Invent. math. 131, 645–674 (1998)

*Inventiones mathematicae*


# Points de petite hauteur sur les courbes modulaires $X_0(N)$

**P. Michel, E. Ullmo**

Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, F-91405 Orsay, France

Oblatum 1-I-1997 & 30-IV-1997

**Abstract.** Let $N$ be a square free integer, prime to 6. Let $\phi$ the imbeding of $X_0(N)$ in its Jacobian relative to the point $\infty$. We show that the set $\{x \in X_0(N)(\overline{\mathbf{Q}}) \quad |h_{NT}(\phi(x)) \leq (\frac{2}{3} - \epsilon)\log N\}$ is finite and that $\{x \in X_0(N)(\overline{\mathbf{Q}})$ $|h_{NT}(\phi(x)) \leq (\frac{4}{3} + \epsilon)\log N\}$ is infinite. This explicit form of the Bogomolov conjecture is obtained by an estimation of the self-intersection of the dualizing sheaf, in the sense of Arakelov theory, of modular curves. This result is obtained by estimating several quantities attached to the Arakelov metric on $X_0(N)$, starting with Petersson's trace formula

## Contents



## 1 Introduction

### *1.1 Points de petite hauteur sur les courbes modulaires $X_0(N)$*

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés, on trouve dans [AU2] une interprétation modulaire et une interprétation spectrale de l'auto-intersection du dualisant relatif, dans le sens de la théorie d'Arakelov, des courbes modulaires $X_0(N)$. La signification de cet invariant arithmétique a été donnée par Szpiro [Sz] et Zhang [Z]. Soit $K$ un corps de nombres et $X_K \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ une courbe lisse et géométriquement connexe sur $K$ de genre $g > 1$. On note $\omega^2$ l'auto-intersection du dualisant relatif au sens de la théorie d'Arakelov

[Ar] et $\omega_a^2$ cette auto-intersection au sens de la théorie des intersections de Zhang [Z]. Ces deux invariants coincident quand le modèle minimal non-singulier $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(O_K)$ est lisse sur l'anneau des entiers $O_K$ de $K$. On a toujours les inégalités:

$$\omega^2 \geq \omega_a^2 > 0 \tag{1}$$

et la différence $\omega^2 - \omega_a^2$ se calcule explicitement si on connait les fibres de mauvaise réduction de $X$ par le théorème 5-5 et le corrolaire 5-7 de [Z]. Soit $J_K$ la Jacobienne de $X_K$, on note $h_{NT}$ la hauteur de Néron-Tate sur $J_K$. Pour tout diviseur $D_0$ de degré 1 sur $X_K$, on note $\phi_{D_0}$ le morphisme de $X_K$ dans $J_K$ qui lui est associé. Il est alors connu [Sz], [Z] que pour tout diviseur $D_0$ de degré 1 sur $X_K$ et tout $\epsilon > 0$:

$$\left\{x \in X_K(\overline{K}) \quad |h_{NT}(\phi_{D_0}(x)) \leq \frac{\omega_a^2}{2(2g-2)} - \epsilon\right\} \tag{2}$$

est fini et si on choisit $D_0$ tel que $[K_X - (2g-2)D_0]$ soit de torsion dans $J_K$ ($K_X$ est le diviseur canonique sur $X_K$) alors

$$\left\{x \in X_K(\overline{K}) \ |h_{NT}(\phi_{D_0}(x)) \leq \frac{\omega_a^2}{(2g-2)}\right\} \tag{3}$$

est infini. La discrétion de l'ensemble des points algébriques de $X_K$ dans sa Jacobienne pour la topologie de Néron-Tate (conjecture de Bogomolov) qui est donc équivalente à la positivité de $\omega_a^2$ a été montré dans [Ul].

Le but de ce travail est d'expliciter ces invariants arithmétiques dans le cas des courbes modulaires $X_0(N)$. Dans tout ce texte, $N$ désignera un entier sans facteurs carrés tel que $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$ de sorte que $X_0(N)$ admet une structure de courbe lisse géométriquement connexe de genre $g_N \geq 1$ sur $\mathbf{Q}$. On note $\phi$ le plongement de $X_0(N)$ dans sa Jacobienne $J_0(N)$ relatif à la pointe $\infty$. On notera $\omega_N^2$ et $\omega_{a,N}^2$ les invariants arithmétiques précédemment définis de la courbe modulaire $X_0(N)$. On obtient ainsi:

**Théorème 1.1** *Pour tout $N$ sans facteurs carrés, premier à* 6, *on a l'égalité*

$$\omega_N^2 = 3g_N \log N\left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right) .$$

Deligne et Rapoport [DeRa] ont déterminé le modèle minimal non singulier $X_0(N)/\mathbf{Z}$ de $X_0(N)$. Ceci permet de calculer explicitement la différence $\omega_N^2 - \omega_{a,N}^2$. Ceci a été fait dans [AU2] où il est montré (partie 4-3) que

$$\omega_N^2 - \omega_{a,N}^2 = \frac{g_N}{3}\log N + O(\log N). \tag{4}$$

On obtient alors en utilisant (2) et (3):

**Théorème 1.2** *Pour tout N sans facteurs carrés, premier à* 6, *on a l'égalité*

$$\omega_{a,N}^2 = \frac{8}{3} g_N \log N \left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right) .$$

*En particulier, on obtient pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout N assez grand*:

$$l'ensemble \left\{ x \in X_0(N)(\overline{\mathbf{Q}}) \ \ |h_{NT}(\phi(x)) \leq \left(\frac{2}{3} - \epsilon\right) \log N \right\} \ est\ fini \tag{5}$$

*et*

$$l'ensemble \left\{ x \in X_0(N)(\overline{\mathbf{Q}}) \ \ |h_{NT}(\phi(x)) \leq \left(\frac{4}{3} + \epsilon\right) \log N \right\} \ est\ infini. \tag{6}$$

Les énoncés précédents reposent sur l'interprétation modulaire de l'auto-intersection du dualisant relatif démontré dans [AU2]. On obtient ici le contrôle en fonction du niveau $N$, des quantités relatives à la métrique d'Arakelov qui interviennent dans cette interprétation, ainsi que de la hauteur de Néron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$. Nous expliquons ces résultats dans la section suivante.

L'auto-intersection du dualisant relatif n'est connue explicitement que pour les courbes de genre 1 (où elle est nulle) et pour les courbes de genre 2 [BMMB]. Les théorèmes précédents estiment cet invariant pour des courbes de genre $g$ arbitrairement grand. Des majorations conjecturales de cet invariant pour des familles de courbes impliquent des versions effectives de la conjecture de Mordell grâce aux travaux de Parshin [P], Moret-Bailly et Szpiro [MB]. La motivation principale pour l'étude de cet invariant dans le cas des courbes modulaires $X_0(N)$, en dehors de la richesse arithmétique de la situation, provient des courbes elliptiques de Weil forte sur $\mathbf{Q}$. On cherche à majorer la hauteur de Faltings de ces courbes (ou de manière équivalente le degré de leur paramétrisation modulaire) en reliant les invariants arithmétiques de la courbe elliptique à ceux de $X_0(N)$ via la paramétrisation modulaire.

### *1.2 La métrique d'Arakelov de $X_0(N)$*

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés. Il est démontré dans [AU2] (Prop. B et Prop 4.2.1) l'égalité

$$\omega_N^2 = \frac{12(g_N+1)(g_N-1)}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]} \sum_{p|N} \frac{p+1}{p-1} \log p + 4g_N(g_N-1) g_{Ar}(0,\infty) - h \ . \tag{7}$$

Dans l'expression précédente $h := h_{NT}(K_{X_0(N)} - (2g_N - 2)(\infty))$ est la hauteur de Néron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$. Il est démontré dans

[AU2] (Lemme 4.1.1) que cette quantité est nulle si $N$ possède un diviseur premier $\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ et un diviseur premier $\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$. Dans la section 6 nous donnons la majoration

$$h = O_\epsilon(N^\epsilon),$$

pour tout $\epsilon$ positif en nous ramenant à calculer les hauteurs de points de Heegner sur $X_0(N)$ à l'aide des formules de Gross-Zagier [GZ].

La quantité $g_{Ar}(0, \infty)$ est la fonction de Green-Arakelov évaluée aux pointes 0 et $\infty$ et on a l'égalité ([AU2] Thm. C et Section 4.3)

$$g_{Ar}(0,\infty) = \frac{2\pi}{\mathrm{vol}}\left(\sum_{p|N}\frac{p^2-1-2p}{p^2-1}\log p - 2\gamma - \frac{a\pi}{6} - 1\right) + 4\pi C_F - 2\pi D_F \quad (8)$$

Dans l'expression précédente, $a$ désigne la dérivée en 1 de la fonction $\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)/(\Gamma(s)\zeta(2s))$ et les constantes $C_F$ et $D_F$ sont associées à la métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$. Plus précisement, soit $S_k(\Gamma_0(N))$ l'espace des formes cuspidales holomorphes de poids $k$ et de niveau $N$. Cet espace est muni du produit scalaire de Petersson $(\ ,\ )$. Soit $\mathscr{F}$ une base de $S_2(\Gamma_0(N))$, orthonormée pour le produit scalaire de Petersson, alors la fonction $\Gamma_0(N)$-invariante

$$F(z) := \frac{y^2}{g_N}\sum_{f\in\mathscr{F}}|f(z)|^2$$

est la densité associée à la mesure d'Arakelov sur la courbe $X_0(N)$. Sa décomposition spectrale s'écrit:

$$F(z) = \sum_{j\geq 0} A_j u_j(z) + \sum_{\kappa}\int_0^\infty A_\kappa(t)E_\kappa(z, \frac{1}{2} + \imath t)dt,$$

où pour toute pointe $\kappa$ de $X_0(N)$ on a noté $E_\kappa(z, s)$ sa série d'Eisenstein correspondante. Alors $D_F$ est la quantité

$$D_F = \sum_{n\geq 1}\frac{|A_n|^2}{\lambda_n} + 2\pi\sum_\kappa\int_0^\infty \frac{|A_\kappa(t)|^2}{1/4+t^2}dt.$$

D'après la majoration de Selberg $\lambda_1 \geq 3/16$ et l'identité de Parseval, on a la majoration

$$D_F \leq (16/3)||F||_2^2. \quad (9)$$

D'autre part, il résulte de la théorie des séries d'Eisenstein que la transformée de Rankin-Selberg de $F$

$$R_{\kappa,F}(s) := \int_{X_0(N)} E_\kappa(z,s)F(z)\frac{dxdy}{y^2} \tag{10}$$

admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en 1 de résidu $||F||_1/\mathrm{vol} = 1/\mathrm{vol}$, avec $\mathrm{vol} := \mathrm{Vol}(X_0(N))$. La constante $C_F$ est le terme suivant dans le développement de Laurent en $s = 1$ de $R_{\infty,F}(s)$:

$$R_{\infty,F}(s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)} + C_F + O(s-1).$$

Pour obtenir les théorèmes 1.1 et 1.2 nous estimons les diverses quantités qui apparaissent dans (8). On obtient dans ce texte:

**Théorème 1.3** *Pour tout N sans facteurs carrés et pour tout* $\epsilon > 0$ *on a l'égalité*

$$C_F = \frac{1-\log 4\pi}{\mathrm{vol}}(1 + O_\epsilon(N^{-1/8+\epsilon})).$$

Le théorème F de [AU2] donne une interprétation spectrale de la transformée de Rankin-Selberg de la métrique d'Arakelov. On note $Z(s)$ la fonction Zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$. On a alors

$$C_F = -\frac{1}{2g_N\ \mathrm{vol}}\lim_{s\to 1}\left(\frac{Z'}{Z}(s) - \frac{1}{s-1}\right) + \frac{\Gamma'(2)+\gamma-\log(4\pi)}{4\pi g_N} + O_\epsilon\left(\frac{1}{N^{2-\epsilon}}\right). \tag{11}$$

On obtient l'estimation suivante (qui ne donne pas un équivalent car les termes de plus haut degré se simplifient):

**Corollaire 1.4** *Pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout N impair, sans facteurs carrés, on a la majoration*

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{Z'}{Z}(s) - \frac{1}{s-1}\right) = O_\epsilon(N^{7/8+\epsilon}).$$

Pour contrôler le terme $D_F$ nous majorons d'abord la norme sup, $\|F\|_\infty$ de $F$, puis sa norme $L_2$. Nous montrons les estimations suivantes:

**Théorème 1.5** *Pour tout N sans facteurs carrés, on a*

$$||F(z)||_\infty = \sup_{z\in\mathscr{H}}|F(z)| \ll \frac{\log N\tau^5(N)}{g_N}.$$

*Remarque*. Ce résultat améliore nettement la majoration $||F(z)||_\infty \ll_\epsilon N^{1+\epsilon}$ de [AU1] TH. B: à cette époque la minoration de Hoffstein-Lockhart ([HL]) $(f,f) \gg N^{1-\epsilon}$ pour une forme primitive de niveau $N$, n'était pas disponible. Notons que si dans [AU1] p. 306 on insère cette minoration à la place de la minoration triviale $(f,f) \gg 1$, on obtient $||F(z)||_\infty \ll_\epsilon N^\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Nous tirons donc avantage des estimations en moyenne pour gagner un facteur $g_N$ supplémentaire. Nous majorons également la norme $L_2$ de $F$ en gagnant un facteur $\log N\tau^5(N)$ par rapport à la majoration précédente:

**Théorème 1.6** *Pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout* $N$ *sans facteurs carrés, on a l'égalité*

$$||F(z)||_2^2 = \int_{X_0(N)} F(z)^2 \frac{dxdy}{y^2} = \frac{1}{vol}(1 + O_\epsilon(N^{-1/53+\epsilon}));$$

Les égalités:

$$\mathrm{vol} = \frac{\pi}{3}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)], \quad \frac{12(g_N+1)}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]} = 1 + O(\tau(N)N^{-1}),$$
$$\sum_{p|N} \frac{\log p}{p} = O(\log\log N),$$

permettent en utilisant (8), les théorèmes 1.3, 1.6 et (9) d'obtenir:

$$g_{Ar}(0,\infty) = \frac{1}{2g_N}\log N\left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right). \tag{12}$$

On obtient alors les théorèmes 1.1 et 1.2 en utilisant (7).

Disons que la preuve de ces estimations se simplifie considérablement si on suppose que $N$ est premier: l'espace des formes de poids 2 coincide avec celui des formes nouvelles et on peut choisir pour base, une base formée de formes primitives de niveau $N$ normalisées; aussi nous donnons dans la section 3.2 une démonstration du Théorème 1.3 pour $N$ premier. Pour le cas général, nous utilisons une base relativement "canonique" formée à partir de formes nouvelles primitives de niveau $m|N$; ce choix est synthétisé dans la proposition 2.2 ([AU1] Prop. 3.2).

*Remarque*. Les estimations analogues aux théorèmes 1.3, 1.5 et 1.6, dans le cas des formes de poids $k \geq 2$ sont bien sur valables en suivant la même méthode. Nous nous sommes restreints au cas des formes de poids deux car il a une bonne interprétation pour la géométrie d'Arakelov. Pour les formes de poids $k > 2$ une interprétation Arakelovienne de ces estimations devrait exister comme cela est fortement suggéré dans [GZ]. La condition $N$ premier à 6, dans les théorèmes 1.1 et 1.2 peut sans doute être levé par une étude du modèle minimal non singulier de $X_0(N)$ en 2 et 3. Cette condition intervient aussi dans le calcul de la hauteur des points de Heegner de discriminant $-3$ et $-4$. Les formules, donnant ces hauteurs [GZ] sont en effet développées quand le discriminant est premier avec le niveau.

*Remerciements*. Nous tenons à remercier A. Abbes, J.-B. Bost, L. Clozel, B. Edixhoven, E. Fouvry, H. Iwaniec, J.-P. Serre et L. Szpiro de l'intéret qu'ils ont porté à ce travail.

## 2 Normalisations et lemmes préliminaires

Dans la suite $\epsilon$ désignera un réel positif aussi petit que l'on souhaite dont la définition peut varier d'une ligne à l'autre.

Soit $N$ sans facteurs carrés et $k \geq 2$ un entier pair. Rappelons que les pointes de $X_0(N)$ correspondent aux diviseurs $v$ de $N$ par $\kappa \equiv 1/v$ et que $\infty \equiv 1/N$. Pour toute pointe $\kappa$, on note $\Gamma_0(N)_\kappa$ le stabilisateur de $\kappa$ et on fixe $\sigma_\kappa \in SL_2(\mathbf{R})$ tel que $\sigma_\kappa(\infty) = \kappa$ et $\sigma_\kappa^{-1}\Gamma_0(N)_\kappa \sigma_\kappa = \Gamma_0(N)_\infty$ (si $\kappa = \infty$ on prendra $\sigma_\infty = Id$). Toute forme cuspidale de poids $k$, $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ admet alors un développement de Fourier autour de $\kappa$:

$$f_{|\sigma_\kappa}(z) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_\kappa(n)\,\mathrm{e}(nz), \ \ \mathrm{e}(z) := \exp(2\imath\pi z).$$

On pose alors $a_n(\kappa, f) := \hat{f}_\kappa(n)/n^{(k-1)/2}$. Pour la pointe $\infty$, on écrira simplement $\hat{f}(n)$ et $a_n(f)$.

### *2.1 Base orthonormée, sommes de Kloosterman et Grand Crible*

On désigne par $\mathscr{F}_k$ une base orthonormée de $S_k(\Gamma_0(N))$. En poids 2 on notera $\mathscr{F} = \mathscr{F}_2$. Les coefficients de Fourier de la fonction $F_k(z)$ correspondante sont reliés aux sommes de Kloosterman par la "formule des traces" de Petersson (cf. [DeI] (4.4)): pour tout $m, n \geq 1$ on a l'égalité

$$\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathscr{F}_k} a_m(f)\overline{a_n(f)} = \delta_{m,n} - 2\pi i^{-k} \sum_{c \geq 1} \frac{S(m,n;cN)}{cN} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN}\right) \tag{13}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker, $S(m,n;c) = \sum_{\substack{x (\mathrm{mod}\ c)\\ (x,c)=1}} \mathrm{e}(mx + n\overline{x}/c)$ est la somme de Kloosterman et $J_{k-1}(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre $k-1$. Nous utiliserons les majorations suivantes de $S(m,n;c)$ et $J_{k-1}(x)$:

$$S(m,n;c) \leq (m,n,c)^{1/2} c^{1/2} \tau(c), \ \ J_{k-1}(x) \ll \min\bigl(x, x^{-(k-1)/2}\bigr). \tag{14}$$

On en déduit immédiatement l'égalité

$$\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathscr{F}_k} |a_1(f)|^2 = 1 + O(\tau(N)N^{-3/2}) \tag{15}$$

Duke, Friedlander et Iwaniec ont combiné la formule de trace avec le grand crible arithmétique pour donner des inégalités de grand crible quasi-optimales sur les coefficients de Fourier des formes $f \in \mathscr{F}_k$ ([DFI] Theorem 1.):

**Proposition 2.1** *Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de nombres complexes. Alors on a la majoration*

$$\sum_{f\in\mathscr{F}_k}\Big|\sum_{n\leq K}\alpha_n a_n(f)\Big|^2 \ll \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}\left(1+\frac{K}{N}\right)||\alpha||_K^2$$

*avec*

$$||\alpha||_K^2=\sum_{n\leq K}|\alpha_n|^2$$

*Remarque*. Dans [DFI], la proposition précédente est démontrée avec un terme $O(K\log K/N)$ au lieu de $O(K/N)$. Le facteur $\log K$ (qui n'apparait qu'en poids $k=2$) peut être enlevé en utilisant une méthode due à Duke [Du] Prop. 1.

*2.2 Une base orthonormée "quasiment canonique"*

Soit une forme nouvelle primitive $f$ de $S_k(\Gamma_0(N))$ normalisée par $a_1(f)=1$. On dispose alors la majoration de Deligne

$$|a_n(\kappa,f)|\leq\tau(n) \tag{16}$$

où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de $n$. Pour profiter pleinement de cette majoration dans les estimations qui suivent nous utiliserons une base particulière $\mathscr{F}$ obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt d'une base formée à partir des formes nouvelles primitives de niveau $m$ où $m$ parcourt l'ensemble des diviseurs de $N$ ([AU1] Prop 3.2):

**Proposition 2.2** *Soit $N$ sans facteurs carrés; la fonction $F(z)$ s'exprime sous la forme*

$$F(z)=\frac{1}{g_N}\sum_{m|N}\sum_{\substack{f \text{ primitive}\\ \text{pour } \Gamma_0(m)}}H(f,N)(z)$$

*avec*

$$\begin{aligned}H(f,N)(z)=y^2\frac{1}{(f,f)_N}&\prod_{p|N/m}\left(1-\frac{\hat{f}(p)^2}{(p+1)^2}\right)^{-1}\\&\times\sum_{d,d'|N/m}\mu(d)\mu(d')dd'\hat{f}(R/r)\prod_{p|R/r}\frac{1}{p+1}f(dz)\overline{f}(d'z)\end{aligned}$$

*où $R=[d,d']$ (resp. $r=(d,d')$) désigne le ppcm de $d$ et $d'$ (resp. leur pgcd), et $(\ ,\ )_N$ est le produit scalaire de Petersson sur $S_2(\Gamma_0(N))$.*

On utilisera aussi une variante portant sur les coefficients de Fourier des éléments de $\mathscr{F}$:

**Proposition 2.3** *Pour toute pointe* $\kappa$, *et pour tout couple* $n_1, n_2 \geq 1$, *on pose*

$$A(\kappa, n_1, n_2) := \sum_{f \in \mathscr{F}} a_f(\kappa, n_1)\overline{a_f(\kappa, n_2)};$$

*on a alors l'égalité*

$$A(\kappa, n_1, n_2) = \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{d,d'|N/m} b(d,d',f) a_f(\kappa, n_1/d)\overline{a_f(\kappa, n_2/d')}$$

*avec*

$$b(d,d',f) = \prod_{p|N/m} \left(1 - \frac{\hat{f}(p)^2}{(p+1)^2}\right)^{-1} \mu(d)\mu(d')dd'\hat{f}(R/r) \prod_{p|R/r} \frac{1}{p+1}$$

*où* $R = [d,d']$ (*resp.* $r = (d,d')$) *désigne le ppcm de* $d$ *et* $d'$ (*resp. leur pgcd*), *et avec la convention que* $a_f(\kappa, n/d) = 0$ *si* $d \nmid n$.

On en déduit alors le

**Corollaire 2.4** *Pour toute pointe* $\kappa$, *et pour tout couple* $n_1, n_2 \geq 1$, *on a la majoration*

$$A(\kappa, n_1, n_2) \ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau(N)^5(N, n_1, n_2)$$

*Preuve*. Par la majoration de Deligne (16) on a

$$b(d,d',f) = O(\tau(N)^2(d,d')^{3/2}[d,d']^{1/2}). \tag{17}$$

L'inégalité $|a_f(\kappa, n_1/d)\overline{a_f(\kappa, n_2/d')}| \leq \tau(n_1)\tau(n_2)$ nous donne alors

$$\begin{aligned} A(\kappa, n_1, n_2) &\ll \tau(n_1)\tau(n_2) \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{\substack{d,d'|N/m \\ d|n_1, d'|n_2}} \tau(N)^2 (d,d')^{3/2}[d,d']^{1/2} \\ &\ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau^4(N) \sum_{m|N} \frac{(N/m, n_1, n_2)(N/m)}{[\Gamma_0(m) : \Gamma_0(N)]} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_m} \\ &\ll \tau(n_1)\tau(n_2)\tau^5(N)(N, n_1, n_2) \end{aligned}$$

Dans la dernière étape, on a utilisé les égalités.
$(f,f)_N = [\Gamma_0(m) : \Gamma_0(N)]\ (f,f)_m$ et $[\Gamma_0(m) : \Gamma_0(N)] = \prod_{p|N/m}(p+1)$ et la majoration

$$\sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_m} = O(1).$$

Pour montrer cette dernière égalité, il suffit de complêter la famille orthonormée $\{f(z)/(f,f)_m^{1/2},\ f \textit{ primitive pour } \Gamma_0(m)\}$ en une base orthonormée telle que pour tout élément $f$ dans la base, le premier coefficient de Fourier de $f$ en $\infty$ est $\geq 0$ et d'appliquer à cette base la majoration (15). □

### *2.3 Les séries d'Eisenstein et la Théorie de Rankin-Selberg*

*Séries d'Eisenstein.* Notre référence sera [Iw] Chap. 13. Considérons le vecteur dont les composantes sont les séries d'Eisenstein associées aux pointes $\kappa$ de $X_0(N)$

$$\mathscr{E}(z,s) := {}^t(\ldots, E_\kappa(z,s), \ldots).$$

Le vecteur $\mathscr{E}(z,s)$ est une fonction holomorphe en $s$ sur $\{s,\ \mathrm{Re}s > 1\}$ qui admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$, holomorphe sur $\{s,\ \mathrm{Re}s > 1/2\} - \{1\}$, avec un pôle simple en 1, de résidu $1/\mathrm{vol}(X_0(N))$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mathscr{E}(z,s) = \Phi(s)\mathscr{E}(z, 1-s) \tag{18}$$

où $\Phi(s)$ est la matrice dont les coefficients sont indicés par les couples de pointes $(\kappa,\kappa') = (1/v, 1/v'),\ v|N,\ v'|N$ et dont le coefficient en $(\kappa,\kappa')$ est

$$\Phi_{\kappa,\kappa'}(s) = \psi(s)\prod_{p|N}(p^{2s}-1)^{-1}\phi((v,v')(N/v,N/v'))\prod_{p|(v,N/v')(v',N/v)}(p^s - p^{1-s})$$
$$\text{avec } \psi(s) = \pi^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)\zeta(2(1-s))}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \tag{19}$$

et en particulier — si on note $r$ le nombre de facteurs premiers de $N$ — la fonction $s^{r-1}(s-1)(s-1/2)\zeta(2s)\mathscr{E}(z,s)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

*Théorie de Rankin-Selberg.* Soient $f, g \in S_2(\Gamma_0(N))$ et considérons le vecteur dont les composantes sont indicées par les pointes $\kappa$ de $X_0(N)$

$$\mathscr{L}(f\otimes\overline{g},s) := {}^t(\ldots, L_\kappa(f\otimes\overline{g},s), \ldots),\ L_\kappa(f\otimes\overline{g},s) = \sum_n \frac{a_n(\kappa,f)\overline{a_n(\kappa,g)}}{n^s}.$$

Alors $\mathscr{L}(f\otimes\overline{g},s)$ est holomorphe sur *Res* $> 1$ et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec éventuellement un pôle simple en 1 de résidu $16\pi^2(f,g)/\mathrm{vol}(X_0(N))$: plus précisement, la fonction $s^{r-1}(s-1/2)\zeta(2s)$ $\mathscr{L}(f\otimes\overline{g},s)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-\{1\}$. De plus, la fonction vectorielle

$$\Lambda(f\otimes\overline{g},s) = \pi^{-s}\Gamma(s+1)\mathscr{L}(f\otimes\overline{g},s)$$

vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f \otimes \overline{g}, s) = \Phi(s)\Lambda(f \otimes \overline{g}, 1-s) \tag{20}$$

## 3 Transformée de Rankin-Selberg de la métrique d'Arakelov

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 1.3.

Soit $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ une forme de poids 2. On considère sa convolution de Rankin-Selberg

$$L(s, f \otimes \overline{f}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{n^s}.$$

D'après la majoration de Deligne $|a_n(f)| \ll_\epsilon n^\epsilon$, cette série converge absolument pour $Res > 1$. D'autre part, on sait par la théorie des séries d'Eisenstein que $L(s, f \otimes \overline{f})$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $R_f$. On écrit donc le développement de Laurent de $L(s, f \otimes \overline{f})$ en 1 sous la forme

$$L(s, f \otimes \overline{f}) = \frac{R_f}{s-1} + c_f + \dots \quad \textit{où } R_f = \frac{16\pi^2 (f, f)}{\text{vol}}. \tag{21}$$

L'égalité

$$R_{\infty,F}(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} \frac{1}{g_N} \sum_{f \in \mathscr{F}} L(s, f \otimes \overline{f})$$

nous ramène à estimer la quantité $\sum_{f \in \mathscr{F}} c_f$. En utilisant l'égalité $\Gamma'(1) = -\gamma$, on voit que le théorème 1.3 est un corollaire du

**Théorème 3.1** *Pour $N$ sans facteurs carrés, et pour tout $\epsilon > 0$ on a la majoration*

$$\sum_f c_f = 4\pi\gamma + O_\epsilon(N^{-1/8+\epsilon});$$

*où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.*

On considère la fonction

$$g(s) := s^{r-1}\left(s - \frac{1}{2}\right)\zeta(2s) \sum_{f \in \mathscr{F}} \left(L(s, f \otimes \overline{f}) - R_f \zeta(s)\right);$$

$g(s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ et est holomorphe en 1. Nous cherchons dans la suite à majorer $g(1)$.

Soit $\alpha > 0$ et $s_0 = \alpha + \imath t$, $t \in \mathbf{R}$, on va majorer $g(1 + s_0)$: pour chaque $f$, on commence par la décomposition de $L(1 + s_0, f \otimes \overline{f})$:

$$L(1+s_0, f\otimes\overline{f}) = \sum_{1\le n\le N^\beta} \frac{|a_n(f)|^2}{n^{s_0+1}} + \sum_{n>N^\beta} \frac{|a_n(f)|^2}{n^{s_0+1}} := T_{f,1}(1+s_0) + T_{f,2}(1+s_0)$$

où $\beta = \beta(\alpha) > 1$ est un paramètre à fixer. On pose alors

$$L_F(s_0) = \sum_{f\in\mathscr{F}} L(s_0, f\otimes\overline{f}) := T_{1,F}(s_0) + T_{2,F}(s_0)$$

Dans la section suivante nous estimons $T_{1,F}(1+s_0)$ comme un terme principal grâce à la formule des traces de Petersson.

### 3.1 Passage aux sommes de Kloosterman

Soit $T_{1,F}(1+s_0) := \sum_{f\in\mathscr{F}} T_{f,1}(1+s_0)$, on va montrer le lemme suivant:

**Lemme 3.2** *Pour* $0 < \alpha < 0.7$, $\beta = \frac{15}{8}(1+6\alpha/5)\left(1+7\alpha/4+3\alpha^2/2\right)^{-1}$ *et tout* $\epsilon > 0$ *on a*

$$T_{1,F}(1+s_0) = 4\pi\zeta(1+s_0) + O_{\epsilon,\alpha}(N^{\epsilon-\alpha\beta})$$

*Preuve*. La formule des traces de Petersson (13) nous permet d'écrire

$$T_{1,F} = 4\pi\zeta(1+s_0) + O_\alpha\left(\frac{1}{\alpha N^{\alpha\beta}}\right) + T_1',$$

avec

$$T_1' = 8\pi^2 \sum_c \sum_{n\le N^\beta} \frac{S(n,n;cN)}{n^{1+s_0}cN} J_1\left(\frac{4\pi n}{cN}\right).$$

Pour tout $\beta'$ tel que $0 < \beta' < \beta$, les majorations de sommes de Kloosterman et des fonctions de Bessel (14) nous donnent:

$$\sum_{n\le N^{\beta'}} \sum_c \frac{S(n,n;cN)}{n^{1+s_0}cN} J_1\left(\frac{4\pi n}{cN}\right) \ll \sum_{n\le N^{\beta'}} \frac{(n,N)^{1/2}}{n^{\sigma_0}} \sum_c \frac{(n,c)^{1/2}(Nc)^{1/2+\epsilon}}{(Nc)^2}$$
$$\ll_\alpha N^{(1-\alpha)\beta'-3/2+\epsilon}.$$

On décompose la somme

$$\sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta} \sum_{c\ge 1} := \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta} \sum_{c\le C} + \sum_{N^{\beta'}<n\le N^\beta} \sum_{c>C}.$$

La deuxième somme est majorée comme précédemment par $N^{\epsilon+\beta-\alpha\beta'-3/2}/C^{1/2}$. On peut, par ailleurs, majorer la première par

$$N^{\epsilon}\sum_{N^{\beta'}<n\leq N^{\beta}}\frac{(n,N)^{1/2}}{n^{3/2+\alpha}}\sum_{c\leq C}\frac{(cN)^{1/2+\epsilon}(c,n)^{1/2}}{(cN)^{1/2}}\ll_{\alpha}\frac{N^{\epsilon}C}{N^{(\alpha+1/2)\beta'}}.$$

On prend alors $C=(N^{2\beta/3-1+\beta'/3})$ (on a donc la condition $2\beta+\beta'>3$) et $T_1'$ est majorée par $O_\alpha(N^{(1-\alpha)\beta'-3/2+\epsilon}+N^{2\beta/3-\beta'(\alpha+1/6)-1+\epsilon})$. Il suffit alors de choisir $\beta'=3/2-\alpha\beta$,

$$\beta=\frac{15}{8}(1+6\alpha/5)\left(1+7\alpha/4+3\alpha^2/2\right)^{-1} \tag{22}$$

et $\alpha\leq 0.7$ (de sorte que $0<\beta'\leq\beta$ et $2\beta+\beta'>3$) pour finir la preuve du lemme. □

Notons que $|\mathscr{F}|=g_N$ et que pour tout $N$ sans facteurs carrés, premier à 6, $g_N$ est donné par l'expression suivante [AU2] lemme 3.3.10

$$g_N=\frac{1}{12}\prod_{p|N}(p+1)+1-\frac{1}{4}\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)-\frac{1}{3}\prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right)-\tau(N)/2. \tag{23}$$

**Corollaire 3.3** *Avec les hypothèses du lemme* 3.2, *on a l'égalité*

$$g(1+s_0)=O_\alpha((1+|t|)^A(T_2(1+s_0)+N^{\epsilon-\alpha\beta})).$$

*avec*

$$T_2(s)=\sum_f\sum_{n>N^{\beta}}\frac{|a_n(f)|^2}{n^s},$$

*et* $A>0$ *est un réel positif assez grand.*

*Preuve*. D'après la définition de $g(s)$, le lemme précédent, (21) et l'égalité

$$\mathrm{vol}(H/\Gamma_0(N))=(\pi/3)[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)],$$

on a

$$\begin{aligned}g(1+s_0)=&(s_0+1)^r(s_0+1/2)\zeta(2(1+s_0))4\pi\left(1-\frac{12g_N}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}\right)\zeta(1+s_0)\\&+O_\alpha((1+|t|)^A(T_2(1+s_0)+N^{\epsilon-\alpha\beta})).\end{aligned}$$

On finit la preuve en remarquant que d'après (23) on a

$$1-\frac{12g_N}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}=O(\tau(N)N^{-1})=O(N^{-\alpha\beta}).$$ □

Dans toute la suite la valeur de $\beta$ sera celle définie au lemme 3.2 en fonction de $\alpha < 0.7$.

### *3.2 Le cas N premier*

On suppose ici $N$ premier, on peut donc prendre pour $\mathscr{F}$ une base formée des $f/(f,f)^{1/2}$ où $f$ décrit l'ensemble des formes primitives de niveau $N$ (deux telles formes distinctes sont automatiquement orthogonales). Soit $f$ une telle forme. On pose $\Phi_N(s) := \prod_{p|N}(1 - \frac{1}{p^s}) = 1 - \frac{1}{N^s}$. La fonction $\zeta(2s)L(s, f \otimes \overline{f})$ est alors holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 et vérifie l'équation fonctionnelle suivante [CS]:

$$\Lambda(f,s) = \Lambda(f, 1-s) \text{ avec } \Lambda(f,s) = \mathscr{G}(s)\Phi_N(s)\zeta(2s)L(s, f \otimes \overline{f})$$

$$\mathscr{G}(s) := (N/2\pi^2)^s \Gamma(s)\Gamma(s/2)^2.$$

Par la majoration de Deligne $|a_f(n)|^2 \ll \tau(n)^2$, on a la majoration

$$T_2(1+s_0) \leq \sum_{n > N^\beta} \frac{\tau(n)^2}{n^{1+\alpha}} \ll N^{\epsilon - \alpha\beta}. \tag{24}$$

Alors d'après le corollaire 3.3 on a

$$g(1+s_0) = O((1+|t|^A)N^{\epsilon-\alpha\beta}).$$

D'autre part, soit $\alpha' > 0$, $s_1 = \alpha' + it'$, $t' \in \mathbf{R}$. L'équation fonctionnelle donne

$$\zeta(-2s_1)L_f(-s_1) = \frac{\mathscr{G}(1+s_1)\Phi_N(1+s_1)}{\mathscr{G}(-s_1)\Phi_N(-s_1)}\zeta(2(1+s_1))L(1+s_1, f \otimes \overline{f}).$$

Par l'égalité

$$|\Phi_N(-s_1)| \gg N^\alpha,$$

et la formule de Stirling, on voit qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|\zeta(-2s_1)L_f(-s_1)| \ll (1+|t'|)^A N^{1+\alpha'+\epsilon}.$$

En utilisant l'équation fonctionnelle pour $\zeta$ et les égalités

$$\sum_f \frac{1}{(f,f)} = O(1), \ \sum_f \frac{R_f}{(f,f)} = O\left(\frac{g_N}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]}\right) = O(1),$$

on obtient la majoration:

$$g(-s_1) = O((1 + |t'|)^A (N^{1+\alpha'+\epsilon}).$$

Par le principe de Phragmen-Lindelöf on a alors, pour tout $\epsilon, \alpha, \alpha' > 0$ avec $\alpha < 0.7$ l'égalité

$$\begin{aligned} g(1) &= O((N^{1+\alpha'+\epsilon})^{\frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha'}} (N^{\epsilon-\alpha\beta})^{\frac{1+\alpha'}{1+\alpha+\alpha'}}) \\ &= O(N^{\epsilon+(1+\alpha')(\alpha(1-\beta)+\epsilon)/(1+\alpha+\alpha')}). \end{aligned}$$

On choisit alors $\alpha', \epsilon$ assez petits, $\alpha = 1/3$ de sorte que $\alpha(\beta - 1)/(1 + \alpha) = \frac{1}{8}$ et

$$g(1) = O(N^{-1/8+\epsilon}).$$

On a alors $\sum_f \frac{c_f}{(f,f)} = c_\zeta \sum_f \frac{R_f}{(f,f)} + g(1)$,
avec

$$c_\zeta = \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right)(1) = \gamma.$$

Ceci termine la preuve du théorème 3.1 si $N$ est premier.

### *3.3 Le cas général*

On suppose maintenant que $N$ est sans facteurs carrés. Comme dans la section précédente, nous majorons $g(1)$ par convexité et pour cela il reste à obtenir une majoration de $g(1 + s_0)$ (d'après le corollaire 1.2 il suffit de majorer $T_2(1 + s_0)$) et une majoration de $g(-s_1)$. L'expression particulière de $F(z)$ en terme de formes primitives de niveau $m|N$ (Prop. 2.3) s'écrit

$$L_F(s) = \sum_{m|N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} \frac{1}{(f,f)_N} \sum_{d,d'|N/m} b(d,d',f) L(s, f(dz) \otimes \overline{f}(d'z)). \qquad (25)$$

En tronquant cette série de Dirichlet on voit que

$$T_2(1 + s_0) = \sum_{n > N^\beta} \frac{A(n,n)}{n^{1+s_0}}.$$

En utilisant le corollaire 2.4 et le corollaire 3.3 on obtient

$$g(1 + s_0) = O((1 + |t|^A) N^{\epsilon-\alpha\beta})$$

*Majoration de* $g(-s_1)$. On utilise l'égalité (25) avec $s = -s_1$. L'équation fonctionnelle (20) fournit

$$L(-s_1, f(dz)\otimes\overline{f}(d'z)) = \frac{\pi^{-1}\Gamma(2+s_1)}{\Gamma(1-s_1)}\sum_{v|N}\Phi_{\infty,1/v}(-s_1)L_{1/v}(1+s_1, f(dz)\otimes\overline{f}(d'z)).$$

Par la majoration (16), on a

$$L_{1/v}(1+s_1, f(dz)\otimes\overline{f}(d'z)) = \sum_{n\equiv 0(\mathrm{mod}[d,d'])}\frac{a_{n/d}(1/v,f)\overline{a}_{n/d'}(1/v,f)}{n^{1+s_1}} \ll \frac{\tau^2([d,d'])}{[d,d']^{1+\alpha'+\epsilon}}.$$

D'autre part, la formule de Stirling montre qu'il existe $A>0$ tel qu'on ait

$$\Phi_{1/N,1/v}(-s_1) \ll_\alpha (1+|t'|)^A\phi(v)\prod_{p|N/v}|p^{-s_1}-p^{1+s_1}| \ll_\alpha (1+|t'|)^A N^{1+\alpha'+\epsilon}.$$

De ces majorations on déduit que

$$L_F(-s_1) \ll_\alpha (1+|t'|)^A N^{1+\alpha'+\epsilon}$$

et donc que $g(-s_1) = O\big((1+|t'|)^A N^{1+\alpha'+\epsilon}\big)$. On conclut comme précédemment par application du principe de Phragmen-Lindelöf.

## 4 Borne supérieure pour la métrique d'Arakelov

Dans cette section, nous montrons le Théorème 1.5. On reprend les notations de [AU1] p.299. On pose

$$F_N^{\mathrm{new}}(z) := \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(N)}} \frac{y^2|f(z)|^2}{(f,f)}.$$

Notre première étape sera de montrer la proposition suivante

**Proposition 4.1** *Pour tout $N$ sans facteurs carrés, on a la majoration*

$$\sup_{z\in\mathscr{H}}|F_N^{\mathrm{new}}(z)| \ll \log N.$$

*Preuve*. L'ensemble de matrices $A_{q,j}$ pour $q|N$ et $0\le j\le q-1$ définies dans [AU1] forment un système de représentant de $SL_2(\mathbf{Z})/\Gamma_0(N)$. On note $\Im m$ la fonction partie imaginaire. Pour toute matrice $A_{q,j}$ et pour toute forme primitive nouvelle $f$, on a l'égalité [AU1].

$\Im m(A_{q,j}z)^2|f(A_{q,j}z)|^2 = \Im m\ (\frac{z-j}{q})^2|f(\frac{z-j}{q})|^2$ [AU1]. Ceci montre que

$$F_N^{\mathrm{new}}(A_{q,j}z) = F_N^{\mathrm{new}}\left(\frac{z-j}{q}\right).$$

On en déduit alors à la manière de [AU1], en complêtant la base des formes nouvelles en une base de $S_2(\Gamma_0(N))$, la majoration

$$\sup_{z\in\mathscr{H}} F_N^{\mathrm{new}}(z) = \sup_{\substack{z\in\mathscr{H}\\ y\geq 1/(2N)}} F_N^{\mathrm{new}}(z) \leq \sup_{\substack{z\in\mathscr{H}\\ y\geq 1/(2N)}} g_N F(z). \tag{26}$$

Dans la suite, on suppose donc que $y = \Im m(z) \geq 1/(2N)$. On utilise maintenant le développement de Fourier de $F(z)$ à l'infini:

$$F(z) = \frac{y^2}{g_N}\sum_{f\in\mathscr{F}}\left|\sum_{n\geq 1}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz)\right|^2.$$

Soit $K = \delta N\log N$ avec $\delta > 1/(4\pi)$. On fait la décomposition suivante de

$$|f(z)|^2 = \left|\sum_{n\leq K}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz) + \sum_{n>K}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz)\right|^2 \ll \left|\sum_{n\leq K}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz)\right|^2 + \left|\sum_{n>K}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz)\right|^2.$$

On majore $F(z) \ll F_{\leq K}(z) + F_{>K}(z)$ avec

$$F_{\leq K}(z) = \frac{y^2}{g_N}\sum_{f\in\mathscr{F}}\left|\sum_{n\leq K}\hat{f}_n\,\mathrm{e}(nz)\right|^2$$

et $F_{>K}(z)$ défini de manière analogue (les fonctions $F_{\leq K}(z)$ et $F_{>K}(z)$ ne sont plus $\Gamma_0(N)$-invariantes).

*Majoration de $F_{>K}(z)$.* Pour $y \geq 1/(2N)$, on a d'après le corollaire 2.4 la majoration

$$\begin{aligned}
F_{>K}(z) &\ll \frac{\tau(N)^5}{g_N}\sum_{n_1,n_2>K}(n_1,n_2,N)\tau(n_1)\tau(n_2)(n_1n_2)^{1/2}y^2\,\mathrm{e}^{-2\pi(n_1+n_2)y}\\
&\ll \frac{\tau(N)^5}{g_N}\sum_{d|N}d\tau(d)^2\left(\sum_{n>K/d}y\tau(n)n^{1/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi ndy}\right)^2\\
&\ll \frac{\tau(N)^7}{g_N}K^{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-4\pi Ky}\sum_{d|N}\frac{1}{d^{3/2+\epsilon}}\\
&\ll \frac{N^\epsilon}{g_N}K^{1+\epsilon}\,\mathrm{e}^{-4\pi K/N} \ll \frac{N^{1+\epsilon-4\pi\delta}}{g_N}.
\end{aligned}$$

*Majoration de $F_{\leq K}(z)$.* On utilise la proposition 2.1 pour obtenir

$$F_{\leq K}(z) \ll \frac{y^2}{g_N}\left(1+\frac{K}{N}\right)\sum_{n\leq K}n\,\mathrm{e}^{-4\pi ny}.$$

On a par ailleurs l'égalité

$$y^2 \sum_{1\le n\le K} n\,\mathrm{e}^{-4\pi n y} = \frac{-y^2}{4\pi}\frac{d}{dy}\frac{1-\mathrm{e}^{-4\pi(K+1)y}}{1-\mathrm{e}^{-4\pi y}}$$
$$= y^2\frac{\mathrm{e}^{-4\pi y}+\mathrm{e}^{-4\pi(K+1)y}(K\,\mathrm{e}^{-4\pi y}-K+1)}{(1-\mathrm{e}^{-4\pi y})^2}.$$

Comme $K = \delta N \log N$, $\delta > 1/4\pi$, cette fonction décroit rapidement pour $y > 1/(2N)$ et est majorée par sa valeur en $1/2N$ qui est $(4\pi)^{-2}(1+O(1))$. On a donc la majoration

$$F(z) = O\left(\frac{\log N}{g_N}\right),$$

et la proposition s'en déduit par (26). □

Ceci démontre donc le théorème 1.5, dans la cas où $N$ est premier.

*4.1 Majoration générale*

On utilise ici l'expression de $F(z)$ donnée dans la proposition 2.2:

$$F(z) \le \frac{1}{g_N}\sum_{m|N}\frac{1}{[\Gamma_0(m):\Gamma_0(N)]}\prod_{p|N/m}\left(1-\frac{4p}{(p+1)^2}\right)^{-1}$$
$$\times \sum_{d,d'|N/m}\prod_{p|[d,d']/(d,d')}\frac{2p^{1/2}}{p+1}\sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}}\frac{|ydf(dz)yd'\overline{f}(d'z)|}{(f,f)_m}$$
$$\le \frac{1}{2g_N}\sum_{m|N}\prod_{p|N/m}\frac{p+1}{(p-1)^2}\sum_{d,d'|N/m}(F_m^{\mathrm{new}}(dz)+F_m^{\mathrm{new}}(d'z))\prod_{p|[d,d']/(d,d')}\frac{2p^{1/2}}{p+1};$$

(on a utilisé la sempiternelle inégalité $2|ab| \le |a|^2+|b|^2$). Par la proposition 4.1, on en déduit la majoration

$$F(z) \ll \frac{\log N\tau^5(N)}{g_N}.$$

## 5 La norme $L_2$ de la métrique d'Arakelov

Pour évaluer l'intégrale $||F||_2^2 = \int_{X_0(N)} F(z)^2 d\mu(z)$, on emploie la méthode de Rankin-Selberg. On considère la transformée de Rankin-Selberg de $F^2$

$$R_{F^2}(s) = \int_{X_0(N)} F(z)^2 E_\infty(z,s)\,d\mu(z).$$

C'est une fonction holomorphe sur $\Re s > 1$ qui se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$, avec un pôle en 1, de résidu $||F||_2^2/\mathrm{vol}$. Pour $\Re s > 1$, cette fonction se met sous la forme d'une série de Dirichlet

$$R_{F^2}(s) = \frac{\Gamma(s+3)}{(4\pi)^{s+3}} L(s, F^2) \text{ avec } \quad L(s, F^2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3+s}} \widehat{F^2}(n) où$$
$$\widehat{F^2}(n) = \frac{1}{g_N^2} \sum_{f, g \in \mathscr{F}} |\widehat{f \cdot g}(n)|^2 \text{ et}$$
$$\widehat{f \cdot g}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(i) \hat{g}(n-i).$$

Si l'on préfère, on peut encore écrire $L(s, F^2)$ comme somme des transformées de Rankin-Selberg des formes de poids 4, $f \cdot g$ avec $f$ et $g \in \mathscr{F}$:

$$L(s, F^2) = \frac{1}{g_N^2} \sum_{f, g \in \mathscr{F}} L(s, f \cdot g \otimes \overline{f \cdot g}).$$

Si $f$ et $g$ sont deux formes nouvelles primitives de poids 2 et de niveau $N$, on peut espérer que le $n$-ième coefficient de Fourier de la forme de poids 4, $f \cdot g$ satisfasse à la majoration de Deligne avec une bonne uniformité en $N$. L'idéal serait une majoration du type $\widehat{f \cdot g}(n) = O_\epsilon(N^\epsilon n^{3/2+\epsilon})$. Le lemme suivant montre que cette majoration est vraie en moyenne sur les $f, g \in \mathscr{F}$ et sur $n$:

**Lemme 5.1** *Pour tout* $x \geq 1$, *et pour tout* $\epsilon > 0$, *on a la majoration*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\widehat{F^2}(n)}{n^3} \ll_\epsilon \frac{N^\epsilon}{g_N^2} x^{1+\epsilon}. \tag{27}$$

*Preuve*. Pour $s$ tel que $\Re s > 1$, on a la représentation intégrale

$$L(s, F^2) = \frac{(4\pi)^{s+3}}{\Gamma(s+3)} \int_0^1 \int_0^\infty F(z)^2 y^s \frac{dxdy}{y^2}.$$

En utilisant le théorème 1.5, la positivité de $F$ et la représentation intégrale de $L(s, F)$, on obtient la majoration

$$L(s, F^2) = O\left( \frac{\log N \tau^5(N)}{g_N} \frac{\Gamma(\Re s + 1)}{|\Gamma(s+3)|} L(\Re s, F) \right).$$

Le corollaire 2.4 montre alors que

$$L(s, F^2) = O_{s,\epsilon}\left( \frac{N^\epsilon}{g_N^2} \frac{\Gamma(\Re s + 1)}{|\Gamma(s+3)|} \right).$$

On utilise alors une formule de Perron effective, sous la forme du théorème 2. Chap II. 2. de [T] avec $\kappa = 1 + \epsilon$, $T = 1$ (cf. les notations de *loc. cit.*) ainsi que la positivité de $\frac{\widehat{F^2}(n)}{n^3}$ pour obtenir la majoration (27). □

Posons $s = 1 + \alpha + it$ avec $\alpha > 0$, $t \in \mathbf{R}$ et $K = N^{\beta}$, $\beta > 1$ un paramètre à fixer. Par l'inégalité (27) et par intégration par partie, on a la décomposition suivante de $L(s, F^2)$:

$$L(s,F^2) = \sum_{n \le K} \frac{1}{n^{3+s} g_N^2} \sum_{f,g} \left| \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(i)\hat{g}(n-i) \right|^2 + O_{\epsilon}\left( \frac{K^{\epsilon}}{g_N^2 K^{\alpha}} \right)$$

On réécrit la première somme sous la forme $\frac{(4\pi)^2}{g_N^2} T_{1,F^2}(s)$. Par (13), $T_{1,F^2}(s)$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} T_{1,F^2}(s) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n \le K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{f,g} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{n_3+n_4=n} \hat{f}(n_1)\overline{\hat{f}(n_3)}\hat{g}(n_2)\overline{\hat{g}(n_4)} \\ &= \sum_{n \le K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{n_3+n_4=n} (n_1 n_2 n_3 n_4)^{1/2} \\ &\quad \times \big( \delta_{n_1-n_3}\delta_{n_2-n_4} - \delta_{n_1-n_3} S(n_2,n_4) - \delta_{n_2-n_4} S(n_1,n_3) \\ &\quad + S(n_1,n_3)S(n_2,n_4) \big) \end{aligned}$$

avec

$$S(m,n) = 2\pi \sum_{c \ge 1} \frac{S(m,n;cN)}{cN} J_1\left( \frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN} \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_{1,F^2}(s) = \sum_{n \le K} \frac{1}{n^{3+s}} \Bigg( & \sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1) - 2 \sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1) S(n_1,n_1) \\ & + \sum_{n_1,n_3=1}^{n-1} (n_1 n_3 (n-n_1)(n-n_2))^{1/2} \\ & \times S(n_1,n_3) S(n-n_1, n-n_3) \Bigg). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est le terme principal et il s'écrit sous la forme

$$\sum_{n \le K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1) = \Xi(s) + O(N^{-\alpha\beta}). \tag{28}$$

où $\Xi(s) = \zeta(s)/6 - \zeta(s+2)/6$.

Le deuxième terme est majoré trivialement par la majoration suivante, valable pour tout $C \geq 1$:

$$\sum_{c \geq C} \frac{S(m,n;cN)}{cN} J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cN}\right) = O_\epsilon((m,n,N)^{1/2}(mn)^{1/2}C^{\epsilon-1/2}N^{\epsilon-3/2}). \quad (29)$$

En prenant $C = 1$, on obtient

$$\sum_{n \leq K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{n_1=1}^{n-1} n_1(n-n_1)S(n_1,n_1) \ll_\epsilon \frac{K^{1-\alpha+\epsilon}}{N^{3/2}}. \quad (30)$$

Le troisième terme est le plus difficile, on le notera dans la suite

$$T_{3,F^2,K}(s) = \sum_{n \leq K} \frac{1}{n^{3+s}} \sum_{n_1,n_3=1}^{n-1} (n_1n_3(n-n_1)(n-n_3))^{1/2} S(n_1,n_3)S(n-n_1,n-n_3).$$

On choisira $\beta = 54/53$ et on montrera dans la section suivante la

**Proposition 5.2** *Pour tout* $\alpha > 0$ *et pour tout* $\epsilon > 0$, *on a la majoration*

$$T_{3,F^2,N^{54/53}}(1+\alpha+\imath t) \ll_{\epsilon,\alpha} N^{\epsilon-(54/53)\alpha}.$$

Indiquons à partir de cette proposition la fin de la preuve du théorème 1.6. Elle est tout à fait similaire à celle du théorème 1.3: On considère la fonction

$$h(s) = s^{r-1}(s-\frac{1}{2})(s-1)\zeta(2s)(L(s,F^2) - \frac{(4\pi)^2}{g_N^2}\Xi(s)).$$

D'après (28), (30) et la proposition 5.2, la fonction $h(s)$ pour $s = 1+\alpha+\imath t$ est majorée par $O_\epsilon((1+|t|^A)N^{\epsilon-(54/53)\alpha}/g_N^2)$. D'autre part en généralisant la majoration (27) aux autres pointes de $X_0(N)$ et en utilisant l'equation fonctionnelle de $L(s,F^2)$ (obtenue à partir des équations fonctionnelles des fonctions $L(s, f\cdot g \otimes \overline{f \cdot g})$) on voit que

$$h(-\epsilon+it) = O_\epsilon\left(\frac{N^{1+\epsilon}(1+|t|)^A}{g_N^2}\right).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe de Phragmen-Lindelöf avec $\alpha$ assez grand pour obtenir l'égalité

$$||F||_2^2 = \frac{\mathrm{vol}}{(4\pi g_N)^2}(1+O_\epsilon(N^{\epsilon-1/53})) = \frac{1}{\mathrm{vol}}(1+O_\epsilon(N^{\epsilon-1/53})).$$

*5.1 Preuve de la proposition 5.2*

Notons $T_n$ la somme

$$\begin{aligned}T_n &:= \sum_{n_1,n_3=1}^{n-1}(n_1(n-n_1)n_3(n-n_3))^{1/2}\\ &\quad\times 4\pi^2\sum_{c,c'\geq 1}\frac{S(n_1,n_3;cN)}{cN}\frac{S(n-n_1,n-n_3;c'N)}{c'N}\\ &\quad\times J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n_1n_3}}{cN}\right)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{(n-n_1)(n-n_3)}}{c'N}\right)\\ &:= \frac{1}{N^2}\sum_{c,c'\geq 1}\frac{1}{cc'}\sum_{n_3=1}^{n-1}(n_3(n-n_3))^{1/2}\sum_{n_1=1}^{n-1}T(n_1,n_3,c,c').\end{aligned}$$

Soit $0<\delta<1$, on considère les conditions suivantes sur $n_1,n_3,c,c'$:

$$n^{1-\delta}\leq n_1,n_3<n-n^{1-\delta},\ 1\leq c,c'\leq n^{2\delta}. \tag{31}$$

Par (29), la contribution à $T_n$ des $(n_1,n_3,c,c')$ ne vérifiant pas les conditions ci-dessus est en $O_\epsilon(N^{\epsilon-3}n^{6-\delta})$; on supposera dans la suite que les variables $n_1,n_3,c,c'$ satisfont aux conditions (31). Fixons $n_3$ compris entre $n^{1-\delta}$ et $n-n^{1-\delta}$, $1\leq c,c'\leq n^{2\delta}$ et considérons la fonction de $n_1$

$$g(n_1)\colon n_1\to (n_1(n-n_1))^{1/2}J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n_1n_3}}{cN}\right)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{(n-n_1)(n-n_3)}}{c'N}\right).$$

Alors, par les majorations $J_1(x),J_1'(x)=O(1)$, on trouve

$$g'(n_1)=O\left(n^{\delta/2}\left(1+\frac{n}{N}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)\right)\right);$$

Puis, par intégration par partie, on obtient

$$\sum_{n^{1-\delta}\leq n_1<n-n^{1-\delta}}T(n_1,n_3,c,c')\ll n^{1+\delta/2}\left(1+\frac{n}{N}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)\right)\max_{x\in[n^{1-\delta},n-n^{1-\delta}]}|T(x)|, \tag{32}$$

avec

$$T(x)=\sum_{n_1\leq x}S(n_1,n_3;cN)S(n-n_1,n-n_3;c'N).$$

La somme $T(x)$ est la somme d'une fonction arithmétique définie modulo $[cN,c'N]=[c,c']N$, si bien qu'en complétant cette somme par des caractères additifs, on a la majoration

$$|T(x)| \ll \frac{x}{[c,c']N}|\mathscr{T}(0)| + \log(cc'N) \max_{k\in\mathbf{Z}/[c,c']N\mathbf{Z}} |\mathscr{T}(k)|$$

avec

$$\mathscr{T}(k) = \sum_{x \ (\mathrm{mod}[c,c']N)} S(x, n_3; cN)S(n-x, n-n_3; c'N)\,\mathrm{e}\left(\frac{kx}{[c,c']N}\right).$$

Dans la dernière section, on montrera la proposition:

**Proposition 5.3** *Pour tout* $\epsilon > 0$, *on a la majoration*

$$\mathscr{T}(k) = O_\epsilon\big((N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}(cc')^{1/2}([c,c']N)^{3/2+\epsilon}\big).$$

*Si* $k = 0$, *on obtient*,

$$\mathscr{T}(0) = O_\epsilon((n, cc'N)^{1/2}([c,c']N)^{3/2+\epsilon}).$$

Donnons d'abord la fin de la preuve de la proposition 5.2: On obtient la majoration

$$\begin{aligned}|T(x)| &\ll_\epsilon (n,cc'N)^{1/2}x(cc'N)^{1/2+\epsilon} + (N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}(cc')^2N^{3/2+\epsilon}\\ &\ll_\epsilon (n,cc'N)^{1/2}xn^{2\delta}N^{1/2+\epsilon} + (N,n)^{1/2}(cc',N)^{1/2}n^{8\delta}N^{3/2+\epsilon}.\end{aligned}$$

Par la majoration (32) et en sommant sur les $n_3, c, c'$ vérifiant (31) on obtient la majoration

$$T_n \ll_\epsilon N^{\epsilon-3}n^{6-\delta} + (n,N)^{1/2}N^{-2}n^{3+\delta/2}\left(1+\frac{n}{N}\right)\big(n^{1+2\delta}N^{1/2} + n^{8\delta}N^{3/2}\big).$$

Sommant sur $n \leq N^\beta$, on obtient finalement

$$\begin{aligned}&T_{3,F^2,N^\beta}(1+\alpha+\imath t)\\ &\quad\ll_{\epsilon,\alpha} N^{\beta(3-\alpha-\delta)-3+\epsilon} + N^{\beta(2-\alpha+5\delta/2)-5/2+\epsilon} + N^{\beta(1-\alpha+17\delta/2)-3/2+\epsilon}.\end{aligned}$$

On choisit alors $\delta$ de sorte que $\beta(3-\alpha-\delta)-3 = -\alpha\beta$ ce qui donne $\delta = 3(\beta-1)/\beta$ et on a alors les égalités

$$\begin{aligned}\beta(2-\alpha+5\delta/2)-5/2 &= -\alpha\beta + 19\beta/2 - 10\\ \beta(1-\alpha+17\delta/2)-3/2 &= -\alpha\beta + 53\beta/2 - 54/2\end{aligned}$$

et on choisit $\beta = 54/53$.

*5.2 Majoration de $\mathscr{T}(k)$*

On utilise la multiplicativité croisée des sommes de Kloosterman: pour $c_1$ $c_2$ premiers entre eux on a l'égalité

$$S(m,n;c_1c_2) = S(\overline{c_2}m,\overline{c_2}n;c_1)S(\overline{c_1}m,\overline{c_1}n;c_2).$$

Cette égalité combinée avec le Théorème chinois et les différentes symétries ramène l'estimation de $\mathscr{T}(k)$ à celle d'un produit de sommes de la forme

$$\mathscr{T}(k;p^a;p^b) := \sum_{x(\mathrm{mod}\,p^b)} S(x,n_3;p^a)S(w(n-x),w(n-n_3);p^b)\,\mathrm{e}\left(\frac{kw'x}{p^b}\right),$$

$b \geq a$ et $p^a||cN$ et $p^b||c'N$ et $(ww',p)=1$. Pour $k \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,p^b)$ et $(a,b) \neq (1,1)$, en utilisant la majoration des sommes de Kloosterman:

$$|S(m,n;p^a)| \leq 2(m,n,p^a)^{1/2}p^{a/2},$$

on voit que la somme précédente est majorée grossièrement par (utiliser Cauchy-Schwarz)

$$2p^{(a+b)/2}\sum_{x=0}^{p^b-1}(x,p^a)^{1/2}(n-x,p^b)^{1/2} \ll bp^{a/2+3b/2}. \tag{33}$$

Si $a=b=1$ la somme précédente s'écrit

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(k;p^a;p^b) &= \sum_{y,y'\in\mathbf{F}_p^*}\mathrm{e}\left(\frac{n_3\overline{y}+wny'+w(n-n_3)\overline{y'}}{p}\right)\sum_{x\in\mathbf{F}_p}\mathrm{e}\left(\frac{x(w'k+y-wy')}{p}\right)\\ &= p\sum_{\substack{y'\in\mathbf{F}_p^*\\ wy'-w'k\in\mathbf{F}_p^*}}\mathrm{e}\left(\frac{n_3\overline{wy'-w'k}+wny'+w(n-n_3)\overline{y'}}{p}\right)\\ &= O(p^{3/2})\end{aligned} \tag{34}$$

d'après les majorations de Weil pour les sommes d'exponentielles en 1 variable sur les corps finis, sauf si on a $w\equiv 1,\ k\equiv 0, n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$ auquel cas la somme vaut $p^2$.
Si $k=0$ et $a<b$ on écrit $x = x_0 + p^a x_1$ et la somme $\mathscr{T}(k;p^a;p^b)$ vaut

$$\sum_{x_0=0}^{p^a-1}S(x_0,n_3;p^a)\sum_{y\in(\mathbf{Z}/p^b\mathbf{Z})^*}\mathrm{e}\left(\frac{w(n-x_0)y+w(n-n_3)\overline{y}}{p^b}\right)\sum_{x_1(\mathrm{mod}\ p^{b-a})}\mathrm{e}\left(\frac{-wyx_1}{p^{b-a}}\right)=0.$$

Enfin, si $k=0$, $a=b$, la somme vaut alors

$$\mathcal{T}(k;p^a;p^b) = p^b \sum_{y' \in (\mathbf{Z}/p^b\mathbf{Z})^*} \mathrm{e}\left(\frac{n_3\overline{wy'} + wny' + w(n-n_3)\overline{y'}}{p^b}\right)$$
$$= p^b S(wn, wn + (\overline{w} - w)n_3; p^b) = O((n,p^b)^{1/2} p^{3b/2}). \quad (35)$$

Tout est près pour majorer $\mathcal{T}(k)$: on écrit $[c,c']N = [c,c']N'N''$ avec $N' = (N,[c,c'])$ et $N''$ premier avec $cc'$. Comme $N''$ est sans facteurs carrés, sa contribution à $\mathcal{T}(k)$ correspond à la majoration (34), et vaut

$$O_\epsilon((N'',n)^{1/2} N''^{3/2+\epsilon}).$$

La contribution du facteur $[c,c']N'$ est estimée trivialement par (33) et vaut

$$O_\epsilon(([c,c']N')^{2+\epsilon}).$$

Dans le cas $k=0$ on utilise (35) et la contribution à $\mathcal{T}(0)$ de $[c,c']N'$ est un

$$O_\epsilon\big((n,[c,c']N')^{1/2}([c,c']N')^{3/2+\epsilon}\big).$$

On en déduit la proposition.

## 6 Diviseur canonique et points de Heegner

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés, premier à 6. Dans cette section, nous majorons la hauteur de Neron-Tate du diviseur canonique de $X_0(N)$, cette quantité contribue à $\omega_N^2$ par la formule (7). Nous montrons ici la majoration

$$h = h_{NT}(K_{X_0(N)} - (2g_N - 2)\infty) = O(\log N \tau^2(N)). \quad (36)$$

On commence par exprimer cette hauteur en terme des hauteurs des points de Heegner de $X_0(N)$ associés à $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, quand de tels points existent cf. [G]. On note encore $i$ et $j$ les points de $X_0(1)$ correspondant aux points "$i$" et "$j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$" de $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}_i$ (resp. $\mathcal{H}_j$) le diviseur formé des points de Heegner de $X_0(N)$ au dessus de $i$ (resp. $j$). Son degré est

$$v_2 := \prod_{p|N}\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right), \ (\text{resp.} v_3 = \prod_{p|N}\left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right),$$

où $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est le symbole de Legendre. Si bien que $v_2$ vaut 0 ou $2^{\omega(N)}$ suivant que $\mathcal{H}_i$ est vide ou non. On commence par montrer le

**Lemme 6.1** *Soit $N$ sans facteurs carrés, on a l'égalité*

$$h = \frac{1}{36} h_{NT}(3(\mathcal{H}_i - v_2\infty) + 4(\mathcal{H}_j - v_3\infty)).$$

*Preuve*. Soit $f_N : X_0(N) \to X_0(1) = \mathbf{P}^1$ le morphisme naturel de projection, il n'est ramifié qu'au-dessus des points $\infty$, $i$ et $j$ et la formule de Hurwitz s'écrit alors

$$K_{X_0(N)} \sim {f_N}^* K_{\mathbf{P}^1} + \sum_{f_N(Q_i)=i} (e_{Q_i} - 1)Q_i + \sum_{f_N(Q_j)=j} (e_{Q_j} - 1)Q_j + \sum_{f_N(Q_\infty)=\infty} (e_{Q_\infty} - 1)\infty.$$

Rappelons (cf. [Sh] Prop 1.43 p. 24) que l'indice de ramification $e_{Q_i}$ (resp. $e_{Q_j}$) d'un point au dessus de $i$ (resp. $j$) vaut 1 ou 2 (resp. 1 ou 3) et que le nombre de ceux dont l'indice de ramification vaut 1 est $\nu_2$ (resp. $\nu_3$). On écrit donc

$$\begin{aligned}\sum_{f_N(Q_i)=i} (e_{Q_i} - 1)Q_i &= \frac{1}{2} \sum_{f_N(Q_i)=i} e_{Q_i} Q_i - \frac{1}{2} \sum_{\substack{f_N(Q_i)=i \\ e_{Q_i}=1}} Q_i \\ &= \frac{1}{2} {f_N}^*(i) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{f_N(Q_i)=i \\ e_{Q_i}=1}} Q_i,\end{aligned}$$

et de même

$$\sum_{f_N(Q_j)=j} (e_{Q_j} - 1)Q_j = \frac{2}{3} {f_N}^*(j) - \frac{2}{3} \sum_{\substack{f_N(Q_j)=j \\ e_{Q_j}=1}} Q_j.$$

Comme tous les points sur $\mathbf{P}^1$ sont équivalents à $\infty$, on obtient finalement l'égalité

$$K_{X_0(N)} \sim \mathrm{Cusp} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{f_N(Q_i)=i \\ e_{Q_i}=1}} Q_i - \frac{2}{3} \sum_{\substack{f_N(Q_j)=j \\ e_{Q_j}=1}} Q_j;$$

où Cusp désigne un diviseur à coefficients rationnels, à support dans les pointes. Par le Théorème de Manin-Drinfeld [Ma, Dr], le lemme résulte alors du lemme suivant. □

**Lemme 6.2** *Les points de $X_0(N)$ qui s'envoient sur $i$ (resp. $j$) par $f_N$ et où $f_N$ est étale sont les points de Heegner sur $X_0(N)$ de discriminant $-4$ (resp $-3$).*

*Preuve*. Remarquons que le nombre de points de $X_0(N)$ au-dessus de $i$ (resp $j$) où le morphisme $f_N$ est non-ramifié coincide avec le nombre de points de Heegner de discriminant $-4$ (resp $-3$) de $X_0(N)$. Il suffit donc de montrer que l'indice de ramification d'un point de Heegner vaut 1. On peut démontrer ceci "à la main" en utilisant les coordonnées explicites dans le demi-plan de Poincaré d'un point de Heegner (cf. ci-dessous) et en calculant l'ordre de son stabilisateur dans $\Gamma_0(N)$. Nous employons ici un argument plus "modulaire" qui nous a été fourni par B. Edixoven: soit $x \in X_0(N)$ et $(E, G)$ la courbe elliptique munie d'un sous-groupe cyclique $G$ d'ordre $N$ qu'il représente. L'indice de ramification en $x$ est $|\mathrm{Aut}(E)|/|\mathrm{Aut}(E,G)|$ (utiliser [DeRa] page 29–30). On vérifie ensuite que les points de Heegner $(E, G)$ qui s'envoient sur $i$ ou $j$ par $f_N$ vérifient que $|\mathrm{Aut}(E,G)| = |\mathrm{Aut}(E)|$. $\square$

### *6.1 Majoration de la hauteur des points de Heegner sur $X_0(N)$*

Dans cette section nous majorons la hauteur d'un point de Heegner sur $X_0(N)$ de discriminant $-4$, le cas du discriminant $-3$ est tout à fait similaire (en particulier les groupes de classes d'idéaux des anneaux d'entiers de $\mathbf{Q}(i)$ et $\mathbf{Q}(j)$ sont tous deux triviaux). On a la formule suivante [GZ] p. 307:

$$h_{NT}((c) - (\infty)) = \langle c, c \rangle_\infty + \langle c, c \rangle_{fini},$$

avec

$$\langle c, c \rangle_{fini} = 2 \log N$$

et

$$\langle c, c \rangle_\infty = \lim_{s \to 1} \left[ -8 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) r(Nn+4) Q_{s-1}\left(1 + \frac{nN}{2}\right) + \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(s-1)} \right] + O(1)$$

où $\sigma(n)$ est la fonction définie en [GZ] Prop (3.2) Chap IV, et pour laquelle on a la majoration $|\sigma(n)| \leq \tau(n)$; $r(n)$ est le nombre d'idéaux de $O_{\mathbf{Q}(i)}$ de norme $n$; en particulier, on a, pour tout $\epsilon > 0$, la majoration $r(n) = O_\epsilon(n^\epsilon)$; $Q_{s-1}(t)$ désigne la fonction de Legendre de seconde espèce [GZ] p. 238.

### *6.2 Expression spectrale de la hauteur des points de Heegner*

La série $H(s) = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) r(Nn+4) Q_{s-1}(1 + \frac{nN}{2})$ converge absolument pour $\Re es > 1$ et définit dans ce demi-plan une fonction holomorphe. Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ de la manière suivante: pour $\Re es > 1$ soit $G^1_{N,s}(z, w)$ la fonction sur $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ donnée par la série absolument convergente

$$G^1_{N,s}(z, w) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ \gamma w \neq z}} g_s(z, \gamma w), \text{ avec } g_s(z, w) = -2Q_{s-1}\left(1 + \frac{u(z, w)}{2}\right)$$

et $u(z, w) = |z - w|^2/\mathrm{Im}(z)|\mathrm{Im}(w)$. Soit $\tau \in \mathscr{H}$ une coordonnée du point de Heegner $c$ (rappelons que $\tau$ est de la forme

$$\tau = \frac{-B+i}{A}, B^2 - AC = -1,\ A > 0,\ \text{avec } A \equiv 0(\operatorname{mod} N),\ B \equiv \beta_c(\operatorname{mod} N),$$

où $\beta_c \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ vérifie $\beta_c^2 \equiv -1(\operatorname{mod} N)$ et caractérise $c$ [GZ] p. 236) on a alors l'égalité ([GZ] p. 251)

$$H(s) = G^1_{N,s}(\tau,\tau).$$

D'autre part, pour $z, w \in \mathscr{H}$, $z \notin \Gamma_0(N)w$, on considère le noyau automorphe pour $\Gamma_0(N)$:

$$G_{N,s}(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} g_s(z,\gamma w).$$

Soit $a > 1$, la fonction $G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)$ est alors définie sur $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur la domaine $\Re es > 1/2$ grâce à son expression spectrale [Iw2] Théorème 7.5 (noter que la normalisation de loc. cit. est différente de la nôtre):

$$\frac{1}{4\pi}(G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)) = \sum_j \chi_{sa}(s_j)u_j(z)\overline{u_j(w)} + \sum_\kappa \frac{1}{4i\pi}\int_{(1/2)} \chi_{sa}(v)E_\kappa(z,v)\overline{E}_\kappa(w,\overline{v})dv \quad (37)$$

avec

$$\chi_{sa}(s_j) = \frac{1}{(s-s_j)(1-s_j-s)} - \frac{1}{(a-s_j)(1-s_j-a)}.$$

Dans cette expression l'indice $j$ concerne la $j$-ième valeur propre du Laplacien sur $X_0(N)$ notée $s_j(1-s_j)$, et les $u_j$ forment une base orthonormale de fonctions propres de valeurs propres $s_j(1-s_j)$. Compte-tenu de la minoration de Selberg $\lambda_1 > 3/16$, la fonction $G_{N,s}(z,w) - G_{N,a}(z,w)$ est holomorphe dans la domaine $\{s,\ \Re\text{es} > 3/4\} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu $-4\pi/\text{vol}$.

On a alors

$$H(s) - H(a) = (G_{N,s} - G_{N,a})(\tau,\tau) - R_{sa}(\tau); \quad (38)$$

avec

$$R_{sa}(\tau) := \lim_{w\to\tau}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(N)\\ \gamma\tau=\tau}} g_s(\tau,\gamma w) - g_a(\tau,\gamma w)\right].$$

Compte-tenu du développement asymptotique (cf. [EMOT] p. 163)

$$Q_{s-1}(1+x) = -\frac{1}{2}\log\frac{x}{2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)\right) + O(1),\ x \to 0^+,$$

on trouve

$$R_{sa}(\tau) = 8\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - 8\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a).$$

*Majorations finales.* Compte-tenu de l'expression $Q_{s-1}(x) = O(x^{-s})$, $x \to +\infty$, on obtient la majoration $H(s) = O_\epsilon(N^{\epsilon-1}(1+|s-1|^{-1}))$ pour tout $s$ tel que $\Re es > 1$ et tout $\epsilon > 0$.

D'autre part, pour $7/8 \leq \Re es \leq 1+\epsilon$, l'expression (37) et la proposition 7.2 de [Iw2] impliquent par sommation par partie l'inégalité

$$(G_{N,s} - G_{N,a})(\tau,\tau) + \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(s-1)} \ll (N(1+|t|))^A,$$

pour un certain $A > 0$ que nous n'évaluerons pas. Remarquons cependant que d'une part la constante implicite du Théorème 7.2 de [Iw2] est absolue pour les groupes $\Gamma_0(N)$ (en effet avec les notations de [Iw2] Cor. 2.12 on a $1/c_\infty = 1/N < 1$), et d'autre part, en utilisant les coordonnées explicites des points de Heegner, on voit que la hauteur invariante $y(\tau_c)$ (cf. [Iw2] (3.8)) est polynomiale en $N$.

On en déduit alors par le principe de Phragmen-Lindelöf la majoration

$$\lim_{s\to 1}\left(H(s) + \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(s-1)}\right) = O_\epsilon(N^{\epsilon-1}),$$

pour tout $\epsilon > 0$ et par conséquent

$$h_{NT}((c) - (\infty)) = 2\log N(1+o(1)).$$

De même pour un point de Heegner de Discrimant $-3$, on obtient l'égalité $h_{NT}((c') - (\infty)) = 3\log N(1+o(1))$. Le caractère quadratique de la hauteur de Néron-Tate implique alors l'égalité

$$h = \frac{1}{36}h_{NT}(3(\mathscr{H}_i - v_2(\infty)) + 2(\mathscr{H}_j - v_3(\infty))) = O(\log N\tau(N)^2).$$

## References


[AU1] A. Abbes, E. Ullmo. Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$, Duke Mathematical Journal **80**, No. 2, 295–307 (1995)

[AU2] A. Abbes, E. Ullmo. Auto-intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$, à paraitre au J. Reine Angew. Math.

[Ar] S.J. Arakelov. Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, Math. USSR–Izv. **8**, 1167–1180 (1974)

[BMMB] J.–B. Bost, J.–F. Mestre, L. Moret–Bailly. Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre 2, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif"), Astérisque No **183**, 69–105 (1990)

[CS] B.J. Coates, W. Schmidt. Iwasawa Theory for the Symmetric square of an elliptic curve, J. Reine Angew. Math. 57–60 (1987)

[DeRa] P. Deligne, M. Rapoport. Schémas de modules des courbes elliptiques, dans Modular functions of one variable II, Lectures Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag, New-York 1973

[DeI] J.M. Deshouillers, H. Iwaniec. Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, Invent. Math **70**, 219–288 (1982)

[DFI] W. Duke, J.B. Friedlander et H. Iwaniec. Bounds for Automorphic $L$-functions II, Invent. Math **115**, 219–239 (1994)

[Du] W. Duke. On the dimension of the space of forms of weight 1 Inter. Math. Res. Notices **2**, 99–109 (1995)

[Dr] V.G. Drinfeld. Two theorems on modular curves, Functional analysis and its Applications, Vol **7**, No 2, Translated from Russian 155–156 (1973)

[EMOT] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, Vol **1**, Mc Graw-Hill (1953)

[G] B.H. Gross. Heegner points on $X_0(N)$, In: Modular forms (ed. R.A. Rankin), Chichester: Ellis Horwood 87–106 (1984)

[GZ] B.H. Gross, D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series, Invent. Math **84**, 225–320 (1986)

[HL] J. Hoffstein, P. Lockhart. Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, Ann. of Math. **140**, 161–176 (1994)

[Iw] H. Iwaniec. Topics in classical automorphic forms, Graduate Course, Rutgers University, Spring 1995

[Iw2] H. Iwaniec. Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms, Rev. Mat. Iberoamericana, 1995

[Ma] Y. Manin. Parabolic points and Zeta functions of modular curves, Izv. Akad. Nauk SSSR., Vol **6**, No 1 (1972), AMS Translations, p. 19–64

[MB] L. Moret-Bailly. Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques Astérisque **183**, 37–58 (1990)

[P] A.N Parshin. The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for arithmetical surfaces and it's application Sem. de Théorie des nombres de Paris (1986–87), Progress in Math **75**

[Sh] G. Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic forms, Princeton Univ. Press, 1971

[Sz] L. Szpiro. Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique, The Grothendieck Festchrift. **III**, Progress in Mathematics (1990)

[Ul] E. Ullmo. Positivité et discrètion des points algébriques des courbes. Preprint Juin (1996) à paraître dans Annals of Maths

[T] G. Tenenbaum. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Soc. Math. de France, Paris, (1995)

[Z] S. Zhang. Admissible pairing on a curve, Invent. Math **112**, p. 171–193 (1993)

**Ajouté aux épreuves** (Juillet 1997): Nous saisissons l'opportunité de cet article pour signaler que certains des résultats de l'article [AU2] étaient connus de D. Zagier. Il s'agit en particulier du théoréme de comparaison entre la fonction de Green-Arakelov et la fonction de Green associée à la métrique de Poincaré sur $X_0(N)$ ([AU2] Prop. E). Ajoutons cependant, que les résultats de [AU2] ont été obtenus de manière complètement indépendante, les travaux de D. Zagier n'ayant pas été publiés à ce jour.