

Baumverfahren zur Bewertung diskreter Knock-Out-Optionen*

Pricing discrete knock-out options with tree methods

Manfred Steiner¹, Martin Wallmeier¹, Reinhold Hafner²

¹ Lehrstuhl für Finanz- und Bankwirtschaft, Universität Augsburg, Universitätsstraße 2, D-86135 Augsburg, Deutschland (e-mail: Martin.Wallmeier@WiSo.Uni-Augsburg.de)

² Consultant RiskLab GmbH, Apianstraße 5, D-85774 Unterföhring, Deutschland (e-mail: hafner@risklab.de)

Zusammenfassung. Diese Arbeit behandelt die Bewertung diskreter Knock-Out-Optionen mit Hilfe von Baumverfahren. Die naive Anwendung der Baumverfahren kann bekanntermaßen zu erheblichen Bewertungsfehlern führen. In Anlehnung an einen Vorschlag von Derman et al. (1995) für kontinuierliche Knock-Out-Optionen entwickeln wir für den diskreten Fall ein erweitertes Korrekturverfahren, das sowohl auf das Binomial- als auch das Trinomialmodell anwendbar ist und sich durch eine große Flexibilität auszeichnet. Die Ergebnisse der abschließenden Simulation zeigen, daß die hier vorgestellten Modelle schon bei geringer Baumtiefe sehr genaue Optionspreise liefern.

Abstract. This paper investigates the pricing of discrete knock-out options with tree methods. As is well known, the naive application of the binomial model can result in erroneous prices, even if the number of time steps is large. We develop a correction technique for the binomial and trinomial model which is applicable to a wide range of barrier options. The results of our simulations show that, using this technique, a small number of time steps suffices to obtain accurate option prices. According to the accuracy and speed criteria the modified tree method turns out to be superior to a commonly used version of the trinomial model serving as our benchmark (e.g. Tian, 1997).

* Wir danken zwei anonymen Gutachtern für wertvolle Hinweise.
Korrespondenz an: M. Steiner

Schlüsselwörter: Optionsbewertung – Barrier-Optionen – Numerische Bewertungsverfahren – Binomialmodell – Trinomialmodell

Key words: Option pricing – Barrier options – Numerical procedures – Binomial model – Trinomial model

1 Problemstellung

Der wachsende außerbörsliche Markt (OTC-Markt) für exotische Optionen hat in den letzten Jahren das Spektrum der handelbaren bedingten Zahlungsansprüche erheblich erweitert. Den exotischen Finanztiteln ist gemeinsam, daß sie bestimmte Eigenschaften klassischer Optionen modifizieren. Zu den besonders erfolgreichen Kreationen gehören Barrier-Optionen¹. Sie entsprechen europäischen Standardoptionen mit der Besonderheit, daß die Entstehung oder der Fortbestand des Optionsrechts davon abhängt, ob der Kurs des Basispapiers einen vereinbarten Schwellenwert (*Barrier*) über- oder unterschreitet.² Grundsätzlich kommen Barrier-Optionen in zwei Formen vor, und zwar als *Knock-Out-Optionen* und als *Knock-In-Optionen*. Im Falle einer Knock-Out-Option erlischt das Optionsrecht, wenn der Kurs des Underlying eine vorgegebene Schwelle erreicht oder durchbricht. Im Gegensatz hierzu leben die Knock-In-Optionen bei Erreichen der Barrier erst auf. Sie werden auf diese Weise „eingeschaltet“ und heißen deshalb auch Trigger-Optionen.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen europäische Knock-Out-Optionen. Sie lassen sich in zwei Varianten unterteilen. Wurde eine *untere* Schwelle vereinbart, spricht man von einer *Down-and-Out-Option*, bei einer *oberen* Schwelle hingegen von einer *Up-and-Out-Option*. Knock-Out-Optionen sehen teilweise vor, daß der Optionskäufer eine feste Zahlung („Rebate“) erhält, wenn das Optionsrecht vorzeitig verfällt. Diese Zahlung wird in der Regel sofort fällig, wenn die Schranke durchbrochen wird.³

Knock-Out-Optionen können ebenso wie Standardoptionen zur Erzielung von Arbitragegewinnen, zur Spekulation und zur Absicherung offener Risikopositionen benutzt werden. Steht das Absicherungsmotiv im Vordergrund, so besteht der Vorteil der Barrier-Optionen darin, daß die Knock-Out-Komponente den Preis der Absicherung reduziert. Dafür geht aber der Anwender das Risiko ein, daß das Absicherungsziel verfehlt wird, wenn die

¹ Anstelle des deutschen Synonyms „Schwellenwertoption“ verwenden wir den gebräuchlicheren englischen Begriff.

² Nach Schätzungen von SBC-Warburg wächst der Markt für Barrier-Optionen jedes Jahr um etwa 100% (vgl. Hsu (1997), S. 29.)

³ Die Zahlung erfolgt dann „at hit“. Es kommt auch vor, daß die Rebate erst bei Fälligkeit der Option zu zahlen ist („at expiry“).

Option vorzeitig verfällt. Über die Vorteilhaftigkeit der Barrier-Optionen im Vergleich zu alternativen Finanztiteln entscheiden letztlich die Risikoeinstellung des Investors und die Höhe der anfallenden Transaktionskosten.

Aus finanzierungstheoretischer Sicht sind Down-and-Out-Optionen auch für die Bewertung des Eigen- und Fremdkapitals eines Unternehmens von Interesse. Mit ihnen läßt sich die Möglichkeit der Fremdkapitalgeber abbilden, eine Insolvenz bereits vor Fälligkeit des Fremdkapitals auszulösen, sofern der Wert der Aktiva den Wert der Verbindlichkeiten nicht mehr deckt.⁴

Eine wichtige Einflußgröße für den Wert einer Barrier-Option ist die Häufigkeit, mit der die Schwellenbedingung überprüft wird. Dabei können die beiden Fälle einer *kontinuierlichen* und einer *diskreten* Barrier-Überprüfung unterschieden werden. Im kontinuierlichen Fall, der aus Sicht der Praxis für den Währungsbereich und eingeschränkt auch für den Aktienindexbereich relevant ist, erfolgt die Prüfung laufend, im diskreten Fall nur zu bestimmten, im Optionskontrakt spezifizierten Zeitpunkten. Je größer die Zeitspanne zwischen den *Überprüfungszeitpunkten* (*Kontrollzeitpunkten*), desto wertvoller ist c.p. die Knock-Out-Option, weil die Wahrscheinlichkeit eines vorzeitigen Ausfalls sinkt.

Bei *kontinuierlicher* Barrier-Überprüfung läßt sich der arbitragefreie Preis einer Option unter der Annahme einer geometrischen Brownschen Bewegung für den Kurs des Underlying analytisch berechnen.⁵ In verschiedenen Studien ist dieser analytisch ermittelte Preis mit den Ergebnissen numerischer Bewertungsverfahren verglichen worden. Auf diese Weise soll durch eine Art Analogieschluß die Leistungsfähigkeit der Verfahren in Fällen beurteilt werden, in denen keine analytische Lösung des Bewertungsproblems bekannt ist. Zu den hierbei bevorzugt eingesetzten numerischen Verfahren zählen das Binomial- und das Trinomialmodell (Baumverfahren) sowie eine abgewandelte Form der Monte-Carlo-Simulation.⁶ In dieser Arbeit werden nur die Baumverfahren ausführlich behandelt. Der Grund liegt darin, daß Monte-Carlo-Simulationen oft hohe Rechenzeiten erfordern, ehe der Optionspreis in einem akzeptablen Konfidenzintervall liegt. Dies gilt in besonderer Weise für Barrier-Optionen, weil viele Simulationsläufe benötigt werden, um die Lage der Barrier genau zu erfassen.

Grundsätzlich eignen sich Baumverfahren nicht ohne weiteres zur Bewertung pfadabhängiger Optionen. Knock-Out-Optionen stellen jedoch einen Spezialfall dar. Sie lassen sich, wie Cox u. Rubinstein bereits 1985 gezeigt haben, mit den Baumverfahren auf sehr elegante und einfache Wei-

⁴ Vgl. ausführlich Burkhardt (1994).

⁵ Vgl. Merton (1973), Cox u. Rubinstein (1985, S. 410 f.).

⁶ Vgl. zur Anwendung der Monte Carlo-Simulation Beaglehole et al. (1997) und Andersen u. Brotherton-Ratcliffe (1996). Zu den numerischen Bewertungsverfahren gehört auch die Finite-Differenzen-Methode, die aber in den hier angesprochenen Studien nicht eingesetzt wird.

se bewerten. Allerdings können im *Binomialmodell* selbst bei mehreren Tausend Baumstufen noch erhebliche Bewertungsfehler auftreten. Die berechneten Optionswerte folgen in Abhängigkeit von der Baumtiefe einem charakteristischen „Sägezahnmuster“, d.h. ausgehend von einer Fehlerspitze geht der relative Fehler mit zunehmender Baumtiefe gleichmäßig bis auf fast Null zurück, um dann in einem Sprung wieder auf die nächste Fehlerspitze anzusteigen.⁷ Der Bewertungsfehler ist bei kontinuierlicher Barrier-Überprüfung immer dann minimal, wenn die Barrier exakt auf einem Knoten des Binomialbaums liegt. Reimer u. Sandmann (1993) und Boyle u. Lau (1994) haben deshalb vorgeschlagen, die Baumtiefe nach diesem Kriterium auszuwählen.⁸ Alternativ dazu entwickeln Derman et al. (1995) und Reimer (1997, S. 113 ff.) Interpolationsverfahren, mit denen die Optionswerte an einzelnen Knoten des Binomialbaums entsprechend der Lage der Barrier modifiziert werden.⁹ Dadurch verschwindet das beschriebene Zackenmuster der Optionspreise. Im *Trinomialmodell* steht ein zusätzlicher Freiheitsgrad zur Strukturierung des Baums zur Verfügung. Durch eine geschickte Parameterwahl kann deshalb erreicht werden, daß die Barrier wie gewünscht mit einem Kurs des Trinomialprozesses, also mit einer horizontalen Knotenschicht, zusammenfällt.¹⁰

In dieser Arbeit betrachten wir den Fall einer Barrier-Überprüfung in *diskreten* Zeitabständen.¹¹ Hierfür existieren zwar geschlossene Bewertungsformeln,¹² diese können aber nicht analytisch gelöst werden. Man ist daher zwingend auf Näherungsformeln oder auf numerische Bewertungsmethoden, insbesondere Baumverfahren, angewiesen.

Die Näherungslösung von Broadie et al. (1997) beruht auf dem Gedanken, daß die für den Fall einer kontinuierlich überprüften Barrier entwickelten Bewertungsformeln auch zur approximativen Bewertung diskreter Down-and-Out-Optionen eingesetzt werden können, wenn eine niedri-

⁷ Vgl. Reimer u. Sandmann (1993) und Boyle u. Lau (1994).

⁸ Siehe auch Kat u. Verdonk (1995) und Lyuu (1998).

⁹ Vgl. ähnlich auch Rogers u. Stapleton (1998), die allerdings eine Baumstruktur ohne fest vorgegebene Zeitschritte wählen. Modifiziert werden die Übergangswahrscheinlichkeiten an den Knoten nahe der Barrier.

¹⁰ Vgl. Ritchken (1995), Cheuk u. Vorst (1996b) und Tian (1997). Die gewünschte Position der Barrier erreichen Ritchken (1995) und Cheuk u. Vorst (1996b) durch stufenabhängige Baumparameter auch im Fall einer veränderlichen Barrier. Zur Anwendung des Verfahrens von Cheuk u. Vorst auf die Bewertung von Barrier Swaptions vgl. Cheuk u. Vorst (1996a).

¹¹ Verkürzt wird in diesem Zusammenhang von *diskreten Barrier-Optionen* gesprochen. Teilweise wird synonym der Begriff *lokale Barrier-Option* verwendet (vgl. Reimer u. Sandmann 1995, S. 11).

¹² Vgl. Heynen u. Kat (1996) und AitSahlia u. Lai (1997). Eine geschlossene Lösungsformel unter der Annahme eines Binomialprozesses und der weiteren Prämisse, daß einer der Endknoten der Barrier entspricht, leiten Reimer u. Sandmann (1995, S. 12 f.) her.

gere als die tatsächliche Barrier zugrundegelegt wird.¹³ Die erforderliche Verschiebung der Barrier (“continuity correction”) läßt sich in einem einfachen Term darstellen.

Die *Baumverfahren* sollten nach übereinstimmenden Ergebnissen verschiedener Studien im Gegensatz zur kontinuierlichen Barrier-Überprüfung nunmehr so ausgerichtet werden, daß die Barrier genau *in der Mitte* zweier Knoten liegt.¹⁴ Im Binomialmodell wird die gewünschte Lage der Barrier nur bei ganz bestimmten Baumtiefen erreicht. Daher können unter Umständen keine äquidistanten Zeitabstände zwischen den Überwachungsknoten gewährleistet werden. Beträgt z.B. eine günstige Baumtiefe 540 Stufen bei 52 Überwachungszeitpunkten, so müßte rein rechnerisch jeder 10,4te Knoten überprüft werden.

In dieser Arbeit stellen wir für den Fall der diskreten Barrier-Überprüfung ein Interpolationsverfahren vor, mit dem das Binomial- und das Trinomialmodell so modifiziert werden können, daß sie unabhängig von der Lage der Barrier hinreichend genaue Optionspreise liefern. Die Grundidee des Verfahrens ergibt sich aus der Analyse des Zusammenhangs zwischen Barrier, Baumstruktur und Bewertungsergebnis. In ihrem Prinzip ähnelt die Korrektur der Interpolation von Derman et al. (1995). Allerdings behandeln Derman et al. (1995) kontinuierliche und nicht die von uns untersuchten diskreten Barrier-Optionen. Nach ihrem Verfahren wird der ohne Korrekturen erhaltene Optionspreis modifiziert, indem die Barrier gedanklich in die optimale Position überführt wird. Dafür ist eine zweifache Berechnung des Binomialbaums erforderlich. Wir hingegen behalten die streng rekursive Berechnung, wie sie der Cox u. Rubinstein-Ansatz zur Bewertung von Knock-Out-Optionen vorsieht, bei. Die Anpassung, die nach Cox u. Rubinstein zur Berücksichtigung der Barrier erforderlich ist, versuchen wir schon bei geringer Baumtiefe so vorzunehmen, *als ob* eine sehr feine Baumstruktur vorläge.

Das Verfahren wird für Down-and-Out-Optionen entwickelt, läßt sich aber problemlos auf Up-and-Out-Optionen übertragen. Nach der formalen Definition von Down-and-Out-Optionen und der Darstellung der unterstellten Kursverlaufshypothese wird das skizzierte Modell hergeleitet. Die Leistungsfähigkeit des Algorithmus hinsichtlich Genauigkeit und Geschwindigkeit der Bewertung wird im letzten Abschnitt anhand einer Simulationsstudie getestet. Als Vergleichsmaßstab dienen das Trinomialmodell von Tian (1997) und die approximative analytische Bewertungsformel von Broadie et al. (1997).

¹³ Vgl. auch Levy u. Manton (1997).

¹⁴ Vgl. Tian (1997, S. 201) und Cheuk u. Vorst (1996b, S. 10).

2 Spezifikation diskreter Down-and-Out-Optionen

Bezeichne S_t den Kurs des Underlying im Zeitpunkt t , X den Basispreis der Option, H die konstante Barrier und R die fixe Rebate. Die Rebate sei nicht erst bei Fälligkeit der Option zu zahlen, sondern sofort bei Erreichen bzw. Unterschreiten der Barrier („at hit“). Der Bewertungszeitpunkt sei t_0 , der Fälligkeitszeitpunkt T . An K Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_K mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ wird die Barrier-Bedingung überprüft.¹⁵ Anfangs liege der Aktienkurs oberhalb der Barrier: $S_0 > H$. Die Zahlung g_{t_k} , die der Käufer eines europäischen *Down-and-Out-Calls* im Zeitpunkt t_k ($k = 1, \dots, K-1$) erhält, läßt sich darstellen als:

$$g_{t_k} = \begin{cases} R & \text{falls } (S_{t_k} \leq H) \wedge (S_{t_z} > H \forall z \in \{1, \dots, k-1\}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Bei Fälligkeit ($t_K = T$) beträgt der Wert der Option:

$$g_T = \begin{cases} \max[S_T - X, 0] & \text{falls } S_{t_z} > H \forall z \in \{1, \dots, K\} \\ R & \text{falls } (S_{t_K} \leq H) \wedge (S_{t_z} > H \\ & \forall z \in \{1, \dots, K-1\}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

Hiervon unterscheidet sich die Auszahlungsfunktion für einen europäischen *Down-and-Out-Put* mit diskreter Barrier-Überprüfung nur im Zeitpunkt T , in dem gilt:

$$g_T = \begin{cases} \max[X - S_T, 0] & \text{falls } S_{t_z} > H \forall z \in \{1, \dots, K\} \\ R & \text{falls } (S_{t_K} \leq H) \wedge (S_{t_z} > H \\ & \forall z \in \{1, \dots, K-1\}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Im folgenden seien zur Vereinfachung äquidistante Überprüfungszeitpunkte angenommen, d.h. $t_k - t_{k-1} = T/K = \text{const.}$ ($k = 1, \dots, K$).

3 Aktienkursprozeß

Nach der Standardannahme der Optionspreistheorie folgt der Aktienkurs $S = S_t$ einer geometrischen Brownschen Bewegung:¹⁶

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \delta) dt + \sigma dW \quad (4)$$

¹⁵ Hier wird angenommen, daß die Barrier auch bei Fälligkeit überprüft wird ($t_K = T$). Die folgenden Formeln müßten aber nur leicht abgewandelt werden, um den Fall $t_K < T$ zu erfassen.

¹⁶ Vgl. z.B. Hull (1997, S. 216).

mit

- μ : Momentanerwartungswert der Aktienrendite,
- σ : Momentanstandardabweichung der Aktienrendite,
- δ : konstante stetige Dividendenrendite,
- dW : standardisierter Wiener-Prozeß.

Aus dieser Kursannahme folgt, daß der logarithmierte Aktienkurs S_t normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\ln S_0 + \left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ und der Standardabweichung $\sigma\sqrt{t}$:¹⁷

$$\ln S_t \sim \Phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t} \right]. \quad (5)$$

Die hier unterstellte Kursverlaufshypothese kann auf einzelne Aktien, Aktienindizes, Währungen und Futures übertragen werden.¹⁸ Die folgenden Überlegungen gelten somit für Down-and-Out-Optionen auf all diese Finanztitel, auch wenn der Einfachheit halber von Aktien als Underlying gesprochen wird.

4 Baumverfahren zur Bewertung diskreter Down-and-Out-Optionen

4.1 Binomialmodell

Das Binomialmodell von Cox et al. (1979) gehört zu den bekanntesten und in der Praxis am häufigsten eingesetzten numerischen Bewertungsverfahren.¹⁹ Es diskretisiert den kontinuierlichen Aktienkursprozeß, indem es annimmt, daß der Aktienkurs ausgehend vom Wert $S = S_t$ im Zeitpunkt t entweder auf den Wert uS ($u > 1$) im Zeitpunkt $t + \Delta t$ steigt oder auf den Wert dS ($0 < d < 1$) fällt. Im mehrperiodigen Binomialmodell wird die Restlaufzeit T der Option in M äquidistante Zeitperioden der Länge $\Delta t = T/M = \text{const.}$ unterteilt. Für jede der Teilperioden gilt die angegebene Kursverlaufshypothese.

Gemäß dem Ansatz der risikoneutralen Bewertung (Martingalansatz) entspricht der arbitragefreie Wert einer Option dem diskontierten bedingten Erwartungswert der Auszahlung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß.²⁰ Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten q_1, q_2 und die Kursmultiplikatoren u und d sind so zu bestimmen, daß zum einen die diskontierten Aktien- und Optionspreise die Martingaleigenschaft erfüllen und zum

¹⁷ Vgl. Hull (1997, S. 229).

¹⁸ Die Unterstellung dieses Kursverlaufs für Aktienindizes kann problematisch sein (vgl. Brooks et al., 1994).

¹⁹ Vgl. hierzu und zu den üblichen Annahmen optionspreistheoretischer Modelle z.B. Hull (1997, S. 194 ff.).

²⁰ Vgl. Harrison u. Kreps (1979) und Harrison u. Pliska (1981).

anderen die binomiale Verteilung der logarithmierten Aktienkurse gegen die Normalverteilung aus Gleichung (5) mit $\mu = r$ konvergiert. Damit muß u.a. gelten: $u > e^{(r-\delta)\Delta t} > d > 0$. Ein von Cox et al. vorgeschlagenes Parameterset, das beide Bedingungen asymptotisch erfüllt, lautet:²¹

$$q_1 = \frac{e^{(r-\delta)\Delta t} - d}{u - d} \quad \text{und} \quad q_2 = 1 - q_1, \quad (6)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (7)$$

Dabei steht r für die zeitkontinuierliche risikolose Verzinsung.

Der mit diesen Parametern konstruierte Binomialbaum weist die sogenannte Recombining-Eigenschaft auf. Im Zeitpunkt $m\Delta t$ ($0 \leq m \leq M$) enthält der Binomialbaum deshalb $m + 1$ Knoten. Der Aktienkurs im Zeitpunkt $m\Delta t$ und Knoten n ($n = 0, 1, \dots, m$) sei mit $S_{m,n}$ bezeichnet, wobei die Knoten so numeriert werden, daß $S_{m,n} > S_{m,n-1} \forall n = 1, \dots, m$. Es gilt:

$$S_{m,n} = Sd^{m-n}u^n = Su^{2n-m}, \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (8)$$

Der Wert einer Option im Zeitpunkt $m\Delta t$ und Knoten n wird mit $f_{m,n}$ bezeichnet.

Soll das Binomialmodell zur Bewertung von Down-and-Out-Optionen eingesetzt werden, so ist nach Cox u. Rubinstein (1985) der Optionspreis $f_{m,n}$ immer dann auf die Rebate R zu setzen, wenn die Barrier erreicht oder unterschritten wird.²² Diese Korrektur wird in allen Zeitpunkten vorgenommen, in denen vertragsgemäß die Barrier zu überprüfen ist. Damit die Überprüfungszeitpunkte mit Zeitstufen des Binomialmodells zusammenfallen, betrachten wir im folgenden nur Baumtiefen M , die ein Vielfaches von K bilden.²³ Kontrollstufen sind somit alle $m \in \mathbf{M} = \left\{ \frac{M}{K}, 2\frac{M}{K}, \dots, K\frac{M}{K} \right\}$.

Da wir annehmen, daß der Zeitpunkt $M\Delta t$ Kontrollzeitpunkt ist ($t_K = T$), berechnen sich die Optionswerte $f_{M,n}$ ($n = 0, 1, \dots, m$) der letzten Zeitstufe nach

$$f_{M,n} = \begin{cases} g_{M,n} & \text{falls } S_{M,n} > H \\ R & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

²¹ Die Varianz der logarithmierten binomialen Aktienkurse entspricht bei Wahl dieser Parameter nur approximativ der Varianz der kontinuierlichen Normalverteilung, vgl. genauer z.B. Hull (1997, S. 345).

²² Vgl. Cox u. Rubinstein (1985, S. 409).

²³ Dies stellt keine gravierende Einschränkung dar, weil die Zahl der Überprüfungszeitpunkte in aller Regel sehr gering im Verhältnis zur erforderlichen Baumtiefe bleibt. Tian (1997) läßt beliebige Baumtiefen zu und nimmt dabei in Kauf, daß der im Binomialmodell unterstellte Kontrollzeitpunkt nicht immer mit dem tatsächlichen Überprüfungszeitpunkt exakt übereinstimmt.

mit $g_{M,n} = g(S_{M,n}, M \Delta t)$. Im Falle einer klassischen Kaufoption gilt z.B.:

$$g_{M,n} = \max[S_{M,n} - X, 0]. \quad (10)$$

Mittels Rückwärtsinduktion können dann die europäischen Knock-Out-Optionswerte $f_{m,n}$ der Stufen $m = M - 1, \dots, 0$ berechnet werden. Auf den Kontrollstufen $m \in \mathbf{M} \setminus \{M\}$ ergibt sich der Wert $f_{m,n}$ als:²⁴

$$f_{m,n} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+1} \cdot q_1 + f_{m+1,n} \cdot q_2) & \text{falls } S_{m,n} > H \\ R & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11)$$

In den übrigen Zeitpunkten gilt:

$$f_{m,n} = e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+1} \cdot q_1 + f_{m+1,n} \cdot q_2). \quad (12)$$

Durch dieses rückwärts-rekursive Verfahren wird sukzessive der faire Preis $f = f_{0,0}$ der Option ermittelt.

Beispiel. Beispielhaft soll mit Hilfe des Binomialmodells der Optionspreis eines Down-and-Out-Calls mit folgenden Charakteristika berechnet werden:

- $S_0 = 100$, $X = 100$, $H = 95$, $R = 0$,
- $r = 5\%$, $\delta = 0$, $\sigma = 20\%$,
- $T = \frac{26}{52} = 0,5$ Jahre,²⁵
- $K = 26$, d. h. die Barrier wird in wöchentlichen Abständen überprüft.

Die Optionspreise, die sich für Baumtiefen von 26, 52, ..., 2600 Stufen ergeben, zeigt der obere Teil der Abb. 1 (linke Skala). Die ermittelten Optionspreise streuen bei Erhöhung der Baumtiefe in einem wiederkehrenden Muster um den „wahren“ Optionspreis, der hier mit dem naiven Binomialmodell bei extrem hoher Baumtiefe (52000) approximiert wurde²⁶ (obere horizontale Linie in Abb. 1). Die Fehlerausschläge nehmen offenbar nur sehr langsam ab. Selbst etwa 2600 Baumstufen reichen nicht aus, um sicherzustellen, daß sich der Bewertungsfehler in einer für praktische Zwecke akzeptablen Größenordnung bewegt.

Aufgrund der diskreten Modellierung des Aktienkursverlaufs existiert im Binomialmodell bei gegebener Baumtiefe stets ein genau definiertes

²⁴ Bei konstanter Barrier H genügt es, nur den Optionspreis am ersten Knoten unterhalb der Barrier auf die Rebate zu setzen.

²⁵ Wir rechnen mit Handels- und nicht mit Kalendertagen und setzen ein Jahr mit 250 Handelstagen an. Wir gehen weiter von 52 Handelswochen und 12 Handelsmonaten pro Jahr aus.

²⁶ Der Wert beträgt 5,412. Auf das Problem der Bestimmung des „wahren“ Optionspreises gehen wir später beim Vergleich unter Gliederungspunkt 5 ausführlicher ein.

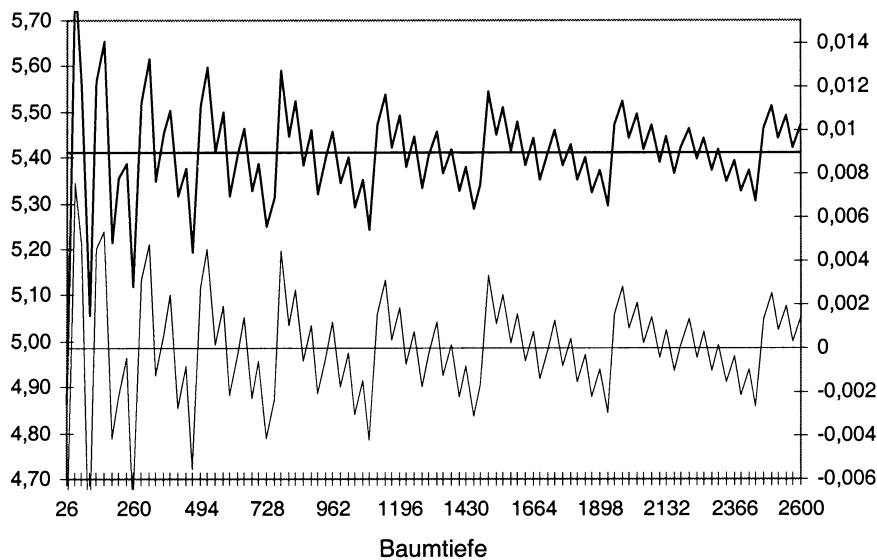


Abb. 1. Naives Binomialmodell. Oben: Optionspreise (linke Skala). Unten: Abstand der logarithmierten Barrier von der Mitte des Barrier-Intervalls in der $\ln S$ -Ebene (rechte Skala)

Intervall, in dem der Schwellenwert variiert werden kann, ohne das Bewertungsergebnis zu beeinflussen („Barrier-Intervall“). So ergäbe die Berechnung des Baums in Abb. 2 mit den Überwachungszeitpunkten t_1, t_2, t_3, t_4 exakt die gleichen Werte, solange sich die logarithmierte Barrier im schraffierten Bereich befindet ($\ln S_{2,0} = \ln S_{4,1} \leq \ln H < \ln S_{1,0} = \ln S_{3,1}$). Wäre der Schwellenwert nur in den Zeitpunkten t_2 und t_4 zu prüfen, würde das Intervall sogar auf den Wertebereich $\ln S_{2,0} = \ln S_{4,1} \leq \ln H < \ln S_{2,1} = \ln S_{4,2}$ ausgeweitet.

Der untere Teil der Graphik in Abb. 1 weist den Abstand der logarithmierten Barrier von der Mitte des in logarithmierten Aktienkursen angegebenen Barrier-Intervalls aus (rechte Skala). Das „Zackenmuster“ der berechneten Optionspreise findet sich in nahezu perfekter Übereinstimmung in dem Abstandsmaß für die Lage der Barrier wieder. Liegt die Schranke im oberen Teil des Barrier-Intervalls, werden die Optionspreise überschätzt, im umgekehrten Fall unterschätzt.

Die Größe des Barrier-Intervalls hängt entscheidend davon ab, ob die Baumtiefe einem geraden oder einem ungeraden Vielfachen der Zahl der Kontrollstufen entspricht. Dies wurde bereits anhand von Abb. 2 veranschaulicht. Im Falle des geraden Vielfachen sind die Aktienkurse, die den Schwellenwert umschließen, in jedem Überprüfungszeitpunkt die gleichen. Bezeichnet S_o den oberen und S_u den unteren Aktienkurs, so läßt sich die Breite des (logarithmierten) Barrier-Intervalls unter Verwendung von $d = \frac{1}{u}$

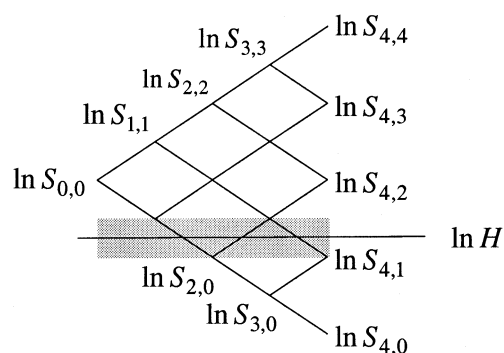


Abb. 2. Barrier-Intervall

und Gleichung (8) schreiben als

$$\ln S_o - \ln S_u = \ln (u/d \cdot S_u) - \ln S_u = \ln (u^2 S_u) - \ln S_u = 2 \ln u. \tag{13}$$

Wenn die Baumtiefe einem ungeraden Vielfachen der Kontrollzeitpunkte entspricht, wechseln die umschließenden Aktienkurse von einer Kontrollstufe zur nächsten alternierend zwischen zwei Wertepaaren. Es seien z.B. die oberen und unteren Aktienkurse einer beliebigen Kontrollstufe m_1 mit S_{o1} und S_{u1} bezeichnet. Im vorherigen und im nächsten Kontrollzeitpunkt kommen die Aktienkurse S_{o1} und S_{u1} nicht vor, weil alle Aktienkurse um eine Aufwärts- oder Abwärtsbewegung verschoben sind. Für die neuen oberen und unteren Aktienkurse S_{o2} und S_{u2} mit $\ln S_{o2} - \ln S_{u2} = 2 \ln u$ gilt deshalb: $|\ln S_{o1} - \ln S_{o2}| = |\ln S_{u1} - \ln S_{u2}| = \ln u$. Daraus folgt für die Breite des Barrier-Intervalls:²⁷

$$\min [\ln S_{o1}, \ln S_{o2}] - \max [\ln S_{u1}, \ln S_{u2}] = \ln u. \tag{14}$$

Da somit die Intervallbreite $\ln u$ anstelle von $2 \ln u$ beträgt, ist zu erwarten, daß bei Baumtiefen von $1K, 3K, 5K$, usw. insgesamt geringere Bewertungsfehler auftreten als bei Baumtiefen von $2K, 4K, 6K$, usw. Dies bestätigen die Abb. 3 und 4, die genauso aufgebaut sind wie Abb. 1. Die höheren Abweichungen des Schwellenwerts von der Mitte des Barrier-Intervalls übertragen sich in Abb. 4 auf höhere Abweichungen des Optionspreises vom korrekten Wert.

Modifikation 1 des Binomialmodells. Ein Vergleich der Verteilungsfunktionen der Binomial- mit der Normalverteilung zeigt, warum die Position der Barrier im Binomialbaum das Bewertungsergebnis maßgeblich beeinflusst. Zur Veranschaulichung betrachten wir einen für die obigen Beispieldaten aufgestellten Binomialbaum mit 260 Zeitstufen ($M = 260$). Wegen

²⁷ Dies setzt voraus, daß es mindestens zwei Kontrollzeitpunkte gibt.

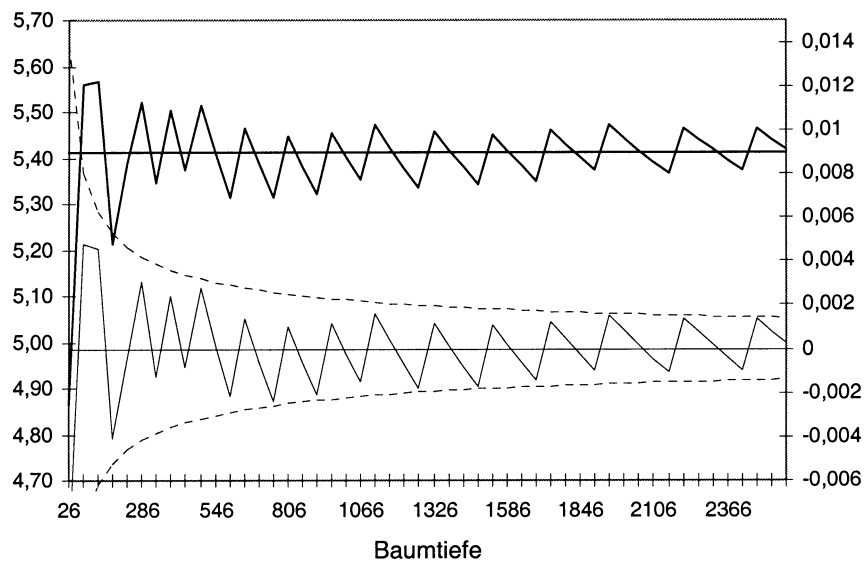


Abb. 3. Naives Binomialmodell, ungerade Vielfache. Oben: Optionspreise (linke Skala). Unten: Abstand der logarithmierten Barrier von der Mitte des Barrier-Intervalls in der $\ln S$ -Ebene (rechte Skala)

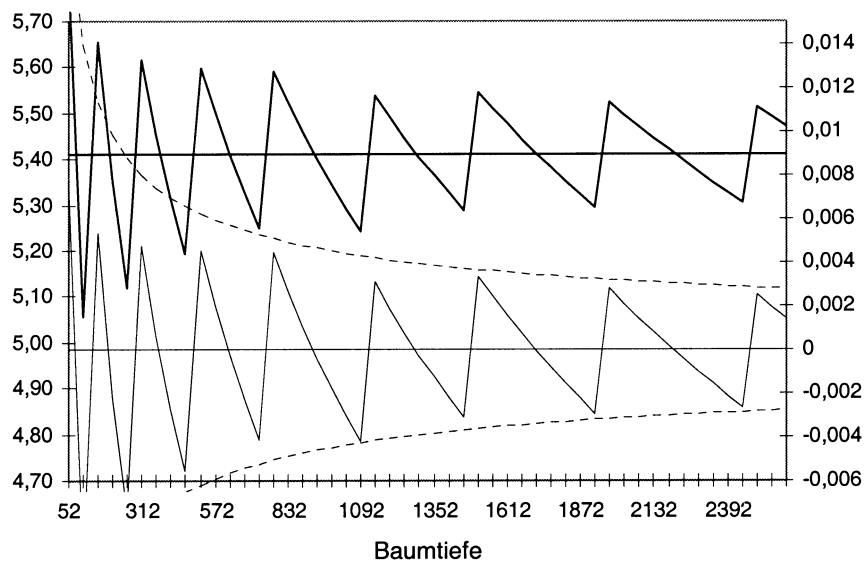


Abb. 4. Naives Binomialmodell, gerade Vielfache. Oben: Optionspreise (linke Skala). Unten: Abstand der logarithmierten Barrier von der Mitte des Barrier-Intervalls in der $\ln S$ -Ebene (rechte Skala)

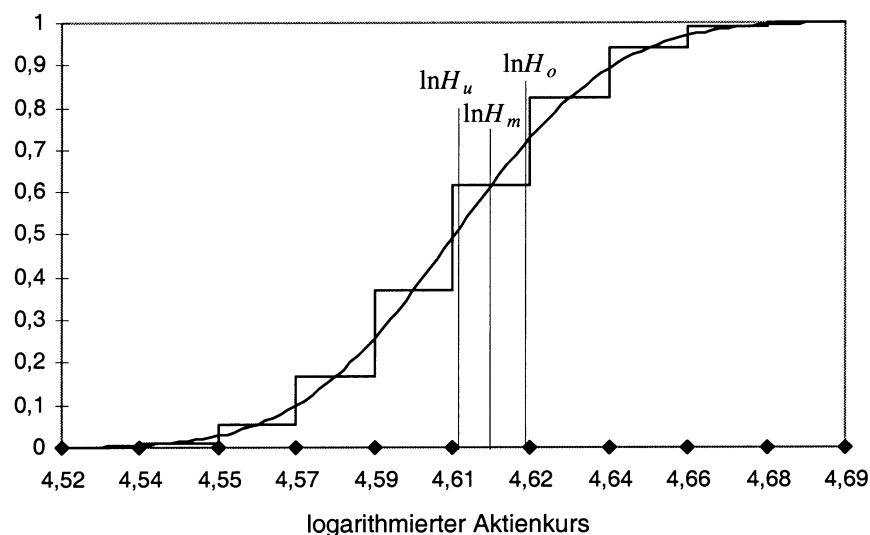


Abb. 5. Verteilungsfunktionen der Binomial- und Normalverteilung

der wöchentlichen Barrier-Überprüfung ist jeder zehnte Zeitschritt Überwachungsstufe. Auf der ersten dieser Kontrollstufen können jene elf Aktienkurse auftreten, die in Abb. 5 auf der Abszisse abgetragen wurden. Die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung (Treppenfunktion von Abb. 5) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß sich im Binomialprozeß auf dieser Zeitstufe ein (logarithmierter) Aktienkurs kleiner oder gleich dem Abszissenwert einstellt. Tatsächlich gehorchen die logarithmierten Aktienkurse annahmegemäß einer Normalverteilung (vgl. Gleichung 5), deren Verteilungsfunktion ebenfalls in Abb. 5 zu sehen ist. Würde der Binomialbaum immer weiter verfeinert, so würde sich die Binomialverteilung der eingezeichneten Normalverteilung immer weiter annähern.

Nach dem Verfahren von Cox u. Rubinstein wird bei der rekursiven Baumberechnung der Optionspreis an einem Knoten immer dann auf die Rebate gesetzt, wenn der Aktienkurs unter der Barrier liegt oder ihr genau entspricht. Die vom Informationsstand im Zeitpunkt 0 ausgehende Wahrscheinlichkeit, mit der die so zu „korrigierenden“ Knoten erreicht werden, also die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienkurs kleiner gleich H auf der jeweils betrachteten Stufe des Binomialmodells, soll als „Korrekturwahrscheinlichkeit“ bezeichnet werden.²⁸

²⁸ Die Korrekturwahrscheinlichkeit einer bestimmten Baumstufe entspricht weder der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Option genau auf dieser Stufe ausgeknockt wird, noch der insgesamt bis zu diesem Zeitpunkt bestehenden Knock-Out-Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit für den Knock-Out der Option muß nach dem Cox u. Rubinstein-Ansatz nicht explizit berechnet werden. Sie wird vielmehr implizit durch die rekursive Baumberechnung berücksichtigt. Gleiches gilt für unseren modifizierten Ansatz.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung an der Stelle $\ln H$ entspricht der Korrekturwahrscheinlichkeit, die im Grenzfall eines extrem feinen Baums mit gegen Null strebenden Zeitabständen verrechnet wird. Die tatsächlich aufgrund des unterstellten Binomialprozesses berücksichtigte Korrekturwahrscheinlichkeit wird durch den Wert der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung an der Stelle $\ln H$ angegeben. Abbildung 5 zeigt, daß beide Korrekturwahrscheinlichkeiten je nach Lage der Barrier mehr oder weniger stark voneinander abweichen können.

Angenommen, das Knock-Out-Niveau betrage $\ln H_m$. Dann beruht die Binomialbewertung auf der korrekten Korrekturwahrscheinlichkeit, weil sich die beiden Verteilungsfunktionen bei einem logarithmierten Aktienkurs von $\ln H_m$ schneiden (Abb. 5). Daraus resultiert eine vergleichsweise gute Annäherung an den theoretischen Optionspreis. Bei logarithmierten Barrier-Werten von $\ln H_u$ und $\ln H_o$ hingegen setzt das Binomialmodell zu hohe bzw. zu niedrige Korrekturwahrscheinlichkeiten an, erkennbar an der Diskrepanz der Funktionswerte der beiden Verteilungsfunktionen. Die Optionspreise werden deshalb unter- bzw. überschätzt. Dies erklärt die in Abb. 1 bis 3 gezeigte Abhängigkeit des Bewertungsfehlers von der Lage der Barrier. Die nachfolgend beschriebene Modifikation dient dazu, die Berechnung der Optionswerte im Binomialbaum so an die Position der Barrier anzupassen, daß auf jeder Kontrollstufe näherungsweise die richtige, bei extrem feiner Baumstruktur gegebene Korrekturwahrscheinlichkeit angesetzt wird.²⁹

Der Optionspreis wird in jedem Überwachungszeitpunkt an demjenigen Knoten $n^* = n^*(m)$, der der Barrier am nächsten liegt, korrigiert.³⁰ Dieser Knotenwert wurde bisher entweder mit der Rebate R (bei $S_{m,n^*} \leq H$) oder mit dem diskontierten Erwartungswert $e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+1}^* \cdot q_1 + f_{m+1,n}^* \cdot q_2)$ der Optionspreise der nachfolgenden Stufe (bei $S_{m,n^*} > H$) gleichgesetzt. Das modifizierte Verfahren setzt hingegen für den Optionspreis am Knoten n^* einen gewichteten Durchschnitt beider Werte an. Dabei entspricht das Gewicht der Rebate der aus der Normalverteilung abgeleiteten Korrekturwahrscheinlichkeit.

Eine Korrektur unterbleibt, wenn sich die Barrier unterhalb des niedrigsten Aktienkurses der betrachteten Stufe des Binomialbaums befindet. Eine solche Konstellation bedeutet, daß im Binomialmodell ein Kontrollzeitpunkt faktisch weggelassen wird. Dies ist problematisch, weil in Wirklichkeit auf jeder Kontrollstufe eine positive Knock-Out-Wahrscheinlichkeit besteht. Diese ist aber unter Umständen vernachlässigbar, weil der Einfluß der Barrier auf den Optionspreis c.p. um so geringer ausfällt, je niedriger

²⁹ Mit größerer Baumtiefe werden die Modifikationen daher immer unbedeutender, so daß sich im Limit der gleiche Optionspreis ergibt wie nach dem Cox u. Rubinstein-Ansatz.

Anmerkung: Einer der Gutachter war der Auffassung, an dieser Stelle müsse die echte Knock-Out-Wahrscheinlichkeit bezogen auf den absorbierten Prozeß verwendet werden.

³⁰ Es gilt somit: $|\ln S_{m,n^*} - \ln H| \leq |\ln S_{m,n} - \ln H| \forall n = 0, 1, \dots, m$.

die Barrier liegt. Würde man nur Baumtiefen zulassen, die in jedem Kontrollzeitpunkt mindestens einen Aktienkurs unterhalb der Barrier gewährleisten, müßten für einen Teil der Optionen mit einer tiefen Barrier sehr viele Zeitstufen berechnet werden, obwohl ein viel kleinerer Baum völlig ausreichend wäre, um ein akzeptables Genauigkeitsniveau zu erreichen.³¹ Daher verzichten wir auf eine solche Restriktion.

Im folgenden sei mit $B_m(\ln S_{m,n})$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß der Aktienkurs im Zeitpunkt $m\Delta t$ bei dem unterstellten Binomialprozeß nach den Gleichungen (6) bis (8) höchstens $S_{m,n}$ beträgt; dabei wird vom Informationsstand im Zeitpunkt 0 ausgegangen. $N_m(\cdot)$ steht für den Funktionswert der kumulierten Normalverteilung mit Erwartungswert $\ln S_0 + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) m\Delta t$ und Standardabweichung $\sigma\sqrt{m\Delta t}$ (vgl. Gleichung 5).

Die Wahrscheinlichkeit, im Binomialprozeß den Knoten n^* zu erreichen, beträgt

$$B_m(\ln S_{m,n^*}) - B_m(\ln S_{m,n^*-1}). \quad (15)$$

Von dieser Wahrscheinlichkeit ist der Betrag

$$N_m(\ln H) - B_m(\ln S_{m,n^*-1}) \quad (16)$$

als Korrekturwahrscheinlichkeit zu behandeln, damit die auf der Stufe m des Binomialmodells insgesamt zugrunde gelegte Korrekturwahrscheinlichkeit

$$B_m(\ln S_{m,n^*-1}) + [N_m(\ln H) - B_m(\ln S_{m,n^*-1})] \quad (17)$$

mit dem korrekten Wert $N_m(\ln H)$ übereinstimmt. Um die bei großem n sehr rechenaufwendige Ermittlung der Werte der binomialen Verteilungsfunktion zu vermeiden, werden diese in den Gleichungen (15) bis (17) mit Hilfe der Normalverteilung approximiert. Hierfür verwenden wir die Beziehung³²

$$B_m(\ln S_{m,n}) \approx N_m(\ln S_{m,n} + \ln u).$$

³¹ Als Beispiel sei eine Down-and-Out-Option mit den Parametern $S_0 = 100$, $X = 100$, $H = 80$, $R = 0$, $r = 5\%$, $\delta = 0$, $T = 0,5$ und $K = 26$ betrachtet. Ihr „wahrer“ Wert beträgt 6,8873. Läßt man die Barrier ganz außer Betracht und bewertet die Option mit dem Black u. Scholes-Modell, ergibt sich ein Preis von 6,8887. Die Barrier von 80 ist also unter den hier getroffenen Annahmen ökonomisch irrelevant. Ein Baumverfahren kann die Option sehr gut bepreisen, selbst wenn auf *keiner* der Kontrollstufen ein Aktienkurs unterhalb der Barrier liegt.

³² Der Wert $\ln S_{m,n} + \ln u$ entspricht der Mitte des Intervalls $[\ln S_{m,n}; \ln S_{m,n+1}]$. Durch die mit dem Summanden $\ln u$ bewirkte Stetigkeitskorrektur erhält man im allgemeinen einen besseren Näherungswert als durch die Approximation

$$B_m(\ln S_{m,n}) \approx N_m(\ln S_{m,n}).$$

Dies ist in Abb. 5 daran erkennbar, daß sich die Verteilungsfunktionen regelmäßig ungefähr in der Mitte zwischen zwei logarithmierten Aktienkursen des Binomialprozesses treffen. Vgl. zur Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung (Moivre-Laplace-Theorem)

Die modifizierte Binomialberechnung („BIN1“) läßt sich formal wie folgt beschreiben:

Sei $x_m := x(m)$ definiert als³³

$$x_m = \frac{N_m(\ln H) - N_m(\ln S_{m,n^*} - \ln u)}{N_m(\ln S_{m,n^*} + \ln u) - N_m(\ln S_{m,n^*} - \ln u)}. \quad (18)$$

Im Fälligkeitszeitpunkt $M\Delta t$ wird folgende Auszahlungsfunktion zugrundegelegt:

$$f_{M,n}^{\text{BN1}} = \begin{cases} f_{M,n} & \text{falls } n \neq n^* \vee S_{M,0} > H \\ x_M R + (1 - x_M)g_{M,n} & \text{falls } n = n^* \wedge S_{M,0} \leq H \end{cases}. \quad (19)$$

Ist m eine Kontrollstufe vor Fälligkeit, d.h. $m \in \mathbf{M} \setminus \{M\}$, so berechnet sich der Optionspreis im Rahmen der rückwärts-rekursiven Berechnung des Binomialbaums nach

$$f_{m,n}^{\text{BN1}} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN1}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN1}} \cdot q_2 \right) & \text{falls } (n \neq n^* \wedge S_{m,n} > H) \vee S_{m,0} > H \\ R & \text{falls } n \neq n^* \wedge S_{m,n} \leq H \\ x_m R + (1 - x_m) e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN1}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN1}} \cdot q_2 \right) & \text{falls } n = n^* \wedge S_{m,0} \leq H \end{cases}. \quad (20)$$

Für $m \notin \mathbf{M}$ gilt:

$$f_{m,n}^{\text{BN1}} = e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN1}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN1}} \cdot q_2 \right). \quad (21)$$

Die Berechnung der Optionspreise nach den Formeln (18) bis (21) ergibt im obigen Beispiel den in Abb. 7 mit BIN1 bezeichneten Verlauf in Abhängigkeit von der Baumtiefe. Wie deutlich zu erkennen ist, nähern sich die Optionspreise wesentlich schneller als im „naiven“ Binomialmodell dem korrekten Preis an. Würde man das unmodifizierte Binomialmodell auf der gleichen Ordinatenkalierung abtragen, würden die Werte erratisch zwischen dem oberen und unteren Rand hin und her pendeln und in den Spitzen noch bei mehr als 2500 Baumstufen über den gewählten Bereich hinausragen. Starke Fehlerausschläge, bedingt durch die Lage der Barrier, sind dagegen im Modell BIN1 nicht mehr zu beobachten. Es fällt allerdings auf, daß die berechneten Optionswerte fast immer *unter* dem theoretischen Preis liegen.

z.B. Fisz (1989, S. 229–234). Zur Stetigkeitskorrektur siehe z.B. Schlittgen (1990, S. 230 f.) und Tsokos (1972, S. 497–499). Eine Alternative zur hier verwendeten Approximation der Binomialverteilung bietet das Verfahren von Peizer u. Pratt (1968); vgl. dazu Reimer (1997, S. 52–55).

³³ Wegen $\ln S_{m,n} = \ln S_{m,n-1} + 2 \ln u$ gilt $N_m(\ln S_{m,n-1} + \ln u) = N_m(\ln S_{m,n} - \ln u)$.

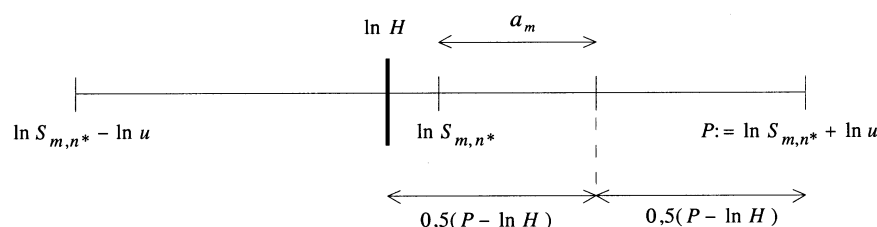


Abb. 6. Modifikation 2 des Binomialmodells, dargestellt am Beispiel $S_{m,n^*} > H$

Modifikation 2 des Binomialmodells. Die bisherige Modifikation läßt sich noch verbessern, indem nicht nur die Wahrscheinlichkeiten angepaßt werden, sondern auch die damit gewichteten Optionspreise. Der Binomialprozeß wird dabei als diskrete Annäherung an den kontinuierlichen Aktienkursverlauf in der Weise verstanden, daß der Knoten n^* alle logarithmierten Aktienkurse des Intervalls

$$[\ln S_{m,n^*} - \ln u; \ln S_{m,n^*} + \ln u]$$

repräsentiert. In einem Binomialbaum mit einer sehr großen Zahl von Baumstufen würde dieses Intervall durch viele Knoten und ebensoviele Optionspreise abgedeckt. Deren (gewichteter) Durchschnittswert soll durch die erweiterte Korrektur angenähert werden. Von allen Aktienkurspfaden, die nach der Zeit $m\Delta t$ im angegebenen Intervall landen, führt ein Anteil von x_m in den Knock-Out-Bereich $[\ln S_{m,n^*} - \ln u; \ln H]$, ein Anteil von $(1 - x_m)$ in den oberhalb der Barriere angesiedelten Bereich $(\ln H; \ln S_{m,n^*} + \ln u]$. Die erwartete Zahlung aus den Pfaden, die zum Knock-Out der Option führen, läßt sich leicht ermitteln: Sie beträgt $x_m R$ und wurde auch in dieser Höhe im Modell BIN1 berücksichtigt. Der Erwartungswert für das obere Intervall weicht jedoch systematisch vom bisher angesetzten Betrag ab. Die Wahrscheinlichkeit $(1 - x_m)$ wurde mit dem Optionspreis an der Stelle S_{m,n^*} multipliziert, obwohl $\ln S_{m,n^*}$ z.B. im Falle $S_{m,n^*} > H$ stets in der unteren Hälfte des Intervalls $(\ln H; \ln S_{m,n^*} + \ln u]$ liegt (vgl. Abb. 6). Eine bessere Annäherung an den Erwartungswert der Optionspreise für die in das Intervall $(\ln H; \ln S_{m,n^*} + \ln u]$ führenden Kurspfade ist zu erwarten, wenn der zum *mittleren* Aktienkurs dieses Intervalls gehörende Optionspreis mit $(1 - x_m)$ multipliziert wird. Dieser Optionspreis kann durch eine lineare Interpolation angenähert werden.

Die Interpolation wird, soweit möglich, zwischen den Optionspreisen in den Baumknoten $n^* + 1$ und $n^* - 1$ vorgenommen. Gibt es keinen Knoten $n^* - 1$, so wird zwischen den Preisen in $n^* + 1$ und n^* interpoliert.³⁴ Dieses Vorgehen wird abschließend formal gefaßt (BIN2).

³⁴ Sieht man von der Wurzel des Binomialbaums ($m = 0$) ab, existiert stets ein oberer Knoten $n^* + 1$, da wir vorausgesetzt haben, daß $H > S_0$.

Der Abstand der Mitte des Intervalls $(\ln H; \ln S_{m,n^*} + \ln u]$ zum Aktienkurs im Knoten n^* beträgt (vgl. Abb. 6):

$$\begin{aligned} a_m &= 0,5 (\ln H + \ln S_{m,n^*} + \ln u) - \ln S_{m,n^*} \\ &= 0,5 (\ln H + \ln u - \ln S_{m,n^*}). \end{aligned} \quad (22)$$

Die Auszahlungsfunktion im Fälligkeitszeitpunkt $M\Delta t$ lautet:

$$f_{M,n}^{\text{BN2}} = \begin{cases} f_{M,n} & \text{falls } n \neq n^* \vee S_{M,0} > H \\ x_M R + (1 - x_M) \left(g_{M,n} + \frac{g_{M,n+1} - g_{M,n-1}}{4 \ln u} \cdot a_M \right) & \text{falls } n = n^* \wedge n^* > 0 \\ x_M R + (1 - x_M) \left(g_{M,n} + \frac{g_{M,n+1} - g_{M,n}}{2 \ln u} \cdot a_M \right) & \text{falls } n = n^* = 0 \wedge S_{M,0} \leq H \end{cases}. \quad (23)$$

Der Optionspreis auf einer Kontrollstufe $m \in \mathbf{M} \setminus \{M\}$ berechnet sich nach

$$f_{m,n}^{\text{BN2}} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN2}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN2}} \cdot q_2 \right) & \text{falls } (n \neq n^* \wedge S_{m,n} > H) \vee S_{m,0} > H \\ R & \text{falls } n \neq n^* \wedge S_{m,n} \leq H \\ x_m R + (1 - x_m) \left(k_{m,n} + \frac{k_{m,n+1} - k_{m,n-1}}{4 \ln u} \cdot a_m \right) & \text{falls } n = n^* \wedge n^* > 0 \\ x_m R + (1 - x_m) \left(k_{m,n} + \frac{k_{m,n+1} - k_{m,n}}{2 \ln u} \cdot a_m \right) & \text{falls } n = n^* = 0 \wedge S_{m,0} \leq H \end{cases} \quad (24)$$

wobei

$$k_{m,n} = e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN2}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN2}} \cdot q_2 \right) \quad n = n^* - 1, n^*, n^* + 1. \quad (25)$$

Im Falle $m \notin \mathbf{M}$ beträgt der Optionswert:

$$f_{m,n}^{\text{BN2}} = e^{-r\Delta t} \left(f_{m+1,n+1}^{\text{BN2}} \cdot q_1 + f_{m+1,n}^{\text{BN2}} \cdot q_2 \right). \quad (26)$$

Abbildung 7 zeigt in der Graphik „BIN2“ die Optionspreise, die sich für unser Beispiel aus der Anwendung dieses zweifach modifizierten Binomialmodells ergeben. Es leistet im Vergleich zum Modell „BIN1“ eine nochmals schnellere und gleichmäßigere Annäherung an den korrekten Preis der Option. Ab einer Baumtiefe von etwa 650 Stufen sinkt der Bewertungsfehler durchgängig auf weniger als 1 Pfennig oder 0,2%.

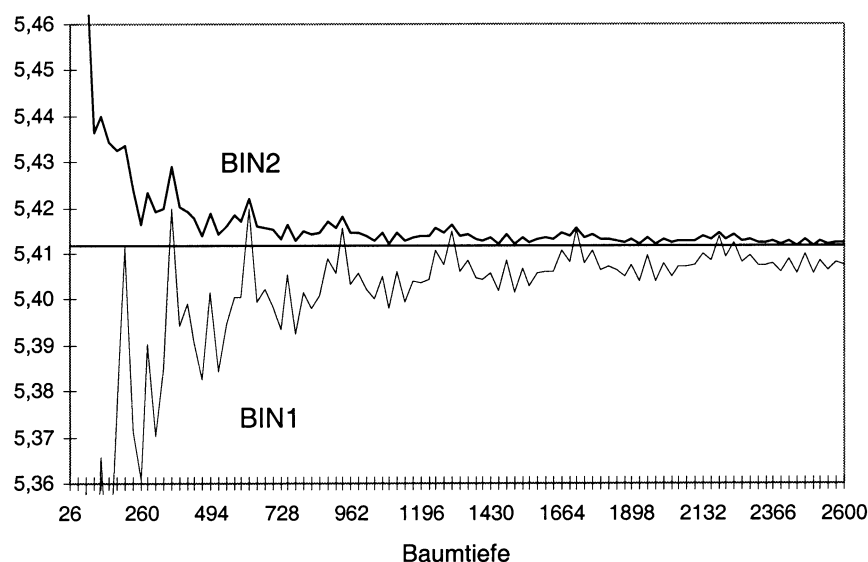


Abb. 7. Modifizierte Binomialmodelle

4.2 Trinomialmodell

Das Trinomialmodell ist eine einfache Erweiterung des Binomialmodells.³⁵ Die dem Verfahren zugrunde liegenden Bäume werden als *Trinomialbäume* bezeichnet.

Gegeben sei die bereits bekannte Diskretisierung der Optionsrestlaufzeit T in M äquidistante Zeitperioden der Länge $\Delta t = T/M$. Im Trinomialmodell wird unterstellt, daß der Aktienkurs während einer Periode ausgehend vom Kurs S mit Wahrscheinlichkeit q_1 auf uS steigt, mit Wahrscheinlichkeit q_3 auf dS fällt, oder aber mit Wahrscheinlichkeit q_2 nach yS wechselt. Dabei gilt $u > y > d$. Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten q_1, q_2, q_3 addieren sich zu eins.

Die im Trinomialmodell zu spezifizierenden Parameter u, y, d, q_1, q_2 und q_3 determinieren eindeutig die Aktienkursentwicklung, aus der sich nach dem Martingalansatz der faire Optionspreis berechnet. Wie im Binomialmodell müssen die Parameter so gewählt werden, daß die diskrete Trinomialverteilung der Aktienkurse gegen die kontinuierliche, risikoneutrale Lognormalverteilung konvergiert. Diese Kriterien erfüllen verschiedene Parametereinstellungen. Wir verwenden im folgenden die Spezifikation von Boyle (1988):

$$y = 1, \quad u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (27)$$

³⁵ Der hier vorgestellte Modelltyp geht auf Boyle (1988) zurück.

$$q_1 = \frac{u(\mathcal{V} + \mathcal{M}^2 - \mathcal{M}) - (\mathcal{M} - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)}, \quad (28)$$

$$q_3 = \frac{u^2(\mathcal{V} + \mathcal{M}^2 - \mathcal{M}) - u^3(\mathcal{M} - 1)}{(u - 1)(u^2 - 1)} \quad (29)$$

und

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3, \quad (30)$$

wobei

$$\mathcal{M} = e^{(r-\delta)\Delta t} \quad \text{und} \quad \mathcal{V} = \mathcal{M}^2 (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1). \quad (31)$$

Der Dispersionsparameter λ muß größer oder gleich Eins sein, kann aber sonst frei festgelegt werden. Seine Höhe ist für die Genauigkeit des Trinomialmodells von ausschlaggebender Bedeutung. In dieser Arbeit verwenden wir den von Omberg (1988) aufgrund theoretischer Überlegungen³⁶ vorgeschlagenen Parameterwert

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}. \quad (32)$$

Die naive Anwendung des Trinomialmodells weist wie das unmodifizierte Binomialmodell das Problem auf, daß die Ergebnisse maßgeblich von der Lage der Barrier zwischen den umschließenden Knoten abhängen.³⁷ Dieses Problem kann einerseits durch die analoge Anwendung des zuvor für das Binomialmodell vorgestellten Korrekturverfahrens gelöst werden. Andererseits besteht die Möglichkeit, den Dispersionsparameter bei gegebener Baumtiefe so zu wählen, daß die Barrier die optimale Position im Baum einnimmt und damit die oben in bezug auf das Binomialmodell beschriebenen Verzerrungen von vornherein ausgeschlossen werden.³⁸ Der zuletzt genannte Lösungsweg wurde von Ritchken (1995) für kontinuierliche Barrier-Optionen vorgestellt und von Tian (1997) auf diskrete Barrier-Optionen übertragen. Das Verfahren ist leicht zu implementieren, hat aber zur Folge, daß λ in aller Regel nicht exakt auf jenen Wert λ_0 nach Gleichung (32) gesetzt werden kann, der ein möglichst gutes Konvergenzverhalten sichern soll. Das Korrekturverfahren ist hingegen flexibler, weil es auch bei Optionen mit deterministisch zeitvariabler Barrier anwendbar ist. Der Wert λ_0 aus Gleichung (32) kann bei diesem Verfahren beibehalten werden.

³⁶ Omberg (1988) untersucht, bei welcher Struktur des Trinomialbaums eine Option möglichst gut mit dem Basispapier und der risikolosen Anlage repliziert werden kann. Die Minimierung des von Omberg verwendeten Replikationsfehlers führt zu dem hier genannten Parameterwert.

³⁷ Vgl. Tian (1997).

³⁸ Vgl. Ritchken (1995) und Tian (1997).

Anpassung des Dispersionsparameters. Die Barrier liegt genau dann in der Mitte zwischen zwei horizontalen Knotenschichten des Trinomialbaums³⁹, wenn die Gleichung

$$S_0 d^{w-0,5} = H, \quad (33)$$

die wegen Beziehung (27) äquivalent ist zu

$$w(\lambda) = 0,5 + \frac{\ln(S_0/H)}{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (34)$$

für ein $w \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Der mit $\lambda = \lambda_0$ berechnete Wert $w_0 = w(\lambda_0)$ ist nur in Ausnahmefällen ganzzahlig. Er wird deshalb auf die nächste natürliche Zahl auf- oder abgerundet. Das Ergebnis läßt sich unter Verwendung der Integerfunktion schreiben als $\text{int}(w_0 + 0,5)$. Dabei gibt $\text{int}(x)$ die größte natürliche Zahl zurück, die kleiner oder gleich x ist. Anschließend wird λ_{mod} so festgelegt, daß der Trinomialprozeß rechnerisch nach genau $\text{int}(w_0 + 0,5) - 0,5$ Abwärtschritten die Barrier erreicht:

$$\lambda_{\text{mod}} = \frac{\ln(S_0/H)}{[\text{int}(w_0 + 0,5) - 0,5]\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (35)$$

Auf diese Weise erhält man einen λ -Wert, der die gewünschte Lage der Barrier sichert und zugleich möglichst wenig von λ_0 abweicht.

Die Auszahlungsfunktion bei Fälligkeit lautet für $n = 0, \dots, 2M$:

$$f_{M,n}^{TR1} = \begin{cases} f_{M,n} & \text{falls } S_{M,n} > H \\ R & \text{sonst} \end{cases}. \quad (36)$$

Mittels Rückwärtsinduktion können analog zur Berechnung des Binomialbaums die europäischen Knock-Out-Optionswerte $f_{m,n}^{TR1}$ der Stufen $m = M - 1, \dots, 0$ berechnet werden. Auf den Kontrollstufen $m \in \mathbb{M} \setminus \{M\}$ ergibt sich der Wert $f_{m,n}^{TR1}$ als:

$$f_{m,n}^{TR1} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+2}^{TR1} \cdot q_1 + f_{m+1,n+1}^{TR1} \cdot q_2 + f_{m+1,n}^{TR1} \cdot q_3) & \text{falls } S_{m,n} > H \\ R & \text{sonst} \end{cases}. \quad (37)$$

In den übrigen Zeitpunkten gilt:

$$f_{m,n}^{TR1} = e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+2}^{TR1} \cdot q_1 + f_{m+1,n+1}^{TR1} \cdot q_2 + f_{m+1,n}^{TR1} \cdot q_3). \quad (38)$$

³⁹ Genauer gesagt liegt die *logarithmierte* Barrier in der Mitte der *logarithmierten* Aktienkurse, die zu den angesprochenen Knotenschichten gehören.

Das durch die Gleichungen (35) bis (38) charakterisierte Trinomialmodell soll mit „TRIN1“ bezeichnet werden. Es entspricht in den wesentlichen Elementen dem Modell von Tian (1997). Kleinere Abweichungen bestehen nur in der Wahl des Startwerts λ_0 ⁴⁰ und den Parametereinstellungen für den Aktienkursprozeß des Trinomialmodells⁴¹. Nach den Auswertungen von Tian weist dieses Modell ein sehr gutes, mit dem Ansatz von Cheuk u. Vorst (1996) vergleichbares Konvergenzverhalten auf. Daher verwenden wir in der späteren Simulationsstudie dieses Modell als Vergleichsmaßstab, um die Leistungsfähigkeit unseres modifizierten Algorithmus zu beurteilen.

Korrekturverfahren. Die oben beschriebene zweite Modifikation des Binomialmodells läßt sich auch auf das Trinomialmodell anwenden. Dabei ist lediglich die Besonderheit zu beachten, daß der Abstand zweier Knoten in einer gegebenen Baumstufe m nicht $2 \ln u$ beträgt, sondern nur $\ln u$.

Der Abstand der Mitte des Intervalls $(\ln H; \ln S_{m,n^*} + 0,5 \ln u]$ zum Aktienkurs im Knoten n^* beträgt damit nur:

$$a_m = 0,5 (\ln H + \ln S_{m,n^*} + 0,5 \ln u) - \ln S_{m,n^*} = \quad (39)$$

$$0,5 (\ln H + 0,5 \ln u - \ln S_{m,n^*}). \quad (40)$$

Mit

$$x_m = \frac{N_m (\ln H) - N_m (\ln S_{m,n^*} - 0,5 \ln u)}{N_m (\ln S_{m,n^*} + 0,5 \ln u) - N_m (\ln S_{m,n^*} - 0,5 \ln u)}$$

lautet die Auszahlungsfunktion im Fälligkeitszeitpunkt $M \Delta t$:

$$f_{M,n}^{TR2} = \begin{cases} f_{M,n} & \text{falls } n \neq n^* \vee S_{M,0} > H \\ x_M R + (1 - x_M) \left(g_{M,n} + \frac{g_{M,n+1} - g_{M,n-1}}{2 \ln u} \cdot a_M \right) & \text{falls } n = n^* \wedge n^* > 0 \\ x_M R + (1 - x_M) \left(g_{M,n} + \frac{g_{M,n+1} - g_{M,n}}{\ln u} \cdot a_M \right) & \text{falls } n = n^* = 0 \wedge S_{M,0} \leq H \end{cases} . \quad (41)$$

⁴⁰ Tian (1997) verwendet (ohne nähere Begründung) die Einstellung $\lambda_0 = \sqrt{1,5}$. Aus diesem Startwert wird in gleicher Weise wie hier der eigentliche Dispersionsparameter λ_{mod} berechnet. In vielen Fällen führen die Startwerte λ_0 nach Tian und Omberg zu exakt gleichen λ_{mod} -Werten. Tian bezeichnet die Unterschiede beider Einstellungen daher als unwesentlich (S. 207). Wir benutzen bei allen Baumverfahren den besser begründeten Wert nach Omberg.

⁴¹ Die Abweichung von den in dieser Arbeit verwendeten Parametereinstellungen, die auf Boyle (1988) zurückgehen, bezeichnet Tian (1997) als “slight variation” (S. 196).

Der Optionspreis im Knoten n einer Kontrollstufe $m \in \mathbf{M} \setminus \{M\}$ berechnet sich nach

$$f_{m,n}^{TR2} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+2}^{TR2} \cdot q_1 + f_{m+1,n+1}^{TR2} \cdot q_2 + f_{m+1,n}^{TR2} \cdot q_3) \\ \quad \text{falls } (n \neq n^* \wedge S_{m,n} > H) \vee S_{m,0} > H \\ R \\ \quad \text{falls } n \neq n^* \wedge S_{m,n} \leq H \\ x_m R + (1 - x_m) \left(k_{m,n} + \frac{k_{m,n+1} - k_{m,n-1}}{2 \ln u} \cdot a_m \right) \\ \quad \text{falls } n = n^* \wedge n^* > 0 \\ x_m R + (1 - x_m) \left(k_{m,n} + \frac{k_{m,n+1} - k_{m,n}}{\ln u} \cdot a_m \right) \\ \quad \text{falls } n = n^* = 0 \wedge S_{m,0} \leq H \end{cases} \quad (42)$$

wobei

$$\begin{aligned} k_{m,n} &= e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+2}^{TR2} \cdot q_1 + f_{m+1,n+1}^{TR2} \cdot q_2 + f_{m+1,n}^{TR2} \cdot q_3) \\ n &= n^* - 1, n^*, n^* + 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Für $m \notin \mathbf{M}$ beträgt der Optionswert:

$$f_{m,n}^{TR2} = e^{-r\Delta t} (f_{m+1,n+2}^{TR2} \cdot q_1 + f_{m+1,n+1}^{TR2} \cdot q_2 + f_{m+1,n}^{TR2} \cdot q_3). \quad (44)$$

Dieses durch Formel (32) und die Gleichungen (39) bis (44) gekennzeichnete Trinomialmodell wird als „TRIN2“ benannt. Die Bewertung der obigen Beispieloption mit den Modellen TRIN1 und TRIN2 erbringt die in Abb. 8 graphisch dargestellten Ergebnisse. Beide Modelle nähern den korrekten Optionspreis schon bei vergleichsweise geringen Baumtiefen auf weniger als 0,1% an.

5 Verfahrensvergleich

5.1 Berechnungsbeispiele

5.1.1 Vorgehensweise. Gegenstand der folgenden Berechnungen ist ein Vergleich ausgewählter, in Abschnitt 4 vorgestellter Bewertungsverfahren. Dabei ist neben der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit ein wichtiges Kriterium, weil sie vor dem Hintergrund knapper Rechnerkapazitäten einen wichtigen Kostenfaktor darstellt.

Die Leistungsfähigkeit der Bewertungsmodelle soll anhand von neun Untersuchungsobjekten beurteilt werden. Im einzelnen handelt es sich um diskrete at-the-money Down-and-Out-Calls mit folgenden Parameterwerten:

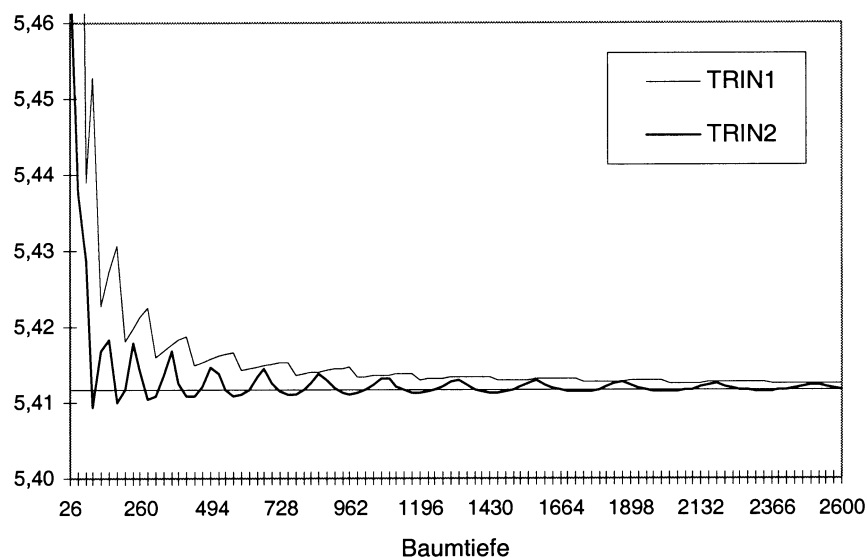


Abb. 8. Trinomialmodelle TRIN1 und TRIN2 im Vergleich

Aktienkurs S_0	:	100
Basispreise X	:	100
Barrier H_1, H_2, H_3	:	90, 95, 99
Rebate R	:	0
risikoloser stetiger Zinssatz r	:	5%
stetige Dividendenrendite δ	:	0%
Volatilität σ	:	20%
Restlaufzeit in Jahren T	:	0, 50
Anzahl Kontrollzeitpunkte K_1, K_2, K_3	:	6, 26, 125

Die Optionen unterscheiden sich nur hinsichtlich der Lage der Barrier und der Anzahl der Kontrollzeitpunkte.⁴²

Die in den Beispielrechnungen berücksichtigten Bewertungsmodelle sind das BIN2-Modell, das im folgenden der Einfachheit halber nur noch als BIN-Modell bezeichnet wird, das TRIN1-Modell als Referenzmodell und das TRIN2-Modell. Ziel der Beispielrechnungen ist es, eine Antwort auf die Frage zu finden, mit welchem Bewertungsverfahren die meisten Optionspreise pro Minute (Geschwindigkeit) einer bestimmten Option ermittelt werden können, wenn der Absolutbetrag des relativen Fehlers höchstens $\epsilon > 0$ (Genauigkeit) betragen darf.

⁴² Die Werte $K_1 = 6$, $K_2 = 26$ bzw. $K_3 = 125$ entsprechen bei $T = 0,5$ einer monatlichen, wöchentlichen bzw. täglichen Überprüfung der Barrier.

Der von der Baumtiefe M abhängige relative Fehler RE_i des Verfahrens i ist definiert als⁴³

$$RE_i(M) = \frac{f_i(M) - f_{exakt}}{f_{exakt}}, \quad \text{für } i \in \{\text{BIN, TRIN1, TRIN2}\}. \quad (45)$$

Der Optionspreis, den das Verfahren i bei einer Baumtiefe M liefert, wird dabei mit $f_i(M)$ bezeichnet. Für diskrete Down-and-Out-Optionen sind zwar keine analytischen Lösungen verfügbar, so daß f_{exakt} streng genommen nicht bekannt ist. Jedoch unterscheiden sich die nach den Modellen BIN, TRIN1 und TRIN2 berechneten Optionspreise für genügend feine Baumstrukturen nur noch marginal. Bei einer Baumtiefe von $M = 15000$ liefern die drei Modelle jeweils bis auf die vierte Nachkommastelle identische Optionspreise. Diese Preise verwenden wir für f_{exakt} .

Die Berechnung von $f_i(M)$ wird nur für ausgewählte M , im folgenden auch Stützstellen genannt, durchgeführt. Die Stützstellen eines Verfahrens i werden in der Menge Θ_i zusammengefaßt. Bei gegebener Anzahl an Kontrollzeitpunkten K und gegebener Barrier H sei die Stützstellenmenge Θ_i für das Verfahren i definiert als

$$\Theta_i = \{K, 2 \cdot K, 3 \cdot K, \dots, v_i \cdot K\}, \quad \text{für } i \in \{\text{BIN, TRIN1, TRIN2}\}$$

mit

$$v_i = \max \{v_i^* \in \mathbb{N} : \text{Rechenzeit bei Baumtiefe } M_i = v_i^* \cdot K \leq 1 \text{ Minute}\}.$$

Diese Standardisierung ist notwendig, um allen Verfahren die gleichen Chancen einzuräumen.⁴⁴

Für die spätere Ermittlung der maximal pro Minute berechenbaren Optionspreise muß zuerst für jedes Verfahren die minimale Anzahl von Zeitschritten M , im folgenden als Minimum Convergence Step (*MCS*) bezeichnet, berechnet werden, die nötig sind, um ein vorgegebenes Genauigkeitsniveau ϵ zu erreichen, oder äquivalent dazu, eine vorgegebene Fehler-schranke ϵ zu unterschreiten.⁴⁵ Der $MCS_{i,j}$ des Verfahrens i für ein beliebig gewähltes Genauigkeitsniveau $\epsilon_j > 0$ ist dann gegeben durch⁴⁶

$$MCS_{i,j} = \min \{M \in \Theta_i : |RE_i(m)| \leq \epsilon_j, \text{ für alle } m \in \Theta_i \geq M\}. \quad (46)$$

⁴³ Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden immer nur eine ganz bestimmte Option betrachtet, d.h. $H \in \{H_1, H_2, H_3\}$ und $K \in \{K_1, K_2, K_3\}$ sind fix.

⁴⁴ Die obere Zeitschranke für die Rechenzeit wurde auf einen in der Praxis oft noch als akzeptabel eingestuften Wert gesetzt.

⁴⁵ Das hier verwendete Konzept des MCS lehnt sich an eine Arbeit von Tian aus dem Jahre 1993 an. Vgl. Tian (1993, S. 571–572).

⁴⁶ Ist $\Theta = \{l : l = nk \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$, so entspricht die Gleichung (46) der mathematischen Definition der Konvergenz einer Folge. Vgl. z.B. Bronstein et al. (1997, S. 365–366).

Tabelle 1. Referenzpreise f_{exakt}

	$K = 6$	$K = 26$	$K = 125$
$H = 90$	6,7389	6,6142	6,5177
$H = 95$	6,0151	5,4118	5,0264
$H = 99$	4,6260	3,0005	2,0300

Die Berechnung des $MCS_{i,j}$ wird in der Simulationsstudie für die zwei Fehlerschranken $\epsilon_1 = 0,5\%$ und $\epsilon_2 = 0,1\%$ durchgeführt.⁴⁷

Die Geschwindigkeit eines Verfahrens i bei gegebener Fehlerschranke ϵ_j ($j = 1, 2$) wird gemessen als die Anzahl der Optionspreise pro Minute $OPM_{i,j}$, die berechnet werden können, wenn die Baumtiefe gleich dem $MCS_{i,j}$ ist.

Die absolute Anzahl der pro Minute ermittelbaren Optionspreise ist wesentlich von der verwendeten Software, der Hardware und auch von den Implementationen der einzelnen numerischen Verfahren abhängig. Da für einen Vergleich jedoch nur die relative Geschwindigkeit der Verfahren relevant ist, bestehen Unterschiede prinzipiell nur in der Verfahrensimplicitation. Aufgrund der prinzipiellen Ähnlichkeit der getesteten Baumverfahren wurde jeweils der gleiche Basisalgorithmus verwendet.

5.1.2 Ergebnisse. Die Werte für f_{exakt} sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Wie erwartet, sinken die Optionspreise bei gegebener Barrier H mit zunehmender Anzahl an Kontrollzeitpunkten K . Hält man K fest, so sinkt c.p. der Optionspreis umso mehr, je näher die Barrier H am aktuellen Aktienkurs S_0 liegt.

Die Berechnungsergebnisse, d.h. die OPM - und in Klammern die MCS -Werte, zeigt Tabelle 2.⁴⁸

Alle drei Modelle erreichen für die neun diskreten Down-and-Out-Optionen die geforderten Genauigkeiten. Generell können umso mehr Optionspreise pro Minute berechnet werden, je weiter sich die Barrier vom aktuellen Aktienkurs entfernt und je geringer die Anzahl der Kontrollzeitpunkte ist. Dies ist dadurch zu erklären, daß die Barrier-Charakteristik immer mehr an Bedeutung verliert und die Option dadurch stärker einer Standardoption ähnelt.

Die OPM -Werte zeigen, daß beide Fehlerschranken beim TRIN2-Modell fast immer deutlich schneller erreicht werden als bei den Modellen BIN und

⁴⁷ Ein relativer Fehler von $0,5\%$ bedeutet, bezogen auf die von uns betrachteten Optionen, eine absolute Abweichung von ungefähr 1 bis 3 Pfennigen. Für die meisten praktischen Anwendungen dürfte dies ausreichen. Um auch die Leistungsfähigkeit der Verfahren bei extremen Genauigkeitsanforderungen zu testen, verwenden wir zusätzlich den ϵ -Wert von $0,1\%$. Der absolute Fehler liegt dann unter 1 Pfennig.

⁴⁸ Die Berechnungen wurden auf einem PC mit 90-MHz-Pentium-Prozessor durchgeführt.

Tabelle 2. Ergebnisse zur Bewertung diskreter Down-and-Out-Calls – In jeder Zelle steht zuerst der *OPM*-Wert (zum Teil gerundet), dahinter in Klammern der *MCS*-Wert. Die höchsten *OPM*-Werte einer Zeile sind fett gedruckt

Barrier H	K	Bewertungsmodell					
		BIN		TRIN1		TRIN2	
<i>Fehlerschranke $\epsilon_1 = 0,5\%$</i>							
90	6	100000	(12)	60000	(18)	150000	(6)
	26	11952	(52)	30000	(26)	19354	(26)
	125	2051	(125)	1355	(125)	1081	(125)
95	6	23076	(42)	8823	(54)	33333	(24)
	26	1945	(156)	1483	(130)	6968	(52)
	125	664	(250)	1355	(125)	1085	(125)
99	6	1363	(174)	130	(450)	3784	(84)
	26	332	(390)	120	(468)	954	(156)
	125	11	(2125)	14	(1375)	93	(500)
<i>Fehlerschranke $\epsilon_2 = 0,1\%$</i>							
90	6	3243	(120)	27273	(30)	50000	(18)
	26	11952	(52)	4043	(78)	7050	(52)
	125	664	(250)	176	(375)	1091	(125)
95	6	1304	(198)	2250	(108)	4200	(78)
	26	56	(962)	134	(442)	365	(260)
	125	6,20	(2875)	12	(1500)	32	(875)
99	6	12	(2082)	17	(1254)	33	(882)
	26	12	(2106)	16	(1274)	37	(832)
	125	1,62	(5625)	1,04	(5000)	2,59	(3125)

TRIN1. Der Geschwindigkeitsvorteil des TRIN2-Modell gegenüber dem anderen Trinomialmodell ist bei einer weniger restriktiven Fehlerschranke von 0,5% besonders stark ausgeprägt. Dies war auch nach Abb. 8 zu erwarten. Der Grund für die Überlegenheit des TRIN2-Modells liegt darin, daß es meist das geforderte Genauigkeitsniveau bereits bei einer geringeren Baumtiefe erreicht als das TRIN1-Modell, was an den geringeren *MCS*-Werten abzulesen ist. Dieser Vorteil wiegt offenbar stärker als der Nachteil, daß das TRIN2-Modell einen höheren Rechenaufwand, bedingt durch die Ermittlung der Gewichtungsfaktoren für die Interpolation, benötigt. Dieser höhere Rechenaufwand läßt sich besonders gut in den Fällen erkennen, in denen die *MCS*-Werte übereinstimmen (siehe z.B. Parameterset $H = 90$, $K = 26$, $\epsilon_1 = 0,5\%$). Hier schneidet das TRIN1-Modell besser ab als das TRIN2-Modell. Vergleicht man das BIN-Modell mit dem TRIN1-Modell, so erweist sich ersteres beim Genauigkeitsniveau $\epsilon_1 = 0,5\%$ insgesamt als überlegen, während es sich beim Genauigkeitsniveau $\epsilon_2 = 0,1\%$ eher

umgekehrt verhält. Die vorgeschlagene Modifikation des naiven Binomialmodells verbessert nach diesen Ergebnissen die Bewertungsgenauigkeit derart, daß das Binomial- an das Trinomialmodell TRIN1 heranreicht.

5.2 Konvergenzordnung

Leisen u. Reimer (1996), Leisen (1996) und Reimer (1997) übertragen das mathematische Konzept der Konvergenzordnung auf die Bewertung von Optionen mit Baumverfahren. Zur Anwendung des Konzepts auf diskrete Down-and-Out-Optionen wird eine Folge von Binomial- oder Trinomialbäumen mit zunehmenden Baumtiefen $M \in \{K, 2K, 3K, \dots\}$ und den zugehörigen Optionspreisen f_M betrachtet. Die Baumfolge besitzt die Konvergenzordnung $\rho > 0$, wenn eine Konstante $\kappa > 0$ dergestalt existiert, daß sich für den Absolutbetrag des Bewertungsfehlers $e_M := |f_M - f_{\text{exakt}}|$ folgende obere Schranke angeben läßt:⁴⁹

$$\forall M \in \{K, 2K, 3K, \dots\} : e_M \leq \frac{\kappa}{M^\rho}.$$

Eine höhere Konvergenzordnung zeigt an, daß sich die obere Schranke für den Absolutbetrag des Bewertungsfehlers mit steigender Zahl von Baumstufen schneller reduziert.

Für Baumverfahren zur Bewertung *diskreter* Barrier-Optionen sind aus der Literatur im Gegensatz zu kontinuierlichen Barrier-Optionen⁵⁰ keine mathematischen Beweise bestimmter Konvergenzordnungen bekannt. Ein optischer Eindruck von der (vermutlichen) Konvergenzordnung läßt sich aber exemplarisch aus Grafiken gewinnen, in denen der logarithmierte Absolutbetrag des Bewertungsfehlers gegen die logarithmierte Baumtiefe abgetragen wird.⁵¹ In einer solchen Grafik stellt wegen $\ln \frac{\kappa}{M^\rho} = \ln \kappa - \rho \ln M$ die obere Schranke für $\ln e_M$ eine Gerade mit dem Ordinatenabschnitt $\ln \kappa$ und der Steigung $(-\rho)$ dar. Abbildung 9 zeigt beispielhaft das Konvergenzverhalten der Modelle TRIN1 und TRIN2 bei der Bewertung einer Down-and-Out-Option mit den Parametern $S_0 = X = 100$, $H = 95$, $R = \delta = 0$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $T = 0,5$ und $K = 26$. Die Grafik suggeriert jeweils eine Konvergenzordnung von etwa 1. Die entsprechenden - hier nicht gezeigten - Grafiken für die übrigen in Abschnitt 5.1 untersuchten Optionen lassen die Tendenz erkennen, daß die Konvergenzordnung des TRIN2-Modells mit größerer Zahl von Überwachungszeitpunkten abnimmt. Sie beträgt bei $K = 125$ für die Beispieloptionen etwa 0,75. Gleiches gilt

⁴⁹ Die Konvergenzordnung ist nicht eindeutig. Eine Baumfolge mit Konvergenzordnung ρ besitzt auch jede Konvergenzordnung ρ^* mit $0 < \rho^* < \rho$.

⁵⁰ Vgl. Reimer (1997, S. 73 ff.).

⁵¹ Vgl. Leisen u. Reimer (1996).

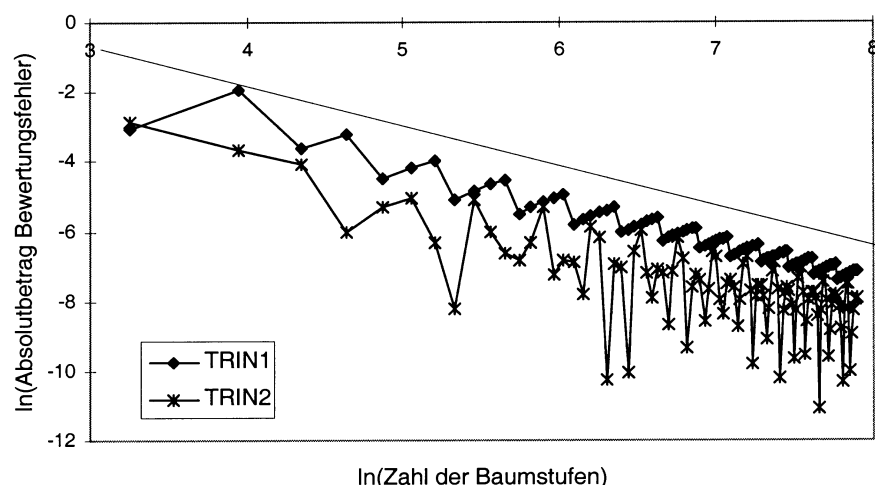


Abb. 9. Grafische Abschätzung der Konvergenzordnung; Optionsparameter: $S_0 = X = 100$, $H = 95$, $K = 26$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $T = 0,5$, $\delta = R = 0$

für das modifizierte Binomialmodell BIN. Beim TRIN1-Modell scheint die Konvergenzordnung zu sinken, wenn der aktuelle Aktienkurs nahe an die Barrier rückt. Das naive Binomialmodell weist bei den analysierten Optionen eine deutlich geringere Konvergenzordnung von etwa 0,5 auf. Der Ordinatenabschnitt $\ln \kappa$, der die Anfangsgenauigkeit der Modelle mißt, fällt in den meisten Fällen beim TRIN2-Modell am günstigsten aus.

5.3 Verfahrensvergleich auf der Basis simulierter Optionen

Die vorstehenden Berechnungsbeispiele reichen noch nicht aus, um gesicherte Erkenntnisse über die Qualität der Bewertungsverfahren zu gewinnen. Weiteren Aufschluß soll eine Simulationsstudie mit 1000 Down-and-Out-Call-Optionen geben, deren Parameterwerte durch eine Zufallsauswahl bestimmt wurden (vgl. Tabelle 3).

Die Zahl der Kontrollzeitpunkte K wird in Abhängigkeit von T wie folgt festgelegt:

$$K = \begin{cases} 12T & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \text{ (monatlich)} \\ \text{int}(52T) + 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \text{ (wöchentlich)} \\ \text{int}(250T) + 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \text{ (täglich)} \end{cases} \quad (47)$$

In der Simulation vergleichen wir das in dieser Arbeit vorgestellte TRIN2-Modell mit dem Referenzmodell TRIN1. Der Vergleich soll für Baumtiefen M^* von 100, 200, 500, 1000 und 2000 durchgeführt werden. Da allerdings

Tabelle 3. Auswahl der Bewertungsparameter

Parameter	Parameterbereich	Auswahl
S	100	fix
X	[75; 125]	Gleichverteilung
H	[85; 99]	Gleichverteilung
R	0	fix
r	[0, 02; 0, 10]	Gleichverteilung
δ	[0; 0, 05]	Gleichverteilung
σ	[0, 05; 0, 50]	Gleichverteilung
T	$\{\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{24}{12}\}$	Gleichverteilung
K	wöchentlich, monatlich, täglich	Gleichverteilung

bei unserer Implementation annahmegemäß die Anzahl der Baumstufen einem Vielfachen der Zahl der Überwachungszeitpunkte entsprechen muß, kann die tatsächlich verwendete Baumtiefe geringfügig von M^* abweichen. Sie berechnet sich nach der Formel $M = \text{int}(M^*/K + 0,5) \cdot K$.

Die Genauigkeit der Verfahren soll anhand relativer Fehlermaße verglichen werden. Bei sehr kleinen Optionspreisen erzeugen bereits geringe absolute Abweichungen extrem hohe relative Fehler. Daher beziehen wir in die Auswertungen nur Optionen ein, deren Referenzpreis mindestens 0,02 beträgt. Von den 1000 Optionen erfüllen 971 dieses Kriterium.⁵²

Wenn die Zahl der Kontrollzeitpunkte K größer ist als die Zahl der Baumstufen M^* , reicht diese Baumtiefe zur Bewertung der Option nicht aus. Beispielsweise erfordert eine Option mit einer Restlaufzeit von 1,5 Jahren und täglicher Barrier-Überprüfung insgesamt 375 Kontrollzeitpunkte, die mit Baumtiefen von 100 und 200 nicht erreichbar sind. Aus diesem Grund können für $M^* = 100$ nur 664 und für $M^* = 200$ insgesamt 752 der 1000 simulierten Optionen bewertet werden. Ab einer Baumtiefe von 500 tritt das Problem nicht mehr auf, weil die maximale Zahl der Kontrollstufen 500 beträgt (tägliche Überwachung bei 2 Jahren Restlaufzeit).

Das Trinomialmodell setzt, wie bereits erwähnt, einen Dispersionsparameter λ größer oder gleich Eins voraus. Nach der im TRIN1-Modell verwendeten Berechnungsformel (35) ergeben sich aber für einen Teil der simulierten Optionen Dispersionsparameter kleiner Eins. In diesen Fällen führt das TRIN1-Modell zu falschen Optionspreisen und ist damit nicht mehr anwendbar.⁵³ Bei Baumtiefen M^* von 100, 200, 500, 1000 und 2000 beträgt die Zahl der davon betroffenen Optionen 67, 36, 23, 10 und 2.

⁵² Eine Kontrollrechnung zeigt, daß der Ausschluß der Optionen mit einem Preis kleiner 0,02 die Ergebnisse nicht nennenswert beeinflusst.

⁵³ Im TRIN2-Modell tritt dieses Problem nicht auf, weil immer der gleiche Dispersionsparameter größer Eins verwendet wird (s. Gleichung 32).

Als Referenzpreis dient für jede Option der TRIN1-Wert bei einer Baumtiefe von $M = \text{int}(15000/K + 0,5) \cdot K$. Hier liegt der Dispersionsparameter immer über Eins.

Für die Verfahren i ($i \in \{\text{TRIN1}, \text{TRIN2}\}$) berechnen wir mit j als Index für die zufällig gewählten Optionen und $z_i(M^*)$ als Anzahl berechenbarer Optionen mit Verfahren i bei einer Baumtiefe M^* die Fehlermaße

- durchschnittlicher Absolutbetrag des relativen Fehlers⁵⁴

$$\overline{RE}_i(M^*) = \frac{1}{z_i(M^*)} \sum_{j=1}^{z_i(M^*)} |RE_{i,j}(M_j)|$$

mit $M_j = \text{int}(M^*/K_j + 0,5) \cdot K_j$ (48)

- Wurzel aus dem durchschnittlichen quadrierten Fehler (Root Mean Squared Error)

$$RMSE_i(M^*) = \sqrt{\frac{1}{z_i(M^*)} \sum_{j=1}^{z_i(M^*)} [RE_{i,j}(M_j)]^2}. \quad (49)$$

Neben diesen Fehlermaßen sind in Tabelle 4 zusätzlich abgetragen:

- die Anzahl der in die Berechnungen einbezogenen Optionen z ,
- die Standardabweichung des relativen Fehlers

$$STD_i(M^*) = \sqrt{\frac{1}{z_i(M^*)} \sum_{j=1}^{z_i(M^*)} [RE_{i,j}(M_j) - \overline{RE}_i(M^*)]^2}, \quad (50)$$

- der maximale Absolutbetrag des relativen Fehlers (*Max*),
- der prozentuale Anteil positiver relativer Fehler (*Pos*),
- die Anzahl der pro Minute berechenbaren Optionspreise (*OPM*) und
- der prozentuale Anteil der Optionen, die von TRIN2 mit einem geringeren Fehler im Vergleich zu TRIN1 bewertet werden ($\text{TRIN2} > \text{TRIN1}$).⁵⁵

Wegen der erforderlichen Modifikationen der Baumberechnung benötigt das TRIN2-Modell bei gegebener Baumtiefe erwartungsgemäß eine etwas höhere Rechenzeit als das TRIN1-Modell (vgl. die Angaben zum *OPM*). Dafür schneidet TRIN2 bei sämtlichen Fehlerstatistiken besser ab: Gemessen am durchschnittlichen relativen Fehler, der Fehlerstreuung und der maximalen Abweichung vom „wahren“ Wert übertrifft TRIN2 das Modell TRIN1

⁵⁴ Zur Definition des relativen Fehlers RE einer einzelnen Option vgl. Gleichung (45).

⁵⁵ Hierbei wurden nur Optionen berücksichtigt, für die der TRIN1-Optionspreis berechnet werden konnte (Dispersionsparameter größer oder gleich Eins).

Tabelle 4. Simulationsergebnisse

	$M^* = 100$	$M^* = 200$	$M^* = 500$	$M^* = 1000$	$M^* = 2000$
	TRIN1				
z	597	716	948	961	969
\overline{RE} (in %)	2,038	1,119	0,634	0,316	0,124
$RMSE$ (in %)	7,022	3,844	2,523	1,302	0,476
STD (in %)	6,827	3,732	2,462	1,269	0,467
Max (in %)	119,6	54,0	29,8	18,6	6,9
Pos (in %)	82,9	86,9	88,9	91,3	89,1
OPM	3135	732	111	27	6
	TRIN2				
z	664	752	971	971	971
\overline{RE} (in %)	0,349	0,233	0,177	0,106	0,054
$RMSE$ (in %)	0,559	0,381	0,336	0,223	0,118
STD (in %)	0,545	0,427	0,333	0,220	0,113
Max (in %)	4,5	2,9	2,8	2,1	0,7
Pos (in %)	71,5	65,7	51,5	47,0	42,3
OPM	2616	648	103	25	6
$TRIN2 > TRIN1$	77,7%	80,0%	76,2%	79,2%	72,7%

bei allen getesteten Baumtiefen deutlich. Die Beurteilung des Tradeoffs aus Genauigkeit und Geschwindigkeit fällt eindeutig zugunsten von TRIN2 aus. Stellt man die Ergebnisse des TRIN2-Modells jenen gegenüber, die das TRIN1-Modell mit der *nächsthöheren* getesteten Baumtiefe erzielt, so erreicht TRIN2 jeweils bei *geringerer* Rechenzeit eine *höhere* Genauigkeit. Schon bei 100 Baumstufen liegt der durchschnittliche relative Fehler \overline{RE} des TRIN2-Verfahrens unter 0,5%. Bei gleicher Baumtiefe werden etwa drei Viertel aller simulierten Optionen mit TRIN2 genauer als mit TRIN1 bewertet.⁵⁶ Die Ergebnisse bleiben weitestgehend unverändert, wenn in die Ergebnisstatistiken für TRIN2 nur jene Optionen einbezogen werden, für die auch ein Preis nach dem TRIN1-Modell vorliegt.

Als Alternative zu den numerischen Bewertungsverfahren schlagen Broadie et al. (1997) vor, die Barrier so nach unten zu korrigieren, daß die für kontinuierliche Down-and-Out-Optionen gültigen Bewertungsformeln einen annähernd korrekten Wert für diskrete Barrier-Optionen ergeben. Die Kontinuitätskorrektur verschiebt die Barrier von H auf das neue Niveau

⁵⁶ Es fällt auf, daß das TRIN1-Modell die Optionspreise meist überschätzt, während das TRIN2-Modell die Preise bei geringer Baumtiefe tendenziell über- und bei hoher Baumtiefe unterschätzt. Hierfür können wir keine befriedigende Erklärung anbieten.

$He^{-\beta\sigma\sqrt{T/K}}$ mit $\beta \approx 0,5826$. Angewendet auf die 971 simulierten Optionen, die einen Referenzpreis von mindestens 0,02 aufweisen, führt das Verfahren zu einem mittleren Absolutbetrag des relativen Fehlers von $\overline{RE} = 0,85\%$ und einem maximalen relativen Fehler von 13,50%. Etwa 55% aller Optionen werden genauer bewertet als mit dem TRIN2-Modell bei einer Baumtiefe von $M^* = 100$. Diese Werte zeigen, daß das Verfahren von Broadie et al. (1997) meist sehr genaue Optionspreise liefert, in manchen Fällen aber beträchtliche Bewertungsfehler auftreten. Die höchsten Fehler entstehen, wenn der Aktienkurs sehr nahe an der Barrier liegt.⁵⁷ Unter den 971 simulierten Optionen befinden sich 52, die eine Barrier größer 98 aufweisen (aktueller Aktienkurs jeweils 100). Davon werden 51 (98%) mit dem TRIN2-Modell für $M^* = 100$ genauer bewertet als mit der Kontinuitätskorrektur nach Broadie et al. (1997). Von insgesamt 184 Optionen mit $H > 95$ ergibt das TRIN2-Modell (wiederum für $M^* = 100$) für 144 Optionen (78%) geringere Bewertungsfehler. Folglich liegt ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der Kontinuitätskorrektur darin, daß es auch eingesetzt werden kann, wenn sich der Aktienkurs in der Nähe der Barrier befindet.⁵⁸

6 Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Bewertung diskreter Knock-Out-Optionen unter der üblichen Annahme, daß die Aktienkurse einer geometrischen Brownschen Bewegung gehorchen. Aus der Literatur ist bekannt, daß hier die naive Anwendung der Baumverfahren zu beträchtlichen Bewertungsfehlern führen kann. Entscheidend für das Bewertungsergebnis ist die Lage der Barrier im Baum. Idealerweise liegt die Barrier exakt in der Mitte zwischen zwei horizontalen Knotenschichten. Nach diesem Kriterium könnte man jene Baumtiefen herausuchen, die zu einer guten Approximation führen. Als Alternative bietet sich eine Anpassung an, die die spezifische Lage der Barrier berücksichtigt. Cheuk u. Vorst (1996b) schlagen hierzu eine spezielle Strukturierung des Baums vor, dagegen verändern Derman et al. (1995) bei gleichbleibender Baumstruktur lediglich die Optionspreise an einzelnen Baumknoten.

Der Vorschlag von Derman et al. ist auf den Fall einer kontinuierlichen Barrier-Überprüfung ausgerichtet. In Anlehnung an die Grundidee dieser Modifikation stellen wir eine verfeinerte und erweiterte Korrektur für den Fall einer diskreten Barrier-Überprüfung vor. Dieser Ansatz kann problemlos auf das Trinomialmodell übertragen werden. Im Trinomialmodell be-

⁵⁷ Auf dieses Problem weisen Broadie et al. (1997, S. 326), selbst hin.

⁵⁸ Hinzu kommt, daß die Kontinuitätskorrektur anders als das Trinomialmodell eine konstante Barrier voraussetzt.

stünde andererseits, wie Ritchken (1995) erstmalig gezeigt hat, die Möglichkeit, den zusätzlich vorhandenen Freiheitsgrad zu nutzen, um die optimale Lage der Barrier zu erreichen. Im Simulationsteil dieser Arbeit vergleichen wir die beiden Varianten des Trinomialmodells und zusätzlich die modifizierte Version des Binomialmodells. Die Ergebnisse legen den Schluß nahe, daß die hier vorgestellten Modelle schon bei geringer Baumtiefe hinreichend genaue Optionspreise liefern. Das nach unserem Vorschlag erweiterte Trinomialmodell erweist sich in diesen Simulationen unter Genauigkeits- und Geschwindigkeitsaspekten dem Ansatz von Tian (1997) insgesamt als überlegen. Annähernd korrekte Preise ergeben sich auch dann, wenn der Aktienkurs sehr nahe an der Barrier liegt.

Ein besonderer Vorteil der hier gezeigten Korrekturverfahren ist ihre große Flexibilität. Weil die Baumstruktur unverändert bleibt und nur einzelne Knotenwerte angepaßt werden, ist es z.B. möglich, auf diese Weise Moving-Barrier- und Double-Barrier-Optionen zu bewerten.

References

- Andersen L, Brotherton-Ratcliffe, R (1996) Exact exotics. *RISK* 9: 86–89
- AitSahlia F, Lai TL (1997) Valuation of discrete barrier and hindsight options. *Journal of Financial Engineering* 6: 169–177
- Beaglehole DR, Dybvig PH, Zhou G (1997) Going to extremes: correcting simulation bias in exotic option valuation. *Financial Analysts Journal* 53: 62–68
- Berger E (1995) Barrier options. In: Nelken I (ed) *The handbook of exotic options*. McGraw-Hill, Chicago, pp 213–243
- Boyle PP, Lau SH (1988) A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23: 1–12
- Boyle PP (1994) Bumping up against the barrier with the binomial method. *Journal of Derivatives* 1: 6–14
- Broadie M, Detemple J (1997) Recent advances in numerical methods for pricing derivative securities. In: Rogers LCG, Talay D (eds) *Numerical methods in finance*, Cambridge University Press, Cambridge, pp 43–66
- Broadie M, Glasserman P, Kou S (1997) A continuity correction for discrete barrier options. *Mathematical Finance* 7: 325–349
- Bronstein IN, et al. (1997) *Taschenbuch der Mathematik*, 3. Aufl. Deutsch, HIBRO, Frankfurt am Main
- Brooks R, Corson J, Wales JD (1994) The pricing of index options when the underlying assets all follow lognormal diffusions. *Advances in Options and Futures Research* 7: 65–85
- Burkhardt T (1994) Down-and-Out Optionen. Gabler, Wiesbaden
- Cheuk T, Vorst T (1996a) Breaking down barriers. *RISK* 9: 64–67
- Cheuk T, Vorst T (1996b) Complex barrier options. *Journal of Derivatives* 4: 8–22
- Cox JC, Ross SA, Rubinstein M (1979) Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7: 229–264
- Cox JC, Rubinstein M (1985) *Options markets*. Prentice Hall, Englewood Cliffs
- Derman E. u.a (1995) Enhanced numerical methods for options with barriers. *Financial Analysts Journal* 51: 65–74

- Fisz M (1989) *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, 11. Aufl. Dt. Verlag d. Wiss., Berlin
- Geske R, Shastri K (1985) Valuation by approximation: a comparison of alternative option valuation techniques. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 20: 45–71
- Harrison JM, Kreps DM (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory* 20: 381–408
- Harrison JM, Pliska SR (1981) Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Application* 11: 215–260
- Heynen RC, Kat HM (1996) Discrete partial barrier options with a moving barrier. *Journal of Financial Engineering* 5: 199–209
- Hull JC (1997) *Options, futures, and other derivatives*, 3rd edn., Prentice Hall, Englewood Cliffs
- Kat H, Verdonk L (1995) Tree surgery. *RISK* 8: 53–56
- Leisen D (1996) Pricing the american put option: A detailed convergence analysis for binomial models. Technical Report B-366, SFB 303, Universität Bonn
- Leisen D, Reimer M (1996) Binomial models for option valuation – examining and improving convergence. *Applied Mathematical Finance* 3: 319–346
- Levy E, Mantion F (1997) Approximate valuation of discrete lookback and barrier options. *Electronic Journal of Financial Risk* 2: 1–13
- Lyu Y-D (1998) Very fast algorithms for barrier option pricing and the ballot problem. *Journal of Derivatives* 5: 68–79
- Merton RC (1973) The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141–183
- Omberg E (1988) Efficient discrete time jump process models in option pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23: 161–174
- Peizer DB, Pratt JW (1968) A normal approximation for binomial, f , beta, and other common, related tail probabilities. *The Journal of the American Statistical Association* 63: 1416–1483
- Reimer M (1997) Examining binomial option price approximations. Dissertation, Bonn
- Reimer M, Sandmann K (1993) Down-and-out call. Discussion Paper B-239, Universität Bonn
- Reimer M, Sandmann K (1995) A discrete time approach for European and American barrier options. Working Paper, Universität Bonn
- Ritchken P (1995) On pricing barrier options. *Journal of Derivatives* 2: 19–28
- Roger LCG, Stapleton EJ (1998) Fast accurate binomial pricing. *Finance and Stochastics* 2: 3–17
- Rogers LCG, Zane O (1997) Valuing moving barrier options. *Journal of Computational Finance* 1: 5–11
- Tian Y (1993) A modified lattice approach to option pricing. *Journal of Futures Markets* 13: 563–577
- Tian Y (1997) Pricing options with discontinuous barriers. *Journal of Financial Engineering* 6: 193–216
- Tsokos CP (1972) *Probability distributions: an introduction to probability theory with applications*. Duxbury Press, Belmont