, ebenso wie man für Studierende der Physik an geeigneten Stellen die Relevanz mathematischer Begriffe und Modelle zur Beschreibung von physikalischen Sachverhalten erläutern wird.
- Die Vorlesung kann Anstrengungen unternehmen, mathematische Theorie- und Begriffsbildung erfahrbar zu machen. Während der deduktive Aufbau als logischer Rahmen dient und ein wichtiges Ziel der Vorlesung bleibt, wird Mathematik dennoch nicht nur als Fertigprodukt „herübergereicht“ – so versucht beispielsweise eine ausführliche heuristische Vorüberlegung zum Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Leitfrage „Wie könnte

⁴ Wir vermuten, dass die kapazitive Situation in vielen mathematischen Fachbereichen ähnlich ist, so dass wir unseren Ansatz gerade in dieser Hinsicht durchaus als realistische Demonstration dessen sehen, was mit „Bordmitteln“ möglich ist.

eine brauchbare Definition lauten?“ mathematische Begriffsbildung erlebbar zu machen.⁵

Neben diese innerhalb der Vorlesung möglichen Maßnahmen treten Übungen, die für *Lehramtsstudierende separat* angeboten werden und speziell auf diese Lerngruppe ausgerichtet sind. Konkret sieht unser Konzept vor:

- (1) Die Übungen für Lehramtsstudierende enthalten sowohl einen fachlichen als auch einen fachdidaktischen Anteil (jeweils 50%). Der fachdidaktische Anteil umfasst folgende Komponenten:
 - Jede Sitzung beginnt mit einem *Kurzvortrag*, in Zweiertteams vorbereitet und durchgeführt, in dem der Gebrauch der mathematischen Fachsprache und das Präsentieren mathematischer Inhalte geübt werden sollen.
 - Den Kern der fachdidaktischen Komponente bilden spezielle *fachdidaktische Aufgaben*, die 50% der für Diplom-/Bachelorstudierenden vorgesehen Aufgaben ersetzen. Diese Aufgaben sollen die Verzahnung von fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Aspekten der Analysis herstellen. Zur Verdeutlichung werden wir in Abschn. 3 ausführlich vier konkrete Beispiele solcher Aufgaben vorstellen.
- (2) Die Lehramtsübungen werden von speziell ausgewählten Tutoren durchgeführt. Ausführliche wöchentliche Vor- und Nachbesprechungen des Dozenten mit den Tutoren über den Hintergrund und die Intentionen der gestellten Aufgaben haben sich dazu als wesentlich erwiesen, ebenso wie ein vor Beginn des Semesters bereits stabiles und vollständiges Programm für die fachdidaktischen Übungen.
- (3) Die Zweiteilung des Übungsbetriebs spiegelt sich in separaten Klausuren wider. Dieser Schritt scheint uns selbstverständlich, da die Lehramtsstudierenden in der Summe ein *anderes* Modul als die Diplom-/Bachelorstudierenden belegen – die abweichenden Inhalte und Ziele erfordern naturgemäß einen abweichenden Test.

Wir wollen an dieser Stelle auch die Grenzen des Konzepts in Bezug auf die Fachdidaktik kurz aufzeigen. Es fehlt innerhalb des Schnittstellenmoduls die Gelegenheit und Zeit, von den Studierenden ein vertieftes Studium von fachdidaktischer Literatur zu fordern. (Man beachte aber in Abschn. 3 die Schulbuch-Recherche in Aufgabe 2 und den Literaturbezug in Aufgabe 4.) Ferner liegt der Schwerpunkt auf der fachlich-epistemologischen Dimension von Fachdidaktik, die anhand konkreter Beispiele aus der Analysis beleuchtet wird. Andere Facetten von Fachdidaktik, wie die lern- und kognitionspsychologische Dimension oder die unterrichtsmethodische Dimension, sind Gegenstand separater Lehrveranstaltungen. Es ist nicht etwa das Ziel, einen *Ersatz* für eine Veranstaltung zur Didaktik der Analysis in das Modul zu integrieren, sondern eine *Brücke* dorthin zu schlagen. Im optimalen Fall soll eine in späterem Semester belegte fachdidaktische Veranstaltung zur Didaktik der Analysis nicht als „unabhängig“ vom Modul Analysis gesehen werden, sondern als der Ort, an dem be-

⁵ Es sei betont, dass wir solche Maßnahmen nicht im engeren Sinne als Teil unserer Bemühungen in der Lehramtsausbildung sehen, sondern als wichtige Elemente des Mathematiklernens schlechthin (siehe hierzu besonders [14, Abschn. 2.2]). Diesbezügliche Anstrengungen erachten wir daher als für alle Hörer der Vorlesung wesentlich.

reits begonnene Überlegungen weitergeführt werden und von dem aus man sich in natürlicher Weise auf das Modul Analysis zurückbezieht.

3 Beispiele für die Umsetzung

Wir stellen im folgenden vier Beispiele aus unseren fachdidaktischen Übungen vor, um die Durchführung des Schnittstellenmoduls Analysis zu verdeutlichen. Jede der vier beschriebenen Aufgaben stellt einen fachdidaktischen Arbeitsauftrag dar, der (neben fachwissenschaftlichen Aufgaben) innerhalb einer Woche zu bearbeiten war – insgesamt wurden 13 fachdidaktische Aufgaben gestellt.

Beispiel 1. Potenzen mit reellen Exponenten

Hintergrund. Der Auffassung der Mehrheit der aktuellen Lehrbuchliteratur zur Analysis folgend wurden in der Vorlesung allgemeine Potenzen durch

$$a^x := e^{x \ln a} \quad \text{für } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

eingeführt. Es ist also zum Beispiel $5^{\sqrt{2}}$ als $e^{\sqrt{2} \ln 5}$ definiert. Dies setzt die vorgängige Behandlung der Exponentialfunktion voraus, die über ihre Reihe definiert wurde:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, die aus der Reihendarstellung gewonnen wurde, folgen dann unmittelbar die Potenzgesetze.

Unserer Meinung nach liegt hier ein typisches Beispiel vor, in dem aus Sicht der Studierenden die Relevanz des universitären Vorgehens in Frage steht – ist doch das schulübliche Vorgehen, das eine schrittweise Ausweitung der Definition von a^x auf eine immer größer werdende Klasse von Exponenten vornimmt, hiervon völlig verschieden. Um die Studierenden mit dieser Diskrepanz zu konfrontieren, stellten wir die nachfolgende Aufgabe.

Aufgabenstellung. Im Unterricht der Sekundarstufe werden Potenzen a^x mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ häufig auf folgende Art schrittweise eingeführt: Potenzen a^n mit $n \in \mathbb{N}$ sind bereits als Produkte $a \cdot \dots \cdot a$ mit n Faktoren erklärt. Dies lässt sich leicht auf Produkte a^n mit $n \in \mathbb{Z}$ erweitern. Potenzen $a^{1/n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ werden als n -te Wurzeln erklärt. Damit wird es möglich, Potenzen a^q mit $q \in \mathbb{Q}$ zu definieren. Schließlich werden Potenzen a^x mit $x \in \mathbb{R}$ durch Grenzwertbildung erklärt, bei der die reelle Zahl x durch eine Folge rationaler Zahlen approximiert wird.

- Führen Sie den oben skizzierten Zugang fachlich vollständig aus. Beachten Sie dabei alle Feinheiten, z.B. dass eine reelle Zahl durch verschiedene Folgen rationaler Zahlen approximiert werden kann.
- Vergleichen Sie diesen Zugang unter folgenden Gesichtspunkten mit dem in der Vorlesung beschrifteten Weg:

- (i) Welche Lernvoraussetzungen werden jeweils benötigt?
- (ii) Wo liegen jeweils die Anknüpfungspunkte an bereits bekannte Sachverhalte? In welcher Version sind diese stärker ausgeprägt? (Diese sogenannten *Ankerpunkte* sind ein wichtiger Aspekt des *meaningful learning*.)
- (iii) Welche Version ist ökonomischer? (Überlegen Sie sich dazu zum Beispiel, wie der Beweis der Potenzgesetze oder die Bestimmung der Ableitung der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ in beiden Versionen erfolgen könnte.)

Kommentar. Die Aufgabe macht nicht den Versuch, die klar vorliegende Diskrepanz zwischen schulüblichem und universitärem Zugang zu leugnen. Vielmehr geht es um die Einsicht, dass beide Zugänge im jeweiligen Kontext zweckmäßig sind: Bei der Bearbeitung der Aufgabenteile (a) und (b)(iii) wird deutlich, dass die im systematischen Aufbau der Theorie notwendige vollständige Durchführung der angesprochenen Punkte im schulüblichen Aufbau in geradezu schmerzhafter Weise unpraktikabel ist. Seine in (b)(i) und (b)(ii) erkannten, überzeugenden Vorzüge für den Unterricht kann der schrittweise Zugang deshalb ausspielen, weil die vollständige Durchführung im Unterricht eben gerade *nicht* erfolgt – üblicherweise wird man etwa die Potenzgesetze im Unterricht für ganzzahlige Exponenten nachweisen, während man ihre Gültigkeit insbesondere für irrationale Exponenten im Sinne einer algebraischen Permanenz schlicht unterstellen wird.

Nach unserer Meinung sind solche – exemplarisch durchgeführten – Detailvergleiche sehr hilfreich, um Einsicht in die Gründe für Diskontinuitäten zu gewinnen. Demgegenüber halten wir die bloße Mitteilung, dass ein in der Vorlesung gewählter Zugang vorteilhaft sei, für weit weniger effektiv.

Beispiel 2. Behandlung der Integrationstheorie im Unterricht

Hintergrund. In der Vorlesung wurde die Integrationstheorie auf der Grundlage des Riemann- und des Regelintegrals behandelt, von den grundlegenden Integraleigenschaften wie Linearität und Monotonie bis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit seinen Anwendungen auf die Berechnung von Integralen. Das Flächeninhaltsproblem sowie das Problem der Umkehrung der Differentiation dienten als Orientierung und Motivation. Auf der Grundlage dieser Kenntnisse über die Integrationstheorie sollen die Studierenden nun den Zugang eines Unterrichtswerks zur Integration verstehen und beurteilen.

Aufgabenstellung. Untersuchen Sie in einem Unterrichtswerk Ihrer Wahl die Behandlung der Integration:

- (a) Formulieren Sie eine fachlich präzise Definition des dort verwendeten Integralbegriffs.
- (b) Wie werden die grundlegenden Integraleigenschaften (Linearität, Monotonie, Beschränktheit) behandelt? Arbeiten Sie dabei genau heraus, welche Aspekte
 - (i) vollständig begründet werden,
 - (ii) durch Plausibilitätsbetrachtungen oder anschauliche Argumente vermittelt werden,
 - (iii) als Fakten (ohne Begründung oder Plausibilitätsbetrachtungen) mitgeteilt werden.

- (c) Untersuchen Sie, welcher Anteil der bereitgestellten Aufgaben sich jeweils folgenden Lernzielen zuordnen lässt:
- (i) Konzeptionelles Verständnis des Integralbegriffs
 - (ii) Verständnis der inhaltlichen Bedeutung des Integrierens (Berechnung von Flächeninhalten, Volumina oder Bogenlängen, Integration als Umkehrung der Differentiation)
 - (iii) Beherrschen des Integralkalküls (Berechnung konkret gegebener Integrale mittels verschiedener Integrationsmethoden)
- Nehmen Sie Stellung zum gefundenen Ergebnis.
- (d) Finden Sie (oder recherchieren Sie in einem geeigneten Unterrichtswerk der 12. Jahrgangsstufe) einen schülergerechten Beweis für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
(Hinweis: Das übliche Argument mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung lässt sich durch die Aussage ersetzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Maximum und Minimum annehmen. Letztere könnte man anschaulich plausibel machen.)

Kommentar. Die in (a) und (b) geforderte fachliche Analyse des Zugangs zur Integrationstheorie in einem Unterrichtswerk erweist sich als für Studierende durchaus anspruchsvolle Aufgabe. So spielt hier etwa der Unterschied zwischen dem in der universitären Lehrbuchliteratur (siehe z.B. [11]) verbreiteten Zugang zum Riemann-Integral über Treppenfunktionen und dem Darbouxschen Zugang über Ober- und Untersummen eine Rolle. Ferner stößt man rasch auf sowohl spannende als auch fachliche knifflige Fragen, etwa: Wenn man – dem in der Schulbuchliteratur üblichen Ansatz folgend – die Definition des Riemann-Integrals dahingehend modifiziert, dass nur äquidistante Intervallzerlegungen betrachtet werden, beschreibt man dann noch dieselbe Funktionenklasse?

In Aufgabenteil (c) soll die Passung zwischen Lernzielen und Aufgaben in den Blick genommen werden, während (d) den Umgang mit alternativen Zugängen und unterschiedlichen Exaktheitsstufen üben soll.

Beispiel 3. Wasserstand im Edersee

Hintergrund. Die Studierenden haben in der Vorlesung, ausgehend vom Tangentenproblem, den Differenzierbarkeitsbegriff und seine grundlegenden Eigenschaften kennengelernt. Die hierzu gestellte Aufgabe, die auf die Arbeit [12] von Gerber Bezug nimmt, vertieft insbesondere das Verständnis der Kettenregel und bringt ihre Bedeutung in einer Anwendungssituation in den Vordergrund.

Aufgabenstellung. Wir behandeln hier eine Aufgabe aus [12]

„Wieviel Wasser hat der Edersee am 15. August 2003 verloren?“

Hintergrund der Aufgabe ist, dass im Laufe des Jahres 2003 fast das gesamte Wasser der Edertalsperre abgelassen wurde. Den Schülern werden zur Lösung der Aufgabe die folgenden zwei Diagramme vorgelegt, die den Inhalt des Edersees abhängig vom Pegel bzw. den Pegel abhängig von der Zeit darstellen (Das linke Diagramm zeigt

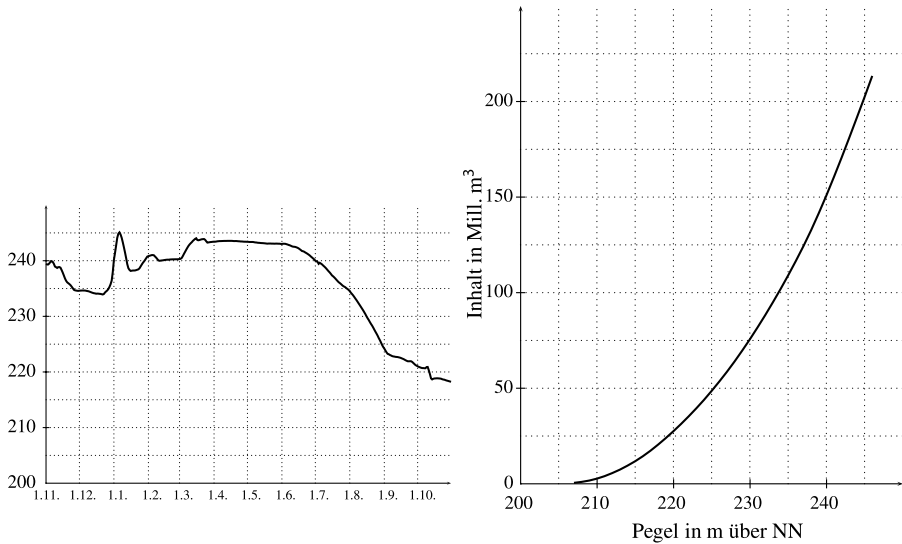


Abb. 1 Diagramme als Vorgabe zur Edersee-Aufgabe. Links ist die Abhängigkeit des Pegels von der Zeit dargestellt und rechts die Abhängigkeit des Wasservolumens vom Pegel (Datenquelle: www.edersee.de/wasserstand)

den Pegel der Edertalsperre in der Einheit Meter in der Zeit vom 1. November 2002 bis 31. Oktober 2003.): [In der originalen Aufgabenstellung folgten hier die in Abb. 1 gezeigten Diagramme.]

Lösen Sie die Aufgabe, d.h. bestimmen Sie einen Näherungswert für die gesuchte Wassermenge und stellen Sie heraus, dass mit der Aufgabe folgende Ziele anvisiert werden können:

- Interpretation der Ableitung als lokale Änderungsrate bzw. Approximation von kleinen Änderungen durch die Ableitung
- Veranschaulichung der Kettenregel.

Hinweis. Die angegebenen (sowie aktuelle) Daten können Sie abrufen unter www.edersee.de/wasserstand.

Kommentar. Die Aufgabe bietet eine schöne Gelegenheit, Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff (Tangentensteigung, lokale Änderungsrate) zu beleuchten. Wesentlich für die Lösung der Aufgabe ist gerade der *Wechsel* zwischen Grundvorstellungen: Man entnimmt dem Graphen die Ableitung als Tangentensteigung, um sie anschließend als lokale Änderungsrate weiterzuverwenden. Darüber hinaus wird die Kettenregel, die in der Vorlesung zunächst als Sicherung der Differenzierbarkeit bei der Komposition von Abbildungen und als Rechenentlastung begriffen wurde, hier um eine inhaltliche Dimension erweitert. Exemplarisch zeigt die Aufgabe – an einem Beispiel, das für unsere Studierenden einiges Lokalkolorit hat – auch den Anwendungsaspekt der Analysis.

Beispiel 4. „Backblechbeweise“ und Riemannsche Summen

Hintergrund. In der Vorlesung wurden Summenformeln wie

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

als Beispiel für die Anwendung des Induktionsprinzips gezeigt. Die Aufgabe will nun einen alternativen Zugang zu solchen Formeln und ihre Anwendung in der Integrationstheorie beleuchten.

Aufgabenstellung.

- (a) Stellen Sie sich eine Unterrichtssituation vor, in der die Summenformeln (Darstellungen durch geschlossene Ausdrücke) für die Summen

$$(1) \sum_{k=1}^n k \quad \text{und} \quad (2) \sum_{k=1}^n k^2$$

bewiesen werden sollen, ohne dass dabei auf die Beweismethode der vollständigen Induktion zurückgegriffen wird. Dies gelingt mit „Backblechbeweisen“. Wir illustrieren dies für die Summe (1) am Beispiel $n = 5$: Wir stellen $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ dar als

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad \text{und als} \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

Legt man die zwei Muster aneinander (wie „Plätzchen auf dem Backblech“), so entsteht eine Anordnung von $6 \cdot 5 = 30$ „Plätzchen“. Leiten Sie mit dieser Methode die Summenformel für (1) her.

Für (2) gibt es eine ähnliche, aber kompliziertere Methode. Lesen Sie diese aus der folgenden Zeichnung ab [siehe Abb. 2] und erläutern Sie sie.

- (b) Führen Sie aus, wie die Berechnung der Integrale

$$\int_a^b x \, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b x^2 \, dx$$

direkt mittels Riemannscher Summen (und ohne Benutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung) erfolgen kann. Greifen Sie dabei auf die oben betrachteten Summenformeln zurück.

Kommentar. Die Aufgabe beinhaltet unserer Meinung nach eine Reihe interessanter Aspekte:

- Der Auftrag, durch Diagramme vorgegebene Ideen zu verstehen und zu erläutern, stellt eine neue Anforderung über das häufige „Beweisen Sie, dass gilt . . .“ hinaus dar.

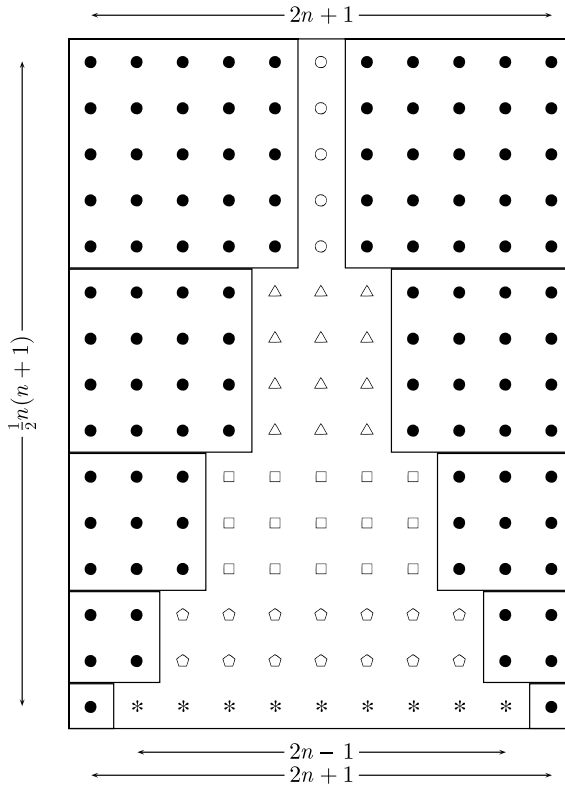


Abb. 2 Illustration (für $n = 5$) zum „Backblechbeweis“ der Summenformel für $\sum_{k=1}^n k^2$ in Aufgabe 4 (Bild nach [1])

- Die Aufgabe macht auf einen wesentlichen Unterschied zwischen Beweismethoden aufmerksam: Der Induktionsbeweis setzt die Kenntnis einer als richtig vermuteten Formel bereits voraus; der „Backblechbeweis“ erlaubt es dagegen, diese Formel aufzufinden.
- Einige der Studierenden warfen die Frage auf, ob es sich bei den „Backblechbeweisen“ um vollgültige Beweise handle, die (in den betrachteten Fällen) die Induktionsbeweise in logischer Hinsicht ersetzen können (siehe hierzu auch [25]). Eine auf diese Weise initiierte Diskussion über Exaktheitsstufen und beispielgebundene Beweise halten wir für sehr produktiv und für die spätere Unterrichtspraxis höchst relevant.

Zusammenfassung: Ziele der vorgestellten Aufgaben

1. Potenzen mit reellen Exponenten

Ziel: Verstehen und Einordnen des Spannungsverhältnisses zwischen

- innerfachlicher Ökonomie und
- Passung zwischen Definition und Vorstellung („Natürlichkeit“)

2. *Behandlung der Integrationstheorie im Unterricht*

Ziele:

- Lernen, Zugänge aus Unterrichtswerken kritisch zu analysieren
- Relevanz des fachlichen „Durchblicks“ würdigen

3. *Wasserstand im Edersee*

Ziele:

- Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff festigen (vgl. [4, 8])
- inhaltliche Vorstellungen zu Sätzen der Analysis ausbilden
- Relevanz abstrakter Sachverhalte für Anwendungssituationen erkennen

4. *„Backblechbeweise“ und Riemannsche Summen*

Ziele:

- Argumentieren auf unterschiedlichen Exaktheitsstufen üben
- die Beweiskraft beispielgebundener Beweise einschätzen lernen

4 Erfahrungen und Perspektiven

Erfahrungen aus dem Sommersemester 2006. Das Modul Analysis wurde vom ersten Autor in der vorgestellten restrukturierten Form erstmalig im Sommersemester 2006 durchgeführt. Gestützt auf die Auswertung eines Fragebogens, den wir den Lehramtsstudierenden am Ende des Semesters vorgelegt hatten, und auf unsere Erfahrungen aus den Übungen können wir Folgendes feststellen:

- Etwa 2/3 der Studierenden nahm das Konzept sehr positiv auf.
- Etwa 1/3 der Studierenden fühlte sich bei einem Teil der Aufgaben überfordert.

Für die empfundene Überforderung, die wir bereits während des laufenden Semesters bei einem Teil der Studierenden beobachtet hatten, vermuten wir zwei Ursachen, die der *frühen* und *gleichzeitigen* Behandlung von fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Studienanteilen allerdings inhärent und daher vielleicht nicht völlig vermeidbar sind:

- *Noch fehlende fachliche Souveränität.* Für diejenigen Studierenden, welche beispielsweise die im fachwissenschaftlichen Teil des Moduls behandelte Theorie des Riemann-Integrals noch nicht verinnerlicht haben, ist es verständlicherweise schwierig, die Behandlung der Integration in einem Unterrichtswerk fachlich so zu analysieren, wie Beispiel 2 es verlangt.
- *Noch nicht erfolgte Loslösung von der Schülerrolle.* Beispielsweise stellt für diejenigen Studierenden, welche noch vor kurzem einen stark kalkülorientierten Analysisunterricht in der Oberstufe erlebt hatten, die in Beispiel 2 geforderte differenzierte Klassifizierung von Aufgaben und die verlangte Stellungnahme eine nicht zu unterschätzende Anforderung dar.

Der Befund einer teilweisen Überforderung spricht unserer Ansicht nach nicht gegen das Konzept der Schnittstellenmodule an sich; vielmehr ist es uns Ansporn, die fach-

didaktischen Aufgaben noch mehr auf die Situation von Studierenden, die sich am Anfang ihres Studiums befinden, auszurichten.

Die langfristige Wirkung des Konzepts scheint uns empirisch schwer zu ermitteln, da eine Vergleichsgruppe, die nach „herkömmlichem“ Konzept (aber sonst gleichen Bedingungen) studiert hat, nicht zur Verfügung steht. Subjektiv stellen wir allerdings einen deutlich positiven Effekt fest. Als Beispiel mag folgende Episode aus einem Seminar zur Didaktik der Geometrie dienen, das der erste Autor im Sommersemester 2008 angeboten hat: Ein Seminarteilnehmer, der das hier besprochene Modul Analysis absolviert hatte und zum Zeitpunkt des Seminars im 6. Fachsemester war, hatte im Rahmen seines Seminarvortrags über die unterrichtliche Behandlung von Umfang und Flächeninhalt eines Kreises zu berichten. Vor der Vorstellung des Archimedischen Verfahrens zur Approximation von π durch Umfänge einbeschriebener Vielecke erinnerte er an den aus der Analysis bekannten Längenbegriff für rektifizierbare Kurven und an die dabei verwendete Approximation durch Streckenzüge. Er stellte selbständig und unaufgefordert Bezüge her, die genau der Intention unseres Ansatzes entsprechen. Die Autoren haben dies bei früheren, vergleichbaren Gelegenheiten – selbst nach expliziter Aufforderung an die Studierenden bei Vorgesprächen zu ihrem Seminarvortrag – so nicht erlebt und neigen daher dazu, dem Schnittstellenmodul solche Wirkungen zu unterstellen.

Weitere Verzahnungen als Perspektive. Ausgehend von unseren guten Erfahrungen mit dem hier betrachteten Schnittstellenmodul zur Analysis liegt die Frage nahe, ob eine stärkere Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik auch in Modulen jenseits der Grundausbildung vorstellbar ist. Wir erläutern nachfolgend einen Denkansatz und erste Versuche zu einem so verstandenen Modul zur Algebra. Dabei sind wir beeinflusst und motiviert durch ein Musterbeispiel [13, Abschn. 2], in dem L. Hefendehl-Hebeker einen mehrstufigen Übergang zwischen einer elementar-algebraischen und einer abstrakten ringtheoretischen Frage herstellt.

Betrachten wir als Beispiel das Thema *Faktorielle Ringe* im Rahmen einer Vorlesung zur Algebra. Auf der fachlichen Seite wird es neben dem Verstehen der relevanten Begriffe, Sätze und Beispiele darum gehen zu sehen, wo faktorielle Ringe in der Mathematik auftreten und warum die Eigenschaft *faktoriell* Wünschenswertes ausdrückt. Insbesondere kann man die Einsicht gewinnen, dass

- (a) die *Eindeutigkeit* der Zerlegung in irreduzible Elemente im Vergleich zu deren *Existenz* in vielen Fällen der schwieriger nachzuweisende und tieferliegende Aspekt ist, und dass
- (b) in vielen Anwendungen der Ringtheorie Zerlegungen in irreduzible Elemente (in nicht-faktoriellen Ringen) praktisch wertlos sind, falls man sich deren Eindeutigkeit nicht versichern kann.

Diese Aspekte kann man zwar (wie eben geschehen) „mitteilen“ – echtes Verständnis kann man unserer Ansicht nach aber nur durch eigenes Erleben erhalten, was eine genügend intensive Auseinandersetzung mit dem Thema auf anspruchsvollem Niveau erfordert. (Dies darf als Plädoyer für eine anspruchsvolle Fachausbildung verstanden werden, die Studierende nicht nur mit Anfängen von Theorien bekannt macht

Tabelle 1 Beispiele für die Verzahnung des fachwissenschaftlichen Moduls *Algebra* mit der fachdidaktischen Veranstaltung *Zahlbereichserweiterungen*

<i>Algebra</i>	<i>Zahlbereichserweiterungen</i>
Faktoringe, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	Quersummenregeln
Rechnen in Gruppen	Rollen des Minuszeichens beim Rechnen mit negativen Zahlen
Faktorielle Ringe	Primfaktorzerlegung
Quotientenkörper eines Integritätsrings	Brüche und Bruchzahlen (Äquivalenzklassenbildung)
Beweis der Rechenregel $a(-b) = -(ab)$ in Ringen	algebraisches Permanenzprinzip im Sinne von Freudenthal
Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen	Motivation der Einführung der reellen Zahlen anhand der Gleichung $x^2 = 2$.
Transzendente Körpererweiterungen	Kreiszahl π

oder ihnen Überblicke über diese gibt, sondern die es ihnen ermöglicht, zu deren Kern vorzudringen und authentische Erfahrungen zu sammeln.)

Auf der fachdidaktischen Seite der Algebra geht es u.a. um die Teilbarkeitslehre in der Sekundarstufe I, wobei wir hier auf die Behandlung der Primfaktorzerlegung im Unterricht abheben möchten. Wir stellen uns vor, dass im optimalen Fall die Studierenden bei der fachdidaktischen Auseinandersetzung ihre Erfahrungen mit faktoriellen Ringen wirksam werden lassen. So haben beide oben formulierten Einsichten aus der „Forschungserfahrung“ eine Entsprechung im Ring der ganzen Zahlen:

- Die Existenz der Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen liegt praktisch auf der Hand, da bei fortgesetzter Zerlegung einer ganzen Zahl die Teiler betragsmäßig stets kleiner werden, so dass der Zerlegungsprozess immer enden muss. (Dieses Argument könnten Schüler der Sekundarstufe I geben.) Die Eindeutigkeit der Zerlegung ist dagegen keineswegs so leicht zu sehen: Entweder man stellt weitere Überlegungen zur Teilbarkeit an, die auf der Division mit Rest beruhen, oder man nutzt zum Beweis das raffinierte Argument von Zermelo (siehe z.B. [10, S. 216]).
- Wenn zu zwei ganzen Zahlen die Primfaktorzerlegungen gegeben sind, dann ist es ein Leichtes, daraus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen abzulesen. Dies wäre unmöglich, wenn Primfaktorzerlegungen nicht eindeutig wären.

Vorstufe in Erprobung. Eine Vorstufe einer solchen Verzahnung konnte der erste Autor kürzlich erproben: Gleichzeitig, d.h. im selben Semester, hat er das Modul „Algebra“ und die fachdidaktische Vorlesung „Didaktik der Zahlbereichserweiterungen“ in starker Abstimmung aufeinander angeboten, um die Chance zu haben, wechselseitige Bezüge sehr zeitnah bewusst zu machen. Bei geeigneter Planung lassen sich die beiden Teile in der Tat an vielen Stellen miteinander verzahnen, wie Tabelle 1 demonstrieren soll.

Die Verzahnung ist dabei in beide Richtungen wirksam. Ein Beispiel: Bei der Konstruktion des Quotientenkörpers eines Integritätsrings in der Algebra-Vorlesung liegt

der gedankliche Ausgangspunkt bei Brüchen und Bruchzahlen, bei deren Behandlung in der fachdidaktischen Veranstaltung wiederum der Quotientenkörper als fachlicher Hintergrund wirken kann.

Während der Erprobung dieses Ansatzes besuchten fast alle Teilnehmer der fachdidaktischen Veranstaltung auch die Vorlesung Algebra, so dass sie beide Veranstaltungen gedanklich als *ein* Modul auffassen konnten. Dozent und Studierende beurteilten den Versuch sehr positiv, was uns zu weiteren Überlegungen und Erprobungen ermutigt.

Danksagung Wir sind L. Hefendehl-Hebeker sehr dankbar für die Anregung, unsere Ideen und Erfahrungen niederzuschreiben. M. Funke und C. Böhr haben mit viel Engagement die fachdidaktischen Übungen geleitet. Unserem Kollegen W. Gromes verdanken wir wertvolle Anregungen für die gestellten Aufgaben. Besonderen Dank schulden wir unserem Kollegen J. Hinz für seinen unermüdlichen Einsatz in allen Phasen der Restrukturierung des Mathematik-Lehramtsstudiengangs an unserem Fachbereich.

Literatur

1. Baierlein, M., Barth, F., Greifenegger, U., Krumbacher, G.: Anschauliche Analysis 2 (Leistungskurs). Ehrenwirth, München (1986)
2. Beutelspacher, A., Danckwerts, R.: Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Programmatische Vorstudie für die Deutsche Telekom Stiftung. Gießen, Siegen (2005)
3. Blum, W., Henn, H.-W.: Zur Rolle der Fachdidaktik in der universitären Gymnasiallehrerbildung. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht **56**(2), 68–76 (2003)
4. Blum, W., Törner, G.: Didaktik der Analysis. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1983)
5. Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung: Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn (1997)
6. Cauchy, A.-L.: Cours d'Analyse. In: Œuvres Complètes, Bd. 3 von Reihe II. Gauthier-Villars et Fils, Paris (1897)
7. Curdes, B., Jahnke-Klein, S., Langfeld, B., Pieper-Seier, I.: Attribution von Erfolg und Misserfolg bei Mathematikstudierenden: Ergebnisse einer quantitativen empirischen Untersuchung. J. Math.-Didaktik **24**, 3–17 (2003)
8. Danckwerts, R., Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2006)
9. Für ein modernes Lehramtsstudium im Fach Mathematik, Stellungnahme der DMV, GDM und MNU. Mitteilungen der DMV **15**, 146–150 (2007)
10. Fischer, G., Sacher, R.: Einführung in die Algebra. Teubner, Stuttgart (1983)
11. Forster, O.: Analysis I. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg, Wiesbaden (2008)
12. Gerber, F.: Wasserstand im Edersee. mathematik lehren **132**, 63 (2005)
13. Hefendehl-Hebeker, L.: Mathematik lernen für die Schule? Math. Semesterber. **42**(1), 33–52 (1995)
14. Hefendehl-Hebeker, L.: Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. Math. Semesterber. **45**(2), 189–206 (1998)
15. Hefendehl-Hebeker, L.: Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Konsequenzen aus PISA. Perspektiven der Fachdidaktiken, S. 141–189. Studienverlag, Innsbruck (2004)
16. Drittes Gesetz zur Qualitätssicherung in hessischen Schulen vom 29. November 2004. Artikel 1: Hessisches Lehrerbildungsgesetz
17. Hessisches Kultusministerium: Verordnung zur Umsetzung des Hessischen Lehrerbildungsgesetzes (HLbG-UVO) vom 16. März 2005
18. Hessisches Kultusministerium: Lehrplan Mathematik, Gymnasialer Bildungsgang, Jahrgangsstufen 5G bis 12G, 2005
19. Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte. Bd. I. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1924)

20. Leufer, N., Prediger, S.: „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule“, Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: Büchter, A., Humenberger, H., Hußmann, S., Prediger, S. (Hrsg.) *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis*. Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Franzbecker, Hildesheim (2007)
21. Mischau, A., Blunck, A.: *Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht*. DMV-Mitteilungen 14-1/2006
22. Philipps-Universität Marburg: *Allgemeine Bestimmungen für das modulare Studium für das Lehramt an Gymnasien an der Philipps-Universität Marburg vom 14. Februar 2007*
23. Seidel, T.: *Lehr-Lernskripts im Unterricht. Freiräume und Einschränkungen für kognitive und motivationale Prozesse beim Lernen – eine Videostudie im Physikunterricht*. Waxmann, Münster (2003)
24. Terhart, E. (Hrsg.): *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission*. Beltz, Weinheim, Basel (2000)
25. Wittmann, E.C., Müller, G.: *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Festschrift für Heinrich Winter. Cornelsen, Berlin (1988)