manuscripta math. 100, 455 – 468 (1999)

Bruno Chiarellotto · Bernard Le Stum

Pentes en cohomologie rigide et F-isocristaux unipotents

Received: 23 December 1998 / Revised version: 5 July 1999

Abstract We study the slopes of Frobenius on the rigid cohomology and the rigid cohomology with compact support of an algebraic variety over a perfect field of positive characteristic. We then prove that any unipotent overconvergent F-isocrystal on a smooth variety has a slope filtration whose graded parts are pure.

Introduction

Dans cet article, nous démontrons un théorème général de filtration par les pentes pour les F-isocristaux unipotents. Ce résultat est implicitement conjecturé dans [C-LS1] ou nous traitons le cas particulier ou la base est un ouvert de la droite affine.

Pour résoudre ce problème, nous utilisons des techniques tannakiennes analogues à celles de [Ch]. En effet, si une approche directe est possible lorsque l'on travaille sur un ouvert de la droite affine, c'est parce que la cohomologie d'une telle variété est pure (c'est à dire, les espaces de cohomologie ont une seule pente). Dans ce cas, les gradués pour la filtration par les pentes sont constants. En général, ce n'est pas le cas et les techniques tannakiennes permettent de contourner cette difficulté. Nous démontrons donc dans la troisième partie le théorème suivant (Théorème 3.2.3) :

Soit X une variété lisse sur k algébriquement clos et E un F-isocristal surconvergent unipotent sur X/K. Alors, E possède une filtration $\mathrm{Fil}_\lambda E$ *telle que* $\mathrm{Gr}_\lambda E$ *soit pur de pente* λ.

Afin d'obtenir ce théorème, il est nécessaire de comprendre les pentes du Frobenius agissant cohomologie rigide et sur la cohomologie rigide à support compact. En effet, on a (Théorème 3.1.2) :

Bruno Chiarellotto: Dipartimento di Matematica, Università di Padova, via Belzoni 7, 35100 Padova, Italia. e-mail: chiarbru@math.unipd.it

Bernard Le Stum: IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France. e-mail: lestum@univ-rennes1.fr

Mathematics Subject Classification (1991): 14F30

Si X est une variété algébrique de dimension d sur k algébriquement clos, les pentes de $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$ sont positives et au plus égales à d. Elles sont aussi comprises entre $i-d$ et i. Nous avons les mêmes résultats pour $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$ si X est lisse.

Dans ce théorème, les résultats concernant la cohomologie rigide et la cohomologie rigide à support compact sont duaux l'un de l'autre. Afin de pouvoir réellement utiliser la dualité de Poincaré en cohomologie rigide telle qu'elle est développée dans [B4] par P. Berthelot, il est nécessaire de montrer que celle ci est compatible avec les actions de Frobenius. C'est ce que nous faisons dans la Sect. 2.1. Comme corollaire, on obtient que les morphismes de Gysin sont aussi compatibles aux actions de Frobenius, généralisant là un résultat local de [Ch]. On généralise aussi des résultats de [E-LS] en montrant que le morphisme trace est compatible aux Frobenius et que le Frobenius est bijectif sur la cohomologie. Ces résultats sont étendus au cas où les coefficients sont des F-isocristaux unités dans un travail en préparation de N. Tsusuki ([T]).

Dans la Sect. 2.1, on rappelle comment la notion d'algèbre enveloppante complétée permet d'étudier les F-isocristaux unipotents. Et dans l'appendice, nous rappelons, faute de référence adéquate, les techniques qui permettent de passer des groupes unipotents aux algèbres enveloppantes complétées.

Enfin, dans [C-LS1], comme dans [Ch], nous nous limitions aux variétés lisses qui possèdent une compactification qui se relève formellement en caractéristique zéro. Bien que cette condition soit satisfaite dans le cas affine et lisse par exemple, nous étions convaincu que cette restriction était de nature technique. En effet, nous avions besoin de calculer des classes d'extensions d'isocristaux à l'aide d'un H^1, et pour se faire il était nécessaire de faire commuter des espaces de cohomologie avec des limites inductives. En fait, comme nous l'avait suggéré P. Berthelot, on peut contourner cette difficulté en utilisant les techniques des $\mathcal{D}$-modules. C'est ce que nous faisons dans la première partie de ce papier. Nous démontrons donc (Proposition 1.2.1) :

Si E', E'' sont deux isocristaux surconvergents sur une variété algébrique X, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \stackrel{\sim}{\to} H^1_{\mathrm{rig}}\left(X, \mathcal{H}\mathrm{om}(E'', E')\right).$$

En particulier, on voit que la plupart des résultats de [C-LS1] et [Ch] sont toujours valides sans hypothèse de relèvement d'une compactification.

Conventions

Nous dirons variété algébrique pour schéma séparé de type fini sur un corps. Dans tout cet article, on travaille sur un corps ultramétrique complet K de caractéristique nulle. On note $\mathcal{V}$ son anneau de valuation et k son corps résiduel. Lorsqu'on parle de schéma formel, il s'agit toujours de schéma formel localement topologiquement de présentation finie pour la topologie de $\mathcal{V}$. Dans la seconde partie, on suppose la valuation discrète et k parfait de caractéristique positive et on fixe une puissance $q = p^f$ de p. Lorsque nous parlerons de Frobenius, il s'agira toujours du f-ième itéré du Frobenius usuel. On muni K d'un relèvement σ du Frobenius de k. Enfin, dans la troisième partie, on suppose que k est algébriquement clos et que K est obtenu à partir du corps de fractions des vecteurs de Witt de k en ajoutant une racine de p ; on suppose que cette racine est fixée par σ.

1. Extensions et $\mathcal{D}$-modules

Afin de traiter nos problèmes en toute généralité, nous développons une idée de Pierre Berthelot qui suggérait d'utiliser les $\mathcal{D}$-modules. On peut ainsi se débarrasser d'hypothèses géométriques désagréables qui apparaissaient dans [C-LS1].

1.1. Ext supérieurs de modules différentiels en géométrie analytique rigide

Nous discutons brièvement la notion d'opérateur différentiel algébrique sur une variété analytique rigide. Ce sont des résultats dont les analogues algébriques et analytiques complexes sont bien connus. Ceux-ci ne nous servirons pas dans la suite mais les définitions sont indispensables pour démontrer la Proposition 1.2.3. Remarquons aussi que la démonstration de cette dernière proposition, est identique à celle de 1.1.2.

On rappelle que K désigne un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle.

1.1.1. Opérateurs différentiels en géométrie analytique rigide Soit V une variété analytique rigide lisse sur K. Il y a différentes manières de construire le faisceau des opérateurs différentiels algébriques $\mathcal{D}_V$ sur V. Considérons le n-ième voisinage infinitésimal P_V^n de V dans $V \times V$: si on note $\mathcal{I}_V$ l'idéal de V dans $V \times V$, alors P_V^n n'est autre que la sous-variété définie par $\mathcal{I}_V^{n+1}$ dans $V \times V$. Celle-ci est supportée par V et son faisceau structural est le faisceau $\mathcal{P}_V^n$ des parties principales d'ordre n. On muni celui-ci de la structure de $\mathcal{O}_V$-module qui provient de l'action à gauche. C'est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent et on note $\mathcal{D}_{Vn}$ son dual – qui est donc aussi cohérent. *C'est le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre au plus n sur V*. Comme les faisceaux $\mathcal{P}_V^n$ forment de manière naturelle un système projectif de $\mathcal{O}_V$-modules, les $\mathcal{D}_{Vn}$ forment un système inductif de $\mathcal{O}_V$-modules dont la limite se note $\mathcal{D}_V$. Enfin, on dispose de morphismes naturels $\mathcal{P}_V^{n+n'} \longrightarrow \mathcal{P}_V^n \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{P}_V^{n'}$ qui fournissent par dualité une structure d'anneau "filtré" sur $\mathcal{D}_V$. Enfin, on notera $\mathcal{T}_V$ le faisceau tangent, qui n'est autre que le dual de $\Omega_V^1 := \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

Bien sûr, on obtient localement la description à laquelle on s'attend : si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales sur V et $\tau_1, \ldots, \tau_d$ comme d'habitude, alors $\mathcal{D}_V$ est une $\mathcal{O}_V$-algèbre polynomiale non commutative sur la base duale $\partial_1, \ldots, \partial_d$. On pourrait donc définir $\mathcal{D}_V$ localement et recoller. Remarquons que $\partial_1, \ldots, \partial_d$ forme une base de $\mathcal{T}_V$.

Remarquons aussi que $\mathcal{D}_V$ agit de manière naturelle sur $\mathcal{O}_V$ et que cette action est fidèle. Quitte à identifier $\mathcal{D}_V$ avec son image, on pourrait donc le définir comme sous anneau de $\mathcal{E}\mathrm{nd}_{\mathrm{K}}(\mathcal{O}_{\mathrm{V}})$ en disant que les sections locales de $\mathcal{D}_{V_n}$ sont celles qui satisfont $\left[f_n\left[f_{n-1}[\ldots[f_0,P]\ldots\right]\right]=0$ pour toute suite $f_0,\ldots,f_n$ de sections locales de $\mathcal{O}_V$. Enfin, remarquons que les sections locales de $\mathcal{I}_V$ correspondent alors aux sections locales de $\mathcal{E}\mathrm{nd}(\mathcal{O}_{\mathrm{V}})$ qui satisfont $[D,f]=D(f)$ pour toute section locale f de $\mathcal{O}_V$.

Les résultats classiques sont toujours valides : en passant au gradué, on montre que si V est affinoïde, alors $\Gamma(V,\mathcal{D}_V)$ est noetherien. On en déduit aisément que $\mathcal{D}_V$ est un faisceau d'anneaux cohérent. En utilisant la notion de bonne filtration, on montre les théorèmes A et B. Théorème A : Si V est affinoïde, le foncteur $\mathcal{E}\longrightarrow\Gamma(V,\mathcal{E})$ établit une équivalence entre les $\mathcal{D}_V$-modules cohérents et les $\Gamma(V,\mathcal{D}_V)$-modules de type fini et théorème B : on a $H^i(V,\mathcal{E})=0$ pour $i>0$. Ces résultats ne nous servirons pas.

Remarquons enfin que l'on a une équivalence de catégorie évidente entre $\mathcal{D}_V$-modules et $\mathcal{O}_V$-modules à connexion intégrable.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux $\mathcal{D}_V$-modules, alors $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$, a une structure naturelle de $\mathcal{D}_V$-module donnée localement par $P(u)=[P,u]$, c'est à dire $P(u)(s)=P(u(s))-u\,(P(s))$. De même, $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{E}'$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_V$-module donnée localement par $P(s\otimes t)=P(s)\otimes t+s\otimes P(t)$. On a alors :

Proposition 1.1.2. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux $\mathcal{D}_V$-modules où $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_V$-cohérent, alors pour tout i,*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\simeq H^i_{dR}(V,\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')).$$

Le *complexe de Koszul–De Rham de V* (ou *de Spencer*) est le complexe dont la composante de degré $-t$ est le $\mathcal{D}_V$-module (à gauche) $\mathcal{D}_V\otimes_{\mathcal{O}_V}\Lambda^t\mathcal{I}_V$, ou $\mathcal{D}_V$ est considéré comme $\mathcal{O}_V$-module pour l'action à droite, et la différentielle $\mathcal{D}_V$-linéaire est définie par

$$1\otimes D_1\wedge D_2\wedge\ldots D_t\longmapsto\Sigma(-1)^iD_i\otimes D_1\wedge D_2\wedge\ldots\wedge D_i\wedge\ldots D_t.$$

C 'est une résolution localement libre de $\mathcal{O}_V$ et on a, donc, pourtout $\mathcal{D}_V$-module $\mathcal{E}$,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{O}_V,\mathcal{E})\simeq\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{D}_V\otimes_{\mathcal{O}_V}\Lambda^{\cdot}\mathcal{T}_V,\mathcal{E})\simeq\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_v}\Omega^{\cdot}_V$$

où le complexe de droite est le complexe de de Rham.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux $\mathcal{D}_V$-modules, on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\simeq\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{O}_V,\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')).$$

Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_V$-plat et $\mathcal{E}'$ injectif comme $\mathcal{D}_V$-module, alors, $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ est un $\mathcal{D}_V$-module injectif : on se donne un morphisme injectif $i:\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_v}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\hookrightarrow\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_V$-plat, si on tensorise par $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_V$, on obtient un autre morphisme injectif

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{E}.$$

On considère alors le morphisme d'évaluation $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{E}$ qui est $\mathcal{D}_V$-linéaire. Comme $\mathcal{E}'$ est injectif, celui ci se prolonge en un morphisme $\mathcal{F}$, lequel correspond a un morphisme $\mathcal{F}\to\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ qui est par construction une section de i.

On a donc toujours un isomorphisme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}\left(\mathcal{O}_V, \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\right).$$

Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_V$-cohérent, alors le foncteur $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},-)$ est exact sur les $\mathcal{D}_V$-modules et on a donc

$$\mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_V}\left(\mathcal{O}_V, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\right) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{O}_V}\Omega_V^{\cdot}.$$

En prenant les sections globales, on obtient pour tout i, comme annoncé

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \simeq H^i_{dR}\left(V, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\right). \qquad \square$$

Bien sûr, on peut appliquer le résultat précédent aux modules cohérents à connexion intégrables et retrouver le résultat de [C-LS1], 1.3.1 :

$$\mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E},\mathcal{E}') \simeq H^1_{dR}(V, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{E},\mathcal{E}')).$$

1.2. Ext supérieurs et surconvergence

On désigne toujours par K un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle. On rappelle que $\mathcal{V}$ désigne l'anneau des entiers de K et k son corps résiduel.

1.2.1. Opérateurs différentiels à coefficients surconvergents On se donne un $\mathcal{V}$-schéma formel (topologiquement de présentation finie) P, un sous k-schéma fermé Y de P, un ouvert X de Y et on suppose P lisse au voisinage de X. On renvoie aux articles de P. Berthelot ([B2] et [B3] essentiellement) pour les définitions des tubes, des voisinages stricts ainsi que du foncteur $j^\dagger$ qui associe à un faisceau sur V un faisceau sur $]Y[_P$. Si V est un voisinage strict lisse de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, on peut considérer les faisceaux d'anneaux $j^\dagger\mathcal{O}_V$ et $j^\dagger\mathcal{D}_V$ sur $]Y[_P$. Comme ceux-ci ne dépendent pas de V, nous les noterons tout simplement $j^+\mathcal{O}$ et $j^+\mathcal{D}$. Attention : ne pas confondre $j^\dagger\mathcal{D}$ avec le faisceau $\mathcal{D}^\dagger$ de Berthelot. Nos opérateurs différentiels sont d'ordre fini et on a en fait, tout simplement, $j^\dagger\mathcal{D} = j^\dagger\mathcal{O}\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathcal{D}_V$ (voir [B3], 2.1.3, ii). On peut aussi donner de $j^\dagger\mathcal{D}$ des descriptions analogues à celles de 1.1.1 : en "j-daguant" la construction avec les parties principales, en donnant une description locale ou en considérant les endomorphismes de $j^\dagger\mathcal{O}$.

Il est clair que $j^\dagger\mathcal{D}$ est un faisceau d'anneaux cohérent : cela se démontre comme dans la proposition 2.1.9 de [B3]. Aussi, on a une équivalence de catégories évidente entre $j^\dagger\mathcal{D}$-modules et $j^\dagger\mathcal{O}$-modules à connexion intégrable.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux $j^\dagger\mathcal{O}$-modules, on munit $\mathcal{H}\mathrm{om}_{j^\dagger\mathcal{O}}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ d'une structure de $j^\dagger\mathcal{O}$-module en posant $P(u) = [P, u]$,

Proposition 1.2.2. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux $j^\dagger\mathcal{D}$-modules où $\mathcal{E}$ est $j^\dagger\mathcal{O}$-cohérent, alors pour tout i,*

$$\mathrm{Ext}^i_{j^\dagger\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \simeq H^i_{dR}\left(V, \mathcal{H}\mathrm{om}_{j^\dagger\mathcal{D}}(\mathcal{E},\mathcal{E}')\right).$$

Comme $j^\dagger$ est exact et se comporte bien par rapport aux produits tensoriels, le complexe de Koszul–De Rham $j^\dagger\mathcal{D}_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \Lambda^\cdot \mathcal{T}_V$ est une résolution localement libre du $j^\dagger\mathcal{D}_V$-module $j^\dagger\mathcal{O}_V$ et on continue exactement comme dans la démonstration de 1.1.2. □

En particulier, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux $j^\dagger\mathcal{O}$-modules cohérents à connexion intégrable, et si on note Ext_∇ l'espace vectoriel des classes d'extensions de tels modules, on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \simeq H^1_{dR}\left(V, \mathcal{H}\mathrm{om}_{j^\dagger\mathcal{O}_V}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')\right)$.

1.3. Application aux isocristaux surconvergents

On peut maintenant donner en toute généralité les résultats suivants (voir ([C-LS1] pour des cas particuliers).

Si X est une variété algébrique sur k, on notera $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}\,\dagger}$ l'espace des classes d'isomorphie d'extensions d'isocristaux surconvergents sur X/K.

Proposition 1.3.1. *Soient X une variété algébrique sur k et $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ deux isocristaux surconvergents sur X. On a un isomorphisme fonctoriel en X, E et K*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \overset{\simeq}{\to} H^1_{\mathrm{rig}}\left(X, \mathcal{H}\mathrm{om}(E'', E')\right).$$

Si on plonge X dans un schéma formel P de telle sorte que l'adhérence de X dans P soit propre et que P soit lisse au voisinage de X, et si on note par un indice P la réalisation d'un isocristal sur P, il résulte de la proposition 1.2.2 de [C-LS1] que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E, E') = \mathrm{Ext}_\nabla(E''_P, E'_P)$ et notre assertion est donc une conséquence directe de 1.2.2. □

On suppose k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et on se donne un Frobenius σ sur K. Soit X une variété algébrique sur k. On note $\mathrm{Ext}_{F-\mathrm{Iso}\dagger}$ l'espace des classes d'extensions de F-isocristaux surconvergents.

Corollaire 1.3.2. *Si E' et E'' sont deux F-isocristaux surconvergents sur X, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{F-\mathrm{Iso}\,\dagger}(E'', E') \overset{\simeq}{\to} H^1_{\mathrm{rig}}\left(X, \mathcal{H}\mathrm{om}(E'', E')\right)^{\varphi=1}.$$

On suppose maintenant que k contient $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^f$ et on note $X = X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ avec X_0 variété algébrique lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note F_{X_0} la puissance f-ième du Frobenius absolu de X_0 et $F_X = F_{X_0} \otimes_{\mathbb{F}_q} k$. On a alors :

Corollaire 1.3.3. *Le foncteur $(F_{X_0} \otimes_{\mathbb{F}_q} k)^*$ induit une auto-équivalence de la catégorie des isocristaux surconvergents unipotents sur X.*

En vertu de ces résultats, dans [Ch], chapitres II et III, il n'est pas nécessaire de supposer que X est un ouvert lisse de la fibre spéciale d'un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et plat, mais seulement que X est lisse.

2. Frobeniuseries

On suppose maintenant que la valuation est discrète et que k est parfait de caractéristique $p > 0$. On fixe un entier positif non nul f et on pose $q = p^f$. Lorsque nous parlerons de Frobenius, il s'agira toujours du f-ième itéré du Frobenius absolu. On se donne un Frobenius σ sur K. Si X est un k-schéma, on note F_X le Frobenius de X et $F_{X/k}$ le Frobenius relatif. Enfin, on rappelle que $K(-n)$ désigne K muni du Frobenius $q^n\sigma$.

2.1. Dualité de Poincaré et Frobenius

Nous allons utiliser les techniques de Berthelot-de Jong pour étudier l'action du Frobenius sur la cohomologie rigide. On démontre tout d'abord (voir la proposition 4.2 de [E-LS] pour un cas particulier) :

Lemme 2.1.1. *Si X est une variété algébrique de dimension d sur k, le morphisme trace*

$$\mathrm{Tr}_X : H^{2d}_{\mathrm{rig},c}(X) \xrightarrow{\sim} K(-d).$$

est compatible avec les actions de Frobenius.

Dans cette démonstration, on utilise librement les résultats de la première section de [B5]. Tout d'abord, quitte à remplacer X par le sous-schéma réduit sous-jacent, on peut supposer X réduit. De plus, comme Tr_X est additive et ne dépend que d'un ouvert dense de X, on peut supposer que X est intègre. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de de Jong (voir [B4], théorème 3.4, et bien sûr [dJ]). Il existe une variété projective lisse X' sur k, un ouvert non vide affine et lisse U (resp. U') de X (resp. X') et un morphisme fini étale $f : U' \to U$. Comme l'isomorphisme naturel $H^i_{\mathrm{cris}}(X') \otimes K \simeq H^i_{\mathrm{rig}}(X')$ est compatible aux morphismes traces ([B5], 1.7.i)), notre assertion est vraie pour X'. Elle l'est donc aussi pour U'. D'autre part, le morphisme naturel $f^* : H^{2d}_{\mathrm{rig},c}(U) \to H^{2d}_{\mathrm{rig},c}(U')$ possède une section Tr_f compatible aux morphismes traces. Comme ces deux espaces sont de même dimension 1, Tr_f est bijectif et l'assertion est donc vraie pour U. Et donc aussi pour X. □

Proposition 2.1.2. *Soit X une variété lisse de dimension d sur k, alors l'accouplement de Poincaré*

$$H^i_{\mathrm{rig},c}(X) \times H^{2d-i}_{\mathrm{rig}}(X)(d) \longrightarrow K$$

est compatible avec les actions de Frobenius.

On dispose d'un morphisme naturel en cohomologie

$$H^i_{\mathrm{rig},c}(X) \otimes_K H^{2d-i}_{\mathrm{rig}}(X) \longrightarrow H^{2d}_{\mathrm{rig},c}(X).$$

C'est donc un morphisme de F-isocristaux. Comme par définition, l'accouplement de Poincaré se déduit de ce morphisme en composant avec le morphisme trace, notre assertion découle formellement du lemme précédent. □

On en déduit (cf. [C, 2.4]) :

Corollaire 2.1.3. *Si X est une variété lisse sur k et si Z est un fermé lisse de codimension r dans X, le morphisme de Gysin*

$$H^{i-2r}_{\mathrm{rig}}(Z)(-r) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(X)$$

est compatible avec les actions de Frobenius.

En effet, le morphisme de Gysin se déduit par dualité de Poincaré du morphisme naturel $H^i_{\mathrm{rig},c}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(Z)$ ([B5], 2.4, Rem.). □

Pour finir, on démontre que l'endomorphisme de Frobehuis est bijectif sur la cohomologie rigide et sur la cohomologie rigide à support compact (voir ([E-LS], 2.1) pour un cas particulier).

Proposition 2.1.4. *Si X est une variété algébrique sur k, alors l'endomorphisme F_X^* de $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$ est bijectif. Si X est lisse, alors F_X^* est aussi bijectif sur $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$.*

On suppose tout d'abord que X est affine, lisse et connexe. On écrit F_X comme composé de $F_{X/k}$ et de l'isomorphisme de changement de base $\sigma : X' \longrightarrow X$. Bien sûr, σ induit un isomorphisme en cohomologie et il suffit donc de considérer $F_{X/k}$. Comme X est lisse, $F_{X/k}$ est fini et plat et $F^*_{X/k}$ est donc injectif ([B4], Prop.3.6). Comme $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$ et $H^i_{\mathrm{rig}}(X')$ ont même dimension finie, $F^*_{X/k}$ est bijectif et on voit donc que F_X^* est bijectif sur $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$. Par dualité, il en va de même de $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$. On traite maintenant le cas de la cohomologie à support et on procède par récurrence sur la dimension d de X. Quitte à remplacer X par le sous-schéma réduit sous-jacent, on peut supposer X réduit. Il existe alors dans X un ouvert affine et lisse tel que le fermé complémentaire Z soit de dimension strictement inférieur à d. En considérant la suite exacte d'excision

$$\to H^{i-1}_{\mathrm{rig},c}(Z/K) \longrightarrow H^i_{rig,c}(U/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(X/K) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(Z/K) \to,$$

on voit que F_X^* est bijectif sur $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$. Enfin, lorsque X est lisse, on peut appliquer à nouveau la dualité de Poincaré sur chaque composante connexe et conclure. □

2.1.5. On peut reformuler les résultats ci-dessus en termes de F-isocristaux sur K, c'est à dire, de K-vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme σ-linéaire. Tout d'abord, si X est une variété algébrique (resp. lisse) sur k, alors pour tout i, $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$ (resp. $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$) est un F-isocristal sur K. De plus, si X est lisse et équidimensionnel, la dualité de Poincaré est une dualité parfaite de F-isocristaux. Enfin le morphisme trace est un morphisme de F-isocristaux et les morphismes de Gysin sont des isomorphismes de F-isocristaux.

2.2. Classification des F-isocristaux unipotents

On va rappeler quelques résultats et notations de [Ch] (voir aussi [W] et bien sûr [Cr]) en les mettant dans notre contexte. Ce qui est nouveau est essentiellement l'aspect semi-linéaire du Frobenius. Soit X une variété algébrique sur k.

2.2.1. Dans ce paragraphe, il n'est pas nécessaire d'avoir un Frobenius, que la valuation soit discrète, ni même que le corps résiduel soit parfait de caractéristique positive.

Si X est connexe avec un point rationnel x, la catégorie $Un(X)$ des isocristaux surconvergents unipotents sur X/K est une catégorie tannakienne neutre pour le foncteur fibre $E \longmapsto E_x$. On note $G = \pi_1(X,x)^{un}$ son groupe fondamental et $\mathfrak{g}$ l'algèbrede Lie de G. On note $\mathcal{U}$ algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ l'idéal d'augmentation et $\hat{\mathcal{U}}$ le complété $\mathfrak{a}$-adique de $\mathcal{U}$ (voir appendice). On écrira $\hat{\mathcal{U}}(X,x)$ si nécessaire. Appelons $\hat{\mathcal{U}}$-isocristal un $\hat{\mathcal{U}}$-module de dimension finie sur K. Le foncteur fibre fournit une équivalence de catégories entre $Un(X)$ et la catégorie des $\hat{\mathcal{U}}$-isocristaux sur K.

On a, par la théorie des catégories tannakiennes un isomorphisme naturel $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$. De plus les espaces vectoriels $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ et $\mathfrak{g}^{ab}$ sont naturellement duaux l'un de l'autre. Enfin, on a aussi l'isomorphime fonctoriel $\mathfrak{g}^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$.

On suppose maintenant à nouveau que la valuation est discrète, que k est parfait de caractéristique $p > 0$ et que K est muni d'un Frobenius σ. On suppose aussi que X est lisse. En utilisant la Proposition 2.1.1, on démontre alors comme dans ([C-LS1], Proposition 2.4.2), le corollaire suivant :

Proposition 2.2.2. *Le foncteur F_X^* induit une auto-équivalence de la catégorie des isocristaux surconvergents unipotents sur X.*

2.2.3. On suppose toujours X lisse et à nouveau qu'il est connexe avec un point rationnel x. On peut voir l'auto-équivalence de la Proposition 2.2.2 comme composée, d'une part, d'un foncteur de changement de base $Un(X) \to Un(X)^\sigma$ et d'autre part, d'une équivalence K-linéaire $F_{X/K}^* : Un(X)^\sigma \xrightarrow{\sim} Un(X)$. Cette dernière correspond a un isomorphisme K-linéaire $F_{G/K} : G \xrightarrow{\sim} G^\sigma$ qui fournit un automorphisme σ-linéaire F_G de G. On vérifie que si on munit $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ du Frobenius induit par F_G^*, alors l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{Iso^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$$

est compatible aux Frobenius.

On déduit de $F_{G/K}$ un isomorphisme $\mathrm{Lie}(F_{G/K}) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^\sigma$ dont l'inverse $F_{\mathfrak{g}/K} : \mathfrak{g}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ correspond a un automorphisme σ-linéaire $F_{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$. Il est clair que la dualité entre $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a)$ et $\mathfrak{g}^{ab}$ est compatible aux Frobenius. En passant aux algébres enveloppantes complétées, on déduit de $F_{\mathfrak{g}}$ un automorphisme σ-linéaire F de $\hat{\mathcal{U}}$ qui laisse stable la filtration. Bien sûr, l'isomorphisme $\mathfrak{g}^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est compatible aux Frobenius.

Appelons, F-$\hat{\mathcal{U}}$-isocristal sur K tout $\hat{\mathcal{U}}$-isocristal muni d'un automorphisme F-linéaire φ qui est F-linéaire pour l'action de l'algèbre de lie $\mathfrak{g}$. On a alors le résultat suivant (voir [Cr], Proposition 2.2.4) :

Proposition 2.2.4. *Le foncteur fibre induit une équivalence entre la catégorie des F-isocristaux surconvergents unipotents sur X/K et la catégorie des F-$\hat{\mathcal{U}}(X,x)$-isocristaux K.* $\square$

3. Pentes du Frobenius

3.1. Généralités

On suppose maintenant k algébriquement clos. On fixe un entier positif non nul e et on désigne par K le corps obtenu en ajoutant une racine primitive e-ième π de p au corps des fractions de $W(k)$. On suppose aussi que σ est le Frobenius de K qui laisse π invariant. Enfin, on rappelle que $q := p^f$.

Tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ s'ecrit de manière unique sous la forme $\lambda = r/sef$ avec r et s deux entiers premiers entre eux et $s > 0$. On dit que λ est une pente d'un F-isocristal (H, φ) sur K s'il existe $u \in H$ telque $\varphi^s(u) = \pi^r u$. Plus généralement, si on se donne une variété X sur k et un F-isocristal surconvergent E sur X/K, on dit que λ est une pente de E si c'est une pente d'une des fibres de E. Enfin, si λ est l'unique pente de E, on dit que E est *unipente ou pur de pente* λ.

Par abus de langage, on appellera *pro-F-isocristal (resp. pro-F-isocristal pur de pente λ)* sur K toute limite projective de F-isocristaux (resp. F-isocristaux purs de pente λ).

Lemme 3.1.1. 1) *Si (H, φ) est un pro-F-isocristal sur K, alors H possède une filtration* $\mathrm{Fil}_\lambda E$ *telle que* $\mathrm{Gr}_\lambda E$ *soit pur de pente λ. Celle-ci est fonctorielle.*

2) *Si E et F sont deux pro-isocristaux purs de pente λ et μ, alors $E \otimes F$ est pur de pente $\lambda + \mu$.*

Si on se limite aux F-isocristaux, ces résultats font partie de la théorie de Dieudonné–Manin. Dans ce cas, on a donc même une graduation. Il suffit donc de passer à la limite pour obtenir nos assertions dans le cas général. $\square$

On a (voir [C-LS2] et [Ch]) :

Théorème 3.1.2. *Soit X une variété algébrique de dimension d sur k. Alors, les pentes de $H^i_{\mathrm{rig},c}(X)$ sont positives et au plus égales à d. Elles sont aussi comprises entre $i - d$ et i. Nous avons les mêmes résultats pour $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$ si X est lisse.*

On traite d'abord le cas de la cohomologie à support compact. La première chose à faire est de vérifier que notre assertion se comporte bien par rapport aux suites exactes d'excision. Soit Z un fermé de X de dimension strictement inférieure à d et U son ouvert complémentaire. Considérons la suite exacte d'excision

$$\to H^{i-1}_{\mathrm{rig},c}(Z) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(U) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(Z) \to .$$

Supposons le théorème démontré pour la cohomologie à support compact de Z. Les pentes de $H^{i-1}_{\mathrm{rig},c}(Z)$ sont alors positives, au plus égales à $d-1 \leq d$ et elles sont comprises entre $(i-1)-(d-1) = i-d$ et $i-1 \leq i$. De même, celles de $H^i_{\mathrm{rig},c}(Z)$ sont positives, au plus égales à $d-1 \leq d$ et comprises entre $i - (d-1 \leq i-d$ et $i \leq i$. Comme X et U ont même dimension d, on voit que le théorème est vrai pour X si et seulement si il est vrai pour U.

Passons maintenant à la démonstration. Tout d'abord, quitte à remplacer X par son plus petit sous-schéma réduit, on peut supposer que X est réduit. On procède ensuite par récurrence sur d afin d'utiliser la première partie de la démonstration. On peut donc supposer que X est somme de ses composantes irréductibles et comme la cohomologie rigide à support compact est additive, on peut supposer X intègre. On utilise alors le théorème de de Jong ([B4], Théorème 3.4 ou [dJ]) : quitte à remplacer X par un ouvert non vide, on peut supposer qu'il existe un schéma projectif lisse X', un ouvert non vide U' de X' et un morphisme fini étale $U' \longrightarrow X$. Il résulte de ([B5], 1.4) que le morphisme naturel $H^i_{\mathrm{rig},c}(X) \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig},c}(U')$ est injectif. On peut donc supposer que $X = U'$. Quitte à remplacer X par X', on est ramené au cas ou X est projectif et lisse. Comme on a un isomorphisme naturel

$$H^i_{\mathrm{cris}}(X') \otimes K \simeq H^i_{\mathrm{rig}}(X'),$$

il suffit de rappeler ([B1], 2, Théorème) que les pentes $H^i_{\mathrm{cris}}(X'/W)$ sont positives, au plus égales à d et qu'elles sont bien comprises entre $i - d$ et i.

Le cas de la cohomologie sans support s'en déduit par dualité. En effet, comme la cohomologie rigide est additive, on peut supposer X connexe et il résulte alors de la Proposition 2.1.2 que les pentes de $H^i_{\mathrm{rig}}(X)$ sont inférieures ou égales à $d - 0 = d$, au moins égales à $d - d = 0$ et qu'elles sont aussi comprises entre $d - (2d - i) = i - d$ et $d - [(2d - i) - d] = i$. $\square$

3.2. *Application aux F-isocristaux unipotents*

Soit X une variété algébrique lisse et connexe sur k.

Proposition 3.2.1. *Si x est un point fermé de X, alors $\hat{\mathcal{U}}(X, x)$ est un pro-F-isocristal à pentes négatives.*

On reprend les notations de 2.2. En particulier, on écrit $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{U}}(X, x)$. Il résulte de la Proposition 1.3.1 et de 2.2.3 que l'on a les isomorphismes de F-isocristaux

$$H^1_{\mathrm{rig}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger) \text{ et } \mathfrak{g}^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2.$$

De plus, nous avons vu que les F-isocristaux $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger, \mathcal{O}^\dagger)$ et $\mathfrak{g}^{ab}$ sont duaux l'un de l'autre. Comme les pentes de $H^1_{\mathrm{rig}}(X)$ sont positives, celles de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ sont donc négatives. De plus, on a une surjection de F-isocristaux $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$, ce qui montre que les pentes de $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ sont négatives. Comme $\hat{\mathcal{U}}$ est complet pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, les pentes de $\hat{\mathcal{U}}$ sont aussi négatives. $\square$

Lemme 3.2.2. *Pour qu'un F-isocristal surconvergent unipotent E sur X/K soit pur de pente λ, il suffit qu'il existe un point fermé x de X tel que E_x soit pur de pente λ.*

Cela résulte du Corollaire 4.1.4 de [C-LS1]. $\square$

Théorème 3.2.3. *Soit X une variété lisse sur k et E un F-isocristal surconvergent unipotent sur X/K. Alors, E possède une filtration* $\mathrm{Fil}_\lambda E$ *telle que* $\mathrm{Gr}_\lambda E$ *soit pur de pente λ.*

On peut bien sûr supposer X connexe et choisir un point fermé x de X. On écrit encore $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\mathcal{U}}(X, x)$. Grâce à la Proposition 2.2.4 et au Lemme 3.2.2, il suffit de montrer le résultat analogue dans la catégorie des F-$\hat{\mathcal{U}}$-isocristaux sur K. Si H est un F-$\hat{\mathcal{U}}$-isocristal sur K, il possède une filtration $\mathrm{Fil}_\lambda H$ avec $\mathrm{Gr}_\lambda\, H$ pur de pente λ. Il suffit donc de vérifier que celle ci est stable par l'action de $\hat{\mathcal{U}}$. Celle ci est induite par un morphismes de pro-F-isocristaux $\hat{\mathcal{U}} \otimes H \longrightarrow H$ et comme les pentes de $\hat{\mathcal{U}}$ sont négatives, ce morphisme induit $\hat{\mathcal{U}} \otimes \mathrm{Fil}_\lambda H \subset \mathrm{Fil}_\lambda(\hat{\mathcal{U}} \otimes H) \longrightarrow \mathrm{Fil}_\lambda H$. $\square$

Appendice : Algèbres enveloppantes complétées

Nous consacrons quelques lignes à préciser les constructions qui permettent d'utiliser les algèbres enveloppantes pour étudier les groupes unipotents. On travaille sur un corps K de caractéristique nulle.

On a tout d'abord le résultat suivant :

Si G est un K-groupe unipotent, on a une équivalence entre la catégories $\mathrm{Rep}(G)$ *des représentations algébriques de G et la catégorie* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{nilp}}(\mathrm{Lie}\, G)$ *des représentations nilpotente de dimension finie de son algèbre de Lie.*

Ce résultat est bien connu quand G est algébrique : en effet, comme K est de caractéristique nulle, le foncteur Lie établit une équivalence entre les groupes algébriques unipotents et les algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie ([D-G], IV, 2, Corollaire 4.5b). Pour passer au cas général, il suffit de rappeler qu'un groupe unipotent est affine et donc pro-algébrique et que le foncteur Lie commute aux limites projectives.

On rappelle ([S], I, 3, Définition 1.1) que le foncteur oubli de la catégorie des K-algèbres associatives unitaires vers celle des algèbres de Lie possède un adjoint à gauche $\mathfrak{g} \longmapsto \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. On dit que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. En particulier, on a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et la catégorie des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie sur K.

La construction de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ est fonctorielle en $\mathfrak{g}$. En particulier, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est naturellement augmentée vers $k = \mathcal{U}(0)$ et on note $\mathfrak{a}$ l'idéal d'augmentation. Il résulte du théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt ([S], I, 3, Théorème 4.3) que le morphisme d'adjonction $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est injectif. De plus, si on note $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$, on a une surjection naturelle $T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, et l'idéal $\mathfrak{a}$ est donc engendré par $\mathfrak{g}$. Si on note $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ le complété de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, on a donc le résultat suivant :

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{nilp}}(\mathfrak{g})$ *des représentations nilpotentes de dimension finie sur K de $\mathfrak{g}$ est équivalente à la catégorie des $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie sur K.*

En particulier, si G est un K-groupe unipotent, on a une équivalence entre la catégorie $\mathrm{Rep}\,(G)$ des représentations algébriques de G et la catégorie des $\hat{\mathcal{U}}(\mathrm{Lie}\, G)$-modules de dimension finie sur K.

Pour conclure, nous allons vérifier que la notion d'algèbre enveloppante complétée définie ici correspond bien à celle considérée dans [Ch] ou dans [W] lorsque $\mathfrak{g}^{ab}$ est de dimension finie.

Puisque $\mathfrak{g}$ engendre $\mathfrak{a}$ comme idéal dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on a un morphisme surjectif $\mathfrak{g}^{ab} \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Par fonctorialité, si on note $S(\mathfrak{g}^{ab})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, on a un morphisme d'algèbres augmentées $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{ab}) = S(\mathfrak{g}^{ab})$ qui fournit une section $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ et on peut donc identifier $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ et $\mathfrak{g}^{ab}$. On voit donc que, si $\mathfrak{g}^{ab}$ est de dimension finie, alors $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ est limite projective de ses quotients de dimension finie sur K. Il s'agit maintenant de voir que si $\mathfrak{g} = \varprojlim(\mathfrak{g}_i)$ est la limite de ses quotients de dimension finie, alors $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) = \varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i)$. Les $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i)$ sont limites projectives des quotients de dimension finie et il en va donc de même de $\varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i)$. Il suffit donc pour conclure de montrer que si A est une K-algèbre de dimension finie et si on munit $\varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i)$ de la topologie de la limite projective, alors le morphisme naturel $\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i)$ induit une bijection $\mathrm{Hom}\left(\varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i), A\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A)$. Comme on a $\mathrm{Hom}\left(\varprojlim \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i), A\right) = \varinjlim \mathrm{Hom}(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}_i), A)$, on est ramené par adjonction à l'isomorphisme $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{nilp}}(\mathfrak{g}_i, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{nilp}}(\mathfrak{g}, A)$.

Remerciements. Nous tenons à remercier P. Berthelot pour ses suggestions, ainsi que le réseau TMR de l'Union Européenne "Arithmetic Algebraic Geometry" qui nous a permis de nous retrouver à plusieurs reprises. Le second auteur tient aussi à remercier l'université de Padova pour son hospitalité.

Bibliographie

[B1] Berthelot, P.: Sur le "théorème de Lefschetz faible" en cohomologie cristalline. C. R. Acad. Sc. Paris, t. **277** (1973)

[B2] Berthelot, P.: Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p. Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23**, 7–32 (1986)

[B3] Berthelot, P.: Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie. Prépublication de l'IRMAR 96–03 (1996)

[B4] Berthelot, P.: Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, Invent. math. **128**, 329–377 (1997)

[B5] Berthelot, P.: Dualité de Poincaré et Formule de Kunneth en cohomologie rigide. C. R. Acad. Sci. Paris, t. **325**, Série 1, 493–498 (1997)

[Ch] Chiarellotto, B.: Weights in rigid cohomology. Applications to unipotent F-isocrystals. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. **31**, 683–715 (1998)

[h] Crew, R.: F-isocrystals and their monodromy groups. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. **25**, 429–464 (1992)

[C-LS1] Chiarellotto, B., Le Stum, B.: F-isocristaux unipotents, a paraître à Compositio Math. (1998)

[C-LS2] Chiarellotto, B., Le Stum, B.: Sur la pureté de la cohomologie cristalline, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **326**, Série I, 961–963 (1998)

[D-G] M. Demazure, P. Gabriel: Groupes algébriques, North Holland, 1970

[E-LS] Etesse, J.-Y., Le Stum, B.: Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I, Interprétation cohomologique, Math. Ann. **296**, 557–576 (1993)

[dJ] de Jong, A.J.: Smoothness, semi-stability and alterations. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **83**, 51–93 (1996)

[S] Serre, J.-P.: Lie Algebras and Lie Groups. W. A. Benjamin, 1965
[T] Tsuzuki, N.: On the Gysin isomorphism of rigid cohomology. prépublication (1998)
[W] W] Wildeshaus, J.: Realisation of polylogarithms, LNM 1650, Springer Verlag, 1997