manuscripta math. 131, 11–24 (2010)

Colin J. Bushnell, Guy Henniart, Bertrand Lemaire

Caractère et degré formel pour les formes intérieures de GL(n) sur un corps local de caractéristique non nulle

Received: 17 February 2009 / Revised: 26 September 2009
Published online: 12 November 2009

Résumé. Soit r un entier $\geqslant 1$ et D un corps gauche localement compact de caractéristique non nulle. Posons $G = \mathrm{GL}_r(D)$ et notons St_G la représentation de Steinberg de G. Soit π une représentation lisse irréductible de G qui est essentiellement de carré intégrable. Nous montrons que le caractère de π, sur les éléments elliptiques réguliers assez proches de 1, vaut $(-1)^{r-1}d(\pi)/d(\mathrm{St}_G)$ où $d(\pi)$ et $d(\mathrm{St}_G)$ désignent les degrés formels de π et St_G.

Abstract. Let r be a positive integer and D a locally compact division ring of positive characteristic. Put $G = \mathrm{GL}_r(D)$ and let St_G be the Steinberg representation of G. Let π be an irreducible, smooth representation of G which is essentially square-integrable. We show that the character of π, on elliptic regular elements of G sufficiently close to 1, takes the constant value $(-1)^{r-1}d(\pi)/d(\mathrm{St}_G)$, where $d(\pi)$ and $d(\mathrm{St}_G)$ are the formal degrees of π and St_G.

1. Introduction

1.1.

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Soit D un corps gauche de centre F et de degré fini sur F; posons $[D{:}F] = d^2$, $d \geqslant 1$. Soit r un entier strictement positif, et notons G le groupe localement profini $\mathrm{GL}_r(D)$, Z son centre, identifié à $F^\times$. Fixons une mesure de Haar μ sur G/Z.

Le premier auteur voudrait remercier l'Université de Paris-Sud pour son hospitalité au cours de la préparation de cet article. Le deuxième auteur voudrait remercier A.I. Badulescu, S. DeBacker et J.-L. Waldspurger pour des échanges de courriels très instructifs.

C. J. Bushnell (✉): Department of Mathematics, King's College London, Strand, London WC2R 2LS, UK. e-mail: colin.bushnell@kcl.ac.uk

G. Henniart: Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France. e-mail: Guy.Henniart@math.u-psud.fr

G. Henniart: CNRS, 91405 Orsay Cedex, France

B. Lemaire: Institut de Mathématiques de Luminy et UMR 6206 du CNRS, Université Aix-Marseille II, Case Postale 907, 163 Av. de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France.
e-mail: lemaire@iml.univ-mrs.fr

Mathematics Subject Classification (2000): 22E50

DOI: 10.1007/s00229-009-0309-9

Soit π une représentation lisse irréductible de G. Dans le cas simple où r vaut 1, le groupe G/Z est compact, de sorte que π est de dimension finie et qu'au voisinage de l'élément neutre de G, le caractère de π vaut $\dim \pi$.

Dans le cas général, π possède un caractère χ_π, défini sur l'ouvert G_{reg} de G formé des éléments semisimples réguliers, et qui est sur cet ensemble une fonction localement constante invariante par conjugaison. Supposons de plus que π soit *essentiellement de carré intégrable* (modulo Z). Alors π possède un degré formel $d_\mu(\pi) > 0$ (relatif au choix de μ); si r vaut 1, on a $d_\mu(\pi) = \dim \pi/\mu(G/Z)$.

Par la correspondance de Jacquet-Langlands [3,10,16], on sait que χ_π est constant sur les éléments elliptiques réguliers de G assez proches de 1. Si F est de caractéristique nulle, on sait même que χ_π prend sur de tels éléments la valeur $(-1)^{r-1} d_\mu(\pi)/d_\mu(\mathrm{St}_G)$, où St_G est la représentation de Steinberg de G. (Si r vaut 1, St_G est la représentation triviale, de sorte qu'on retrouve bien la valeur $\dim \pi$ au voisinage de 1.) Dans cet article, nous prouvons que cela reste vrai si la caractéristique de F n'est pas nulle.

Théorème. *Soit D un corps gauche localement compact, de centre F et de caractéristique non nulle. Soit G le groupe $GL_r(D)$, $Z \cong F^\times$ son centre, μ une mesure de Haar sur G/Z, St_G la représentation de Steinberg de G. Soit π une représentation lisse irréductible de G, qui est essentiellement de carré intégrable modulo Z. Alors, sur les éléments elliptiques réguliers γ de G assez proches de* 1*, le caractère de π prend la valeur*

$$\chi_\pi(\gamma) = (-1)^{r-1} d_\mu(\pi)/d_\mu(\mathrm{St}_{\mathrm{G}}).$$

Posons $n = rd$, $d^2 = \dim_F D$. Le groupe $G' = \mathrm{GL}_n F$ est une forme intérieure de G, de sorte que son centre Z' est isomorphe à Z. Notons μ' une mesure de Haar sur G'/Z' et $\mathrm{St}_{G'}$ la représentation de Steinberg de G'.

Corollaire. *Soit π' la représentation lisse irréductible de G' correspondant à π par la correspondance de Jacquet-Langlands. Alors*

$$\frac{d_\mu(\pi)}{d_\mu(\mathrm{St}_G)} = \frac{d_{\mu'}(\pi')}{d_{\mu'}(\mathrm{St}_{G'})}.$$

Ce corollaire est utilisé dans [7] pour rendre explicite la correspondance de Jacquet-Langlands dans le cas, dit *modéré,* où n est premier à la caractéristique résiduelle de F. C'est d'ailleurs ce qui a entraîné la rédaction du présent article.

Bien sûr, nous pensons que le théorème est vrai pour un groupe réductif quelconque G sur F, comme c'est le cas en caractéristique nulle [1].

Remerciement. Le rapporteur a remarqué que notre résultat principal est aussi énoncé par A.-M. Aubert et R.J. Plymen dans *Plancherel measure for $GL_n(F)$ and $GL_m(D)$: explicit formulas and Bernstein decomposition,* J. Number Theory **112** (2005), 26–66. Leur argument pour la preuve de ce résultat apparaît dans les lignes qui suivent la formule (4.6), au §7.1 de leur article. Il est extrêmement bref, et il nous semble que des détails cruciaux manquent. Nous remercions le rapporteur de nous avoir informé, et d'avoir soutenu la publication du présent article.

1.2.

Supposons un moment que la représentation π est *cuspidale.* Le théorème est élémentaire pour $r = 1$, nous l'avons vu, et il est établi pour $D = F$, $r \geqslant 2$, dans la thèse du deuxième auteur [12] Appendice 3, où des arguments donnés par R. Howe [13] et J. Rogawski [16] en caractéristique nulle sont adaptés au cas de caractéristique non nulle.

Dans le cas général, π est essentiellement de carré intégrable modulo Z. Nous procédons en trois étapes.

(1) Soit f un pseudo-coefficient de la contragrédiente $\check{\pi}$ de π. En un élément elliptique régulier γ de G, l'intégrale orbitale $\mathcal{O}_\gamma(f;\mu)$, par rapport à la mesure de Haar μ sur G/Z, vaut $\chi_\pi(\gamma)$.
(2) Les intégrales orbitales possèdent un développement en germes au voisinage de l'élément neutre, les germes étant paramétrés par les classes de conjugaison unipotentes dans G. Pour γ elliptique régulier assez proche de 1, seul compte le germe attaché à 1, de sorte que $\mathcal{O}_\gamma(f;\mu) = cf(1)$ pour une constante c.
(3) On a $f(1) = d_\mu(\check{\pi})$, par la formule de Plancherel, et $d_\mu(\check{\pi}) = d_\mu(\pi)$.

On obtient donc $c\, d_\mu(\pi) = \chi_\pi(\gamma)$; en prenant $\pi = \mathrm{St}_G$, on trouve que c vaut $(-1)^{r-1}/d_\mu(\mathrm{St}_G)$, d'où le théorème.

En caractéristique non nulle, l'étape (1) est un résultat de Badulescu [4]. L'étape (2) est due à R. Howe [13] en toute caractéristique pour $D = F$; nous adaptons son raisonnement à notre cas, au §3. Le §2 est consacré à des rappels sur les classes de conjugaison dans G et les intégrales orbitales associées. Pour l'étape (3), nous rappelons au §4 la variante nécessaire de la formule de Plancherel. La démonstration du théorème est rassemblée au §5.

2. Classes de conjugaison et intégrales orbitales

2.1.

En caractéristique positive, il importe de prendre quelques précautions quand on considère les classes de conjugaison, à cause de problèmes d'inséparabilité — le lecteur pourra garder en tête le cas des classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(F)$, quand F est de caractéristique 2.

Nous rappelons ici, avec les références nécessaires, les faits que nous utilisons. Nous notons $\mathcal{M}$ l'algèbre $\mathrm{M}_r(D)$ dont G est le groupe des éléments inversibles. Nous munissons $\mathcal{M}$ et G de la topologie naturelle provenant de celle de F, qui en fait des groupes localement profinis.

2.2.

Si γ est un élément de G, on note G_γ son centralisateur dans G et ${}^G\gamma$ sa classe de conjugaison. Alors G_γ est un sous-groupe fermé de G, c'est donc un groupe localement profini. On sait qu'il est unimodulaire [18] III 3.27, de sorte qu'on dispose de mesures G-invariantes sur G/G_γ [6] 3.4.

Si ν est une mesure G-invariante sur G/G_γ et f une fonction localement constante sur G, la fonction

$$gG_\gamma \longmapsto f(g\gamma g^{-1})$$

sur G/G_γ est localement constante, mais son support n'est pas forcément compact, même si celui de f l'est; ainsi cette fonction n'est pas forcément intégrable pour ν. Si c'est le cas cependant, on dit que *l'intégrale orbitale de f en γ existe,* et on note

$$\mathcal{O}_\gamma(f;\nu) = \int_{G/G_\gamma} f(g\gamma g^{-1})\, d\nu(g)$$

la valeur de l'intégrale obtenue.

Remarque. L'application $q_\gamma : G/G_\gamma \to {}^G\gamma$ induite par $g \mapsto g\gamma g^{-1}$ est continue et bijective. Dans les cas considérés ici, l'orbite ${}^G\gamma$ est *localement fermée* dans G: cela sera prouvé plus bas pour γ unipotent et pour γ semisimple régulier. Ainsi ${}^G\gamma$ est localement compact, et le théorème d'Arens [15] 2.13 assure que q_γ est un *homéomorphisme.*

2.3.

On note G_{reg} l'ensemble des éléments semisimples réguliers (on dira seulement réguliers) de G: ce sont ceux dont le polynôme caractéristique réduit est séparable, c'est-à-dire de discriminant non nul. Ainsi G_{reg} est un ouvert dense de G.

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$, et notons $p_\gamma(t)$ le polynôme caractéristique réduit de γ. Alors l'application $q(t) \mapsto q(\gamma)$ de $F[t]$ dans $\mathcal{M}$ a pour noyau $p_\gamma F[t]$, l'algèbre $F[\gamma]$ est semisimple et, par le théorème de Skolem-Noether, la classe de conjugaison de γ est formée des éléments de G ayant même polynôme caractéristique réduit p_γ que γ. En particulier, ${}^G\gamma$ est fermé dans G et ${}^G\gamma \cap X$ est compact pour toute partie compacte X de G. Plus généralement, si X est une partie fermée de G dont l'image dans G/Z est compacte, alors ${}^G\gamma \cap X$ est compact: il suffit de remarquer que la norme réduite est constante sur ${}^G\gamma$ et d'utiliser, par exemple, la décomposition de Cartan dans G. On déduit:

Proposition. *Si $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ et si f est une fonction localement constante sur G dont le support a une image compacte dans G/Z, l'intégrale orbitale de f en γ existe.*

Supposons γ *elliptique* (régulier), autrement dit que le polynôme p_γ est irréductible et séparable. Alors G_γ/Z est compact, de sorte que le choix d'une mesure de Haar μ sur G/Z permet de définir $\mathcal{O}_\gamma(f;\mu)$ pour toute fonction f localement constante sur G dont le support a une image compacte dans G/Z:

$$\mathcal{O}_\gamma(f;\mu) = \int_{G/Z} f(g\gamma g^{-1})\, d\mu(g).$$

Il existe une mesure G-invariante ν sur G/G_γ telle que $\mathcal{O}_\gamma(f;\nu) = \mathcal{O}_\gamma(f;\mu)$, pour toute telle fonction f.

2.4.

A l'extrême opposé, considérons les éléments *unipotents* de G. Ils forment une partie fermée $\mathcal{U}$ de G: ces éléments sont ceux dont le polynôme caractéristique réduit est $(X-1)^{rd}$. De même les éléments nilpotents de $\mathcal{M}$ forment une partie fermée $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{M}$, et l'application $x \mapsto 1+x$ donne un homéomorphisme de $\mathfrak{N}$ sur $\mathcal{U}$, compatible à l'action de G par conjugaison.

Dans un premier temps nous examinons les classes de *similitude* d'éléments nilpotents de $\mathcal{M}$. Les résultats se transposent immédiatement aux classes de conjugaison d'éléments unipotents de G.

La classification des classes de similitude d'éléments de $\mathfrak{N}$ en termes de blocs de Jordan est valable dans $\mathcal{M}$. Exprimons-la en termes de *partitions de* r. Pour nous une partition de r est une suite décroissante $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \geqslant 1}$ d'entiers positifs, nuls à partir d'un certain rang i et de somme r. A tout élément x de $\mathfrak{N}$ on associe une partition $\boldsymbol{\lambda}(x) = (\lambda_i)$ où les λ_i non nuls sont les tailles des blocs de Jordan de x, rangées par ordre décroissant. Deux éléments de $\mathfrak{N}$ sont conjugués exactement quand les partitions associées sont les mêmes. On note $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ la classe de conjugaison associée à la partition $\boldsymbol{\lambda}$.

Remarque. Soit $x \in \mathfrak{N}$ de partition associée $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)$: alors *la partition duale* $\boldsymbol{\lambda'} = (\lambda'_i)$ est donnée par

$$\lambda'_i = \dim_D\big(\operatorname{Ker} x^i\big) - \dim_D\big(\operatorname{Ker} x^{i-1}\big),$$

pour $i \geqslant 1$.

2.5.

On introduit une relation d'ordre sur les partitions de r en disant qu'on a $\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{\mu}$ si

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k \leq \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. Cela équivaut à $\boldsymbol{\mu'} \leq \boldsymbol{\lambda'}$.

Proposition. *Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une partition de r. La fermeture de $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ dans $\mathfrak{N}$ est formée des $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\mu}}$ pour les partitions $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\lambda}$.*

Démonstration. Si $x \in \mathcal{M}$ on a $\operatorname{rg}(y) \geqslant \operatorname{rg}(x)$ pour y proche de x de sorte que pour x_1 dans la fermeture de $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ on a $\operatorname{rg}(x_1^k) \leq \operatorname{rg}(x^k)$, $k \geqslant 1$. Alors

$$\dim_D\big(\operatorname{Ker} x_1^k\big) \geqslant \dim_D\big(\operatorname{Ker} x^k\big) = \lambda'_1+\lambda'_2+\cdots+\lambda'_k, \quad k \geqslant 1,$$

ainsi x_1 est associé à une partition $\boldsymbol{\mu}$ telle que $\boldsymbol{\mu'} \geqslant \boldsymbol{\lambda'}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\lambda}$.

En sens inverse soit $\boldsymbol{\mu}$ une partition plus petite que $\boldsymbol{\lambda}$; pour prouver que $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\mu}}$ est dans la fermeture de $\mathfrak{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$, on peut supposer qu'il n'y a pas de partition entre $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ à part $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\lambda}$. Par le lemme 6.2.4 de [9] on est ramené au cas des partitions (s, t) et $(s-1, t+1)$ avec $s-t \geqslant 2$, qui est un exercice. □

Notons $\bar{\mathfrak{N}}_\lambda$ la fermeture de $\mathfrak{N}_\lambda$. D'après la proposition, on a

$$\bar{\mathfrak{N}}_\lambda \smallsetminus \mathfrak{N}_\lambda = \bigcup_{\substack{\mu \leq \lambda, \\ \mu \neq \lambda}} \bar{\mathfrak{N}}_\mu.$$

On voit que $\mathfrak{N}_\lambda$ est donc une partie localement fermée de $\mathcal{M}$, ce qui justifie la remarque 2.2 pour les éléments unipotents de G.

2.6.

Il convient maintenant de prouver que les intégrales orbitales unipotentes existent. Nous suivons pour cela [13], et traitons d'abord le cas nilpotent.

Notons W l'espace vectoriel à droite D^r sur D, de sorte que $G = \mathrm{GL}_r(D)$ s'identifie à $\mathrm{Aut}_D(W)$. Notons K le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(\mathfrak{o}_D)$ de G, où $\mathfrak{o}_D$ est l'anneau des entiers de D; c'est un sous-groupe compact maximal de G, et on a $G = PK$ pour tout sous-groupe parabolique P de G. Fixons une mesure de Haar dg sur G, d'où une mesure de Haar dk sur son sous-groupe ouvert K.

Soit $x \in \mathfrak{N}$; notons $\mathcal{P}_x$ la sous-algèbre parabolique de $\mathcal{M}$ correspondant au drapeau $\{\mathrm{Ker}\, x^i \,:\, i \geqslant 0\}$ de sous-espaces de W, et notons P_{1+x} le stabilisateur de ce drapeau dans G; notons $\mathcal{N}_x$ le radical de $\mathcal{P}_x$, $U_{1+x} = 1 + \mathcal{N}_x$ le radical unipotent de P_{1+x}. On sait [13] Lemma 2:

Lemme. *L'orbite ${}^{(P_{1+x})}x$ de x par conjugaison sous P_{1+x} est ouverte et dense dans $\mathcal{N}_x$ pour la topologie naturelle et celle de Zariski.*

Soit f une fonction localement constante sur $\mathcal{M}$, à support compact: il existe un réseau L dans $\mathcal{M}$ tel que $KLK = L$ et $\mathrm{supp}\, f \subset L$. Alors l'ensemble des couples (k, n) dans $K \times \mathcal{N}_x$ tels que $f(knk^{-1}) \neq 0$ est relativement compact et on peut donc poser, en fixant une mesure de Haar dn sur $\mathcal{N}_x$,

$$\mathcal{Q}_x(f) = \iint_{K \times \mathcal{N}_x} f(knk^{-1})\, dk dn.$$

On dispose ainsi d'une forme linéaire $\mathcal{Q}_x : f \mapsto \mathcal{Q}_x(f)$ sur l'espace vectoriel $C_c^\infty(\mathcal{M})$ des fonctions localement constantes sur $\mathcal{M}$, à support compact. La forme $\mathcal{Q}_x$ est *positive:* on a $\mathcal{Q}_x(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$.

Proposition. *La forme linéaire $\mathcal{Q}_x$ est invariante sous conjugaison par les éléments de G.*

La démonstration est la même que dans [13, pp. 316–317].

2.7.

Notons $\mathcal{M}^+$ la partie de $\mathcal{M}$ formée des endomorphismes dont toutes les valeurs propres (dans une clôture algébrique de F) ont une valuation > 0. C'est un voisinage ouvert de $\mathfrak{N}$ dans $\mathcal{M}$, invariant par conjugaison sous G, et l'application $x \mapsto 1+x$ donne un homéomorphisme de $\mathcal{M}^+$ sur un voisinage ouvert G^+ de $\mathfrak{U}$ dans G, invariant par conjugaison. Par $z \mapsto 1+z$ également, on identifie $\mathcal{N}_x$ à U_{1+x} et la mesure de Haar dn sur le groupe additif $\mathcal{N}_x$ se transporte en une mesure sur le groupe multiplicatif U_{1+x}. C'est une mesure de Haar, notée du. Comme dans [13] on déduit de la construction précédente une forme linéaire $f \mapsto \mathcal{Q}_y^*(f)$ (pour $y = 1+x \in \mathfrak{U}$) sur $C_c^\infty(G^+)$ qui est invariante par conjugaison sous G:

$$\mathcal{Q}_y^*(f) = \iint_{K \times U_y} f(kuk^{-1})\, dkdu.$$

Notons $\mathfrak{U}_y$ la clôture dans G de ${}^G y$. L'application de restriction $C_c^\infty(G^+) \to C_c^\infty(\mathfrak{U}_y)$ est surjective, puisque $\mathfrak{U}_y$ est fermé dans G^+. D'après le lemme de 2.6, l'ensemble $\mathfrak{U}_y$ contient tous les groupes gU_yg^{-1}, $g \in G$, donc la forme linéaire $\mathcal{Q}_y^*$ se factorise par l'application de restriction $C_c^\infty(G^+) \to C_c^\infty(\mathfrak{U}_y)$. On obtient alors une forme linéaire G-invariante sur $C_c^\infty(\mathfrak{U}_y)$, non nulle et positive sur les fonctions à valeurs positives; on la note encore $\mathcal{Q}_y^*$.

Proposition. *Il existe une mesure G-invariante ν sur l'orbite ${}^G y$ telle que*

$$\int_{{}^G y} f(x)\, d\nu(x) = \mathcal{Q}_y^*(f), \quad f \in C_c^\infty(G^+).$$

Proof. Posons $X = {}^G y$, $Y = \mathfrak{U}_y$. L'ensemble Y est donc la clôture de X, dans laquelle X est ouvert (2.5). Soit $f \in C_c^\infty(X)$; on définit une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(Y)$ par les conditions

$$\tilde{f}(g) = \begin{cases} f(g) & \text{si } g \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme la forme linéaire $f \mapsto \mathcal{Q}_y(\tilde{f})$ est G-invariante, il existe une mesure G-invariante ν sur l'orbite X (homéomorphe à G/G_y — Remarque 2.2, 2.5) telle que

$$\int_X f(x)\, d\nu(x) = \mathcal{Q}_y^*(\tilde{f}), \quad f \in C_c^\infty(X).$$

Prouvons l'égalité de la proposition, pour ce choix de mesure ν. Soit $f \in C_c^\infty(G^+)$ qu'on peut supposer $\geqslant 0$; notons $f|_X$ la fonction qui vaut $f(x)$ si $x \in X$, 0 sinon. La fonction $f|_X$ est continue, donc ν-mesurable. En choisissant une suite X_n de parties compactes de X telle que $\bigcup_n X_n = X$, on a

$$\int_X f(x)\, d\nu(x) = \sup_{n \geqslant 1} \int_{X_n} f(x)\, d\nu(x) = \sup_{n \geqslant 1} \mathcal{Q}_y^*(f|_{X_n}) = \mathcal{Q}_y^*(f|_X).$$

Considérons la fonction $f' = f - f|_X$. Elle est nulle sur l'image inverse de X dans $K \times U_y$, qui contient $K \times {}^{P_y}y$; d'après le lemme de 2.6, on en déduit que $\mathcal{Q}_y^*(f') = 0$, d'où le résultat. □

L'intégrale orbitale $\mathcal{O}_y(f;\nu) = \mathcal{Q}_y^*(f)$ existe bien!

Remarque. Si f est une fonction localement constante sur G, dont le support a une image compacte dans G/Z, alors la restriction de f à G^+ a un support compact; l'intégrale orbitale de f en y existe aussi.

3. Développement en germes au voisinage de 1

Grâce au §2, on dispose des outils nécessaires pour étendre à notre cas le développement en germes, au voisinage de 1, des intégrales orbitales. Voir [17] pour les groupes semisimples en caractéristique nulle, [13] pour $\mathrm{GL}_n(F)$, [19] pour un cadre général, traité en caractéristique nulle. Pour les cas que nous considérons — éléments unipotents, éléments elliptiques réguliers — les arguments de [19] restent valables, *cf.* [10, p. 94].

3.1.

Fixons un système de représentants I des classes de conjugaison unipotentes dans G et des intégrales orbitales correspondantes $f \mapsto \mathcal{O}_i(f)$. Pour la classe de 1, on prend l'évaluation $\mathcal{O}_1(f) = f(1)$.

Proposition. *Soit $f \in C_c^\infty(G^+)$. Supposons que $\mathcal{O}_i(f) = 0$ pour tout i dans I. Alors il existe un ensemble fini de fonctions h_j de $C_c^\infty(G^+)$ et des éléments $g(j)$ de G^+ tels que la fonction*

$$f - \sum_j \left(h_j^{g(j)} - h_j\right)$$

s'annule au voisinage de $\mathfrak{U}$.

Démonstration. Voir [19] Proposition 2.1. □

3.2.

Fixons maintenant, pour chaque élément x de G_{reg}, une mesure invariante ν_x sur G/G_x, d'où une intégrale orbitale $f \mapsto \mathcal{O}_x(f)$. On prend la *même* mesure pour tous les éléments réguliers x partageant le même centralisateur G_x. Pour x elliptique régulier, on prend ν_x définie par une mesure G-invariante fixée μ sur G/Z (*cf.* 2.3).

En s'appuyant sur la proposition précédente, on montre comme dans [19] 1.k, 1.n, 2.5.1 la propriété de *développement en germes.*

Théorème. *Il existe des fonctions φ_i, $i \in I$, sur $G^+ \cap G_{\mathrm{reg}}$ telles que pour tout $f \in C_c^\infty(G^+)$, il existe un voisinage $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(f)$ de 1 dans G^+ vérifiant*

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\gamma)\, \mathcal{O}_i(f), \quad \gamma \in G_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{V}.$$

Remarque. Les *germes* φ_i au voisinage de 1 dans $G^+ \cap G_{\mathrm{reg}}$ sont uniques. En fait on peut prendre $\varphi_i(\gamma) = \mathcal{O}_\gamma(f_i)$ pour certains choix de f_i dans $C_c^\infty(G^+)$ *locċit.*

4. Une formule de Plancherel

Il s'agit d'établir une variante de la formule de Plancherel bien connue. Nous indiquons brièvement comment elle s'obtient à partir de [11] et [20].

Pendant la durée de cette section seulement, G désigne le groupe $\mathbf{G}(F)$ des points F-rationnels d'un groupe algébrique, connexe, réductif $\mathbf{G}$ défini sur F.

4.1.

Soit $\widehat{G}$ le *dual unitaire* de G; c'est un espace quasi-compact dont les éléments sont les classes d'isomorphisme des représentations topologiquement irréductibles, continues, unitaires de G sur les espaces de Hilbert. On peut identifier les éléments de $\widehat{G}$ aux classes d'isomorphisme des représentations lisses, irréductibles, unitarisables de G.

Soit $(\pi, V) \in \widehat{G}$, $f \in C_c^\infty(G)$ et choisissons une mesure de Haar μ_G sur G. L'opérateur

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)\, d\mu_G(g)$$

sur V est de rang fini; notons sa trace $\chi_\pi(f)$. Le théorème de Plancherel — voir [11] 18.8.1 ou [20] 14.11.2—affirme qu'il existe une mesure de Borel $\hat{\mu}_G$ sur $\widehat{G}$ telle que

$$f(1_G) = \int_G \chi_\pi(f)\, d\hat{\mu}_G(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G). \tag{4.1.1}$$

Le support de la *mesure de Plancherel* $\hat{\mu}_G$ est un sous-espace fermé ${}_r\widehat{G}$ de $\widehat{G}$; la relation (4.1.1) équivaut à

$$f(1_G) = \int_{rG} \chi_\pi(f)\, d\hat{\mu}_G(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G). \tag{4.1.2}$$

De plus, $\hat{\mu}_G$ est l'unique mesure de Borel sur ${}_r\widehat{G}$ ayant cette propriété (voir [8] 2.3 Remark (2)). Les éléments de ${}_r\widehat{G}$ sont les classes des représentations *tempérées* $\pi \in \widehat{G}$ [5].

4.2.

Fixons un sous-groupe fermé Z du centre Z_G de G, et une mesure de Haar $\mu = \mu_{G/Z}$ sur G/Z. Soit ω un caractère lisse unitaire de Z; soit ${}_r\widehat{G}_\omega$ l'ensemble des classes $(\pi, V) \in {}_r\widehat{G}$ telles que $\pi(zg) = \omega(z)\pi(g)$, $z \in Z$, $g \in G$. Ainsi

$$ {}_r\widehat{G} = \bigcup_{\omega\in\widehat{Z}} {}_r\widehat{G}_\omega, $$

$\widehat{Z}$ désignant le groupe des caractères lisses unitaires de Z.

Pareillement, soit $C_c^\infty(G, \omega)$ l'espace des fonctions localement constantes $f : G \to \mathbb{C}$ telles que $f(zg) = \omega(z)^{-1} f(g)$, $z \in Z$, $g \in G$, de support compact modulo Z. L'opération de μ-convolution munit $C_c^\infty(G, \omega)$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre associative. Pour $(\pi, V) \in {}_r\widehat{G}_\omega$, l'homomorphisme $\pi : G \to \mathrm{Aut}_\mathbb{C}(V)$ induit un homorphisme d'algèbres

$$ \pi : C_c^\infty(G, \omega) \longrightarrow \mathrm{End}_\mathbb{C}(V), $$
$$ \pi(f) = \int_{G/Z} f(g)\pi(g)\, d\mu(g). $$

L'opérateur $\pi(f)$, $f \in C_c^\infty(G, \omega)$, est de rang fini; notons encore $\chi_\pi(f)$ sa trace. Le résultat voulu est le suivant:

Théorème. *Il existe une mesure de Borel $\hat{\mu}$ sur ${}_r\widehat{G}_\omega$, et une seule, telle que*

$$ f(1_G) = \int_{G_\omega} \chi_\pi(f)\, d\hat{\mu}(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G, \omega). $$

Démonstration. Soit ψ un caractère lisse, unitaire de G; posons $\psi_Z = \psi|_Z$. Le résultat est vrai pour ω si et seulement si il est vrai pour $\psi_Z \cdot \omega$.

Lemme. *Il existe un caractère lisse, unitaire ψ de G tel que le groupe $Z/\mathrm{Ker}(\psi_Z \cdot \omega)$ est compact.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $Z = Z_G$. La composante connexe du centre de $\mathbf{G}$ est un F-tore, donc $Z_G = {}^\circ Z_G \cdot L$ où ${}^\circ Z_G$ désigne le sous-groupe compact maximal de Z_G et L un groupe abélien libre de rang fini. Soit ${}^\circ G$ le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes compacts. Le quotient $G/{}^\circ G$ est abélien libre de même rang que L; l'application canonique $L \to G/{}^\circ G$ est injective à conoyau fini. Ainsi, pour $\omega \in \widehat{Z}_G$, il existe un caractère lisse, unitaire ψ de G, nul sur ${}^\circ G$, tel que $\psi_Z\omega$ soit trivial sur L. Le noyau de $\psi_Z\omega$ est donc co-compact dans $Z = Z_G$, d'où le lemme. □

Le groupe $G/\mathrm{Ker}(\omega)$ est liminaire, donc il admet une formule de Plancherel (4.1.2). D'après le lemme, on peut supposer Z compact. Soit μ_Z la mesure de Haar sur Z telle que $\mu_Z(Z) = 1$ et supposons μ_G choisie telle que $\mu = \mu_G/\mu_Z$. Ainsi, l'algèbre $C_c^\infty(G)$ se décompose

$$ C_c^\infty(G) = \bigoplus_{\omega\in Z} C_c^\infty(G, \omega) $$

en somme directe d'idéaux. Soit $f \in C_c^\infty(G,\omega)$, $\chi \in \widehat{Z}$, $\pi \in {}_r\widehat{G}_\chi$; on a

$$\int_G f(g)\pi(g)\,d\mu_G(g) = \begin{cases} \displaystyle\int_{G/Z} f(g)\pi(g)\,d\mu(g) & \text{si } \chi=\omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure $\hat{\mu} = \hat{\mu}_G|_{G_\omega}$ possède donc les propriétés demandées. □

4.3.

Rappelons un deuxième résultat bien connu.

Proposition. *Supposons Z_G/Z compact; soit $\pi \in {}_r\widehat{G}_\omega$ de carré intégrable modulo Z. Notant $d_\mu(\pi)$ le degré formel de π relatif à μ, on a*

$$d_\mu(\pi) = \hat{\mu}(\{\pi\}).$$

Démonstration. D'après le lemme de 4.2, on est réduit au cas où Z est compact. Ainsi Z_G l'est aussi, la représentation π est donc de carré intégrable, et le résultat est donné par [11] 18.8.5. □

5. Le théorème principal

Reprenons les notations de §1; en particulier, on note G le groupe $\mathrm{GL}_r(D)$ et Z le centre de G.

5.1.

Il s'agit de prouver:

Théorème. *Soit π une représentation lisse, irréductible de $G \cong GL_r(D)$, essentiellement de carré intégrable modulo Z. Soit μ une mesure de Haar sur G/Z. Il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 1 dans G tel que*

$$\chi_\pi(\gamma) = (-1)^{r-1} d_\mu(\pi)/d_\mu(\mathrm{St}_G),$$

pour tout élément elliptique régulier γ de $\mathfrak{V}$.

Il existe un caractère non ramifié ψ de $F^\times$ tel que $\psi\pi$ soit de carré intégrable (modulo Z). On a $d_\mu(\psi\pi) = d_\mu(\pi)$ et $\chi_{\psi\pi}(\gamma) = \chi_\pi(\gamma)$ pour tout élément γ de G assez proche de 1. Il suffit donc de considérer une représentation π de carré intégrable modulo Z.

5.2.

Soit ω le caractère central de π: c'est donc un caractère unitaire de $Z \cong F^{\times}$. Rappelons qu'un *pseudo-coefficient* pour π est une fonction dans $C_c^{\infty}(G, \omega)$ satisfaisant aux conditions suivantes. Soit τ une représentation lisse, irréductible, tempérée de G de caractère central ω; on a

$$\chi_\tau(f_\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \cong \pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G, $P \neq G$, de Levi M. Soit σ une représentation lisse, irréductible de M, vue comme représentation de P. Notons $\iota\sigma = \iota_P^G\,\sigma$ la représentation induite parabolique normalisée de σ à G suivant P. Alors

$$\chi_{\iota\sigma}(f_\pi) = 0. \tag{5.2.2}$$

Dans le cas où $G \cong \mathrm{GL}_n(F)$, l'existence d'un pseudo-coefficient pour π est établie dans [2]. Dans le cas général, c'est une conséquence de [4] Théorème 3.2 et Proposition 3.6.

5.3.

D'après [4] Corollaire 3.14, on a

$$\mathcal{O}_\gamma(f_\pi) = \overline{\chi_\pi(\gamma)}, \tag{5.3.1}$$

pour tout élément elliptique régulier γ de G. (Notons que la valeur $\mathcal{O}_\gamma(f_\pi) = \mathcal{O}_\gamma(f_\pi; \mu)$ ne dépend pas du choix de la mesure μ.)

La représentation π est unitarisable; notant $\check\pi$ sa contragrédiente, on a donc $\overline{\chi_\pi(\gamma)} = \chi_{\check\pi}(\gamma)$. De la formule de Plancherel (4.2.1), la proposition de 4.3 et la propriété (5.2.1), on déduit que $f_\pi(1) = d_\mu(\check\pi) \neq 0$. La relation (5.3.1) implique donc

$$d_\mu(\check\pi)\, \mathcal{O}_\gamma(f_\pi) = f_\pi(1)\, \chi_{\check\pi}(\gamma), \tag{5.3.2}$$

pour tout élément elliptique régulier γ de G.

5.4.

Montrons:

Proposition. *Pour tout élément unipotent $y \neq 1$ de G, on a $\mathcal{O}_y(f_\pi) = 0$.*

Démonstration. Choisissons une composante de Levi M du sous-groupe parabolique $P = P_y$ (2.6) de G. On a donc la décomposition en produit semi-direct $P = M \ltimes U$, $U = U_y$. Soit f_π^P la fonction sur M définie par

$$f_\pi^P(m) = \iint_{U\times K} f_\pi(kmuk^{-1})\,dkdu.$$

En identifiant $F^\times$ à un sous groupe fermé du centre de M, on trouve $f_\pi^P \in C_c^\infty(M,\omega)$. D'après la proposition de 2.7, on a $\mathcal{O}_y(f_\pi) = f_\pi^P(1)$.

Soit σ une représentation lisse irréductible de M de caractère central prolongeant ω, et notons $\boldsymbol{\iota}\sigma = \boldsymbol{\iota}_P^G(\sigma)$ son induite parabolique normalisée à G suivant P. On a $\chi_\sigma(f_\pi^P) = \chi_{\iota\sigma}(f_\pi)$ [14] 7.5.7, ainsi $\chi_\sigma(f_\pi^P) = 0$ (5.2.2). D'après la formule de Plancherel pour (M, Z, ω) (4.2.1), on obtient $f_\pi^P(1) = \mathcal{O}_y(f_\pi) = 0$. □

5.5.

D'après la proposition de 5.4 et le théorème de 3.2, on en déduit qu'il existe un voisinage $\mathfrak{V}$ de 1 dans G tel que, pour tout élément régulier elliptique γ de G contenu dans $\mathfrak{V}$, on ait

$$\mathcal{O}_\gamma(f_\pi) = \varphi_1(\gamma)\, f_\pi(1).$$

Pour un tel γ, on a donc $d_\mu(\check{\pi})\,\varphi_1(\gamma) = \chi_{\check{\pi}}(\gamma)$. En remplaçant π par $\check{\pi}$, on obtient aussi qu'il existe un voisinage $\mathfrak{V}_\pi$ de 1 dans G tel que pour tout élément régulier elliptique γ de G contenu dans $\mathfrak{V}_\pi$, on ait

$$d_\mu(\pi)\,\varphi_1(\gamma) = \chi_\pi(\gamma). \tag{5.5.1}$$

La fonction $\gamma \mapsto \varphi_1(\gamma)$ est donc constante sur les éléments elliptiques réguliers dans $\mathfrak{V}_\pi$. Elle est indépendante de π. Par définition, le caractère de St_G vaut $(-1)^{r-1}$ sur les éléments elliptiques réguliers; en prenant $\pi = \mathrm{St}_G$ dans (5.5.1), on obtient

$$\varphi_1(\gamma)\,d_\mu(\mathrm{St}_G) = (-1)^{r-1}$$

d'où, en général,

$$\chi_\pi(\gamma) = (-1)^{r-1} d_\mu(\pi)/d_\mu(\mathrm{St}_G).$$

Le théorème principal est démontré. □

Références

[1] Arthur, J.G.: On elliptic tempered characters. Acta Math. **171**, 73–138 (1993)

[2] Badulescu, A.I.: Orthogonalité des caractères pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle. Manuscripta Math. **101**, 49–70 (2000)

[3] Badulescu, A.I.: Correspondance de Jacquet-Langlands en caractéristique non nulle. Ann. Scient. École Norm. Sup. (4) **35**, 695–747 (2002)

[4] Badulescu, A.I.: Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle. J. Reine Angew. Math. **565**, 101–124 (2003)

[5] Bernstein, J.-N.: On the support of the Plancherel measure. J. Geom. Phys. **5**, 663–710 (1988)

[6] Bushnell, C.J., Henniart, G.: The local Langlands Conjecture for GL(2). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 335. Springer, Berlin (2006)

[7] Bushnell, C.J., Henniart, G.: The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of GL(n). Pure Appl. Math. Q. (à paraître)

[8] Bushnell, C.J., Henniart, G., Kutzko, P.C.: Types and explicit Plancherel formulae for reductive p-adic groups. Clay Math. Inst. Proc. (à paraître)

[9] Collingwood, D.H., McGovern, W.M.: Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras: An Introduction. Van Nostrand Reinholt, New York (1993)

[10] Deligne, P., Kazhdan, D., Vignéras, M.-F.: Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. Représentations des groupes réductifs sur un corps local. Hermann, Paris (1984)

[11] Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Gauthiers-Villars, Paris (1969)

[12] Henniart, G.: La conjecture locale de Langlands pour GL(3). Mém. Soc. Math. France, nouvelle série **11/12** (1984)

[13] Howe, R.E.: The Fourier transform and germs of characters. Math. Ann. **208**, 305–322 (1974)

[14] Laumon, G.: Cohomology with Compact Support of Drinfeld Modular Varieties. Cambridge University Press, Cambridge (1996)

[15] Montgomery, D., Zippin, L.: Topological Transformation Groups. Wiley, New York (1955)

[16] Rogawski, J.: Representations of GL(n) and division algebras over a local field. Duke Math. J. **50**, 161–196 (1983)

[17] Shalika, J.: A theorem on semi-simple p-adic groups. Ann. Math. **95**, 226–242 (1972)

[18] Springer, T.A., Steinberg, R.: Conjugacy classes. Seminar on algebraic groups and related finite groups. In: Borel, A., et al. (eds.) Lecture Notes in Mathematics, vol. 131, pp. 167–266. Springer (1970)

[19] Vignéras, M.-F.: Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique. J. Fac. Sci. U. Tokyo **28**(3 sec. 14), 945–961 (1982)

[20] Wallach, N.: Real Reductive Groups, II. Academic Press, New York (1992)