Arch. Hist. Exact Sci. (2011) 65:229–293
DOI 10.1007/s00407-010-0078-6

Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches De Clairaut à Darboux

Jean Delcourt

Received: 4 January 2010 / Published online: 9 April 2011

Résumé Cet article est consacré à l'histoire de la théorie locale des courbes "à double courbure". Initiée par Clairaut en 1731, cette théorie se développe en parallèle à la théorie des surfaces et trouve son achèvement avec les formules de Serret et Frenet et leur interprétation par Darboux, en 1887. Au delà de l'analyse des contributions de nombreux mathématiciens, parmi lesquels Monge bien sûr mais aussi Fourier, Lagrange et Cauchy, notre étude donne un regard particulier sur l'évolution conjointe de l'Analyse et de la Géométrie, dans une longue période riche de nombreuses remises en cause théoriques.

1 Introduction

La théorie des courbes de l'espace, ou, suivant la terminologie du XVIII^{e} siècle, la théorie des courbes à double courbure se développe dans une période bien délimitée : entre 1731, avec la parution des *Recherches sur les courbes à double courbure* (Clairaut 1731) et se poursuit jusqu'en 1887 lorsque dans sa *Théorie des surfaces* (Darboux 1887) Darboux démontre le théorème « fondamental » qui affirme qu'une courbe est déterminée, à isométrie près, par ses fonctions courbure et torsion. Dans les monographies générales comme celle de Kline (1972), ou celle de Coolidge (1940) on peut trouver une histoire de cette théorie en tant que branche de la géométrie différentielle, c'est également le cas de l'article de Karin Reich (1973) pour la partie postérieure à l'an 1800. Les travaux mathématiques de Monge ont été étudiés en profondeur par

Communicated by : Jeremy Gray.

J. Delcourt (✉)
Department of Mathematics, CNRS, UMR 8088, University of Cergy-Pontoise,
Cergy-Pontoise 95000, France
e-mail: jean.delcourt@math.u-cergy.fr

Taton (1951) et plus récemment Domingues a consacré un ouvrage (2008) à ceux de Lacroix, essentiellement en analyse. Le but de cet article est d'embrasser la théorie des courbes gauches dans toute son amplitude, de mettre en évidence des contributions peu connues, comme celle de Fourier, de faire ressortir les évolutions dans les notions mathématiques (comme la torsion) ou dans les terminologies ainsi que dans les procédés de validation.

Si des mathématiciens parmi les plus éminents s'y sont intéressés (Euler, Lagrange, Cauchy et bien sûr Monge), se fut souvent à titre accessoire. Beaucoup d'autres acteurs (Clairaut, Fourier, Serret) en firent un sujet de recherche au tout début seulement de leur carrière mathématique. Il n'en reste pas moins que cette théorie présente des particularités qui font que l'on peut légitimement s'intéresser à son histoire.

En tout premier lieu, et c'est nous semble t-il l'essentiel, la théorie des courbes gauches est un un lieu d'observation privilégié des interactions entre analyse et géométrie au tournant du XVIII^e^ et du XIX^e^ siècle. Quand elle s'initie, le modèle Leibnizien des « courbes polygones » est prédominant, en relation étroite avec l'utilisation des infiniment petits. Ce modèle va peu à peu montrer ses limites pour l'étude d'objets complexes ; il sera adapté[1] mais c'est seulement avec Lagrange puis Cauchy qu'une théorie du contact et une refondation de l'analyse permettront d'assurer la théorie puis de l'achever.

Les difficultés rencontrées, qui ont eu pour conséquence que l'étude des courbes gauches s'étend sur une longue période, étaient dans une large mesure inattendues. On aurait pu imaginer qu'après le développement rapide de l'étude locale des courbes planes, le passage à l'espace serait une formalité. Il n'en fut rien : les courbes à double courbure se révélèrent être un objet géométrique nouveau, complexe, associé à un ensemble de droites et de plans engendrant ou enveloppant des surfaces. Comme la géométrie des droites de l'espace est plus riche et plus complexe que celle des droites du plan, ce n'est que de nombreuses années après le traité de Clairaut que l'environnement géométrique d'une courbe à double courbure sera bien compris. Par ailleurs, autant la notion de courbure s'étend sans difficulté aux courbes de l'espace, autant la notion nouvelle de torsion mettra des années à se dégager. Ce n'est pas non plus une théorie qui conduit à de nombreuses applications,[2] au contraire de l'étude différentielle des surfaces. L'influence de l'étude des courbes de l'espace est cependant indéniable dans d'autres domaines des mathématiques par exemple dans la théorie générale des enveloppes, des surfaces développables et dans l'interprétation géométrique des équations aux dérivées partielles.

Dans une première partie, nous étudierons la période géométrique de la théorie : cette période est dominée par la figure de Monge qui le premier met en évidence les différences entre les propriétés des courbes planes et celles des courbes de l'espace; elle s'achève par les travaux de son élève Lancret. La seconde partie manifeste la mise au premier plan de l'analyse; Lagrange puis Cauchy fondent une théorie du contact qui devrait rendre obsolète le modèle Leibnizien de la courbe polygone. La théorie

[1] On trouve par exemple chez Lacroix et Fourier un nouveau modèle, que nous avons appelé « courbes polyèdres ».

[2] Hormis son rôle dans la théorie de l'élasticité, voir dans les travaux d'Euler et de Saint-Venant.

des courbes gauches est réécrite dans ce nouveau cadre, culmine dans les travaux de Serret et Frenet pour se fondre dans la nouvelle géométrie différentielle avec Darboux.

2 Du plan à l'espace

2.1 Pitot et Clairaut

Dans sa *Géométrie*, Descartes s'intéresse uniquement aux courbes planes. Il écrit, dans les dernières pages

> « Il est aisé de rapporter ce que j'en ai dit à toutes les courbes qu'on saurait imaginer formées par le mouvement régulier des points de quelque corps, dans un espace qui a trois dimensions. » (Descartes 1637, p. 368)

Descartes suggère alors d'utiliser la projection d'une courbe de l'espace sur deux plans perpendiculaires. Il poursuit en décrivant comment on peut obtenir une normale :

> « Même si on veut tracer une ligne droite qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tracer deux autres lignes droites dans les deux plans (une dans chacun) qui coupent à angles droits les deux lignes courbes, qui y sont, aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné. Ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. » (Descartes 1637, p. 369)

Il est significatif que ce seul exemple soit erroné;[3] il révèle les difficultés inattendues du passage à l'espace. Si certains concepts, comme celui de tangente ou même de cercle osculateur se transposent facilement, ce n'est le cas de tous. Ainsi une courbe de l'espace n'a plus une seule normale mais une infinité, et la projection d'un angle droit n'en est pas un en général, d'où l'erreur de Descartes.

Autre exemple des difficultés de compréhension des objets de l'espace. Le 17 juillet 1724, Henri Pitot[4] présente à l'Académie royale des sciences un mémoire intitulé « Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs appelée la compagne de la cycloïde. » (Pitot 1724) Son sujet est un problème de géométrie plane, le calcul de l'aire comprise entre cette courbe[5] et les axes. Pitot présente trois méthodes différentes pour ce calcul, la troisième utilisant une figure de l'espace (Fig. 1). Si on coupe un cylindre par un plan (incliné à 45^{o}) et si on déplie le cylindre, l'ellipse *ADQ* devient la « compagne » *ANB* inscrite dans le rectangle *AXBC*. L'aire recherchée est donc la moitié de celle de « onglet » *ADC*, ce qui est un problème connu. Cette méthode est diversement appréciée ; Fontenelle écrit :

[3] Bien plus tard, Chasles écrira « Cela peut se dire des tangentes, mais non des normales. » (Chasles 1837)

[4] Henri Pitot (1695–1771) est alors adjoint de mécanique. Il quitte l'Académie en 1740 pour un poste de directeur des travaux d'hydraulique dans le sud de la France.

[5] Courbe qui n'est autre que la sinusoïde introduite par Roberval dans le *Traité des indivisibles* (de Roberval 1693). Roberval avait également calculé l'aire sous cette courbe.

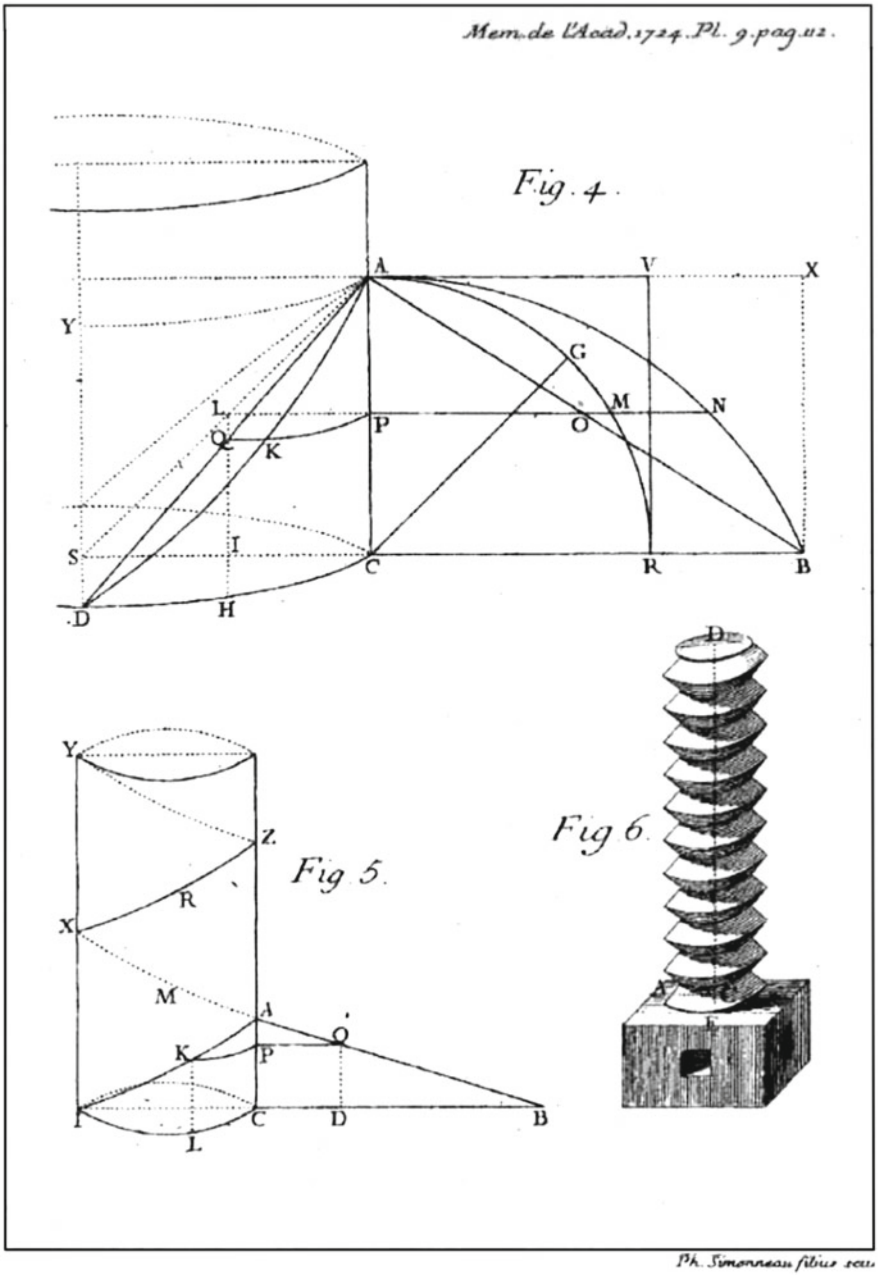


Fig. 1 La seconde planche de (Pitot 1724)

« Nous ne dirons rien d'une troisième preuve un peu plus compliquée, d'où M. Pitot tire une règle pour mesurer la force de la vis. On peut pardonner à l'art de passer quelquefois les bornes de la nécessité absolue. » (de Fontenelle 1724, p. 67)

Lors de la lecture du mémoire, certains auditeurs contesteront que ce soit la sinusoïde qui s'enroule sur l'ellipse dessinée sur le cylindre, pensant que ce devrait être la diagonale du rectangle. Pitot est ainsi conduit à préciser son argumentation, dans une seconde partie de son mémoire, présentée le 17 février 1725 :

> « Nous n'avons pas prouvé suffisamment que chaque *PQ* (Fig. 1) est égal à l'arc correspondant *AM* et à l'ordonnée *PN*. Nous avons reconnu depuis qu'il était important de donner cette démonstration, pour faire voir que tous les points *Q* forment une ellipse, ou qu'ils sont toujours sur la section du cylindre. [. . .] C'est pourquoi j'ai cru qu'il était à propos de lever ces apparences trompeuses, puisqu'elles ont séduit même des géomètres de premier ordre. » (Pitot 1724)

Pitot en profite pour faire une étude géométrique de la courbe obtenue en enroulant une droite sur le cylindre. C'est une hélice circulaire ou courbe de la vis, connue depuis longtemps. Pitot termine par la remarque « Peut-être que ces sortes de courbes à double courbure, ou prises sur la surface des solides, feront un jour l'objet des recherches des géomètres. » (Pitot 1724, p. 113)

Ce court mémoire ne manque pas d'intérêt. Peut-être en premier lieu, et c'est pour cela qu'il est le plus souvent cité, (ainsi par Struik 1933, p. 10), parce qu'il introduit une terminologie, *courbes à double courbure*, qui aura un grand succès pendant plus d'un siècle. Pitot ne donne pas de justification précise à son appellation, mais puisqu'il parle de « courbes prises sur la surface des solides », on peut penser qu'il considère que la courbure de la courbe s'ajoute à la courbure de la surface. Ce mémoire met en évidence la difficulté du passage à la dimension trois. L'objection que l'on a faite à Pitot provient sans doute d'une idée naturelle : l'ellipse qui est la section du cylindre par un plan, se projette en un segment sur le plan du fond. Il paraît normal qu'elle soit aussi obtenue par l'enroulement d'un segment sur le cylindre. On notera de plus que la perspective imparfaite des figures, celles qu'on peut voir sur le manuscrit de Pitot tel qu'on le trouve dans la pochette de séance, pouvait conforter les idées fausses. La figure est, dans l'espace, d'un moindre secours que dans le plan. Pitot met également en avant le rôle important des surfaces développables pour la théorie des courbes à double courbure. Cette façon d'obtenir des propriétés géométriques par enroulement ou déroulement sur des plans ou des surfaces développables va permettre à Monge de prouver ses plus beaux résultats. Enfin la figure de l'hélice connue depuis l'antiquité, va continuer à jouer le rôle de courbe à double courbure exemplaire.

L'étude suggérée par Pitot va être initiée par le très jeune Alexis-Claude Clairaut. Dans un traité écrit alors qu'il a tout juste seize ans (Clairaut 1731) il va mettre en place les premiers outils nécessaires à l'étude des courbes de l'espace, tout en étudiant de nombreux exemples. Il commence là où Pitot s'était arrêté :

> « J'ai crû devoir appeler ces sortes de courbes, courbes à double courbure, parce qu'en les considérant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes, et c'est même le nom qu'on leur donne dans un mémoire de l'Académie Royale des Sciences où on les propose comme objet digne des recherches des géomètres. » (Clairaut, 1731, p. II)

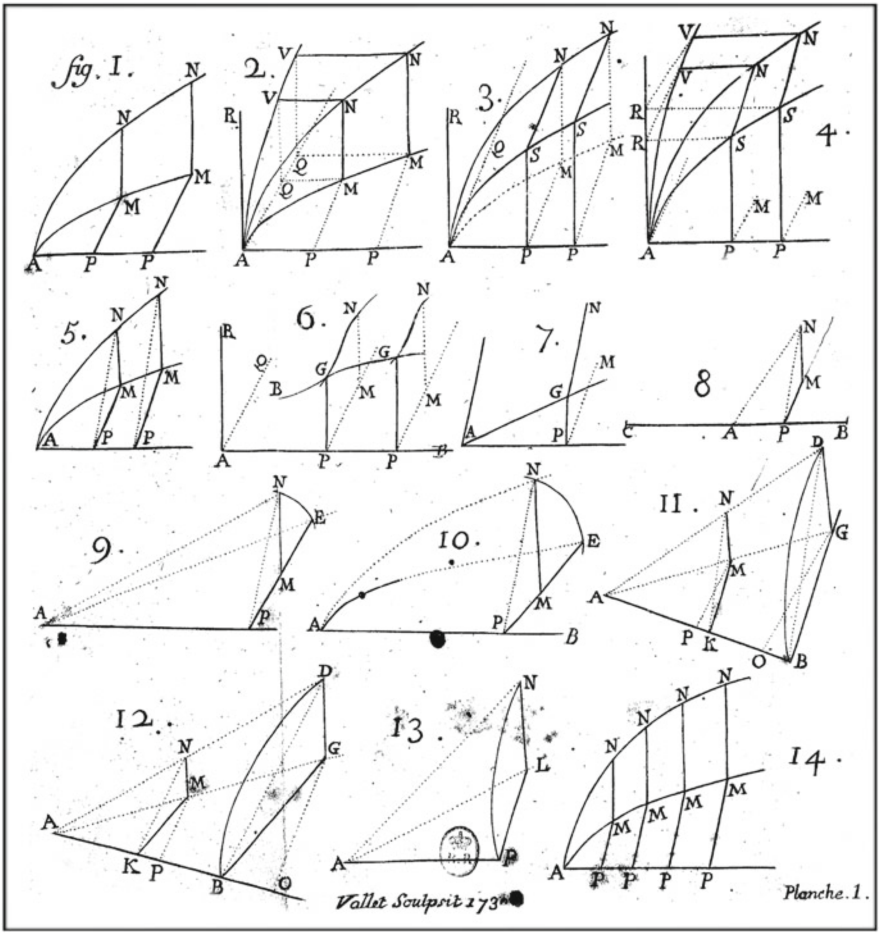


Fig. 2 Planche extraite de (Clairaut 1731)

Clairaut commence par expliquer que l'on peut se donner une courbe à double courbure en partant d'une courbe plane AM d'axe AP, et en menant à partir de chaque point M une perpendiculaire MN. Si la courbe AM est donnée par une relation entre PM et AP, il suffit de donner MN en fonction de AP ou de PM pour obtenir une courbe à double courbure, voir la Fig. 2. Clairaut précise que la relation donnant MN en fonction de AP doit être de degré supérieur au premier, clairement pour éviter que la courbe ne soit plane et les grandeurs AP, PM et MN sont donc ce qu'on appelle désormais les trois coordonnées. Il justifie qu'il faut se donner deux relations entre ces coordonnées pour avoir une courbe de l'espace[6] et sur le plan géométrique, une courbe est donc donnée par deux de ses projections, ou est vue comme intersection de deux surfaces.

[6] Dans la première partie du traité, il précise longuement que si l'on se donne une seule relation entre les coordonnées, on obtient une surface et non une courbe.

Clairaut s'intéresse alors au premier problème important concernant les courbes gauches : comment reconnaître qu'une courbe de l'espace est réellement une courbe à double courbure et non une courbe plane située dans l'espace ? Il note que l'on dispose d'une première méthode (en réalité non vraiment effective) pour ce faire : si on « combine » les deux équations qui définissent la courbe, on obtient des équations de surfaces qui toutes la contiennent. Si l'on donc parvient à obtenir une expression du premier degré « cette courbe pourrait être décrite sur le plan que cette équation exprimerait, et par conséquent elle ne serait plus appelée courbe à double courbure. » (Clairaut, 1731, p. 7). Plus loin, Clairaut donne une nouvelle méthode, toujours peu effective : il s'agit de substituer, dans l'équation d'un plan quelconque l'équation d'une des projections, puis de voir si, en choisissant les constantes, on peut retrouver l'équation d'une des autres projections.

Dans la suite de son traité, Clairaut donne de nombreux exemples de surfaces : paraboloïdes, ellipsoïdes, surfaces de révolutions, cônes... et étudie quelques courbes à double courbure définies comme intersections de ces surfaces. Les équations des surfaces ou des projections sont toutes algébriques. Les exemples choisis sont suffisamment simples pour que les éliminations nécessaires soient réalisables sans difficulté.

Dans une seconde partie, Clairaut utilise le calcul différentiel pour étudier les tangentes, les normales (Clairaut fait remarquer qu'il y en a une infinité pour chaque point de la courbe) etc. Ses méthodes sont une adaptation des méthodes utilisées pour les courbes planes; la tangente est ainsi définie ainsi :

> « On conçoit ici une courbe à double courbure *AN*, comme composée d'une infinité de petits côtés *Nn*, de même qu'une courbe qui serait décrite sur un plan, ce qui fait que le prolongement d'un de ces petits côtés *Nn* est la tangente dans le point *N* ou *n* de cette courbe à double courbure. » (Clairaut, 1731, p. 40)

C'est le modèle de la « courbe polygone » de Leibniz et de ses successeurs, une infinité de côtés infiniment petits. Clairaut utilise des triangles semblables pour déterminer la direction de la tangente, préciser sa position à l'aide des tangentes des projections, ou bien des plans tangents aux cylindres droits construits sur ces projections. Les calculs se font avec les coordonnées et leurs différentielles dx, dy et dz, que l'on peut exprimer ensuite en fonction d'une seule variable, le plus souvent x. Comme dans la première partie, on trouve beaucoup d'exemples et de petits problèmes liés à toutes ces questions, comme la recherche de l'intersection de l'ensemble des tangentes avec un plan de coordonnées.

Dans une troisième partie, Clairaut utilise le calcul intégral pour rectifier les courbes à double courbure, et calculer diverses aires (pour l'essentiel des aires de parties de cylindres) ou volumes. La quatrième partie est intitulée « Quelques principes généraux pour former des courbes à double courbure et en trouver la nature » . Plus précisément, Clairaut étudie des intersections de sphères et de cylindres ou de cônes, chaque problème ou presque est illustré par une figure. Dans tout l'ouvrage Clairaut se limite au premier ordre. Il n'y a donc pas de calcul de rayon de courbure ni même de recherche de plan osculateur ; la notion de plan osculateur est quasi contemporaine, c'est en effet en 1728 que Johann Bernoulli définit et nomme le plan qui passe par trois points consécutifs:[7]:

> « Voco autem *planum osculans*, quod transit per tria curvae quaesitae puncta infinite sibi invicem propinqua. » (Bernoulli, 1728, p. 113)

Indiscutablement, le travail de Clairaut forme un tout cohérent et correspond à l'adaptation aux courbes à double courbure des méthodes de Descartes en se limitant au premier ordre. Il contient beaucoup de développements de géométrie analytique, étudie de nombreuses surfaces et courbes; ce travail fondateur d'un très jeune mathématicien sera souvent cité comme le point de départ de la théorie.

2.2 Euler

Euler s'est intéressé par deux fois et tardivement aux courbes à double courbure ; dans un premier temps (Euler 1775), c'est à l'occasion d'un mémoire consacré à un problème de mécanique. Il s'agissait d'étudier la forme que prend une tige lorsqu'on presse sur ses extrémités; en utilisant la méthode des moments, Euler cherche à obtenir des indications sur la position d'équilibre. Sa première hypothèse est que la condition d'équilibre fait intervenir les rayons de courbure des projections. Après examen, il rejette cette hypothèse et fait appel au rayon de courbure proprement dit de la courbe à double courbure. Il lui faut donc calculer la longueur de ce rayon de courbure ainsi que sa position, ce qui l'amène à déterminer l'orientation du plan osculateur. Ce travail de géométrie est traité dans un supplément au mémoire proprement dit.[8] Comme nous le verrons, le calcul du rayon de courbure a été fait par Monge en 1771, mais avec une démarche toute différente, et son mémoire ne sera publié qu'en 1785.

Pour déterminer le rayon de courbure, Euler procède comme pour une courbe plane. Il considère un élément d'arc ds, l'angle de contingence $d\omega$ entre deux éléments consécutifs et définit le rayon d'osculation (*radius osculi*) par $\frac{ds}{d\omega}$. Il introduit également le plan qui contient deux éléments consécutifs du fil et qui est déterminé par les deux tangentes consécutives ZT et zt qu'il nomme *plan de courbure* et qui est le plan osculateur de Bernoulli. Il détermine alors l'angle que fait ce plan avec le plan horizontal. Les méthodes de calcul sont classiques : Euler considère la projection de la courbe sur le plan horizontal, et à l'aide de considérations géométriques élémentaires (triangles infiniment petits semblables à d'autres triangles), il obtient la relation

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dzd^2y - dyd^2z)^2 + (dyd^2x - dxd^2y)^2}},$$

puis

[7] Ce plan est évoqué à l'occasion de la recherche des lignes de plus courte distance sur une surface, lignes que Bernoulli caractérise comme celles qui ont leur plan osculateur perpendiculaire au plan tangent à la surface et les propriétés du plan osculateur ne sont pas étudiées dans le cadre d'une courbe prise isolément.

[8] La partie « mécanique » du mémoire est étudiée dans (Truesdell, 1960, pp. 374–376).

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

en utilisant une réduction algébrique.[9] Le calcul n'introduit pas de méthode nouvelle, mais il est nettement plus difficile que tout ce qu'a fait le jeune Clairaut.

Le second mémoire « Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi » (Euler 1786) est entièrement consacré aux courbes à double courbure; il a été présenté à l'Académie de Saint-Petersbourg en 1775 quelques mois après le premier. Dans ce copieux mémoire, Euler utilise le calcul différentiel avec dextérité, et innove sur le plan méthodologique.[10] Pour étudier la variation de la position de la tangente, il introduit une sphère de centre le point courant Z, sphère percée par la tangente en un point nommé z, puis il ramène à la même origine Z la tangente « suivante », ce qui donne un nouveau point z'. Toujours à partir de la même origine, Euler mène les parallèles aux axes et montre que les cosinus des angles que la tangente fait avec ces axes sont les trois grandeurs p, q et r définies par

$$dx = pds, \; dy = qds, \; dz = rds,$$

la variable s étant la variable indépendante (« rien n'empêche que l'élément ds soit constant »). Il introduit également le plan qui contient deux éléments consécutifs du fil et qui est déterminé par les deux tangentes consécutives ZT et zt. Ce plan, dans lequel le fil prend sa courbure (« in quo fit ista fili incurvatio »), est donc le plan osculateur Avec quelques calculs de trigonométrie sphérique et quelques différentiations, Euler obtient l'expression[11]

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

Euler donne ensuite une expression où les différentielles sont prises en supposant que le paramètre est quelconque, retrouvant ainsi l'expression du premier mémoire.[12] Il précise la position du plan osculateur (« in quo bina curvae elementa proxima sunt sita »), dont il étudie la trace sur la sphère et termine son exposé par quatre théorèmes

[9] Nous avons choisi d'utiliser systématiquement la notation d^2x au lieu de ddx pour les différentielles secondes, et donc $d^2x^2 = (ddx)^2$ est le carré cette différentielle seconde.

[10] De façon significative, dans un traité tardif comme celui de Serret [1868], c'est l'élégante méthode d'Euler, débarrassée de la trigonométrie sphérique, qui est utilisée.

[11] En langage moderne, cette expression du rayon de courbure est celle qu'on obtient en supposant que le paramètre est la longueur d'arc, s. Elle équivaut à la première formule de Serret-Frenet.

[12] Pour détailler la démarche, partant de la définition de p, par $dx = pds$, on obtient $d^2x = dpds$ si le paramètre est s, et $d^2x = dpds + pd^2s$ si ce n'est pas le cas. En utilisant les expressions $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et celle obtenue par différentiation $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s$, Euler obtient la formule

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}$$

de trigonométrie sphérique : le premier est tout simplement que la somme des carrés des trois cosinus directeurs d'un rayon est égale à 1.

Dans un second exposé, Euler se propose de donner une nouvelle méthode pour calculer le rayon de courbure, afin de satisfaire ceux de ses lecteurs qui n'apprécieraient pas la trigonométrie sphérique. Cette méthode revient à calculer le rayon de courbure de la projection de la courbe sur le plan osculateur. Euler ne justifie pas clairement son calcul; on peut le comprendre ainsi : la tangente est le lieu où la courbe est droite, le plan osculateur représente de même le lieu où la courbe est arc de cercle, ce qui rend naturel de se placer sur le plan osculateur pour calculer le rayon de courbure. Euler termine par un saisissant résumé : soit OP, OQ et OR les trois côtés d'un parallélépipède :

– si $OP = x$, $OQ = y$ et $OR = z$, alors la diagonale donne la position du point de la courbe par rapport à l'origine, sa longueur étant la distance à l'origine;
– si $OP = p$, $OQ = q$ et $OR = r$, alors la diagonale donne la position de la tangente en z, sa longueur étant 1 ;
– si $OP = \frac{dp}{ds}$, $OQ = \frac{dq}{ds}$ et $OR = \frac{dr}{ds}$, alors la diagonale donne la direction du rayon de courbure au point z, sa longueur est l'inverse du rayon de courbure ;
– si $OP = \frac{rdq-qdr}{ds}$, $OQ = \frac{pdr-rdp}{ds}$ et $OR = \frac{qdp-pdq}{ds}$, alors la diagonale sera normale au plan qui contient deux éléments consécutifs, le plan osculateur.

On voit donc que, dans cette conclusion, Euler présente les trois directions d'un repère attaché à chaque point de la courbe (tangente, rayon de courbure, normale au plan osculateur), repère que l'on appelle aujourd'hui repère de Frenet. En substance, le troisième énoncé est ce qu'on appelle maintenant la première formule de Serret-Frenet, qui relie les dérivées des cosinus directeurs de la tangente au rayon de courbure lorsque la variable indépendante est la longueur d'arc.

Les écrits d'Euler diffèrent de ceux de Clairaut ou de ceux de Monge sur un point important : ce n'est pas un géomètre (au sens moderne du terme); on peut s'en rendre compte en examinant les figures qu'il utilise, elles sont souvent peu claires, notamment par absence de perspective. Nuançons cette remarque : au moment où il présente ces mémoires, Euler est à Saint-Pétersbourg pour son second séjour et on sait qu'à cette époque il est pratiquement aveugle. Il n'en reste pas moins que, pour Euler, une figure est plutôt un schéma permettant de mémoriser les notations. Euler ne donne pas non plus l'impression qu'il a une vision dynamique des objets qu'il étudie, l'observation des configurations est très rapidement suivie du calcul. Sa contribution reste importante par ses calculs limpides, la précision de ses raisonnements et la nouveauté de ses méthodes. Avec elle s'achève une première phase de l'étude des courbes à double courbure : presque tout ce qui concerne les courbes planes comme la tangente, la notion de courbure, a été adapté aux courbes à double courbure. Il reste cependant la question des développées, le problème auquel va s'attaquer Monge.

3 La géométrie au premier plan

3.1 Tinseau et D'Alembert

Un des problèmes soulevés par Clairaut, qu'il avait résolu de façon insatisfaisante, c'est celui de la reconnaissance des courbes planes. Charles de Tinseau[13] va en donner une résolution originale. Dans un mémoire présenté à l'Académie en décembre 1771, intitulé « Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes & des courbes à double courbure » (de Tinseau 1780), il s'intéresse à des questions diverses, certaines présentes dans le traité de Clairaut ou dans les mémoires d'Euler. En particulier, il considère la surface formée par les tangentes à une ligne à double courbure. Si cette surface affirme-t-il coupe un plan de coordonnées suivant une droite, alors la courbe est plane.[14] Cette condition se met facilement en équation, et Tinseau aboutit à une caractérisation du second ordre des courbes planes. Dans un des problèmes qui suivent, il examine (avec la même démarche) les points d'« inflexion plane » et d'« inflexion linéaire ». Ces deux notions sont reprises à Monge, comme nous le verrons plus loin.

Dans un opuscule (D'Alembert 1780), D'Alembert va traiter le même problème, en lui donnant un prolongement curieux et quelque peu obscur. Sa méthode ressemble à celle proposée par Tinseau. Il commence par déterminer la droite d'intersection du plan osculateur (« le plan de deux petits côtés correspondants à trois ordonnées consécutives ») avec le plan des x et y. Il énonce alors que si cette droite « change de position à chaque instant », la courbe n'est pas plane, donc est à double courbure. On peut dans ce cas, trouver la courbe enveloppée par ces droites, qui est donc l'intersection de la surface des tangentes avec le plan. Puis il affirme qu'une courbe de l'espace qui est à simple courbure dans une portion finie, l'est globalement; il utilise pour cela un argument de continuité, en admettant donc que les courbes étudiées sont données par une seule relation algébrique. Vient ensuite une définition nouvelle : D'Alembert dit qu'« une courbe est simplement à double courbure si la courbe perpendiculaire à la commune section des plans infiniment proches qui détermine la position des côtés, est à simple courbure; sinon elle sera à courbure triple ou quadruple ». Une façon raisonnable d'interpréter cette « courbe perpendiculaire », c'est de dire que c'est une développante de la courbe initiale, dessinée sur la surface des tangentes. Une courbe sera simplement à double courbure si ses développantes sont planes. L'étude de Monge concernant les développées montre que les courbes planes ont pour développées des hélices, et un calcul facile mais un peu long montre que ce sont bien les seules hélices qui ont pour développantes des courbes planes. Ce sont elles qui sont simplement à double courbure. D'Alembert ne va pas plus loin dans sa description des courbes multiplement à double courbure,[15] la fin de l'opuscule est consacré à la suite des

---

[13] Charles de Tinseau (1780) d'Amondans (1748–1816) a été élève de Monge à l'École de Mézières.

[14] Car dans ce cas, la surface des tangentes est plane. Pour compléter l'argument de Tinseau, il faut observer que la surface des tangentes est développable, elle est plane si elle contient une autre droite que les tangentes.

[15] L'étape suivante consisterait à rechercher les courbes dont les développantes sont des hélices. Les relations entre courbures et torsions des développées et développantes permettent d'obtenir les équations intrinsèques de ces courbes, qui seraient donc doublement à double courbure.

calculs commencés. D'Alembert cherche à caractériser les courbes à simple courbure (donc planes). Il obtient deux relations différentielles :

$$d\left(\frac{dy}{dz}\right) = Bd\left(\frac{dx}{dz}\right), \quad d\left(\frac{y}{z}\right) = Dd\left(\frac{1}{z}\right) - gd\left(\frac{x}{z}\right)$$

où B et D sont des constantes, g désignant le coefficient directeur de la droite d'intersection du plan osculateur avec le plan de coordonnées. Un calcul simple, en supposant que z est le paramètre, montre que la première condition est suffisante et implique la seconde (sauf cas particulier). On peut s'en convaincre géométriquement. Ce mémoire de D'Alembert semble n'avoir pas eu de postérité.

3.2 Le mémoire sur les développées

Ces travaux de Tinseau et de D'Alembert sont contemporains du célèbre mémoire de Monge sur les développées des courbes à double courbure (Monge 1785) que nous étudions maintenant. Monge a présenté son mémoire en août 1771, quelques mois avant Tinseau.

Dans ce mémoire, Monge impose une nouvelle vision. Non seulement il va faire progresser la théorie de façon considérable mais il va également promouvoir une nouvelle façon de faire de la géométrie : les objets de l'espace, courbes, plans, surfaces vont tous être mis à contribution et vont se mouvoir, s'envelopper, s'engendrer. Le modèle est toujours celui des courbes polygones, le calcul infinitésimal est au second plan et apparaît comme mise en calcul d'une démarche essentiellement géométrique. Certains de ces calculs ne seront vraiment achevés que par les élèves et successeurs immédiats de Monge : Lacroix, Fourier et Lancret.

Le problème initial que veut résoudre Monge est une généralisation d'un problème de géométrie plane : la définition et la détermination de la développée d'une courbe de l'espace. Dans le plan, l'ensemble des normales à une courbe $\mathscr{C}$ est l'ensemble des tangentes à une courbe $\mathscr{D}$ que l'on appelle développée de $\mathscr{C}$. De plus, le point de contact de la normale avec la développée est le centre du cercle osculateur de $\mathscr{C}$, de sorte que la développée $\mathscr{D}$ coïncide avec l'ensemble des centres de courbure (Huygens 1673). Il se trouve que dans l'espace, l'ensemble des centres de courbure d'une courbe non plane ne coïncide plus avec une développée. Si G est le centre de courbure correspondant à un point A d'une courbe $\mathscr{C}$, la tangente au lieu des points G ne passe plus en général par A. L'idée de départ de Monge est qu'il faut remplacer le centre du cercle de courbure par son axe, c'est-à-dire la perpendiculaire menée par le centre au plan du cercle. Tout point de cet « axe polaire » a en effet la propriété d'être équidistant des points du cercle donc, localement, des points d'un élément de la courbe à double courbure. Monge envisage ensuite l'ensemble des axes polaires successifs ; ils forment une surface que Monge prouve être développable et qu'il appelle surface des pôles. Il explique alors comment on peut construire sur cette surface une infinité de développées, courbes à double courbure dont toutes les tangentes passent par la courbe de départ et ces développées jouissent de la propriété d'être des courbes de plus courte distance sur la surface polaire. La partie géométrique du mémoire contient également

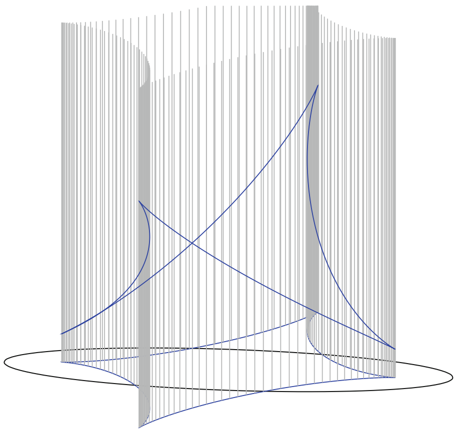


Fig. 3 Développées d'une ellipse

les résultats suivants : toute courbe sphérique a pour surface polaire un cône, toute courbe plane a pour surface polaire un cylindre et admet une infinité de développées qui sont des hélices sur ce cylindre ; une seule est plane, c'est la développée ordinaire au sens de Huyghens, menée dans son plan (voir la Fig. 3). Monge systématise enfin la notion de surface développable, et introduit pour une telle surface la courbe lieu des points d'intersections des axes successifs, qu'il appelle « arête de rebroussement ». La surface est alors formée de toutes les tangentes à cette courbe et elle contient deux nappes qui s'intersectent sur cette arête.

Monge justifie ses raisonnements non par des calculs mais par une description presque cinématique de l'engendrement de ces objets : partant d'un point A de la courbe, il considère les points suivants A', A'', ... les tangentes successives sont les prolongements des côtés, les plans normaux consécutifs sont menés perpendiculairement aux tangentes et deux plans consécutifs se coupent suivant un axe polaire. Deux axes polaires consécutifs sont donc sur un même plan, et c'est cela qui justifie que la surface des pôles est développable : toutes les démonstrations sont basées sur l'observation d'intersections de droites et de plans dans l'espace ; la preuve du fait que l'ensemble des centres de courbure d'une courbe non plane n'est pas une développée en est un exemple remarquable. La formation de Monge, ses premiers enseignements de géométrie à Mézières ont certainement contribué à lui donner ce regard précis sur les objets de l'espace et lui ont donné un style d'écriture mathématique qui force la conviction.

On arrive ensuite à la partie analytique, que Monge introduit ainsi : « Il ne s'agit plus actuellement que d'appliquer l'analyse à tout ce qui précède ». La principale nouveauté dans les calculs développés par Monge est le traitement qu'il donne des enveloppes : il observe que si l'équation du plan normal s'écrit $M = 0$, et dépend de la variable indépendante choisie (ici l'abscisse x'), l'intersection avec le plan suivant s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} M = 0 \\ \frac{dM}{dx'} = 0 \end{cases}$$

et si l'on veut l'arête de rebroussement, il suffit d'ajouter l'équation obtenue en différentiant une seconde fois. Cette méthode est systématisée dans la suite des travaux géométriques de Monge, en premier lieu dans son mémoire sur les surfaces (Monge 1780). Ayant obtenu ainsi les équations de l'axe polaire, Monge en déduit le calcul du rayon de courbure, distance perpendiculaire du point courant à l'axe polaire. La méthode est donc différente de celle d'Euler.

Monge soulève alors la question des deux « inflexions » que peut prendre une courbe à double courbure :

> « On appelle *point d'inflexion*, dans une courbe plane, le point où cette ligne, après avoir été concave dans un sens, cesse de l'être pour devenir concave dans l'autre sens. Il est évident que, dans ce point, la courbe perd sa courbure, et que les deux éléments consécutifs sont en ligne droite. Mais une courbe à double courbure peut perdre chacune de ses courbures en particulier, ou les perdre toutes deux dans le même point; c'est-à-dire, qu'il peut arriver ou que trois éléments consécutifs d'une même courbe à double courbure se trouvent dans un même plan, ou que deux de ces éléments soient en ligne droite. Il suit de là, que les courbes à double courbure peuvent avoir deux espèces d'inflexion, la première a lieu lorsque la courbe devient plane, et nous l'appellerons *simple inflexion* ; la seconde, que nous appellerons *double inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient droite dans un de ses points.[16] » (Monge 1785, p. 541)

Une courbe perd sa seconde courbure quand le rayon du cercle osculateur est infini, la première quand elle devient plane, c'est-à-dire quand deux axes polaires consécutifs sont parallèles. Monge obtient alors la condition :

$$\psi''x\,\phi'''x - \phi''x\,\psi'''x = 0,$$

$$\text{ou} \quad d^2zd^3y - d^2yd^3z = 0.$$

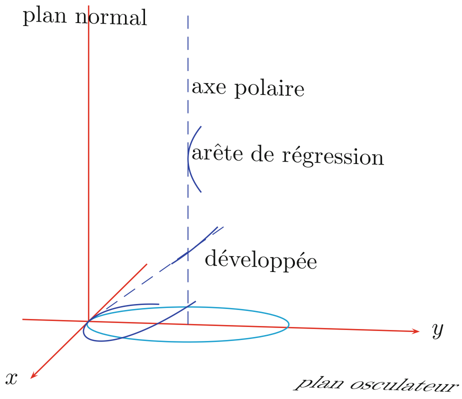
Remarquons que dans des éditions ultérieures, ce même résultat sera obtenu plus simplement. Monge tiendra en effet le raisonnement suivant : si la courbe est plane, alors on a une relation $z = ax + by + c$, que l'on différentie trois fois à cause des trois constantes et on obtient

$$\begin{cases} dz = adx + bdy \\ d^2z = bd^2y, \\ d^3z = bd^3y \end{cases} \qquad \text{puisque } x \text{ est la variable indépendante}$$

L'élimination des constantes donne alors le même résultat que ci-dessus. Le mémoire se termine par une petite théorie des développées et développantes des surfaces développables. Cette « théorie » peut sembler sans grand intérêt mais elle va jouer un rôle important dans les travaux de Lancret. À toute surface développable D, on associe une autre surface développable D' de la façon suivante : par chaque génératrice de D

[16] On retrouve les notions du mémoire de Tinseu (1780), qu'il nomme inflexion plane et d'inflexion linéaire.

Fig. 4 Vocabulaire



on fait passer un plan P contenant cette génératrice et perpendiculaire à la surface D (c'est-à-dire à son plan tangent). La surface développée de D est alors l'enveloppe de tous ces plans P, on la note D' : c'est encore une généralisation de la notion de développée d'une courbe, le plan P jouant le rôle de la normale (Fig. 4).

3.3 Les courbes à double courbure et les équations différentielles

Le mémoire de Monge, présenté à l'Académie en 1771, est publié seulement en 1785. Sa diffusion sera amplifiée lorsqu'il sera intégré à l'enseignement de l' École polytechnique et publié dans les *Feuilles d'analyse* (Monge 1795), puis dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* (Monge 1807). Monge lui-même continue ses travaux de géométrie en s'orientant vers la géométrie des surfaces. En particulier, il étudie les lignes de « plus grande et moindre courbure » et montre qu'elles sont caractérisées par le fait que les normales à la surface menées par ces lignes forment une surface développable. On retrouve néanmoins des courbes à double courbure dans un mémoire que Monge présente à l'académie en 1784, « Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées. » (Monge 1787). Ce long mémoire traite des équations différentielles ordinaires (selon la terminologie de l'époque), donc des équations qui relient les coordonnées et les différentielles dx, dy, dz (d'ordre un ou supérieur).

Monge commence par faire une première distinction parmi les équations du premier ordre. Il y a celles qui sont linéaires, de la forme $Ldx + Mdy + Ndz = 0$, et celles qui sont *élevées*,[17] comme $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$. Monge rappelle que les premières peuvent être résolues quand elles satisfont à la (ou aux) « *condition(s) d'intégrabilité* », introduites en particulier par Clairaut et Euler. L'opinion d'Euler est que les équations linéaires qui ne satisfont pas cette condition sont considérées comme *absurdes*, c'est-

[17] Ce qui signifie que les différentielles sont élevées à un certain exposant, mais également que peuvent apparaître des produits ou quotients de différentielles.

à-dire qu'elles n'ont pas de solution (Euler 1770).[18] Dans son mémoire, Monge va étudier ce problème[19] ainsi que des exemples d'équations élevées. En employant une terminologie moderne, une équation linéaire du premier ordre qui satisfait aux conditions d'intégrabilité représente (moyennant la multiplication éventuelle par un facteur) la différentielle d'une fonction des trois variables $f(x, y, z)$. Les intégrales sont donc de la forme $f(x, y, z) = a$ où a est une constante et elles représentent une famille de surfaces. Si une équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, Monge affirme quant à lui qu'elle est « susceptible d'une véritable intégration » et que les solutions sont alors des courbes à double courbure partageant une même propriété géométrique. En langage moderne, cela revient à considérer que x, y et z sont fonction d'un paramètre t et que leurs dérivées satisfont identiquement l'équation. Pour prendre un exemple simple, l'équation $xdx+ydy+zdz = 0$ satisfait la condition d'intégrabilité et représente la famille des sphères de centre l'origine, mais aussi toutes les courbes tracées sur une sphère. Monge va tenter de donner une théorie générale, basée sur l'étude d'exemples, souvent non linéaires; apportons quelques précisions sur l'exemple des courbes à courbure constante. Il part de l'équation

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \begin{cases} (dxd^2y - dyd^2x)^2 \\ +(dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ +(dyd^2z - dzd^2y)^2 \end{cases}$$

qui caractérise les courbes dont la courbure est constante égale à a (cf. la formule d'Euler donnant le rayon de courbure). Une solution particulière est réalisée par les cercles de rayon a, dont l'équation s'écrit

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2 \\ x - \alpha + (y - \beta)\epsilon + (z - \gamma)\eta = 0. \end{cases}$$

les cinq autres paramètres déterminant la position du cercle. Monge envisage une famille de ces cercles en posant $\beta = \phi(\alpha)$ et $\gamma = \psi(\alpha)$, et construit une courbe solution par un procédé qui consiste à « raccorder » des éléments de ces cercles de rayon constant, en les voyant comme courbes caractéristiques de sphères, calcul qu'il mène en détaillant les éliminations nécessaires.[20] Voici la conclusion :

« En faisant pour abréger,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \phi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 - a^2 = M,$$

[18] Euler prend l'exemple de l'équation $zdx + xdy + ydz = 0$.

[19] C'est ce qu'on appelle maintenant le problème de Pfaff.

[20] Cependant, il reste des éliminations *« qui ne peuvent se faire en général »*. La résolution explicite du problème des courbes de courbure constante sera obtenue plus tard, par Joseph-Alfred Serret (Monge 1850) puis de façon plus simple par Darboux (1887). La méthode de Monge sera critiquée, par exemple par Charles Dupin, dans un livre pourtant hagiographique (Dupin 1819, pp. 124, 127), ainsi que par Darboux (1887, p. 25).

le système des quatre équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2M}{d\alpha^2} = 0, \quad \frac{d^3M}{d\alpha^3} = 0$$

appartient à la courbe dont la courbure est constante.» (Monge 1787, p. 544)

Il observe de plus que, en éliminant x, y, et z, on obtient une

> «équation de condition entre $\alpha, \phi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$, la même que l'équation aux différences ordinaires seconde, en x, y et z. Il résulte de là que la courbe dont les coordonnées sont α, $\phi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ est aussi de courbure constante.» [ibid. p. 544]

Cette courbe est l'ensemble des centres de courbure de la courbe à courbure constante. Monge démontre donc que ces deux courbes partagent le même rayon osculateur mais que leur tangentes en deux points correspondants sont perpendiculaires, c'est le premier exemple de ce qu'on appelle des «courbes de Bertrand». Il cite enfin en exemple le cas particulier des hélices : l'ensemble des centres de courbure d'une hélice est une autre hélice, de même axe.

3.4 Les méthodes de Monge

Le modèle utilisé par Monge n'est plus tout à fait celui de Clairaut : une courbe de l'espace n'est pas seulement une courbe polygone. L'originalité de Monge est d'avoir intégré la courbe dans un environnement. Reprenons la succession des objets : on considère un cercle de l'espace muni de son axe; s'y ajoute une droite menée d'un point de l'axe et balayant un petit élément du cercle. Si maintenant on envisage les éléments successifs d'une courbe, on peut attacher à chacun cette figure de l'espace: se dessine alors la surface polaire, l'ensemble des centres de courbure, ainsi qu'une développée. Même si Monge ne nous présente pas ses déductions de cette façon, on peut imaginer que la figure du cercle et de son axe a du faire germer chez lui l'idée de l'infinité des développées des courbes dans l'espace.

Dans ces descriptions, Monge utilise un modèle discret : un point, le point suivant, deux plans normaux successifs... Le modèle discret est utilisé dès la *définition* même de l'enveloppe des plans normaux : la surface polaire est l'ensemble des intersections de deux plans normaux consécutifs, elle n'est pas définie ou décrite comme une surface dont les plans normaux seraient l'ensemble des plans tangents. Lorsque Monge généralise la notion d'enveloppe à des surfaces quelconques, il appelle «caractéristique» la courbe intersection de deux surfaces consécutives, l'enveloppe est l'ensemble des caractéristiques. Le modèle discret est également indispensable lorsque Monge fait ses *démonstrations* ; par exemple lorsqu'il montre qu'une droite pliée librement sur une surface est ligne de plus courte distance.[21]

[21] Sa démonstration se fait pour une surface développable, puisque Monge utilise deux hèdres successifs. Cela ne l'empêche pas d'affirmer qu'elle demeure acceptable pour une surface quelconque; il faut alors considérer que les deux hèdres consécutifs sont remplacés par des éléments plans consécutifs de la surface.

Une autre situation où le modèle discret est indispensable, c'est lorsque Monge justifie que l'ensemble des centres de courbure ne constitue pas une développée, sauf si la courbe est plane. Sa démonstration repose sur la simple analyse des positions relatives de trois plans normaux successifs. Enfin, le modèle discret est à la base des *calculs*, la méthode des infiniment petits est la traduction sur le plan de l'analyse du langage géométrique utilisé : deux points sont consécutifs si leurs coordonnées diffèrent d'un infiniment petit.

Le mémoire sur les développées (Monge 1785) joue un rôle de première importance : il sera cité et repris par tous les successeurs de Monge. En ce qui concerne le vocabulaire, notamment la dénomination des courbes à double courbure, il marque une évolution. En effet, à l'occasion du paragraphe sur les inflexions que peut perdre une courbe non plane, Monge dit explicitement qu'une courbe à double courbure peut perdre ses deux courbures : en perdant la première elle devient plane, en perdant l'autre elle devient droite. Cela constitue pour lui deux inflexions possibles d'une courbe à double courbure. Il faut comparer cela à la situation d'une courbe plane qui ne présente qu'une seule sorte possible d'inflexion. Cependant, Monge n'identifie pas la « courbure » qui empêche à une courbe d'être plane, alors que la courbure qui l'empêche d'être droite est bien connue, c'est la courbure habituelle à laquelle est relié le rayon de courbure ordinaire. À l'occasion de l'étude de la surface polaire et de son arête de rebroussement, Monge introduit également la notion de sphère osculatrice, il en détermine le centre et calcule son rayon.

Enfin si l'on revient au problème posé par Clairaut et résolu déjà par Tinseau et D'Alembert, celui de savoir quand une courbe de l'espace est plane, Monge en donne une solution nouvelle, différente des précédentes : il considère la surface polaire et utilise le fait qu'une courbe est plane si et seulement si sa surface polaire est un cylindre. La caractérisation obtenue est remarquablement simple à exprimer analytiquement.

En plus du thème essentiel des courbes à double courbure et de leurs développées, on trouve également dans ce mémoire une des premières études géométriques des surfaces développables. On peut remarquer que curieusement, la première surface développable qui apparaît dans le texte est la surface des pôles, ce n'est pas la surface des tangentes. Cependant Monge souligne quand même la correspondance biunivoque entre une surface développable et son arête de rebroussement, et ce fait important sera pleinement utilisé par ses successeurs. Un mémoire important, bien sûr, par son

Footnote 21 continued
Dans la deuxième édition de son traité, Lacroix reprend l'étude d'un fil plié librement sur une surface. Voici comment il s'exprime :

> « En y réfléchissant, on conçoit que chacun des éléments de la courbe étant appliqué sur un des plans tangents de la surface proposée, cette courbe détermine une suite de plans tangents qui forment une surface développable circonscrite à la première surface, et qui la touche suivant la courbe dont il s'agit. Il est visible que si l'on développe la seconde surface, les éléments de la courbe ou ses tangentes reprendront la situation qu'ils avaient sur le plan primitif où elles étaient tracées.
> Par exemple, que l'on plie librement sur la surface d'une sphère une ligne droite tirée sur un plan, elle deviendra un grand cercle, le plan se roulera en cylindre, et coïncidera avec la surface développable formée par les intersections consécutives des plans tangents à la sphère. » (Lacroix 1810)

Ce n'est peut-être pas plus convaincant, mais assurément plus précis.

contenu, mais aussi par son style si caractéristique et beaucoup imité. Monge a un discours d'une clarté lumineuse et s'appuie sur des figures remarquablement précises. Il emporte la conviction et, comme l'écrit René Taton :

> « Aucun des travaux antérieurs relatifs à la géométrie différentielle n'est comparable à celui-ci, qui, nourri d'une puissante sève géométrique et d'un sens tout à fait exceptionnel des choses de l'espace, annonce un renouvellement des méthodes dans ce domaine. » (Taton 1951, p. 181)

Cependant, si le style de Monge l'incite à faire peu de calculs (il est frappant de comparer la différence de densité des formules mathématiques entre ce mémoire de Monge et celui d'Euler), ces calculs sont néanmoins faits explicitement, les formules très compliquées donnant les coordonnées du centre de la sphère osculatrice en sont un exemple. Monge ne cherche pas toujours à obtenir différentes expressions d'un même résultat. Il introduit une variable indépendante (la coordonnée x), et ne dérive pas toujours une expression générale; comme Clairaut, il commence par utiliser les dérivées des fonctions avant de traduire les résultats en termes d'infiniment petits.

3.5 Lacroix

Le mémoire de Monge sur les développées est repris à partir de 1795 dans des textes didactiques, en partie dans les *Feuilles d'Analyse appliquées à la géométrie* (Monge 1795), puis dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* (Monge 1807, 1850). La théorie des courbes à double courbure se poursuit et des avancées auront lieu entre 1780 et 1806, période riche à tout point de vue, historique assurément, scientifique également ; période qui verra également s'installer en France le début d'un enseignement supérieur scientifique de haut niveau et qui atteint un public élargi. Les héros de notre histoire, Monge bien sûr, mais également Lacroix, Lancret et Fourier seront en première ligne à tous les sens du terme, dans ce foisonnement d'événements et de découvertes.

Le style de Monge se retrouve dans les travaux de Lacroix, Fourier et Lancret. Dans leurs travaux, cependant, nous observons une évolution du modèle Leibnizien de la courbe polygone, évolution adaptée aux courbes de l'espace. Cette évolution aura la conséquence de rendre naturelle la définition de la « seconde flexion », ouvrant ainsi la voie à la synthèse de Lancret.

Le premier travail académique de Lacroix,[22] présenté en 1790 et non publié se propose de traiter les problèmes suivants :

> « Étant donné une courbe quelconque sur une surface développable, trouver ce qu'elle devient dans le développement de cette surface et réciproquement, une

[22] Silvestre François Lacroix (1765–1843) fut remarqué par Monge comme un élève brillant ; il bénéficia alors, ainsi que Prony, de leçons particulières. Enseignant d'abord dans des écoles militaires, il est un des premiers professeurs d'analyse à l'École polytechnique. Auteurs de manuels à succès, il a une grande influence, notamment en propageant les idées de Lagrange puis en prônant la méthode des limites. Sa contribution à l'étude des courbes gauches passe plus par son influence en tant qu'enseignant, académicien, que par des travaux personnels.

courbe étant donnée sur un plan trouver ce qu'elle devient lorsqu'on l'enveloppe sur la surface donnée. » (Lacroix 1790, f. 1)

Il s'agit donc d'un prolongement des travaux de Monge sur les développées. Prenant les exemples successifs des cylindres et des cônes, puis passant à une surface développable quelconque, Lacroix utilise la conservation des distances et des angles « infiniment petits » pour obtenir ses résultats. En particulier, il obtient les équations des développées sous forme différentielle, comme Monge. Dans une seconde partie du mémoire, Lacroix reprend les idées de Monge sur le lien entre équations différentielles « ordinaires » et courbes gauches. Son exemple est différent de celui de Monge, et il est présenté de façon moins obscure, illustrant le passage des équations aux dérivées partielles aux équations ordinaires. Lacroix considère le système formé par deux équations aux différences partielles

$$\begin{cases} py - qx = 0 \\ p(x-a) + q(y-b) = c \end{cases}$$

où p et q désignent les dérivées partielles de z par rapport à x, respectivement à y. Compte-tenu de la relation $dz = pdx + qdy$, on peut éliminer p et q et on obtient une équation aux différences ordinaires

$$[x(x-a) + y(y-b)]dz = (z-c)(x\,dx + y\,dy).$$

Lacroix montre alors que cette équation satisfait aux conditions d'intégrabilité lorsque $z = c$ ou bien $a = b = 0$. Dans le premier cas, la solution est le plan d'équation $z = c$, dans le second cas, l'équation aux différences ordinaires s'écrit

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

qui s'intègre de façon évidente en $z - c = k\sqrt{x^2 + y^2}$, équation d'un cône circulaire dont le sommet est sur l'axe des z.
Il reste à s'intéresser aux autres cas, quand la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite : l'interprétation géométrique va tout éclairer : chacune des équations aux dérivées partielles représente une famille de surfaces, la première caractérise les surfaces de révolution d'axe $0z$, la seconde les cônes de sommet (a, b, c). Il existe donc, pour des raisons géométriques évidentes, deux surfaces qui sont solution du système (et donc de l'équation aux différences ordinaires), à savoir le plan d'équation $z = c$, et, dans le cas où $a = b = 0$, un cône circulaire de sommet $(0, 0, c)$. Dans tous les autres cas,

> [...] « cette équation appartient, lorsque a et b ne sont pas nuls, à toutes les courbes formées par les contacts des surfaces de la famille des cônes avec celles de révolution. » (Lacroix 1790)

Pendant la période révolutionnaire la carrière d'enseignant de Lacroix prend une nouvelle dimension. Il enseigne l'analyse à l'École polytechnique, publie un petit traité de géométrie descriptive (Lacroix 1795) et surtout un volumineux traité de calcul différentiel et intégral, dont le premier tome paraît en (Lacroix 1797). Dans ces deux ouvrages, Lacroix envisage les courbes à double courbure qu'il présente ainsi

> « On a donné le nom de courbe à double courbure à celles dont tous les points ne sont pas dans le même plan, parce qu'étant le résultat de l'intersection de deux surfaces courbes, elles partagent la courbure de l'une et de l'autre.
> On rend cela sensible par une image bien frappante : on suppose une courbe tracée sur un plan, et que ce plan vienne à se gauchir ou qu'il soit roulé d'une manière quelconque, alors la courbe proposée prend une nouvelle courbure, qui résulte de celle que les circonstances ou la volonté ont donné au plan. » (Lacroix 1795, p. 69)

Lacroix décrit ainsi, de façon encore intuitive et qualitative, la seconde courbure qu'ont les courbes à double courbure. Cette vision articulée se retrouvera chez Fourier. Il ne s'agit plus des courbures des projections, comme pour Pitot ou Clairaut, la seconde courbure simplement évoquée dans le mémoire de Monge commence à prendre sens.

Le *Traité de calcul différentiel et intégral* (Lacroix 1797) est un ouvrage de grande ampleur.[23] Sur le plan méthodologique, l'influence de Lagrange qui enseigne l'analyse à l'École polytechnique est flagrante. Cependant Lacroix reste dans une certaine tradition puisqu'il annonce que les applications du calcul différentiel à la géométrie utilisent trois approches successives :

- une méthode qui n'utilise pas l'infini, celle de Lagrange;[24]
- la méthode des limites;
- la méthode des infiniment petits.

Tout en admettant sa préférence pour les idées de Lagrange,[25] Lacroix remarque néanmoins que

> « Cette dernière, lorsqu'elle a été bien expliquée, est précieuse pour la facilité qu'elle donne à résoudre de nouvelles questions ; facilité dont la théorie des courbes à double courbure de Monge, que j'ai exposée, offre un exemple remarquable. » (Lacroix 1797, p. XXVII)

Sur cette distinction de méthodes et le parti que prend alors Lacroix, on peut dire comme Carl Boyer « *s'il accepte la métaphysique de Lagrange, il adopte la notation différentielle de Leibniz.*[26] » (Boyer 1949, p. 265), mais il est remarquable qu'il va garder la méthode des infiniment petits pour les courbes à double courbure. Il recherche le plan osculateur par une condition de contact, à la manière de Lagrange, puis la méthode traditionnelle revient :

[23] Voir l'étude faite par João Caramalho Domingues (2008).

[24] Basée sur le développement en série des fonctions.

[25] « La lecture du Mémoire de Lagrange m'inspira le désir de travailler à un Traité de Calcul différentiel et intégral, qui eût pour base les idées lumineuses qu'il avait substituées à celles des infiniment petits. » (Lacroix 1797, p. XXIII).

[26] Although he accepted the metaphysics of Lagrange, he adopted the differential notation of Leibniz.

« Les courbes à double courbure peuvent être considérées comme des polygones, dont trois côtés consécutifs ne sauraient être dans le même plan ; le prolongement de l'un de ces côtés donne la tangente, de même que pour les courbes planes ; deux tangentes consécutives *TM* et *tm*, déterminent le plan qui passe par deux côtés consécutifs, et qui n'est autre que le plan osculateur. » (Lacroix 1797, p. 507)

et l'équation du plan osculateur est obtenue à nouveau, de façon bien plus rapide.

Lacroix décrit ensuite la polaire développable et retrouve les deux cas particuliers des courbes planes et des courbes sphériques (la polaire développable est un cylindre ou un cône). Il introduit la notion de développée, avec des arguments calqués sur ceux de Monge et le cas des courbes gauches vient maintenant comme généralisation du cas des courbes planes. Suivent les calculs analytiques, avec des originalités. Par exemple, pour le rayon de courbure (Lacroix 1797, p. 513), Lacroix considère une sphère de centre le point (x, y, z) et de rayon a, passant par le point courant de la courbe (x', y', z'). Il note u l'expression

$$u = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

et énonce que la sphère passera par quatre points consécutifs si outre cette égalité on a

$$du = 0, \quad d^2u = 0, \quad d^3u = 0,$$

obtenant ainsi la sphère osculatrice à la courbe. Lacroix considère ensuite seulement trois points consécutifs et ajoute la condition que le centre est dans le plan osculateur, obtenant cette fois le centre de courbure et donc le rayon de courbure.

Lacroix donne ensuite l'expression des coordonnées du centre de courbure (la longueur d'arc jouant un rôle privilégié), et vérifie que deux tangentes consécutives au lieu des centres ne se coupent que si la courbe est plane. Encore une fois, la méthode est originale. Lacroix écrit les équations du rayon de courbure et du rayon suivant, puis recherche la condition pour que ces deux rayons consécutifs soient sécants. Après réduction, cela s'écrit [ibid. p. 518]:

$$\begin{aligned} &dz'd^2y'd^3x' - dz'd^3y'd^2x' + dy'd^2z'd^3x' - dy'd^3z'd^2x' \\ &\quad + dx'd^2y'd^3z' - dx'd^3y'd^2z' = 0 \end{aligned}$$

expression dans laquelle il reconnaît la condition qu'on obtient en écrivant que le plan osculateur passe par quatre points consécutifs : le lieu des centres n'est donc pas une développée, sauf si la courbe est plane.

L'exposé sur les courbes à double courbure se poursuit par la recherche de l'équation des développées, il faut pour cela « faire usage des méthodes du calcul intégral ». Vient ensuite le passage standard sur les courbes à double courbure qui :

« sont susceptibles de deux espèces d'inflexion ; la première est relative à la courbure de la surface développable que forme l'ensemble de leurs tangentes, et a lieu lorsque le rayon de courbure de cette surface passe du positif au négatif et réciproquement.[27] La seconde espèce d'inflexion des Courbes à double courbure, répond au cas où leur rayon de courbure absolu change de signe. Cette matière demanderait pour être traitée avec exactitude et clarté, quelques détails, dans lesquels je ne puis entrer maintenant ; il me suffit d'avoir mis le lecteur sur la voie de ces recherches, dont l'application d'ailleurs n'est pas fréquente. » (Lacroix 1797, p. 519)

Il ne s'agit pas cependant d'une simple répétition du mémoire de Monge. Lacroix identifie la courbure relative à la première inflexion, ce que ne faisait pas Monge. C'est pour lui la courbure de la surface développable que forme l'ensemble des tangentes. La note précise un peu ce qu'il faut comprendre :

– en un point d'une surface, il y deux rayons de courbure extrémaux, portés par des lignes de courbure orthogonales;
– pour une surface développable l'une des courbure est nulle, portée par chacune des droites de la surface. L'autre courbure est donc portée par la direction orthogonale, c'est celle dont parle Lacroix.

Ce point de vue exprimé de façon très succincte sera repris et un peu précisé par Lacroix dans son *Traité élémentaire* :

« La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leur tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. » (Lacroix 1802, Sect.164)

3.6 Fourier

Fourier, Monge et Lancret eurent l'occasion de confronter leurs idées à l'École polytechnique; Lancret est un des plus brillants élèves de la première promotion (1794), Fourier un jeune répétiteur et chargé de cours d'analyse, et Monge est l'un des fondateurs et enseignants de l'École. Il se retrouvèrent également tous les trois dans cette étonnante aventure militaire et scientifique que fut l'expédition d'Égypte. Monge fut le premier président de l'Institut d'Égypte, Fourier son inamovible secrétaire et Lancret y fut élu en remplacement d'Horace Say. À l'Institut, Monge présente des recherches sur des surfaces enveloppes de sphères.[28] Un autre polytechnicien de la première promotion, Étienne Malus se préoccupe également de géométrie, comme en témoignent diverses lettres à Lancret.[29] Enfin trois manuscrits de Fourier, que Louis Charbonneau (1994) date de janvier 1801 (et qui auraient donc été écrits en Égypte), traitent du thème des courbes à double courbure.

[27] Les inflexions des surfaces se reconnaissent par le changement de signe de leurs rayons de plus grande et de moindre courbure ; et la position des centres de ces courbures, fait voir de quel côté sont tournées les concavités de la surface proposée. [note de Lacroix]

[28] Lors de la séance du premier thermidor an 8, celle-là même où Lancret décrit dans une lettre la pierre de Rosette qui vient d'être découverte ; cette recherche fut publiée dans le *Journal de l'École polytechnique* (Monge 1802).

[29] Dossier biographique de Malus, Archives de l'Académie des sciences.

Note sur les développées des lignes courbes (Fourier 1801). Ce premier manuscrit commence par une étude des lignes polygonales dessinées dans l'espace. La démarche de Fourier est exprimée très clairement :

> « Un polygone d'un nombre indéfini de côtés se présente d'autant plus exactement comme une courbe que la valeur de chaque côté est plus petite en sorte que la ligne courbe est limite d'une suite de polygones variables ; c'est pour cette raison qu'on aperçoit les propriétés des lignes courbes en cherchant celles du polygone et déterminant ce que deviennent les propriétés des polygones à mesure que le nombre de côtés devient plus grand et la valeur de chaque côté plus petite. » (Fourier 1801, f. 1)

Fourier commence par définir les deux « flexions » : on peut envisager les angles que font entre eux deux côtés consécutifs. Si on les ajoute pour une portion finie de la courbe, on obtient une « mesure de la flexion du contour ». On peut également considérer les plans osculateurs et les angles que font entre eux deux plans osculateurs consécutifs. En additionnant ces angles, on aura cette fois-ci la flexion du plan osculateur entre deux points :

> « Suivant ce que nous avons dit plus haut ces mêmes propriétés appartiennent à la ligne courbe qui est la limite du polygone variable. Ainsi une ligne courbe a en général deux courbures ou flexions, celle de son contour et celle de son plan. » (Fourier 1801, f. 1)

Fourier s'intéresse ensuite aux développantes.[30] Prenant l'image d'un fil enroulé sur un polygone non plan, et que l'on déroule en le maintenant tendu, il décrit géométriquement ce que doit être une développante d'une courbe. Cette développante est dessinée sur la surface des tangentes. La description se prolonge par des calculs; Fourier commence par remarquer qu'il y a trois quantités, l'arc s, la « quantité de flexion du contour » α et β la quantité correspondante de la flexion du plan, et il annonce clairement que la courbe à double courbure est déterminée par les relations entre ces grandeurs :

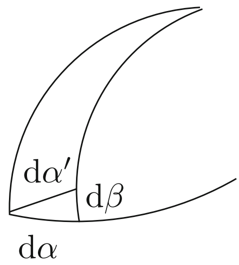
> « Comme ces trois quantités sont absolument arbitraires on supposera que β est une fonction donnée de α et que s est aussi une fonction connue de α en sorte que $s = F(\alpha)$ et $\beta = f(\alpha)$ sont les deux équations de la courbe (s, α et β étant zéro à l'origine) on voit qu'il n'y a aucune courbe dont la nature ne puisse être représentée par ces deux équations. » (Fourier 1801, f. 2)

Son but est ensuite d'obtenir des relations entre les première et seconde flexions ou courbures d'une développée et d'une de ses développantes. L'angle de contingence (entre deux côtés consécutifs) est $d\alpha$, l'angle entre deux plans osculateurs successifs est $d\beta$, et il s'agit de déterminer l'angle de contingence de la développante $d\alpha'$:

> « On voit maintenant que le premier côté de la développante qui forme avec le second coté l'angle $d\alpha$ tant que les deux premiers plans osculateurs se confondent mais lorsque le premier s'incline de $d\beta$ sur le second l'angle de contingence de

[30] Si $\mathscr{D}$ est une développée (evolute) de $\mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}$ est une développante (involute) de $\mathscr{D}$.

Fig. 5 Le triangle sphérique



> la développante n'est plus $d\alpha$, il s'agit de trouver la valeur de ce premier angle de contingence. » (Fourier 1801, f. 3)

(Fig. 5).

Pour déterminer la relation entre ces trois petits angles, Fourier prend comme origine le point de la développante qui est commun aux deux plans osculateurs consécutifs de la développée. Il dessine un cercle dans le premier plan et fait pivoter un plan pour le faire coïncider avec le suivant. Cela lui permet d'obtenir un triangle sphérique, rectangle, dont les « petits » côtés sont $d\alpha$, $d\beta$ et $d\alpha'$ pour l'hypothénuse.

> « La figure fait voir qu'on peut considérer le triangle sphérique composé de $d\beta$ et de $d\alpha$ qui se coupent à angle droit et de l'hypothénuse $d\alpha'$ et si l'on ajoute que ces angles sont infiniment petits on trouvera sur le champ $d\alpha'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$. »

Poursuivant l'analyse de la figure, il prouve ensuite la relation

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \tan(\beta' + A),$$

où β' désigne le second angle de flexion de la développante. Autrement dit, on peut exprimer l'angle β' par

$$\beta' = \arctan\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) - \left[\arctan\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\right],$$

où la valeur entre crochet représente la valeur initiale.

De l'examen des relations entre développante et développée, il ressort que ces deux courbes ont des éléments géométriques en commun, comme dans le cas d'une courbe plane pour laquelle la tangente à la développée est la normale à la développante. Dans le cas des courbes de l'espace, et en anticipant avec le vocabulaire qu'introduira plus tard Lancret, le plan normal de la développante coïncide avec le plan rectifiant de la développée. Ainsi, le premier angle de contingence de la développante, noté $d\alpha'$, coïncide avec l'angle que font deux plans osculateurs consécutifs de la développée.

Sur les propriétés des lignes courbes (Fourier 1801). Fourier commence comme dans le premier par « considérer une ligne courbe comme la limite des polygones inscrits ou (ce qui est une autre manière d'exprimer la même idée) comme un polygone d'une infinité de côtés ». Il définit de même les angles de contingence et les angles plans de contingence, et il note ϕ (resp. ψ) leur somme, les deux variant en fonction de l'arc. Encore une fois, il justifie qu'une courbe est donnée par ces deux grandeurs, par exemple $s = F(\phi)$ et $\psi = f(\phi)$. Puis Fourier recherche « quelles sont dans les courbes en général les propriétés analogues à celles qu'Huygens a reconnues dans les courbes planes ».(Fourier 1801, f. 2) Il rappelle en effet que, pour une courbe plane, l'enveloppe des normales, donc la développée, est le lieu des centres de courbure, mais qu'il n'en va pas de même pour les courbes à double courbure :

> « le lieu des centres de courbure circulaire, la développée et le lieu des centres de courbure sphérique sont en général des courbes différentes. » (Fourier 1801, f. 3)

De même que, dans le plan, la tangente à la développée est normale à la développante, Fourier introduit une comparaison entre une courbe gauche et l'arête de régression de la surface polaire : la tangente à l'arête est normale au plan osculateur de la courbe donnée, et la tangente à la courbe donnée est normale au plan osculateur de l'arête de régression (voir la Fig. 4. C'est cette arête que Lancret nommera « développée par le plan. »

Fourier prolonge son analogie : une courbe plane et sa développée ont même suite d'angles de contingence, et de même :

> « Les angles de contingence de la proposée sont donc les mêmes que les angles formés par les prolongements des plans normaux qui forment la surface développable c'est-à-dire par les prolongements des plans osculateurs de l'arête. Or ce sont les angles compris entre ces plans osculateurs qui constituent la seconde flexion de l'arête donc cette seconde flexion est précisément la même que la première de la courbe proposée. » (Fourier 1801, f. 4)

Poursuivant l'analyse,

> « il suit que la première flexion de l'arête est la seconde de la proposée comme nous avons vu que la seconde de l'arête est la première de la proposée. Ainsi ces deux courbes n'ont fait qu'échanger leurs flexions. » (Fourier 1801, f. 4)

Ces énoncés, qui sont uniquement basés sur une observation des situations respectives des tangentes et plans osculateurs des deux courbes, constituent le théorème attribué à Fourier que citeront Lancret, Lacroix et Saint-Venant. Le mémoire se termine par le début d'un calcul où Fourier s'intéresse aux relations entre arc et flexions d'une courbe et d'une développante, mais le manuscrit s'interrompt très vite, au milieu d'une page.

Note sur les propriétés des lignes courbes (Fourier 1801) Ce texte, également non achevé, contient surtout des calculs, notamment celui des relations entre la courbure d'une courbe à double courbure et les courbures de ses projections. Fourier annonce ensuite qu'il va calculer l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs, calcul qui n'est pas encore apparu dans les textes antérieurs, mais il est contraint de renoncer : «*Il reste à calculer de manière autre les angles m et n, où il semble s'être glissé quelque erreur*»; le calcul n'a pas vraiment abouti.

Dans une seconde partie, Fourier se pose des questions qui préoccupaient Lacroix dans son mémoire de 1790 :

> « On peut se poser un problème plus général : une courbe étant tracée sur le plan développé d'une surface développable il s'agit de trouver la courbe formée par

cette trace sur la surface développable elle même. Il faudra faire tourner le plan d'une quantité $d\beta$ sur la seconde tangente commune au plan 1 ou calculer l'angle que fera le côté 2 avec le côté 1, ce sera l'angle de contingence de la courbe. » (Fourier 1801, f. 3)

Ces mémoires, non mis en forme pour une publication, témoignent néanmoins d'une remarquable clarté d'exposition, liée sans doute aux préoccupations pédagogiques du jeune enseignant qu'est Fourier.[31] Les résultats démontrés ne sont pas fondamentaux mais l'on peut penser qu'ils eurent un rôle dans le développement des idées de Lancret. Par la suite, Fourier ne s'est plus vraiment occupé de géométrie différentielle, on peut envisager que son éloignement de l'enseignement et de l'École polytechnique n'y sont pas étrangers.

3.7 Lancret

Lancret fait avancer la théorie des développées de façon décisive. C'est également lui qui identifie complètement la « seconde » courbure, qui prendra le nom de *torsion* dans le manuel de géométrie descriptive de Vallée (1819). L' œuvre mathématique de Lancret tient essentiellement en deux mémoires. Intitulé « Mémoire sur les courbes à double courbure » (Lancret 1802), le premier est présenté le 25 avril 1802 à l'Académie. Comme les rapporteurs Lacroix et Lagrange (1802) le soulignent, le mémoire de Lancret est construit sur le modèle du mémoire de Monge sur les développées : une partie géométrique, suivie des applications de l'analyse à ce qui précède. Dans les quatre premiers paragraphes, Lancret reprend les résultats classiques, les présentant de façon concise et limpide. Une nouveauté apparaît sur le plan du vocabulaire : le lieu des centres de courbure sphérique, qui est aussi l'arête de rebroussement de la surface polaire est dénommé par Lancret *développée par le plan*; c'est assez naturel puisque, comme nous l'avons vu avec Fourier, le lieu des centres de courbure sphérique est caractérisé par le fait que son plan osculateur est le plan normal de la développante et ce lieu est l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans normaux. Lancret énonce ensuite le résultat de Fourier :

> « Les flexions de la développante et de la développée par le plan ont entre elles une relation remarquable; savoir : que la première flexion de la développante est égale à la seconde flexion de la développée, et réciproquement, la première flexion de la développée est égale à la seconde flexion de la développante. » [Lancret 1802, p. 418]

Comme dans le manuscrit de Fourier, on peut s'interroger sur le sens à donner à cette égalité des flexions. Un peu plus loin Lancret précise « *la développée par le plan n'a pas même étendue que sa développante* ». Autrement dit, la jolie symétrie contenue dans l'énoncé est imparfaite : le théorème de Fourier énonce que les flexions s'échangent,

[31] Les archives de Darboux, à la bibliothèque de l'Institut, contiennent les notes d'un cours de Fourier à l'École polytechnique, montrant qu'il a enseigné la géométrie des courbes gauches : « Nous allons dans cette séance considérer les différentes affections des courbes et quoique ces considérations soient pour la plupart plus curieuses que vraiment utiles.. »

mais il s'agit seulement des « angles de contingence », infiniment petits. Comme la longueur d'arc n'est pas la même, on ne peut dire vraiment que la première courbure de la développée par le plan coïncide avec la seconde courbure de la développante. Lancret apporte donc une précision qui n'est pas présente dans les mémoires de Fourier.[32]

Dans le paragraphe « Du plan rectifiant et de la surface rectifiante » on trouve la première grande nouveauté du mémoire. En plus du plan osculateur et du plan normal, Lancret introduit le troisième plan du trièdre attaché à un point d'une courbe à double courbure, plan qui n'avait jamais été nommé ni utilisé par ses prédécesseurs. Le point de départ, qui justifie l'intérêt que Lancret porte à ce plan, est un peu compliqué : il faut partir de la notion de développée d'une surface développable qui apparaît à la toute fin du mémoire de Monge (1785). Rappelons que Monge part d'une surface développable et considère les plans contenant les arêtes et perpendiculaires à la surface. Ces plans enveloppent une surface également développable, que l'on appelle développée de la surface développable initiale. De plus, l'arête de rebroussement de la surface initiale se développe sur la développée en une droite et est, sur la développée, une courbe de plus courte distance (la démonstration est exactement la même que celle qui prouve qu'une développée est une courbe de plus courte distance de la surface polaire). Lancret observe alors que si l'on considère la surface développable formée par les tangentes d'une courbe, sa développée est la surface enveloppée par les plans contenant les tangentes et perpendiculaires aux plans osculateurs : ce sont les troisièmes plans des trièdres. Ils sont baptisés *plans rectifiants* par Lancret, à cause de la propriété que nous avons rappelée. Ainsi, une courbe à double courbure se « rectifie » sur une surface développable enveloppe des plans rectifiants.

Les trois plans du trièdre sont donc nommés, et avec les surfaces qu'ils enveloppent jouent chacun leur rôle :

> « La surface osculatrice, celle des plans normaux et la surface rectifiante, jouissent donc chacune, d'après ce que nous venons de voir, d'une propriété très remarquable par rapport aux flexions de la courbe. La première est telle qu'en la développant il ne reste plus à la courbe que sa première flexion; en développant la seconde, son arête de rebroussement a pour courbure la seconde flexion de la courbe. Enfin nous venons de démontrer qu'en développant la troisième, les deux flexions de la courbe disparaissent à la fois. » (Lancret 1802, p. 422)

Dans la phase de calcul, Lancret considère la courbe comme donnée par les fonctions $x = \phi z$, $y = \psi z$, et il appelle α la cote z du point courant. Il rappelle les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal, dont il déduit les équations du rayon osculateur. Il détermine ensuite l'équation (R) du plan rectifiant, en

32 La confusion possible lui sera reprochée : Abel Transon, cité par Saint-Venant (1845a), dira dans une communication à la société Philomathique, le 3 août 1844 :

> « Faute d'avoir fait la distinction entre l'angle infinitésimal de deux plans osculateurs et l'affection mesurée par le rapport de l'arc élémentaire de la courbe et cet angle, Lancret est tombé dans une erreur, article IV et surtout article VI de son premier mémoire, lorsqu'il dit qu'en développant la surface polaire, l'arête de rebroussement devenue plane a pour courbure en chaque point la *deuxième courbure* de la courbe donnée, quoiqu'il ait très-bien aperçu, plus loin, que les longueurs des arcs ne sont pas les mêmes. »

écrivant qu'il est perpendiculaire à ce rayon osculant. Suivant le procédé classique, en dérivant une première fois il obtient l'équation (R') et l'élimination du paramètre donne l'équation de la surface rectifiante. L'intersection entre les deux plans rectifiants consécutifs est l'arête de la surface rectifiante et il lui est possible de calculer l'angle H formé entre la tangente et cette droite. Par ce calcul un peu long, Lancret obtient la formule :

$$\tan H = \frac{[\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2]^{3/2}}{(\phi''\psi''' - \psi''\phi''')(1 + \phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}.$$

Le résultat de ce calcul est alors appliqué au cas particulier des hélices, qui sont caractérisées par le fait que leur surface rectifiante est un cylindre. Sur un exemple précis de courbe à double courbure donnée par ses équations, Lancret fait le calcul de la surface rectifiante et constate qu'il s'agit bien d'un cylindre, circulaire dans ce cas particulier, la courbe est une hélice. Dans le cas général, il remarque que la courbe est une hélice si et seulement si l'angle H est constant (non droit, sinon la courbe est plane). Cette affirmation n'est pas justifiée (mais elle est sans doute évidente pour lui : les arêtes de la surface osculatrice font un angle constant avec la courbe qui se développe en une droite, elles sont donc parallèles, et la surface rectifiante est donc un cylindre.)

Dans le paragraphe suivant, Lancret va plus loin : il calcule à nouveau la tangente de l'angle H par une méthode différente. Contrairement à Fourier, il utilise des angles finis et la trigonométrie sphérique (suivant les méthodes d'Euler) avant de faire un passage à la limite. Ses notations diffèrent de celles de Fourier : $d\mu$ est l'angle entre deux plans normaux consécutifs, $d\nu$ l'angle entre deux plans osculateurs consécutifs et $d\omega$ l'angle entre deux plans rectifiants consécutifs. On peut suivre sa démonstration en observant le triangle sphérique de sommet ω et de base μ sur la Fig. 6.

Ce triangle ayant un angle droit, Lancret obtient alors dans un premier temps la relation $\cos\omega = \cos\mu \cos\nu$ puis, « lorsque les angles sont très petits »

$$d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2$$

connue encore actuellement sous le nom de « formule de Lancret ». Toujours avec le même triangle, il obtient

$$\tan H = \frac{d\mu}{d\nu}$$

Comme application, il énonce : « pour les hélices ou courbes rectifiables par le cylindre, l'angle H étant constant, il s'en suit que dans ces courbes, les deux flexions sont toujours proportionnelles. » C'est un théorème que l'on nomme souvent « théorème de Lancret ».[33]

[33] Par exemple dans le traité de Struik (1950). Il en attribue la démonstration à Saint-Venant, ce qui n'est pas rendre justice à Lancret; compte tenu des exigences de la période, la démonstration est tout à fait acceptable.

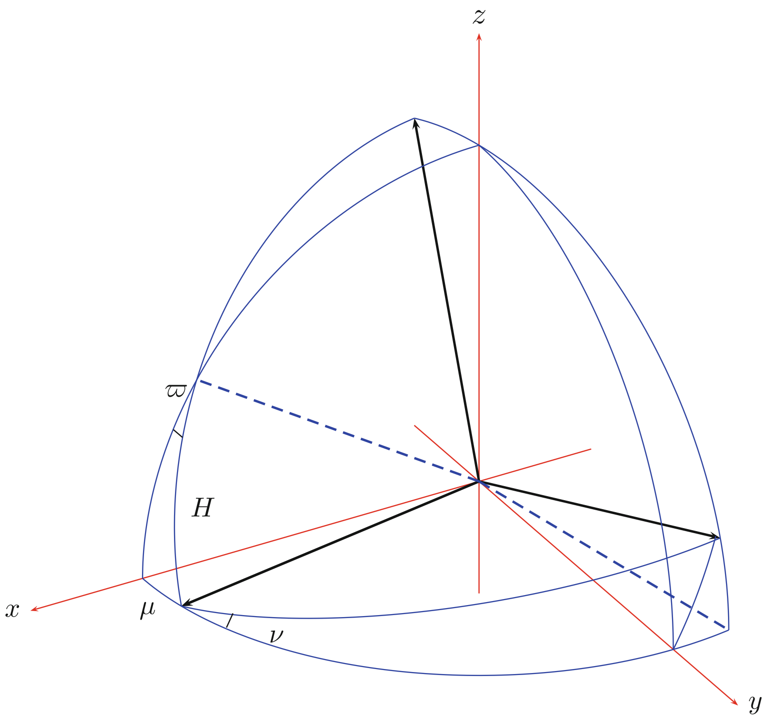


Fig. 6 Deux trièdres consécutifs

Lancret calcule ensuite la seconde flexion, ce qui n'avait pas encore été fait jusqu'alors. Comme le disent les rapporteurs de l'académie des sciences (Lacroix et Lagrange) :

> « Le citoyen Lancret détermine aussi la relation que les angles μ et ν ont avec l'angle formé par une tangente de la courbe proposée et l'arête correspondante de sa surface rectifiante. Cette relation lui sert à trouver, d'une manière fort simple, l'expression de la seconde flexion de la courbe proposée. » (Lacroix et Lagrange 1802)

En rapprochant en effet les deux expressions de $\tan H$, et moyennant le calcul fait depuis longtemps de la courbure, Lancret obtient

$$\frac{d\nu}{d\alpha} = \frac{(\phi''\psi''' - \psi''\phi''')(1 + \phi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\phi''^2 + \psi''^2 + (\phi''\psi' - \psi''\phi')^2}.$$

Il ne reste plus alors qu'à obtenir l'expression de toutes les flexions et de l'angle H en fonction des différentielles et non en fonction de la variable indépendante α (qui est la cote). Ces nouveaux calculs sont essentiellement justifiés par des arguments de symétrie.[34] Par exemple, on aura pour la seconde flexion

$$dv = \frac{d^3x(dyd^2z - dzd^2y) + d^3y(dzd^2x - dxd^2z) + d^3z(dxd^2y - dyd^2x)}{ds(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}.$$

Après l'étude de la développée par le plan, en rapport avec le théorème de Fourier, après les résultats importants sur le plan rectifiant et le calcul de la seconde flexion, Lancret s'attaque au problème des développées « proprement dites », et annonce qu'il va les déterminer « en quantités finies ». Son calcul repose encore sur l'examen de différents plans infiniment voisins et des angles qu'ils font entre eux. Cette fois, Lancret change de méthode : il utilise comme paramètre l'angle θ que fait la tangente à une développée avec la normale, ou plutôt l'angle que fait le plan osculateur de la développée (qu'il nomme plan touchant) avec le plan osculateur de la développante. Il obtient la relation

$$\theta - \theta' = dv.$$

où $\theta - \theta'$ est la différence entre deux angles correspondant à deux points consécutifs de la développante, et donc

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{dv}{d\alpha}.$$

Lancret en déduit les équations d'une développée mais, curieusement, il fait comme si l'angle θ était constant, alors qu'il est le résultat d'une quadrature.[35] Lancret applique ensuite la formule démontrée plus haut pour la courbe et une développée

$$d\omega^2 = d\mu^2 + dv^2 \quad \text{et} \quad du^2 = dm^2 + dn^2$$

[34] « Ce qui consiste à faire en sorte que les trois systèmes dx, d^2x, d^3x; dy, d^2y, d^3y et dz, d^2z, d^3z, soient chacun combinés de la même manière avec les deux autres. » (Lancret 1802, p. 433).

[35] Son erreur sera corrigée par lui même dans le mémoire sur les développoïdes Lancret (1806) :

> « Il ne suffit pas de substituer dans l'équation différentielle du plan touchant la valeur de $\frac{d\theta}{d\alpha}$, il faut de plus intégrer $\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{dv}{d\alpha}$, ce qui donnera
>
> $$\theta = \int dv + c$$
>
> et mettre cette valeur de θ dans l'équation même du plan touchant et de sa différentielle. Il résulte de là que dans les équations de la développée la constante arbitraire ne sera point θ mais la constante c introduite par l'intégration. » (Lancret 1806, p. 5)

Cette erreur est également signalée par Lacroix dans (1810) :

> « Il lui est échappé à ce sujet une légère méprise qu'il a rectifiée dans un second Mémoire. »

et grâce à l'égalité $d\mu = du$, il en déduit la même relation que Fourier

$$d\mu^2 = dm^2 + dn^2.$$

Le mémoire se termine par le calcul des relations entre ces six angles de contingence. Précisons ses notations par le tableau :

	développante		développée	
$d\omega$	**plan rectifiant**			
$d\nu$	**plan osculateur**			
$d\mu$	**plan normal**	=	**plan rectifiant**	du
			plan osculateur	dn
			plan normal	dm

et les relations sont alors :

$$d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2, \quad du^2 = dm^2 + dn^2, \quad d\mu^2 = dm^2 + dn^2.$$

En 1806, Lancret présente à l'Académie un second mémoire, « Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables » (Lancret 1806) dont il annonce le thème

> « Les principales propriétés générales des courbes planes et à double courbure ont été fournies jusqu'à présent par la considération des lignes et des plans qui touchent les courbes ou qui les coupent perpendiculairement. Nous allons dans ce mémoire considérer des lignes et des plans qui rencontrent obliquement les courbes, et nous en déduirons des propriétés beaucoup plus générales que tout ce qu'on a connu jusqu'à ce jour et dans lesquelles celles-ci rentrent comme des cas particuliers. » (Lancret 1806, p. 1)

Dans le cas des courbes planes, Lancret retrouve les résultats de Réaumur [1709] qui avait inventé ce problème, puis il étudie la généralisation à l'espace. Au lieu de considérer l'enveloppe des plans normaux, il est amené à étudier l'enveloppe de cônes d'ouverture fixe et dont les sommets décrivent la développante. Deux cônes consécutifs se coupent alors suivant une hyperbole qui est donc la courbe caractéristique. Les développoïdes seront dessinées sur une surface enveloppant les cônes, formée par ces hyperboles. Ce mémoire généralise donc le problème des développées, mais sans apporter de concepts ou de techniques vraiment nouvelles même s'il rectifie l'erreur signalée plus haut.

Si on considère les résultats de la théorie des courbes à double courbure obtenus en 1802, et qui sont presque tous contenus dans le mémoire de Lancret, on peut estimer qu'on se trouve devant une théorie achevée :

Tout d'abord, Lancret a complété la liste des concepts essentiels : au plan osculateur et au plan normal s'ajoute maintenant le plan rectifiant. Ces trois plans forment donc un trièdre mobile, qui engendre trois surfaces développables, chacune ayant ses particularités.

Pour chacun de ces trois plans, une « flexion » ou une « courbure » est définie comme étant l'angle « différentiel » ou infiniment petit entre deux plans normaux, osculateurs, rectifiants consécutifs. De plus, le calcul est fait explicitement dans les trois cas. La première flexion est connue depuis longtemps, elle est liée au rayon de courbure dit « absolu » par Lancret. La seconde flexion, angle entre deux plans osculateurs consécutifs, est également implicitement connue par Monge puis de plus en plus explicitement par Lacroix, Fourier et Lancret comme permettant de montrer qu'une courbe n'est pas plane. Ces deux flexions sont indépendantes, comme l'affirme Lancret et comme le montre le modèle de la courbe-polygone. Quant à la dernière flexion, Lancret montre qu'elle dépend des deux premières, par la relation

$$d\omega^2 = d\mu^2 + d\nu^2.$$

C'est donc, en définitive la façon dont se déplace notre trièdre mobile, avec ses trois plans, qui est décrite par Lancret. Enfin, Lancret a résolu de manière efficace et explicite le problème des développées, grâce notamment au choix d'un bon paramètre.

Les travaux de Lancret seront rapidement intégrés dans les ouvrages de calcul différentiel et intégral au cours des années qui suivent. Prenons l'exemple de Lacroix. Dans la seconde édition du tome 1 de son Traité (Lacroix 1810), il cite le théorème de Fourier puis expose les résultats de Lancret. Il complète d'ailleurs son exposé en développant la partie géométrique de son mémoire (Lacroix 1790), en la complétant et en la corrigeant. Cependant, les premières éditions du *Traité élémentaire* (Lacroix 1802, 1806), consacrent peu de pages (moins de quatre) à la théorie des courbes à double courbure et ne donnent que les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal. Dans la quatrième édition (Lacroix 1828), on trouve le théorème de Fourier et quelques indications sur la flexion :

> « La seconde courbure, ou la seconde flexion des courbes qui ne sont pas planes, est la courbure des surfaces développables formées par leur tangentes, et indiquée par les angles compris entre les plans osculateurs, comme leur première flexion l'est par les angles compris entre leurs tangentes. » (Lacroix 1828, p. 236)

4 L'analyse au premier plan

4.1 La question des courbes-polygones

Dans les textes que nous avons étudiés jusqu'à présent, une constante remarquable est l'utilisation des expressions : *points consécutifs, tangentes consécutives, plans normaux consécutifs*. Parfois ce langage est accompagné d'une justification, ainsi Fourier dit clairement qu'il parle de polygones mais que les propriétés qu'il va prouver vont s'étendre à des polygones ayant une infinité de côtés, donc aux courbes elles-mêmes. Lacroix fait ressortir également l'abus de langage utilisé : quand il définit le plan osculateur, il commence par utiliser une théorie du contact. Ce n'est que dans un second temps qu'il préfère dans un souci d'efficacité utiliser le langage habituel et voir ce plan comme contenant deux éléments consécutifs.

La notion même d'*élément* renvoie à des objets différents chez divers auteurs et parfois chez le même auteur. Par exemple, dans le début de son mémoire (Monge 1785), Monge parle de deux points consécutifs A et a et de l'arc qui les joint. Dans ce contexte, l'élément de courbe est assimilé à un arc de cercle, puisqu'il a un axe polaire. Dans le même texte, par exemple quand il construit les développées, Monge laisse entendre qu'un élément entre deux points consécutifs est un segment dont le prolongement est la tangente en un des points. Cette discussion sur les courbes polygones n'est pas nouvelle. On la trouve dès l'origine du calcul infinitésimal de Leibniz, par exemple dans la préface du traité du Marquis de l'Hôpital (1696):

> « Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, et ne différent entre elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entre eux; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces cotés pour avoir la courbure qu'ils forment, .. »

En ce qui concerne les applications à la géométrie dans l'espace, le manque de rigueur, ou plutôt de clarté et de constance dans les arguments, se fait encore plus sentir : pour une courbe gauche, on ne peut pas affirmer que deux tangentes consécutives sont concourantes (et que leur ensemble forme donc une surface développable) alors que deux normales consécutives ne le sont pas. En réalité deux tangentes en des points proches mais distincts ne sont pas coplanaires. En ce qui concerne l'emploi des infiniment petits des questions se posent : quelle est la vraie nature des angles de flexions ? Sont-ce des angles infiniment petits entre deux tangentes ou plans osculateurs consécutifs ? Ou bien de véritables angles entre les côtés d'un polygone ou les hèdres d'un polyèdre ? Nous avons vu, par exemple, que l'utilisation des angles infiniment petits pouvaient également prêter à confusion quand la variable n'est pas explicite, comme dans le théorème de Fourier. Ce théorème est correct s'il est exprimé en termes d'infiniment petits, mais ambigu et même faux s'il est exprimé en termes de courbures. Ce sera aussi l'initiative des successeurs de Lancret que d'introduire des quantités finies en lieu et place des flexions : le rayon de courbure existait déjà mais pas encore la torsion ni le rayon de torsion.

Toutes ces remarques et objections qui dépassent le simple cas des courbes à double courbure, et qui sont l'objets de nombreuses discussions, vont jouer un rôle important dans la façon dont la théorie va évoluer. Tout d'abord, l'expression « points consécutifs » disparaît peu à peu des textes savants : la notion est remplacée progressivement par une théorie du contact. Par ailleurs et parallèlement, les outils analytiques s'affinent; cela se traduit par exemple par le choix de la variable indépendante, qui n'est plus systématiquement l'une des coordonnées mais la longueur de l'arc (comme chez Euler) ou une variable quelconque. Autre exemple, dans les techniques de la géométrie analytique; à côté des triplets de coordonnées de points on introduit les triplets de « cosinus directeurs » pour les directions. Enfin, l'analyse revient au premier plan : avec Cauchy, la rigueur des démonstrations est liée à l'absence de considérations géométriques intuitives, et dans la premier moitié du XIX^{e} siècle tous les théorèmes de Lancret sur les hélices sont l'objet de nouvelles démonstrations.

4.2 Une première théorie du contact : Lagrange

Dans son traité, Lacroix (1797) utilise le développement en série des fonctions pour étudier le contact entre des courbes planes, à double courbure ou des surfaces. Le cours de Lagrange à l'École polytechnique transcrit dans (Lagrange 1797) contient une importante partie géométrique qui a pour ambition de refonder l'étude des courbes et surfaces à l'aide de la théorie des fonctions analytiques, jugeant ainsi qu'il revient aux principes de rigueur des Anciens.

Pour comparer deux courbes planes d'équations $y = f(x)$ et $y = F(x)$, Lagrange introduit une troisième fonction ϕ, avec $\phi(x_0) = f(x_0) = F(x_0)$, pour un certain x_0[36] fixé. Il considère ensuite les différences des ordonnées $D = f(x_0+i) - F(x_0+i)$ et $\Delta = f(x_0+i) - \phi(x_0+i)$ au point d'abscisse x_0+i puis faisant un développement limité (que l'on appellerait maintenant développement de Taylor-Lagrange à l'ordre deux), Lagrange annonce que si f et F ont même dérivée en x_0, « *on pourra toujours prendre i assez petit pour que la quantité* Δ *devienne plus grande que la quantité D* ». Il écrit :

$$D = \frac{i^2}{2}[f''(x_0+j) - F''(x_0+j)]$$

$$\Delta = i(f'(x_0) - \phi'(x_0)) + \frac{i^2}{2}[f''(x_0+j) - \phi''(x_0+j)]$$

et constate que « *la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières,* à *moins que* $f'(x_0) - \phi'(x_0)$ *ne devienne nul.* » Naturellement, on peut continuer et définir des contacts d'ordre plus élevé, l'ordre du contact est l'ordre de la dernière dérivée qui coïncide avec la dérivée de la fonction initiale.

> « C'est là l'idée nette qu'on doit se faire de ces différents degrés de rapprochement des courbes que l'on appelle communément contact, osculation, et que la manière ordinaire de concevoir le calcul différentiel fait regarder comme des coïncidences plus ou moins rigoureuses ou plus ou moins étendues. » (Lagrange 1797, p. 122)

La différence est nette : il n'est plus question de parler de points consécutifs ou d'infiniment petits. La formalisation passe par des inégalités et des encadrements, de façon comparable à la méthode d'exhaustion d'Archimède, ou même à la méthode avec laquelle Newton étudie le centre de courbure d'une courbe plane.

Lagrange applique sa méthode d'abord aux courbes planes : la tangente est la droite ayant un contact d'ordre un avec la courbe. Il s'intéresse ensuite au cercle osculateur. Écrivant l'équation d'un cercle sous la forme $y = F(x) = b + \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$, il obtient très vite

$$\begin{cases} a = x - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ b = y + \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}} \end{cases}$$

comme donnant le « meilleur » cercle parmi ceux de rayon c donné : il ne peut passer entre ce cercle et la courbe un autre cercle de même rayon. Lagrange constate que le lieu des centres de ces cercles optimaux est la normale. Pour aller plus loin il calcule

[36] Pour être plus clair, nous notons x_0 ce que Lagrange note x.

la dérivée seconde de F, et obtient un contact d'un ordre supérieur en prenant le rayon $c = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$. De façon générale, si on examine le contact entre une courbe donnée et une courbe dépendant de constantes $a, b, c \ldots$, Lagrange appelle « éléments de contacts » ces constantes (Lagrange, 1797, p. 128). Pour avoir un ordre de contact donné k, il faut $k+1$ équations donc $k+1$ éléments de contact; ainsi, comme une droite dépend de deux paramètres, elle ne pourra en un point courant qu'avoir un contact du premier ordre. Avec ce point de vue élargi, Lagrange traite à nouveau le cas du cercle, puis de la parabole, etc. Pour le cas d'un contact d'ordre n, la courbe la plus simple est la courbe donnée par le polynôme qui coïncide avec le début du développement en série. Lagrange généralise ensuite au cas de développements asymptotiques généralisés (exposants non entiers) et au cas des asymptotes grâce à la transformation de x en $1/x$.

Dans le cas des courbes de l'espace, Lagrange se donne une courbe par deux équations $y = f(x)$, et $z = \phi(x)$, une autre courbe par les fonctions $y = F(x)$ et $z = \Phi(x)$, les deux courbes ayant en commun le point d'abscisse x. Pour un point voisin d'abscisse $x + i$ il introduit les différences de coordonnées $d = f(x+i) - F(x+i)$ et $\delta = \phi(x+i) - \Phi(x+i)$. La distance entre les deux points est $D = \sqrt{d^2 + \delta^2}$ et,

> « De là, par une analyse semblable à celle qui a été développée au commencement de cette deuxième Partie, on prouvera que, si $f'(x) = F'(x), \phi'(x) = \Phi'(x)$, il sera impossible qu'aucune autre courbe donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions puisse passer entre les deux courbes dont il s'agit. » (Lagrange 1797, p. 162)

On ne peut s'empêcher de penser que c'est une description bien imprécise. L'usage de l'expression « entre », s'agissant de trois courbes de l'espace ayant un point commun, ne peut avoir la même évidence que dans le cas de courbes planes. Il faudrait tout reformuler en termes de distances, ce qui n'est pas fait. Lagrange applique également sa théorie du contact pour (re)trouver les équations de la tangente à une courbe à double courbure. Examinons son étude du cercle osculateur. Le système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0 \\ x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0 \end{cases}$$

représente les équations d'un cercle. Les six constantes sont les « éléments du contact » et, pour exprimer qu'il y a un contact d'ordre 2, on prend les équations prime deux fois de suite, ce qui donne

$$\begin{cases} x - a + y'(y-b) + z'(z-c) & = 0 \\ \quad 1 + my' + nz' & = 0 \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) & = 0 \\ \quad my'' + nz'' & = 0 \end{cases}$$

Il y a donc en tout six équations, on peut résoudre le système et obtenir les expressions habituelles du centre de courbure et du rayon de courbure d'une courbe à double courbure. Plus loin, Lagrange aborde la question des développées des courbes à double courbure, à sa manière particulière. Il sera amené à affirmer que, sous une certaine condition, l'ensemble des centres de courbure d'une courbe plane peut être une développée. Cette affirmation, contredisant la théorie de Monge, sera remarquée et corrigée par Jacobi bien plus tard.[37]

Lagrange n'est pas un spécialiste de la géométrie et il n'aura pas, au contraire de Monge, de disciples utilisant de façon systématique ses méthodes.[38] Comme le dit Boyer, par comparaison avec Monge, « Lagrange did not have a geometer's heart, nor did he have enthusiastic disciples. » (Boyer 1968)

4.3 Les critiques de Cauchy et sa théorie

Les critiques que fait Cauchy à la théorie du contact de Lagrange sont explicitées et résumées dans un chapitre des « Exercices de Mathématiques » (Cauchy 1826, pp. 221–251), recueil d'exposés plus ou moins disparates qui pour certains prolongent et complètent le cours d'analyse de l'École polytechnique (Cauchy 1826). Ce chapitre s'intitule « Sur les divers ordres de contact des lignes et des surfaces », et contient deux types de remarques. Les premières sont géométriques, et concernent les courbes et surfaces de l'espace : elles portent sur la signification du mot « entre » concernant des courbes ou des surfaces de l'espace. Cauchy prend un exemple précis : il considère les deux surfaces d'équations $z = x^4 + y^4$ et $z = -x^4 - y^4$. Selon la définition de Lagrange ces deux surfaces ont entre elles un contact d'ordre 3. Si on envisage maintenant la troisième surface d'équation $z = y^2$, elle ne devrait pas, d'après la théorie de Lagrange, pouvoir se situer *entre* les deux précédentes, puisque ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 au point (0, 0) ne coïncident pas avec celles des deux surfaces. Or elle contient l'axe des x qui est *entre* les deux premières surfaces. L'autre objection est également importante : qu'en est-il de l'invariance des définitions de Lagrange par rapport à un changement de coordonnées ? Cauchy remarque également que, dans le cas de courbes, on ne peut appliquer la méthode de Lagrange si la tangente est orthogonale à l'axe des abscisses.

Cauchy, reprenant la démarche analytique de Lagrange, élabore sa propre théorie du contact.[39] Il considère deux courbes planes qui se « touchent » en un point donné P (c'est-à-dire qui, en ce point commun P, ont une tangente commune). Centré sur ce point, il envisage un cercle de petit rayon i qui coupe les courbes en deux points voisins[40] Q et R, et la proximité de ces points est mesuré par l'angle ω entre les deux rayons; l'arc a comme mesure $i\omega$ et la corde joignant les deux points Q et R a pour mesure $2i \sin \frac{\omega}{2}$. Cauchy énonce alors :

[37] Jacobi (1836), voir une étude précise dans Delcourt (2007).

[38] Lacroix, dès son traité élémentaire (Lacroix 1802) et la seconde édition du traité (Lacroix 1810) privilégie la méthode des limites.

[39] Dans son cours (Cauchy 1826), leçon 9. La théorie du contact vient cependant après la définition de la tangente ou du cercle osculateur pour les courbes planes, et, pour les courbes et surfaces de l'espace, elle est présentée dans les deux dernières leçons. Un examen attentif du déroulement réel des cours montre que les leçons n'étaient pas toujours abordées dans le même ordre. Lors des premières années d'enseignement de Cauchy, la théorie du contact trouvait sa place avant (Gilain 1989).

[40] Cauchy ne s'occupe que d'un seul côté de la courbe.

> « Le rapprochement des deux courbes sera plus ou moins considérable, et leur contact plus ou moins intime, suivant que les valeurs de ω correspondant à de très-petites valeurs de i seront plus ou moins grandes. » (Cauchy 1826, p. 122)

Cette définition admise, Cauchy définit ce qu'il entend par l'ordre d'un infiniment petit $f(i)$ par rapport à la base i; c'est un nombre a constant tel que :

– pour tout $k < a$, $\frac{f(i)}{i^k}$ tend vers 0.
– pour tout $k > a$, $\frac{f(i)}{i^k}$ tend vers ∞.

Il précise également, exemples à l'appui, que le rapport $\frac{f(i)}{i^a}$ peut avoir n'importe quelle limite. Cette définition de l'ordre d'un infiniment petit généralise à un exposant quelconque ce que Cauchy avait défini dans le cas des exposants entiers à la fin des *Leçons sur le calcul infinitésimal* (Cauchy 1823, pp. 249–256). Remarquablement précise et moderne, elle est suivie dans l'exposé de 1826 d'un certain nombre de lemmes sur les sommes d'infiniment petits d'ordres distincts, sur les produits d'infiniment petits, avec à chaque fois une démonstration en termes de limite complètement explicitée. Revenant au problème du contact, Cauchy observe que si ω est un infiniment petit d'ordre a, alors $2 \sin \frac{\omega}{2}$ sera un infiniment petit d'ordre a également et la distance entre les deux points Q et R sera un infiniment petit d'ordre $a + 1$ (la base étant i). Cauchy décide alors d'appeler *ordre de contact* des deux courbes le nombre a. Il est donc parvenu à une définition qui évite les inconvénients de la théorie de Lagrange ; en particulier elle est indépendante du mode de représentation de la courbe.

La suite de la leçon consiste à étudier comment on peut calculer cet ordre de contact, par exemple par l'étude de la différence des ordonnées (si l'axe n'est pas parallèle à la tangente commune) et Cauchy retrouve la méthode de Lagrange de coïncidence des dérivées successives, bien sûr seulement quand l'ordre est entier. Il ne lui reste plus alors qu'à faire le lien avec les résultats connus : il montre en particulier, dans la leçon suivante, que le cercle osculateur[41] est parmi les cercles tangents celui qui a un contact d'ordre au moins égal à deux avec la courbe.

La définition de Cauchy se transpose aisément dans l'espace ; pour le contact entre deux courbes « quelconques »[42] il suffit de remplacer le cercle de rayon i par une sphère. Pour parvenir à un calcul explicite de l'ordre de contact, Cauchy compare l'ordre de contact des courbes avec celui des projections sur un plan. Il démontre que cet ordre est le même que celui des projections sauf si le plan est « sensiblement perpendiculaire » au plan formé par les points P, Q, R, auquel cas l'ordre de contact des projections est plus grand. Quant au contact entre deux surfaces, Cauchy s'y prend de la façon suivante : il faut considérer toutes les sections par des plans passant par le point de contact et faisant un angle « sensible » (c'est-à-dire qui diffère suffisamment l'angle nul) avec le plan tangent commun. Ces sections sont des courbes qui sont en contact et l'ordre de contact des surfaces sera le plus petit des ordres de contact de toutes ces sections. Cette définition permet d'éviter le contre-exemple décrit plus haut et est rapidement traduite en termes d'égalités des dérivées partielles successives.

41 défini par son centre sur la normale et par son rayon, inverse de la courbure.

42 Cauchy parle de courbes quelconques pour ne pas exclure le cas des courbes planes situées dans l'espace.

La théorie de Cauchy est une réponse solide aux problèmes de la définition rigoureuse de la tangence, de l'osculation et de leur généralisation. Elle permet d'obtenir les mêmes algorithmes de calcul que Lagrange ou ses prédécesseurs, au moins dans les cas courants. Il n'est plus nécessaire d'employer des expressions comme « les courbes ont trois points communs confondus »... Cependant, cette dernière façon de s'exprimer va perdurer et la présentation de Cauchy ne va pas s'imposer immédiatement.
Par exemple, le successeur de Cauchy à l'École polytechnique, Claude Navier, va reprendre dans sa théorie du contact le point de vue de Lagrange (Navier 1856). Dans le cours de Leroy, lui aussi enseignant à l'École polytechnique, on peut lire :

> « Lorsqu'une ligne AM est à double courbure, ses diverses tangentes ne sont pas dans un même plan, mais deux éléments consécutifs MM' et $M'M''$ remplissent toujours cette condition puisqu'ils ont un point commun ; alors le plan qui passe par ces deux éléments se nomme le *plan osculateur* de la courbe en M. » (Leroy 1835, p. 243)

Autre exemple de ce double langage, dans un petit livre de Charles de Freycinet, édité en 1860 :

> « Quand on suppose que les courbes ont un contact de l'ordre n, ou que les n premières dérivées de leurs fonctions sont égales chacune à chacune, on se trouve dans le même cas que si ces deux courbes avaient $n+1$ points consécutifs communs. [...] Au fond, deux courbes ne peuvent pas plus avoir $n+1$ points communs qu'il n'est possible à la droite tangente d'en avoir deux et au cercle osculateur d'en avoir trois. » (de Freycinet 1860, p. 224)

C'est donc essentiellement dans les ouvrages élémentaires, dans les cours destinées aux élèves des lycées et des grandes écoles comme l'École polytechnique, que le langage des courbes polygones va subsister. On peut continuer à l'observer encore tout au long du siècle, mais de moins en moins fréquemment : le cours de Duhamel, longtemps professeur d'analyse à l'École polytechnique reprend la théorie du contact de Cauchy quoique de façon moins détaillée (Duhamel 1856). Dans le traité de Bertrand (1864), le premier qui donne les formules de Serret-Frenet, on trouve une définition du contact par le développement en série, puis la preuve que l'ordre ainsi défini est indépendant du choix des coordonnées, et enfin un exemple d'un cas particulier où l'ordre n'est pas entier.

Les travaux géométriques de Cauchy ne se limitent pas à sa théorie du contact. En ce qui concerne les courbes à double courbure, Cauchy reprend tous les calculs fait par ses prédécesseurs de façon synthétique (il calcule parallèlement les deux flexions) et extrêmement efficace, utilisant de nouveaux outils de géométrie analytique comme les cosinus directeurs d'une direction. Il obtient en particulier une relation qui sera plus tard appelée première formule de Serret-Frenet.[43]

[43] Pour un examen plus complet consulter (Collidge 1940, pp. 337–342) ou (Delcourt 2007).

4.4 Les problèmes réciproques

La théorie des courbes à double courbure est maintenant bien établie. Les méthodes de Cauchy, les résultats de Lancret sont intégrés dans l'enseignement comme on peut le voir dans les différents cours d'analyse professés à l'École polytechnique. De nombreux jeunes chercheurs vont continuer à l'approfondir dans divers articles que l'on trouve dans la revue de Hachette (*Correspondance sur l'École polytechnique*) ou le plus officiel *Journal de l'École polytechnique* ou enfin dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville. Ces articles posent souvent des problèmes de réciproque : une hélice circulaire a une courbure et une torsion constante, réciproquement toute courbe à courbure et torsion constante est-elle une hélice ? Ces problèmes sont plus difficiles à résoudre que les énoncés directs, car ils nécessitent bien sûr de recourir au calcul intégral, de résoudre des équations différentielles. De nouvelles exigences de rigueur font que l'on accepte moins les méthodes géométriques. Dans toute cette période, que nous arrêterons en 1887 date de parution des *Leçons sur la théorie des surfaces* (Darboux 1887) on observera un basculement hésitant; tantôt les méthodes géométriques sont acceptées mais viennent en second, tantôt l'objectif est de revenir à une présentation la plus géométrique possible, évitant autant que possible le recours à l'analyse.

Théodore Olivier et l'hélice osculatrice. Théodore Olivier[44] est un bon exemple des auteurs qui se veulent héritiers des méthodes de Monge. Il a écrit quelques mémoires sur le sujet des courbes gauches dans le *Journal de l'École polytechnique*, (Olivier 1833, 1834, 1835b,a), ainsi que dans divers cours de géométrie descriptive comme (Olivier 1844). Nous nous intéresserons surtout au mémoire (Olivier 1835b) qui pose la question théorique importante de la recherche d'une hélice osculatrice à une courbe à double courbure. Dans d'autres articles on trouve des applications à la fois pratiques (engrenages coniques) ou théoriques (rayons de courbure maximaux et minimaux). Le mémoire de 1835 a une présentation assez inhabituelle : une première partie est titrée *Résumé*, une seconde *Discussion*. Dans la première partie, Olivier décrit le problème qu'il veut résoudre et annonce ses solutions, en donnant au passage des éléments de preuve. Puis il va tout reprendre dans la seconde partie, et il prévient :

> « La marche que je viens de tracer serait celle qu'on devrait suivre, sans contredit, dans un traité ; mais il me semble qu'un mémoire doit être écrit dans un tout autre esprit, car il n'est pas sans intérêt, et peut être n'est-il pas sans utilité de connaître la série des idées qui ont conduit successivement aux différents résultats obtenus. C'est pourquoi j'ai laissé à ce Mémoire la forme que les recherches successives ont dû nécessairement lui donner. » (Olivier 1835b, p. 65)

La suite du mémoire montre en effet et de façon très instructive le cheminement de ses raisonnements. L'autre particularité du mémoire est le langage utilisé, la formulation des démonstrations. Olivier est un spécialiste de géométrie descriptive et sa vision des courbes gauches est portée par cette formation. Voici comment il présente le problème qu'il veut résoudre.

[44] Né en 1793, il est ancien élève de l'École Polytechnique, où il a enseigné la géométrie descriptive. C'est un des fondateurs de l'École centrale des arts et manufactures.

> « Lorsqu'on veut déterminer la courbure d'une courbe plane ou à double courbure, on la compare à une courbe ayant une courbure constante, et comme le cercle est la seule courbe plane qui jouisse de cette propriété, c'est au cercle que l'on compare la courbe donnée, et c'est ainsi que l'on est conduit à comparer une courbe à son cercle osculateur, lorsqu'il s'agit de la courbure d'une courbe en un de ses points. Pour une courbe à double courbure, on devrait aussi pour déterminer en même temps sa courbure et sa flexion en un point, la comparer à une courbe ayant une courbure constante et une flexion constante. » (Olivier 1835b, p. 61)

On sait déjà que le cercle osculateur d'une courbe à double courbure a un contact d'ordre au moins égal à deux, et « à première vue », écrit Olivier, « on serait porté à croire que l'on peut toujours construire une hélice cylindrique circulaire ayant un contact du troisième ordre avec une courbe à double courbure, puisque l'on peut évidemment construire une hélice circulaire ayant même angle de contingence et même angle de flexion que ceux qui existent en un point d'une courbe à double courbure. » (Olivier 1835b, p. 62) En réalité, il n'en est rien. Pour le justifier, Olivier donne deux arguments : le premier utilise la notion de contact selon Lagrange ; pour qu'il y ait contact d'ordre au moins trois, il faut qu'il y ait contact d'ordre au moins trois sur deux projections planes, ce qui nécessite six constantes arbitraires. Or une hélice circulaire passant par le point n'en offre que cinq.

Le second argument est plus subtil : Olivier rappelle les propriétés d'une hélice circulaire, et notamment le fait que, pour une telle courbe, le lieu des centres de courbure et l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans normaux (c'est-à-dire le lieu des centres de courbure sphérique) coïncident. Si donc une hélice avait un contact du troisième ordre avec une courbe à double courbure, comme le centre de courbure dépend de deux points consécutifs et le centre de courbure sphérique de trois points, la courbe à double courbure partagerait avec l'hélice la coïncidence de ces deux points, ce qui ne peut être.[45] Sans doute non encore convaincu par ses propres arguments, Théodore Olivier avance encore d'autres explications. Dans le reste du mémoire[46], il étudie de façon géométrique les développantes des développées des hélices circulaires et énonce qu'elles partagent avec les hélices circulaires la propriété « d'avoir même angle de contingence et même angle de flexion en chacun de (leurs) points. » (Olivier 1835b, p. 80) Nous savons que c'est inexact, cela sera affirmé et démontré par Puiseux (1842).

Les démonstrations d'Olivier sont loin d'être convaincantes, il est davantage géomètre qu'analyste. Donnons l'exemple de l'expression du rayon de courbure sphérique R (ou rayon de la sphère osculatrice)

$$R = \frac{\sqrt{2\rho(\rho + d\rho)(1 - \sqrt{1 - f^2}) + d\rho^2}}{f}$$

[45] C'est seulement pour une courbe plane ou pour une courbe à courbure constante que les deux centres coïncident constamment.

[46] On trouve, entre autres, une démonstration originale de ce que pour une hélice cylindrique, le rapport courbure sur flexion est constant.

où le rayon de courbure est ρ et l'angle de flexion f. Dans cette formule sont imbriquées des quantités finies et des infinitésimaux de façon désordonnée ; si on la simplifie en négligeant ce qui doit l'être, on retrouve le résultat habituel pour le rayon de la sphère osculatrice ($\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 T^2}$, en notant T la torsion). Le mémoire a été complété et corrigé dans une « Addition » (Olivier 1835a) où Olivier apporte alors les précisions suivantes :

– Une hélice circulaire ne peut avoir un contact d'ordre trois avec une courbe à double courbure quelconque, mais il y a une infinité d'hélices circulaires qui offrent un contact d'ordre deux. Et on peut en choisir une qui partage avec la courbe le même angle de flexion.
– Deux hélices circulaires distinctes ne peuvent avoir entre elles un contact du troisième ordre.
– Deux courbes à double courbure ont entre elles un contact du troisième ordre si elles partagent le même cercle de courbure, le même angle de flexion, et la même sphère osculatrice.

Puiseux et l'hélice circulaire. Dans un article du *Journal de Liouville*, Victor Puiseux, alors jeune enseignant tout juste sorti de l'École normale supérieure, se pose la question de *« Trouver la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes. »* (Puiseux 1842). Contrairement aux affirmations de Théodore Olivier, Puiseux va montrer que seules les hélices circulaires ont cette propriété. Le problème est cette fois abordé comme un problème de résolution d'équation différentielle. Puiseux utilise l'arc s comme variable indépendante et écrit donc

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$$
$$\omega = \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z},$$

où $A = dyd^2z - dzd^2y$, $B = dzd^2x - dxd^2z$, $C = dxd^2y - dyd^2x$. Il transforme la seconde égalité en

$$\omega = \frac{ds^6}{\rho^2(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z)}$$

à laquelle il ajoute, bien sûr, l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Il déduit alors, au moyen de différentiations et de diverses substitutions, qu'il existe quatre constantes f, g, h et k telles que

$$f dx + gdy + hdz = kds$$

et énonce que cette formule « exprime que toutes les tangentes à la courbe cherchée font des angles égaux avec une même droite.[47] » (Puiseux 1842, p. 68). Puiseux choisit

[47] Effectivement et en langage moderne, cette relation exprime que le vecteur unitaire tangent fait un angle constant avec le vecteur (f, g, h).

alors de prendre pour cette droite l'axe des z, et obtient la relation $\frac{dz}{ds} = \cos \epsilon$ où ϵ est constant; choisissant de prendre z comme variable indépendante, il obtient rapidement, en utilisant la constance du rayon de courbure, que les solutions sont des hélices circulaires de rayon $\rho \sin^2 \epsilon$. La première partie de la démonstration revient en définitive à montrer que les solutions sont nécessairement des hélices cylindriques et la seconde, qu'il s'agit d'hélices circulaires. Après la méthode de Lancret, très géométrique, Puiseux utilise une méthode analytique. Le dialogue géométrie-analyse n'est pas terminé, puisqu'un autre jeune mathématicien Joseph Bertrand reprend la question un peu plus tard. Dans un très court mémoire du *Journal de Liouville*, « Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes » (Bertrand 1848), il propose une preuve géométrique du résultat de Puiseux :

> « M. Puiseux a démontré d'une manière très-élégante que l'hélice est la seule courbe dont les deux courbures soient constantes ; mais comme sa démonstration, purement analytique, est un peu longue, ayant eu à enseigner ce théorème, j'ai vu un avantage de simplicité à y substituer le raisonnement suivant.
>
> Si les deux courbures d'une courbe sont constantes, les parallèles, menées à ses tangentes par un point de l'espace, formeront un cône dans lequel l'angle de deux plans tangents infiniment voisins sera proportionnel à celui de leurs génératrices de contact ; car le premier de ces deux angles est celui de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe cherchée et le second est l'angle des deux tangentes correspondantes. Il résulte de cette remarque, que si l'on décrit du sommet du cône comme centre une sphère de rayon 1, la courbure de la surface conique sera la même en tous les points de la courbe d'intersection qui est, comme on sait, une ligne de courbure ; l'élément de cette ligne mesure en effet, l'angle des deux génératrices, et l'angle des normales menées à ses extrémités n'est autre chose que celui des plans tangents correspondants.
>
> Si par les points de cette ligne de courbure, on mène des normales à la surface conique et qu'on prenne sur chacune d'elle une longueur égale à ce rayon de courbure constant, on formera une courbe qui étant le lieu des intersections successives de ces normales leur sera tangente à toutes ; d'un autre côté, cette courbe, étant obtenue en portant des longueurs constantes sur des normales à la surface conique, est située sur une surface parallèle et doit couper toutes les normales à angle droit ; devant ainsi être à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, elle doit se réduire à un point. Si de ce point comme centre, avec un rayon égal au rayon de courbure constant, on décrit une sphère, cette sphère sera inscrite dans le cône qui, par conséquent est de révolution. Ainsi donc, toutes les tangentes de la courbe cherchée font un angle constant avec une droite fixe, et, par conséquent, cette courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur cylindre parallèle à cette droite. » (Bertrand 1848, pp. 423–424)

La citation est longue, mais exemplaire : on atteint ici, semble-t-il, la limite de ce qu'on peut comprendre dans une démonstration « géométrique » de cette époque, néanmoins très éloignée des courbes-polygones à la Monge. En substance, Bertrand examine la figure formée par les tangentes à la courbe, ramenée à un point origine. Il introduit la courbe que l'on appelle maintenant indicatrice sphérique, formée par l'intersection du cône obtenu avec la sphère unité et il vérifie que cette courbe a une courbure constante. Il lui applique alors les propriétés des lignes de courbure d'une surface, ce qui lui permet de montrer que le cône des tangentes est un cône de révolution. Ainsi, les tangentes font un angle fixe avec une direction fixe ; remarquons que la propriété obtenue est vraie lorsque les deux courbures ne sont pas forcément égales, mais de rapport constant. Comme le dit la fin du texte de Bertrand :

> « Il résulte de la démonstration précédente que "l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule courbe dont les deux courbures aient un rapport constant". » (Bertrand 1848, p. 424)

Quant à la fin de la démonstration du théorème de Puiseux, elle est au demeurant très simple : il s'agit seulement de démontrer qu'une hélice cylindrique dont la courbure est constante est une hélice circulaire. Bertrand le vérifie en montrant que la projection de l'hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est aussi à courbure constante; comme c'est une courbe plane, c'est un cercle.

D'autres problèmes sont abordés par les géomètres français de cette période. C'est ainsi que le même Joseph Bertrand étudiera le problème suivant : deux courbes à double courbure distinctes peuvent-elles partager la même normale principale[48] ? (Bertrand 1850) Les courbes qu'il obtient sont appelées maintenant « courbes de Bertrand » et comprennent les courbes à courbure constante étudiées auparavant par Monge.

4.5 Les questions de terminologie

Nous avons déjà remarqué, à plusieurs reprises, que l'expression « courbes à double courbure » inaugurée par Pitot, était interprétée de différentes façons par les géomètres successifs qui se sont intéressés au sujet. Cette question de vocabulaire n'est pas anodine: on peut supposer que la précision et la persistance du vocabulaire va de pair avec la précision des notions mathématiques.

Commençons par le travail terminologique fait par Louis-Léger Vallée, ingénieur polytechnicien. Dans le livre VI de son traité de géométrie descriptive (Vallée 1819), paru en 1819, il étudie les surfaces développables et les courbes à double courbure. Après avoir justifié que les normales d'une courbe à double courbure forment une surface gauche (c.-à.-d. réglée non développable), il déclare :

> « D'après cela, deux courbures consécutives des courbes à double courbure n'étant pas dans un même plan, on pourrait donner à ces courbes le nom de *courbes gauches*.[49]
> La dénomination de courbe à double courbure, est non seulement longue, désagréable et embarrassante, mais elle donne encore l'idée fausse et spécieuse

[48] En réalité, le premier problème que se pose Bertrand est différent, il s'agit de rechercher si toute surface gauche (en terme moderne, toute surface réglée non développable) peut être réalisée comme surface des normales principales d'une courbe de l'espace. La réponse est négative, cette question a été posée par Saint-Venant (de Saint-Venant 1845a, p. 48), que nous étudions ci-après.

[49] « Le mot gauche n'est pas agréable à l'oreille, mais il est essentiel en Géométrie, et il donne parfaitement l'idée qu'il doit donner. »

de deux courbures qui n'existent pas : il serait à désirer qu'on cessât de l'employer. » (Vallée 1819)

Cette dénomination va être petit à petit adoptée par les mathématiciens français. En revanche, il n'est plus question de « surface gauche ». Vallée s'interroge également sur la seconde courbure :

« Maintenant nous ferons remarquer que quelle que soit une ligne courbe, le rayon de courbure qui correspond à chacun de ses points, se trouve toujours déterminé par l'angle infiniment petit des deux plans normaux consécutifs qui correspondent à ce point : nous donnerons à cet angle le nom *d'angle de courbure*. Et ce qui fait qu'une courbe non plane ou, comme on dit, à double courbure, change de plan à chaque élément, étant, comme on le verra tout à l'heure, une sorte de torsion de ses éléments les uns autour des autres, torsion qui est déterminée par l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs consécutifs, nous nommerons cet angle, *angle de torsion*.[50] » (Vallée 1819)

Vallée explique ensuite clairement comment courbure et torsion se combinent et sont indépendantes. Il suit pour cela le procédé décrit par Lacroix (1795); il part d'une courbe à double courbure V et d'une droite flexible L et commence par plier les éléments de L « de manière que cette droite se change en une courbe V' dont les centres de courbure A', B', etc. soient placés par rapport aux éléments a', b' comme les centres A, B, C sont placés par rapport aux éléments respectifs a, b ». Vallée explique ensuite comment il faut plier les plans de deux éléments consécutifs, en suivant cette fois l'angle de torsion. Plus loin, dans une nouvelle note, Vallée revient sur le vocabulaire et affirme que l'expression « angle de flexion » n'est pas un choix satisfaisant.

Cette question de terminologie est reprise par Adhémar Barré de Saint-Venant, surtout connu pour sa théorie de l'élasticité et pour ses travaux d'ingénieur. En 1844, il présente à l'Académie un « Mémoire sur les lignes courbes non planes », qui sera publié dans le *Journal de l'École polytechnique*, (de Saint-Venant 1845a). Il est certain que l'intérêt que Saint-Venant porte à la question des courbes à double courbure est issu de ses travaux de physicien et d'ingénieur.[51] ; son mémoire se termine par plusieurs pages de formules qu'il pense devoir être utiles pour les applications.[52]

Dans une longue note à la fin de son mémoire, Saint-Venant s'intéresse à la terminologie et notamment à la question de la dénomination de la « seconde courbure ». Il commence par affirmer que, dans les applications (« ainsi que je l'ai éprouvé très-souvent en faisant des recherches sur l'état d'équilibre et sur la résistance des verges courbes fléchies et tordues, ») cette deuxième affection intervient souvent. Il critique ensuite successivement les termes de flexion, de torsion, rejetés pour les confusions qu'ils entraînent avec des mots identiques parfois employés en mécanique.[53]

---

[50] « On a aussi nommé cet angle angle de flexion et l'angle de courbure angle de contingence »

[51] Quelques années plus tard, Saint-Venant présentera par exemple à l'Académie un mémoire intitulé « De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion . . . » (de Saint-Venant 1855).

[52] Il les a faites éditer indépendamment du reste du mémoire (de Saint-Venant 1845b).

[53] Ainsi, lorsqu'un fil matériel est tordu, on appelle torsion la rotation relative de deux sections transversales voisines. C'est donc un angle infiniment petit qui n'a aucun rapport avec une propriété géométrique de la courbe.

Il élimine de même inflexion, infléchissement, seconde courbure... Parmi les expressions nouvelles, il tente gauchissement, mais propose finalement *cambrure* :

> « Bien plus, *cambrure*, d'après son étymologie, paraît particulièrement propre à désigner précisément la courbure d'une *surface développable*, ou engendrée par un plan. Le mot latin *camera* et surtout le mot grec dont il dérive signifient proprement voûte, arcade, chariot couvert ; d'où il suit que *cambrer* veut dire transformer un plan en surface courbe, et c'est en effet, son sens technologique en français.[...] Il est expressif, sans équivoque ni contradiction ; sa symétrie avec courbure et sa précision compensent, dans le discours, la rudesse de prononciation qu'on peut lui reprocher. »

Cette proposition de changement de vocabulaire, pourtant solidement argumentée, n'aura pas de succès et le vocable de Vallée va l'emporter; il en ira de même pour la proposition « courbe de gorge » s'appliquant à la ligne de striction d'une surface réglée. Les efforts de Saint-Venant ne seront pas vains en ce qui concerne la dénomination de la direction orthogonale de l'axe osculateur; il appelle

> « *Binormale* celle des normales qui est perpendiculaire au plan osculateur. Cette ligne, qu'on est obligé de considérer très-souvent aussi, et à laquelle il n'a pas encore été donné de nom, est, en effet, normale à *deux* éléments consécutifs à la fois, tandis que les autres normales à la courbe ne le sont qu'à un seul de ses éléments. ». (de Saint-Venant 1845a, p. 17)

Cette expression binormale va peu à peu s'imposer; cependant, Serret et Frenet, par exemple, continueront d'employer « axe du plan osculateur ». Le vocabulaire anglo-saxon est le plus souvent calqué sur le vocabulaire français : *space curve*, *developpable surfaces* et *ruled surfaces* pour une surface réglée. On trouve parfois l'expression *screw* pour une surface réglée non développable (les surfaces gauches de Monge).

4.6 Les autres apports de Saint-Venant

Saint-Venant, dont on sait qu'il était proche de Cauchy, ne ménage pas ses critiques devant certains procédés employés avec la méthode des infiniment petits. Lorsqu'il calcule le rayon de courbure il procède par des raisonnements géométriques assez compliqués, se référant aux *Leçons d'analyse* de Navier (1856).[54] À la suite de son long calcul, il fait la remarque suivante :

> « Il n'est pas inutile de discuter ici une autre démonstration que plusieurs géomètres donnent de cette expression de l'angle infiniment petit de deux tangentes consécutives. » (de Saint-Venant 1845a, p. 9)

[54] Saint-Venant crédite également Navier du calcul direct de l'angle de torsion (de Saint-Venant 1845a, p. 11), alors que Lancret n'aurait fait qu'un calcul indirect. Crédit sans doute exagéré puisque dans son cours (Cauchy 1826) Cauchy obtient une expression de la torsion en procédant de la même façon que pour la courbure.

Voici la description de ce calcul fautif : partant des cosinus directeurs de la tangente en M et au point suivant

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} + d.\frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} + d.\frac{dz}{ds}$$

on devrait pouvoir calculer le cosinus de l'angle par la formule habituelle

$$\cos\delta = \cos\alpha_0 \cos\alpha + \cos\beta_0 \cos\beta + \cos\gamma_0 \cos\gamma.$$

Mais, remarque Saint-Venant, comme

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

en dérivant on obtient

$$\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = 0,$$

ce qui donne alors $\cos\delta = 1$, et donc $\delta = 0$. Ce calcul naïf est donc corrigé par les auteurs (Saint-Venant cite Poisson) par ce qu'il considère être des artifices, consistant à ajouter des termes d'ordre deux en utilisant la formule de Taylor, puis à les faire disparaître en fin de calcul.

Saint-Venant, quant à lui, critique la formule initiale, celle donnant $\cos\delta$, affirmant « qu'elle se prête mal au cas où cet angle est infiniment petit » (de Saint-Venant 1845a, p. 10). Un lecteur moderne critiquerait la critique de Saint-Venant par l'argument suivant : la formule du cosinus ne peut s'appliquer rigoureusement car $\frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \ldots$ ne sont pas des cosinus directeurs. On peut rétablir un calcul satisfaisant en tenant compte de la norme de ce vecteur.

Nous serons quand même d'accord sur le fait que, malgré tout, on ne peut se satisfaire des procédés que certains adeptes des infiniment petits emploient pour retrouver un résultat attendu. Rappelons que dans la déduction de Cauchy il y a un passage explicite à la limite qui ne pose pas de problème de rigueur (hypothèses de régularité mises à part).

Saint-Venant aborde également le problème des hélices. Après de nombreux calculs, il obtient l'expression

$$dH = \frac{\rho^2 d\frac{r}{\rho}}{r^2 + \rho^2},$$

où H est l'angle que fait avec la tangente la droite rectifiante, intersection de deux plans rectifiants consécutifs alors que r et ρ désignent les rayons de courbure et de torsion. De cette formule on déduit donc que l'angle H est constant si et seulement si le rapport de la courbure à la cambrure est constant. Saint-Venant ajoute :

« Alors les différentes droites rectifiantes sont les arêtes d'un cylindre, et la courbe est une *hélice* à base quelconque, ou une courbe dont toutes les tangentes font le même angle avec un certain plan. » (de Saint-Venant 1845a, p. 26)

Ce passage a conduit certains auteurs à considérer que Saint-Venant est le premier à avoir vraiment démontré le théorème de Lancret (voir par exemple Struik 1950, p. 34). Si on retourne à la démonstration de Lancret, elle ne suit pas la même démarche, mais elle repose sur les mêmes idées. Lancret calcule tan H par des procédés qui peuvent parfaitement nous paraître corrects, et la façon dont il conclut est tout à fait semblable à celle de Saint-Venant. On peut donc tout de même attribuer à Lancret la démonstration du théorème de Lancret... Remarquons néanmoins, pour lui faire justice, que Saint-Venant est un des premiers à « signer » la torsion, en précisant en particulier une orientation pour la binormale.

Le bilan de Saint-Venant, les articles de Puiseux, de Bertrand marquent la fin d'une période. Les objets de la théorie sont maintenant bien définis, ils sont nommés de façon de plus en plus consensuelle, les caractéristiques que sont la courbure et la torsion sont calculées, et l'on est parvenu à résoudre certains problèmes comme celui des hélices ou celui des courbes de Bertrand. Il manque cependant – et la multitude des formules de Saint-Venant en est le témoin – un principe unificateur qui permette des démonstrations efficaces.

4.7 Les formules de Serret-Frenet

Les problèmes réciproques envisagés plus haut sont en réalité des problèmes d'intégration, leur résolution sera grandement facilitée quand les formules de Serret et Frenet permettront d'exprimer les variations de tous les objets géométriques associés à une courbe, à l'aide des seules fonctions courbure et torsion. Martin Bartels semble avoir le premier obtenu de tels résultats (Reich 1973; Lumiste 1997). Carl Eduard Senff, élève de Bartels à l'Université de Tartu (Estonie) et qui sera son successeur, publie en 1830 un mémoire sur les « *Principaux théorèmes de la théorie des courbes et des surfaces* » et Senff précise que ces résultats sont dus à son maître Bartels. On y trouve ce qui constitue une préfiguration des formules de Frenet ; comme le remarquent Karin Reich et Ülo Lumiste, les formules sont données sous forme covariante. Bartels introduit les cosinus directeurs des trois directions : (ξ, η, ζ) pour la tangente, (ξ', η', ζ') pour la normale au plan osculateur et (ξ'', η'', ζ'') pour la normale principale. Les résultats obtenus sont alors écrits sour la forme

$$\begin{aligned}
\xi' d\xi'' + \eta' d\eta'' + \zeta' d\zeta'' &= -(\xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta') = d\sigma' \\
\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta &= -(\xi d\xi'' + \eta d\eta'' + \zeta d\zeta'') = d\sigma \\
\xi d\xi' + \eta d\eta' + \zeta d\zeta' &= -(\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta) = 0,
\end{aligned}$$

où $d\sigma'$ et $d\sigma$ représente les deux angles de flexion. Ces formules servent ensuite à la démonstration de divers résultats comme le théorème de Lancret. Les formules de Bartels n'ont semble-t-il pas été diffusées dans le reste de l'Europe. Frenet, dans sa thèse complémentaire, a obtenu des énoncés équivalents en 1847, mais c'est Joseph-Alfred Serret, polytechnicien et proche de Liouville qui les a le premier fait connaître.

On trouve en effet, dans la réédition des *Applications de l'analyse à la géométrie* de Monge (1850) des notes de Liouville, dont l'une cite in extenso une lettre que Serret lui a envoyé en 1849 et dans laquelle on trouve une première version des formules, ainsi que quelques applications. L'origine des travaux de Serret est la résolution de l'équation différentielle $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, dans un article publié par le Journal de Liouville (Serret 1848). Comme le fait Liouville dans sa note, commençons par rappeler le cas de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Si on considère une courbe plane et que l'on note θ l'angle polaire de la tangente, l'équation de cette tangente s'écrit

$$x \sin\theta - y\cos\theta = p(\theta)$$

et les coordonnées du point de la courbe seront solutions du système

$$\begin{cases} x(\theta)\sin\theta - y(\theta)\cos\theta = p(\theta) \\ x'(\theta)\sin\theta - y'(\theta)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

qui exprime que le point (x, y) est sur la tangente et que le vecteur $(x'(\theta), y'(\theta))$ est colinéaire au vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. En dérivant par rapport au paramètre la première équation, on voit que ce système est équivalent au suivant

$$\begin{cases} x(\theta)\sin\theta - y(\theta)\cos\theta = p(\theta) \\ x(\theta)\cos\theta + y(\theta)\sin\theta = p'(\theta). \end{cases}$$

Ce qui donne, compte tenu de ce que $\frac{dx}{ds} = \cos\theta$ et $\frac{dy}{ds} = \sin\theta$

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = -p(\theta)\cos\theta + p'(\theta)\sin\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = p(\theta) + p''(\theta). \end{cases}$$

Un simple changement de notation permet d'obtenir comme Liouville

$$\begin{cases} x = \psi'(\theta)\sin\theta + \psi''(\theta)\cos\theta, \\ y = \psi'(\theta)\cos\theta - \psi''(\theta)\sin\theta, \\ s = \psi(\theta) + \psi''(\theta) \end{cases}$$

où la fonction ψ est arbitraire. Selon Liouville, cette résolution de l'équation permet, par exemple, de trouver les courbes qui sont à la fois algébriques et rectifiables algébriquement (Monge 1850, p. 558). Comme nous venons de le voir, la méthode utilisée consiste en définitive à considérer une courbe plane comme enveloppe de ses tangentes. Dans son article, Serret opère une transposition de cette idée : une courbe gauche est l'arête de rebroussement de la surface développable formée par ses tangentes. Si donc $z = px + qy - u$ est l'équation du plan osculateur, la courbe sera solution du système

$$\begin{cases} z = px + qy - u \\ 0 = xdp + ydq - du \\ 0 = xd^2p + yd^2q - d^2u \end{cases}$$

où p, q et u sont fonctions d'un paramètre θ. Serret résout ce système, différentie et calcule ds; il parvient alors à exprimer x, y, z et s en fonction de trois fonctions de θ dont deux peuvent être considérées comme arbitraires. Après une généralisation à n variables, la suite du mémoire de 1848 consiste à montrer que certains choix peuvent contribuer à simplifier les expressions (effroyablement compliquées) obtenues par la méthode générale. Dans la lettre à Liouville, Serret a l'idée d'utiliser les trois fonctions p, q et u pour exprimer les grandeurs géométriques intéressant une courbe à double courbure. En suivant la démarche exprimée plus haut, et en posant pour abréger

$$H = \frac{d^3u - xd^3p - yd^3q}{dqd^2p - dpd^2q}$$

Serret obtient

$$\begin{cases} x = \frac{dqd^2u - dud^2q}{dqd^2p - dpd^2q} \\ y = \frac{dud^2p - dpd^2u}{dqd^2p - dpd^2q} \\ z = px + qy - u \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dx = Hdq \\ dy = -Hdp \\ dz = H(pdq - qdp) \\ ds = H\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2} \end{cases}$$

Grâce au choix des paramètres p, q et u (coefficients de l'équation du plan osculateur), le calcul de l'angle de torsion est assez direct.[55] Serret nomme λ, μ et ν les angles formés par la normale au plan osculateur avec les axes, calcule ces angles et leur différentielle et obtient

$$d\eta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2} = \frac{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}}{1 + p^2 + q^2}$$

tandis qu'avec les formules obtenues plus haut, il calcule les cosinus directeurs ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) de la direction de la tangente et leur différentielles. Il obtient aussi assez facilement pour l'angle de contingence

[55] Cela peut se comprendre : deux des paramètres sont des coordonnées du vecteur binormal.

$$\begin{aligned} d\epsilon &= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2} \\ &= \frac{dqd^2p - dpd^2q}{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{aligned}$$

Au cours des calculs Serret à obtenu la relation

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{d\cos\nu}{d\cos\gamma} = \frac{d\eta}{d\epsilon}$$

qu'il résume en un théorème.[56] :

« Si α et λ désignent les angles formés avec une droite D par la tangente et l'axe du plan osculateur en un point M d'une courbe quelconque, le rapport

$$\frac{d\cos\lambda}{d\cos\alpha}$$

sera le même, quelle que soit la droite D, et sa valeur sera égale au rapport de la seconde courbure à la première. » (Monge 1850, pp. 561–562)

On trouvait déjà chez Cauchy une insistance sur le rôle des cosinus directeurs des trois directions du trièdre, mais il n'utilisait les différentielles de ces cosinus que pour le calcul du rayon de courbure et du rayon de torsion. Au contraire, dans la lettre de Serret et en particulier dans le théorème que nous venons de citer, ces différentielles sont prises comme objet d'étude pour elles-mêmes, bien qu'on ne puisse vraiment dire que la direction qu'elles définissent soit vraiment repérée. Pour le dire clairement, on ne peut pas affirmer que dans ce premier texte de Serret sont présentes les « formules de Serret-Frenet », même si, bien sûr, le théorème cité est conséquence directe des formules que nous notons $SF1$ et $SF3$ et que nous rappelons en notations modernes

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa(s)\mathbf{n} & (SF1) \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau(s)\mathbf{n}. & (SF3) \end{cases}$$

Un peu plus tard, Serret revient dans un article du Journal de Liouville (Serret 1851a) sur les formules de la lettre ainsi que sur les applications qui en ont été faites. Les résultats obtenus et les méthodes employées sont assez différents de la première version. Pour commencer, les fonctions p, q et u de la méthode précédente ne sont plus utilisées. Serret nomme les trois triplets d'angles directeurs des trois directions :

– α, β, γ pour la tangente (droite MT),
– ξ, υ, ζ pour la normale principale (droite MN),
– λ, μ, ν pour l'axe du plan osculateur (droite ML).

[56] dont Serret affirme qu'on peut donner une démonstration « fort simple »

et annonce qu'il va « exprimer les différentielles des divers ordres des cosinus de ces angles [...] par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que ds, r, ρ et leurs différentielles ». On peut remarquer qu'il ne parle plus d'angle de contingence ou de flexion, mais du rayon de courbure r et du rayon de flexion ρ, quotient de l'arc ds par les deux angles. La première relation qu'il donne est présentée comme un rappel; c'est l'équivalent de la première formule de « Serret-Frenet »

$$\begin{cases} d\cos\alpha = \cos\xi\,\frac{ds}{\rho} \\ d\cos\beta = \cos\nu\,\frac{ds}{\rho} \\ d\cos\gamma = \cos\zeta\,\frac{ds}{\rho} \end{cases}$$

Dans un second paragraphe, Serret va obtenir la troisième formule de « Serret-Frenet », sous la forme

$$\begin{cases} d\cos\lambda = \cos\xi\,\frac{ds}{r} \\ d\cos\mu = \cos\nu\,\frac{ds}{r} \\ d\cos\nu = \cos\zeta\,\frac{ds}{r}. \end{cases}$$

La déduction est très différente de celle qu'on a trouvée dans la lettre à Liouville. Elle est basée sur des calculs de géométrie analytique très simples : il suffit de partir des conditions d'orthogonalité, de la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

pour obtenir que les différentielles $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$ et $d\cos\nu$ sont proportionnelles aux différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ et $d\cos\gamma$, le rapport étant $\frac{\rho}{r}$. C'est, aux notations près, une démonstration « moderne ». La véritable nouveauté, par rapport aux calculs de Cauchy, est la formule

$$\begin{cases} d\cos\xi = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right) ds \\ d\cos\upsilon = -\left(\frac{\cos\beta}{\rho} + \frac{\cos\mu}{r}\right) ds \\ d\cos\zeta = -\left(\frac{\cos\gamma}{\rho} + \frac{\cos\nu}{r}\right) ds \end{cases}$$

qui donne donc les différentielles des cosinus de la troisième direction, celle de la normale principale. Serret part de la relation

$$\cos^2\xi + \cos^2\alpha + \cos^2\lambda = 1$$

dont il ne dit pas d'où elle provient.[57] Cette relation est alors dérivée et permet d'obtenir $d\cos\xi$ en fonction des autres lignes trigonométriques, puis, grâce aux deux premiers groupes de formules, on obtient

$$d\cos\xi = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right) ds$$

qui, accompagnée des formules analogues pour les autres cosinus, constitue la seconde formule de Serret-Frenet

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa(s)\mathbf{t} + \tau(s)\mathbf{b} \quad (SF2)$$

En 1852 Frenet fait paraître dans le Journal de Liouville un article intitulé « Sur les courbes à double courbure » (Frenet 1852). Cet article est présenté comme extrait d'une thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Toulouse le 10 juillet 1847, donc bien avant les premières publications de Serret.

Frenet utilise ce qu'il appelle les *cosinus déterminants*[58] des trois directions : la tangente, la normale principale, et la perpendiculaire au plan osculateur et rappelle toutes les relations que vérifient ces coefficients qui traduisent les contraintes de longueurs, d'orthogonalité, etc. Puis il présente un calcul qui sera utilisé à de multiples reprises dans l'article, celui de l'angle entre deux droites infiniment voisines. Pour être plus précis, Frenet considère un point M qui varie dans l'espace et une droite MB dont les cosinus déterminants l, m et n sont des fonctions continues des coordonnées du point M. Il note C un point de MB tel que MC soit égal à l'unité, puis, si $M'B'$ est une position infiniment proche de la droite MB, C' un point sur la parallèle à $M'B'$ menée par M de sorte que MC' soit également l'unité. Si ϕ est l'angle cherché (donc un infiniment petit), on a $\phi = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2}$. Frenet détermine ensuit les cosinus déterminants limites de la direction de CC' :

$$f = \frac{dl}{\phi}, \quad g = \frac{dm}{\phi}, \quad h = \frac{dn}{\phi}.$$

Ce calcul est d'abord utilisé dans le cas où la droite MB est la tangente, l'angle de contingence ω s'écrit $\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$ et les cosinus déterminants de la normale principale vérifient :

$$\lambda = \frac{da}{\omega}, \quad \mu = \frac{db}{\omega}, \quad \nu = \frac{dc}{\omega}.$$

C'est la première formule. Frenet va, de la même façon, déterminer l'angle de torsion, celui que font deux rayons vecteurs binormaux consécutifs. Ici, il s'écarte

[57] La justification est assez immédiate : cette relation provient de ce que ces trois cosinus sont les cosinus directeurs de l'axe des abscisses dans le repère formé par les trois directions de la tangentes, de la normale principale et de la binormale.

[58] i.e. les cosinus directeurs.

un peu de la tradition, en tenant compte de l'orientation.[59] Si MB est la direction de l'axe du plan osculateur, il considère quatre points consécutifs M, M', M'' et M''' puis remarque qu'il y a deux cas suivant que M''' est du même côté ou non que B par rapport au plan osculateur $MM'M''$. Il est ainsi amené à *convenir* que l'angle de torsion u sera positif dans ce cas, négatif dans l'autre, mais qu'il est toujours donné par

$$u = -\frac{d\alpha}{\lambda} = -\frac{d\beta}{\mu} = -\frac{d\gamma}{\nu}$$

et donc $u = \pm\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$. C'est la troisième formule de Serret-Frenet, mais cette fois avec la convention « moderne » de signe. Frenet calcule ensuite u,[60]

$$u = ds\frac{(Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z)}{D^2}$$

où

$$\begin{cases} A = dyd^2z - dzd^2y \\ B = dzd^2x - dxd^2z \\ C = dxd^2y - dyd^2x \end{cases} D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Frenet détermine enfin le troisième angle de contingence, c'est-à-dire l'angle entre deux rayons de courbure infiniment voisins

$$\theta^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2.$$

Frenet utilise alors la relation $\lambda = \beta c - \gamma b$ qu'il dérive, et à l'aide des premières formules, il déduit

$$d\lambda = cd\beta - bd\gamma + \beta dc - \gamma db = u(b\nu - c\mu) - \omega(\mu\gamma - \nu\beta) = \alpha u - a\omega$$

ce qui, avec les deux formules analogues, constitue les secondes formules de Serret-Frenet. Ces formules sont immédiatement utilisées pour calculer l'angle de contingence

$$\theta^2 = u^2 + \omega^2$$

formule obtenue par Lancret, comme le rappelle Frenet, « par une toute autre voie. »

Un peu plus tard, dans une correspondance adressée aux Nouvelles Annales, (Frenet 1864, p. 284–286), Frenet revendique la priorité sur les résultats précédents. Il réagit au fait que dans le traité de Bertrand (1864), les formules sont attribuées à Serret.

[59] On peut néanmoins voir dans l'article de Saint-Venant (de Saint-Venant 1845a) des préoccupations du même ordre.

[60] La version donnée dans le Journal de Liouville [ibid., p. 439], contient une erreur d'exposant.

En outre, Frenet rappelle qu'il a fait parvenir le manuscrit de sa thèse à Liouville dès 1847, sans qu'il ait été donné suite à cet envoi. Même si rétrospectivement on peut penser que Frenet n'a pas clairement eu conscience de l'importance de ces formules,[61] l'habitude sera peu à peu prises de les lui attribuer. Il n'en reste pas moins que les applications qu'il donne sont moins profondes que celles qu'en fera Serret. Dans ses articles (Serret 1851a,b), ce dernier en effet utilise ses formules pour reprendre les problèmes classiques (celui des hélices, des courbes de Bertrand), en traiter de nouveaux (caractérisation des courbes sphériques, courbes à courbure ou torsion constantes...) alors que Frenet se contente d'appliquer ses formules pour retrouver des calculs déjà connus (Frenet 1853).

4.8 Paul Serret et l'abbé Aoust

La théorie des courbes à double courbure va continuer à intéresser les géomètres français de la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Parmi ceux-là, nous distinguerons, de façon un peu arbitraire, Paul Serret, un homonyme de J.A. Serret, et l'abbé Aoust. Paul Serret est un ancien élève de l'École normale supérieure et fait une carrière modeste d'enseignant dans des établissements privés. Il consacre sa thèse (Serret 1859) aux courbes à double courbure. Tout ce qui est connu depuis Monge est repris ; le modèle des courbes polygones est omniprésent, avec cependant des passages à la limite explicites. La nouveauté importante est l'utilisation systématique des indicatrices sphériques, et l'ensemble des résultats obtenus constitue une récapitulation de nombreux travaux antérieurs et n'intègre pas réellement les travaux de Serret et Frenet. Les travaux de l'abbé Aoust sont plus ambitieux. Parmi les nombreuses monographies de cet universitaire, une trilogie *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque* (Aoust 1869), *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Aoust 1873), *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace* (Aoust 1876). Le projet d'Aoust s'exprime dans la préface de (Aoust 1869)

> « Le problème de l'analyse d'une courbe peut être posé de deux manières. Dans la première, on définit la courbe par une relation existant entre un de ses points et une ou plusieurs grandeurs géométriques. On exprime analytiquement cette relation ; cette expression porte le nom d'*équation de la courbe en termes finis*, et la résolution de cette équation fait connaître un point quelconque. Il faut, en second lieu, déduire de cette équation une autre équation donnant la tangente en un point quelconque, et de celle-ci une troisième donnant la courbure de cette courbe en ce point. Ensuite on s'occupe de sa rectification [...] et de sa quadrature [...]
>
> La deuxième manière de poser le problème de l'analyse d'une courbe est inverse de la précédente. Elle consiste dans la relation qui lie un point de la courbe soit avec la tangente en ce point, soit avec la courbure, soit avec la longueur de l'arc, etc. Cette relation s'exprime aussi analytiquement, et il faut alors retrouver l'équation qui lie ce point de la courbe avec telle grandeur géométrique.

[61] Il revendique en effet surtout le théorème géométrique conséquence des formules.

> Ces deux points de vue sont essentiellement distincts, et correspondent à deux analyses différentes. Il a fallu plusieurs générations de géomètres pour constituer cette double analyse, en développer les progrès, et la génération actuelle en poursuit les perfectionnements. » (Aoust 1869, p. XIII)

L'abbé Aoust attache donc une grande importance à cette notion d'« équation naturelle » d'une courbe. Les avantages qu'il y voit sont de différents ordres :

– débarrasser les équations des données inutiles,
– permettre une reconnaissance immédiate de l'identité de deux courbes,
– permettre une reconnaissance rapide de certaines relations entre des courbes (courbes parallèles, courbes semblables),
– permettre une classification des courbes par leur équation naturelle.

En ce qui concerne le second point, Aoust ne parvient pas clairement à démontrer que deux courbes de l'espace ayant même équation naturelle sont identiques (à un déplacement de l'espace près pour être plus précis). Aoust ne démontre pas davantage que toute fonction (positive) de l'arc peut être la courbure d'une courbe et que toute fonction choisie indépendamment peut être la torsion de la même courbe. Quant au dernier objectif, il ne s'est pas montré aussi fécond que ne le pressentait ou désirait Aoust. Il est vrai que les courbes d'équations naturelles $\kappa = a$ et $\tau = b$, $\frac{\kappa}{\tau} = k$, $a\kappa + b\tau = c$, où l'on a noté κ et τ les courbures et torsion, et a, b, c, k des constantes, représentent des familles bien répertoriées et étudiées par les géomètres de l'époque, puisqu'il s'agit des hélices circulaires, des hélices cylindriques, des courbes de Bertrand. Il est vrai que des équations aussi simples que $\kappa = a$ ou $\tau = b$ représentent des familles moins connues, parce que d'une généralité peut-être trop grande.

Dans son traité sur les courbes gauches, Aoust commence par une étude très complète des polygones gauches, suivie de la démonstration de formules par passage à la limite, mais il s'exprime encore avec le langage des courbes polygones :

> « Définitions. Une courbe gauche peut être considérée comme un polygone gauche d'une infinité de côtés.[. . .] La direction que suit le point mobile, quand il parcourt un côté infiniment petit, donne la direction de la tangente ou de l'élément linéaire de la courbe.[. . .] L'angle que deux éléments infiniment voisins font entre eux est l'angle de contingence de la courbe. » (Aoust 1876, p. 57)

Plus loin, Aoust pose clairement le problème :

> « La question qui va nous occuper consiste à déduire des équations élémentaires d'une courbe les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe. Cette question, lorsqu'il s'agit de courbes planes peut être complètement résolue [. . .] mais il n'en est pas de même des courbes non planes. Le problème, dans sa généralité est au-dessus des forces de l'Analyse, parce que l'on se trouve en présence d'une équation différentielle qu'on ne sait pas intégrer. » (Aoust 1876, p. 78)

Aoust définit ce qu'il appelle la *courbure inclinée* qui est, pour une droite quelconque attachée à un point mobile, le rapport de l'angle de contingence à la longueur d'arc. Il donne beaucoup d'importance à cette notion. Ce qui nous semble plus intéressant, c'est qu'à une telle droite il attache un trièdre, (τ, ρ, ν) avec exactement la même définition que le trièdre de Serret-Frenet, à part, curieusement, une orientation indirecte. Il étudie alors le trièdre suivant, ramené à la même origine, exactement à la manière de Lancret, et obtient, par des moyens quasi identiques, l'analogue des formules de Serret

$$\begin{cases} (\tau, \tau') \cos(\rho, x) = d \cos(\tau, x) \\ (\nu, \nu') \cos(\rho, x) = d \cos(\nu, x) \\ -(\tau, \tau') \cos(\tau, x) - (\nu, \nu') \cos(\nu, x) = d \cos(\rho, x). \end{cases}$$

Aoust ne cite pas Serret (encore moins Frenet), soit qu'il n'ait pas reconnu les formules, soit qu'il considère les siennes comme plus générales. Il introduit aussi ce qu'il appelle le *trièdre dérivé*, qui est le trièdre dont l'arête principale est la dernière arête du trièdre proposé. Il définit de même des trièdres dérivés successifs, et des trièdres intégraux. Cette notion, dont on ne saisit pas l'intérêt au premier abord est liée à la notion de développée : en effet, le trièdre des axes mobiles de la développante est le trièdre dérivé du trièdre des axes mobiles de la développée. Aoust définit enfin ce qu'il nomme le *rapport spécifique*, qui n'est autre que le rapport de la courbure et de la torsion. Les résultats qu'il obtient alors sur l'intégration des équations élémentaires sont liés aux notions (parfois un peu obscures) qu'il a introduites, avec des théorèmes comme celui-ci : « Le rapport spécifique angulaire de la courbe suffit pour déterminer la direction de la tangente au moyen d'une équation différentielle du second ordre. » (Aoust 1876, p. 108) Il parvient également à certains changements de variables intéressants, mais reconnaît qu'il est loin d'avoir résolu le problème complet. Dans sa conclusion, Aoust s'intéresse à la question de la classification des courbes. Il propose comme principe de définir des « classes », ensembles de courbes pour lesquelles le rapport spécifique suit une équation donnée. Ainsi, il y aura la classe des courbes planes, la classe des hélices, etc. La liste des exemples est vite close.

4.9 Darboux

Gaston Darboux est le mathématicien qui fait le lien entre la théorie ancienne du XVIII^e siècle, celle de Clairaut et de Monge, et la théorie moderne. C'est également un de ceux qui font connaître l'œuvre de Sophus Lie, dont on sait l'importance pour les développements ultérieurs de la géométrie différentielle. Le livre de Darboux qui va donner la conclusion mathématique à notre étude s'appelle « *Leçons sur la théorie des surfaces*. » (Darboux 1887)

Le début du magistral traité de Darboux est consacré (livre 1, chapitre 1) au problème du mouvement d'un corps solide. Plus précisément, il s'agit d'utiliser pour la géométrie une méthode issue de la mécanique ou, à proprement parler, de la cinématique. Pour commencer, on considère deux repères ou trièdres de même origine O, et « de même disposition », on dirait maintenant de même orientation. Le premier X, Y, Z est fixe, l'autre x, y, z mobile et les axes mobiles sont repérés par les cosinus des angles qu'ils font avec les axes fixes. Si maintenant le repère mobile est animé d'un mouvement de rotation par rapport au repère fixe, cette rotation est représentée par trois « composantes » (p, q, r), et la cinématique nous apprend que la vitesse absolue d'un point attaché au repère mobile est donnée par

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} + qx - ry \\ V_y = \frac{dy}{dt} + rx - pz \\ V_z = \frac{dz}{dt} + py - qx. \end{cases}$$

La question que l'on peut se poser est : comment déterminer le mouvement connaissant les trois fonctions du temps (p, q, r) ? Les formules données permettent d'établir que les neuf cosinus doivent être solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p. \end{cases}$$

Darboux repousse l'étude de l'intégration du système à la section suivante de son travail mais il remarque – et cela est décisif – que les quantités $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$ et les autres quantités analogues sont invariantes lorsque (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont deux triplets de solutions. Autrement dit, si la position initiale est celle d'un trièdre, les solutions seront à chaque instant les cosinus directeurs d'un trièdre. Darboux remarque également que lorsque que les fonctions p, q, r sont fixées il n'y a en réalité qu'un seul mouvement solution, à un déplacement près. Il examine ensuite les modifications à apporter lorsque l'origine du trièdre est elle-même mobile. Darboux applique ensuite cette théorie aux courbes gauches : si on considère le trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale, fonctions de la longueur d'arc, ce trièdre évoluera suivant les formules établies plus haut. Il y a une particularité due à ce que le vecteur binormal est orthogonal au plan osculateur, et donc au vecteur dérivé du vecteur tangent : la composante q est une fonction constante nulle. On a donc, pour les cosinus directeurs a, b, c des trois directions, les relations

$$\frac{da}{ds} = br, \quad \frac{db}{ds} = -ar + cp, \quad \frac{dc}{ds} = -bp$$

et deux autres séries analogues. Il ne reste plus à Darboux qu'à reconnaître ce que sont les quantités r et p : en examinant le mouvement du point $(1, 0, 0)$, on constate qu'il décrit le chemin rds, donc r est la première courbure. De même p sera la torsion de la courbe et les formules obtenues sont celles de Serret-Frenet.

Il y a donc un renversement par rapport à toutes les approches précédentes. C'est la *forme* des relations qui a été trouvée a priori, dans un cadre bien plus général. La courbure et la torsion viennent naturellement s'insérer dans ce cadre. La démarche de Darboux, hormis l'absence de l'écriture vectorielle et matricielle, est très proche de ce qu'on fait actuellement dans un cours de géométrie différentielle élémentaire (c'est-à-dire sans la théorie de Lie) et se soumet facilement à la généralisation à la dimension n (ou à la restriction à la dimension 2). En une douzaine de pages Darboux (1887, pp. 14–26) reprend alors tous les problèmes classiques que nous avons examinés tant les problèmes directs que les problèmes réciproques. Dans certains cas, sa méthode le conduit à une originalité remarquable. Il en va ainsi du signe de la torsion. Nous avons déjà remarqué que Frenet avait tenu compte de la forme de la courbe, de la façon dont elle s'enroulait pour donner un signe à la torsion. Darboux procède autrement : les définitions de la courbure et de la torsion étant en quelque sorte algébriques et non géométriques, il se contente de faire les calculs avec une courbe paramétrée par le paramètre u. En posant $\Delta = \frac{ds}{du}$ (c'est donc la « vitesse »), il obtient

$$\begin{cases} \frac{\Delta^6}{\rho^2} = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 \\ \frac{\Delta^6}{\tau\rho^2} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \end{cases}$$

formules qui montrent que le rayon de courbure n'est donné que par son carré mais que la torsion peut varier en signe. Pour le reste, contentons-nous de montrer à partir de l'exemple des développées, comment fonctionne la méthode « cinématique » de Darboux. Si on considère un point $(0, y, z)$ du plan normal, les composantes de son déplacement infinitésimal sont

$$D_x = (1 - ry)ds, \quad D_y = dy - pzds, \quad D_z = dz + pyds.$$

Les points de contact avec l'enveloppe sont ceux dont le déplacement est dans le plan normal, donc ceux pour lesquels $D_x = 0$. On en déduit l'équation de l'axe polaire dans le plan normal $y = \frac{1}{r} = \rho$. Pour avoir un point de l'arête de rebroussement de la surface polaire, on ajoute que son déplacement doit être dans la direction de l'axe polaire, donc $D_y = 0$, ce qui donne $z = \frac{1}{p}\frac{dy}{ds} = \tau\frac{d\rho}{ds}$, en notant τ la torsion. Quant à un point de la développée, c'est un point du plan normal dont le déplacement doit être dirigé vers l'origine, ce qui se traduit par[62] $D_x = 0$ et $zD_y - yD_z = 0$ ce qui donne

$$y = \rho \quad \text{et} \quad \frac{zdy - ydz}{z^2 + y^2} = \frac{ds}{\tau}$$

qui s'intègre immédiatement :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \rho \\ y = z \tan \int \frac{ds}{\tau}. \end{cases}$$

Comme le dit alors Darboux :

> « Ces équations renferment toute la théorie des développées. On voit que ces courbes sont toutes tracées sur la surface polaire, et que les normales de la courbe qui enveloppent deux développées différentes font entre elles un angle constant. Réciproquement, si deux normales de la courbe font entre elles un angle constant, et si l'une enveloppe une développée de la courbe, l'autre également. » (Darboux 1887, p. 19)

[62] Il y a une erreur typographique dans le texte de Darboux

Cet exemple, si on le compare à tous les travaux précédents sur le même thème des développées, suffit à montrer que la méthode de Darboux conduit à une économie de raisonnements et de calculs remarquables.

Par la suite, Darboux s'occupe de la résolution des équations différentielles qui décrivent le trièdre mobile. Donnons seulement quelques indications sur ce travail très classique : tout système différentiel de trois équations à trois inconnues qui conserve une forme quadratique définie positive se ramène à un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p \end{cases}$$

et, en se limitant au cas où $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, équation d'une sphère, Darboux introduit le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha+i\beta}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha-i\beta} \\ -\frac{1}{y} = \frac{\alpha-i\beta}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha+i\beta}. \end{cases}$$

La justification de ce changement est que, dans le cadre de l'espace complexe, une sphère est une surface réglée et que les équations

$$\alpha + i\beta = x(1-\gamma), \quad 1+\gamma = x(\alpha - i\beta)$$

représentent une famille de droites incluses dans cette sphère. Les équations en y donnent l'autre famille. Cette paramétrisation linéaire (ou plutôt homographique)[63] est plus efficace pour notre système que les paramétrisations trigonométriques qui datent d'Euler. On constate en effet que x et y satisfont une même équation différentielle du premier ordre que l'on appelle équation de Ricatti. Cette équation a la forme :

$$\frac{d\sigma}{dt} = a + 2b\sigma + c\sigma^2$$

Ces équations ont beaucoup de propriétés intéressantes qu'expose Darboux, mais l'essentiel est qu'elles ne peuvent pas se résoudre par quadrature dans le cas général, sauf si l'on dispose d'une solution particulière, auquel cas on peut se ramener à une équation linéaire. En résumé, le problème de la résolution effective des équations naturelles d'une courbe à double courbure est nettement plus délicat que dans le cas des courbes planes. En effet, si on connaît la courbure en fonction de l'arc d'une courbe plane, on obtient les coordonnées des points de la courbe par une simple quadrature. Dans la suite de son traité, Darboux revient à plusieurs reprises sur les courbes à double courbure. Il retrouve par exemple les résultats de Serret sur les courbes à

[63] x et y sont appelées *coordonnées symétriques* par Darboux. Il en donne de nombreuses applications géométriques dans la suite de son ouvrage.

torsion constante (Darboux 1887, p. 60) ou à courbure constante et surtout il applique la méthode du trièdre mobile à la théorie des surfaces.

Au point où nous sommes parvenu, la théorie des courbes à double courbure peut être considérée comme achevée puisqu'on dispose d'un théorème de classification. Elle va bien sûr être réécrite, avec l'aide parfois de nouveaux outils comme le calcul vectoriel. Certaines démonstrations vont être précisées : par exemple, un examen attentif de la démonstration du théorème fondamental montre qu'il convient de se placer sur un intervalle où la courbure ne s'annule pas. L'étude des points singuliers se fait, généralisant le cas de la dimension deux, sans difficulté importante. Des exemples nouveaux, des généralisations (par exemple le passage en dimension quelconque) seront examinés mais on ne peut plus voir dans la théorie des courbes gauches un domaine de recherches actives. Elle va entrer plus tard dans le cadre de la géométrie différentielle en tant que théorie locale des variétés de dimension un. L'étude des propriétés globales des plongements d'un intervalle réel dans $\mathbb{R}^3$, pour simplifier ce qu'on appelle la théorie des nœuds soulève des problèmes de classification, de recherche d'invariants, indépendants de ce que nous avons développé et formant une théorie très riche.

5 Conclusion

Sur le plan géométrique, la théorie des courbes à double courbure a évolué en opérant un élargissement, puis un resserrement de son objet. Après une période d'installation où les courbes de l'espace se sont distinguées des courbes planes et instituées comme objet autonome d'étude, les travaux de Monge et de ses élèves les ont entourées d'un foisonnement de figures géométriques : l'axe polaire, la surface polaire, les plans osculateurs, normaux, rectifiants et leurs enveloppes. À la notion de courbure s'est ajoutée celle de torsion, la théorie des développées a été clarifiée, généralisant de façon subtile la théorie des développées des courbes planes. Dans une dernière étape, au cours de la première moitié du XIX^{e} siècle, les géomètres se sont attachés à mieux comprendre le rôle des grandeurs fondamentales que sont la courbure et la torsion. Elles sont apparues comme caractérisant l'évolution des trois directions, tangente, normale principale et binormale : ainsi se dégage un nouvel objet géométrique, le repère de Serret-Frenet, qui remplace le trièdre de Monge-Lancret. Gaston Darboux, en étudiant de façon systématique la notion de repère mobile a permis de clore ce chapitre de l'étude locale des courbes de l'espace.

Cette histoire est dans sa plus grande partie une étude portée par les géomètres français ; ce fait est inséparable du développement considérable de l'enseignement scientifique en France. La période révolutionnaire et impériale a vu se créer des écoles d'ingénieurs de haut niveau, dont le recrutement se faisait grâce à un concours exigeant préparé dans les lycées. Plus tardivement un enseignement universitaire scientifique se développe dans toutes les provinces françaises. Ce sont très souvent de jeunes scientifiques issus de ces établissements, en tout premier lieu de l'École polytechnique, qui sont pionniers dans l'étude des courbes gauches, avant de se consacrer à d'autres branches des mathématiques. Les autres communautés mathématiques européennes ne s'intéressent que de façon marginale à l'étude différentielle des courbes gauches, très souvent parce que leur intérêt se porte vers la géométrie algébrique ou la géométrie différentielle des surfaces.[64]

En ce qui concerne les rapports entre analyse et géométrie, la théorie des courbes à double courbure constitue un lieu d'observation privilégié. Le langage des infiniment petits est parfaitement adapté au modèle des courbes polygones mais ce modèle « discret » peine à s'adapter à la géométrie dans l'espace, même si dans un premier temps Monge et son école continuent à l'utiliser et à s'appuyer sur lui pour étudier des configurations de plus en plus complexes. Dans cette période, analyse et géométrie infinitésimale sont intimement liées : la géométrie des courbes et surfaces est la première des applications de l'analyse ainsi que le montre le cursus des étudiants et les manuels comme (Monge 1795). Cependant, sans que ce soit contradictoire, les mémoires de Monge et de ses élèves commencent par une étude purement géométrique puis [appliquent] « l'analyse à tout cela ». Dans le même moment où les méthodes géométriques discrètes trouvent leur limite, le calcul différentiel par les infiniment petits se voient de plus en plus critiqué et les réformateurs que sont Lagrange et Cauchy s'empresseront d'appliquer leurs idées à la géométrie des courbes et surfaces. L'étude des objets de l'espace, et donc des courbes gauches est également inséparable de l'étude des équations différentielles. Comme l'écrit Monge

> « L'analyse ne peut que retirer un très grand avantage de son application à ce genre de géométrie : car je donne la solution de plusieurs problèmes d'analyse, qu'on aurait peut être beaucoup de peine à résoudre sans les considérations géométriques. » (Monge 1780, p. 382)

References

Aoust, l'Abbé. 1869. *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*. Paris: Gauthier-Villars.

Aoust, l'Abbé. 1873. *Analyse infinitésimale des courbes planes*. Paris: Gauthier-Villars.

Aoust, l'Abbé. 1876. *Analyse infinitésimale des courbes de l'espace*. Paris: Gauthier-Villars.

Bernoulli, Johann. 1728. Problema : in superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam. *Opera Omnia* IV:108–128.

Bertrand, Joseph. 1848. Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 13.

Bertrand, Joseph. 1850. Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 15.

Bertrand, Joseph. 1864. *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Gauthier-Villars.

Boyer, Carl B. 1949. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Hafner Publishing Company.

Boyer, Carl B. 1968. *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

[64] Plücker, dans son article *Note sur une théorie nouvelle des surfaces* (Plücker 1831), reprend les idées de Monge sur la liaison surfaces développables-courbes gauches, en mettant en avant une sorte de « dualité » :

> « L'on peut encore remarquer le parallélisme suivant entre une surface développable et une courbe à double courbure. L'une est touchée par un plan tangent quelconque, non dans un point unique, mais suivant une ligne droite indéfinie. L'autre, dans l'un quelconque de ses points, est touchée par une infinité de plans, qui se coupent tous suivant une même ligne droite, touchant la courbe. L'une peut-être *engendrée* par une ligne droite en mouvement, l'autre est *enveloppée* par une ligne droite qui se meut dans l'espace. »

Cauchy, Augustin. 1823. *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, series 2, vol. 4. Paris: Œuvres.
Cauchy, Augustin. 1826. *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal* à *la géométrie*, series 2, vol. 4. Paris: Œuvres.
Cauchy, Augustin. 1826. *Exercices de mathématiques*, series 2, vol. 6. Paris: Œuvres.
Charbonneau, Louis. 1994. Catalogue des manuscrits de Joseph Fourier. *Cahier d'Histoire et de Philosophie des Sciences* 42.
Chasles, Michel. 1837. *Aperçu Historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*. Bruxelles: M.Haye.
Clairaut, Alexis-Claude. 1731. *Recherches sur les courbes à double courbure*. Paris.
Collidge, Julian Lowell. 1940. *A history of geometrical methods*. Oxford: Oxford University Press.
D'Alembert, Jean le Rond. 1780. *Sur les Courbes à courbure multiple*. Paris: Claude-Antoine Jombert.
Darboux, Gaston. 1887. *Leçons sur la théorie des surfaces*. Paris: Gauthier-Villars.
de Fontenelle, Bernard. 1724. Sur la quadrature de la moitié d'une courbe, qui est la compagne de la cycloïde. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. 65–67 (1726).
de Freycinet, Charles. 1860. *L'analyse infinitésimale*. Paris: Mallet-Bachelier.
de Roberval, Gilles Personne. 1693. *Traité des indivisibles*. Paris: Imprimerie Royale.
de Saint-Venant, Adhémar. 1845a. Mémoire sur les lignes courbes non planes. *Journal de l'École Polytechnique* 17:1–76.
de Saint-Venant, Adhémar. 1845b. *Tableau de formules de la théorie des courbes dans l'espace*. Paris: Bachelier.
de Saint-Venant, Adhémar. 1855. *De la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. Paris: Imprimerie Impériale.
de Tinseau, Charles. 1780. Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes & des courbes à double courbure. *Mémoires de divers scavants* 9:593–624.
Delcourt, Jean. 2007. *Analyse et Géométrie, les courbes gauches de Clairault* à *Serret-Frenet*. Thèse de 3^{e} cycle. Université Paris 6.
Descartes, René. 1637. *La géométrie*. Leyde: Jan Maire.
Domingues, João Caramalho. 2008. *Lacroix and the calculus*. Berlin: Birkhaüser.
Duhamel, Jean-Marie. 1856. *Calcul infinitésimal*. Paris: Mallet-Bachelier.
Dupin, Charles. 1819. *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*. Paris: Bachelier.
Euler, Leonhard. 1770. *Institutionum calculi intergralis, volum tertium*. St. Petersburg: Académie de Saint-Petersbourg.
Euler, Leonhard. 1775. De motu turbinatorio chordarum musicarum. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 19.
Euler, Leonhard. 1786. Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* I.
Fourier, Joseph. 1801. Notes sur les développées des lignes courbes. *ms.na.fr* 22519.
Fourier, Joseph. 1801. Notes sur les propriétés des lignes courbes. *ms.na.fr* 22519:28–32
Fourier, Joseph. 1801. Sur les propriétés des lignes courbes. *ms.na.fr* 22519.
Frenet, Jean-Frédéric. 1852. Sur les courbes à double courbure. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 17:437–447.
Frenet, Jean-Frédéric. 1853. Théorèmes sur les courbes gauches. *Nouvelles annales de mathématiques* 12:365–372.
Frenet, Jean-Frédéric. 1864. Lettre aux rédacteurs. *Nouvelles annales de mathématiques* 3:284–286.
Gilain, Christian. 1989. Cauchy et le cours d'analyse de l'école polytechnique. *Bulletin de la société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, 5.
Guillaume-François-Antoine de L'Hospital. 1696. *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale.
Huygens, Christian. 1673. *Horlogium Oscillatorium*. Paris: Muguet.
Jacobi, C. G. J. 1836. Nota de erroribus quibusdam geometricis, quia in theoria functionum leguntur. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 16.
Kline, Morris. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: University Press.
Lacroix, Sylvestre François. 1790. Mémoire sur les surfaces développables... *Archives de l'Académie des Sciences*.

Lacroix, Sylvestre François. 1795. *Essai de géométrie sur les plans et les surfaces courbes*. Paris: Régent et Bernard.

Lacroix, Sylvestre François. 1797. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris: J.B.M. Duprat.

Lacroix, Sylvestre François. 1802. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul Intégral*. Paris: Duprat.

Lacroix, Sylvestre François. 1806. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Courcier.

Lacroix, Sylvestre François. 1810. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, seconde édition. Paris: Courcier.

Lacroix, Sylvestre François. 1828. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris: Bachelier.

Lacroix, Sylvestre François, Joseph-Louis, Lagrange. 1802. Rapport sur le mémoire de lancret. *Archive de l'Académie des Sciences*.

Lagrange, Joseph-Louis. 1797. Théorie des fonctions analytiques. *Journal de l'École Polytechnique, cahier 9, tome III*, 3.

Lancret, Michel-Ange. 1802. Mémoire sur les courbes à double courbure. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France* 1.

Lancret, Michel-Ange. 1806. Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. *Mémoires présentés par divers savants* à *l'Académie des sciences de l'Institut de France*, 2.

Leroy, Charles-François-Antoine. 1835. *Analyse appliquée* à *la géométrie des trois dimensions*. Paris: Bachelier.

Lumiste, Ülo. 1997. Martin bartels as rechercher : His contribution to analytical methods in geometry. *Historia Mathematica* 24:46–65.

Monge, Gaspard. 1780. Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables avec une application à la théorie des ombres et des pénombres. *Mémoires de divers sçavans* IX:382–440.

Monge, Gaspard. 1784. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1781)*.

Monge, Gaspard. 1785. Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure. *Mémoires de divers sçavans* X:511–550.

Monge, Gaspard. 1787. Supplément où l'on fait voir que les équations au différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilités ne sont pas satisfaites, sont suceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées. *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences (1784)* 502–576.

Monge, Gaspard. 1795. *Feuilles d'analyse appliquées* à *la géométrie*. Paris: Gaspard.

Monge, Gaspard. 1802. Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère. *Journal de l'École polytechnique* IV:28–58.

Monge, Gaspard. 1807. *Application de l'Analyse* à *la Géométrie*, 3^e édition. Paris: Benard.

Monge, Gaspard. 1850. *Application de l'analyse* à *la géométrie (avec des notes de Liouville)*. Paris: Bachelier.

Navier, Claude. 1856. *Résumé des Leçons d'Analyse données* à *l'École Polytechnique par M.Navier*. Paris: Victor Dalmont.

Olivier, Théodore. 1833. Construction des points d'inflexion de la transformée d'une courbe plane ou à double courbure tracée sur une surface développable. *Journal de l'École Polytechnique* 14:78–123.

Olivier, Théodore. 1834. Construction des centre de courbure des épicycloïdes planes et sphériques.*Journal de l'École Polytechnique* 14:85–152.

Olivier, Théodore. 1835a. Addition au mémoire sur la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure. *Journal de l'École Polytechnique* 15:252–263.

Olivier, Théodore. 1835b. De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure. *Journal de l'École Polytechnique* 12:61–91.

Olivier, Théodore. 1844. *Cours de Géométrie Descriptive*. Paris: Carilian-Goeury et Vve Dalmont.

Pitot, Henri. 1726. Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs appelée la compagne de la cycloïde. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1724)* 107–113

Plücker, Julius. 1831. Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 9:124–134.

Puiseux, Victor. 1842. Problème de géométrie. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 7:65–69.

Reich, Karin. 1973. Die Geschichte des Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828–1868). *Archive for History of Exact Sciences* 11:273–382.
Serret, Joseph-Alfred. 1848. Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 13:353–360.
Serret, Joseph-Alfred. 1851a. Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 16:193–207.
Serret, Joseph-Alfred. 1851b. Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 16:499–500.
Serret, Paul. 1859. *Théorie géométrique des lignes* à *double courbure, théorie mécanique des lignes* à *double courbure*. Paris: Mallet-Bachelier.
Struik, Dirk J. 1933. Outline of a history of differential geometry. *ISIS*, XIX.
Struik, Dirk J. 1950. *Lectures on Classical Differential Geometry*. New York: Dover.
Taton, René. 1951. *L'Œuvre Scientifique de Gaspard Monge*. Paris: P.U.F.
Truesdell, Clifford. 1960. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638–1788*. Zurich: Orell Füssli.
Vallée, Louis-Léger. 1819. *Traité de géométrie descriptive*. Paris: Vve Courcier.