

Le problème des n corps et les distances mutuelles

Alain Albouy^{1,2}, Alain Chenciner^{1,2}

¹ UFR de Mathématique, Université Paris 7, 2, place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

² Astronomie et Systèmes Dynamiques, Bureau des Longitudes, 3, rue Mazarine, F-75006 Paris, France

Oblatum 15-XI-1996 & 11-III-1997

Introduction

La détermination des mouvements homographiques du problème newtonien des n corps, c'est-à-dire des mouvements tels que la configuration reste au cours du temps semblable à elle-même, se fait classiquement en deux étapes. La première, qui n'est facile que dans le cas du problème plan, vise à éliminer les vitesses pour se ramener à des équations sur la seule configuration. La seconde, qui est extrêmement ardue dès que l'on considère au moins quatre corps, est la résolution de ces dernières équations.

On peut considérer que les résultats rassemblés dans Wintner [2] constituent une résolution satisfaisante de la première étape, tant qu'on se limite à un espace de dimension trois. Nous présentons dans notre seconde partie une résolution complète qui fait apparaître, dès la dimension quatre, des phénomènes nouveaux : avec $n = 3$ par exemple, un triangle isocèle et non équilatéral dont les deux masses à la base sont égales peut “tourner” sans se déformer. Dans cette rotation deux axes liés au triangle et ayant le centre de gravité pour origine sont chacun en rotation uniforme dans un plan : l'axe de symétrie et l'axe qui lui est orthogonal. Les deux plans sont orthogonaux, et les deux périodes de rotation sont différentes. Nous avons regroupé toutes les configurations susceptibles de subir des mouvements rigides, quelle que soit la dimension de l'espace impliqué, sous la dénomination “configuration équilibrée”.

Nos calculs s'appuient sur une construction d'algèbre linéaire, détaillée dans la première partie, qui montre que la donnée des carrés des distances mutuelles d'un polytope se condense naturellement en une seule forme quadratique positive. Curieusement cette identification élémentaire semble fort méconnue. Nous montrons combien elle est utile, en écrivant les équations des configurations remarquables sous leur forme la plus concise.

Notre seconde partie, malgré sa plus grande généralité, est plus simple que les travaux classiques antérieurs.

Ainsi, le lecteur exclusivement intéressé par la dimension trois aura lui aussi intérêt à adopter notre point de vue. Se restreindre à cette dimension simplifie bien peu la première étape, pour les deux raisons suivantes. D'abord, les configurations équilibrées compliquent le tableau dès la dimension trois, si l'on remplace le potentiel de Newton par le potentiel en $1/r^2$ de Jacobi. On ne peut donc de toute façon les exclure qu'en fin d'analyse. Ensuite, par sa nature même, la technique des distances mutuelles rejette aussi à la fin la discussion de la dimension de l'espace.

Notre démarche suit celle de J.L. Lagrange dans son "Essai sur le Problème des Trois Corps". C'est bien sa réduction en terme des distances mutuelles que nous généralisons. Les mouvements rigides quadridimensionnels sont exclus de ce travail fameux par la longue identité algébrique (N). L'équation de leur configuration apparaît pourtant, sous sa forme la plus simple, dans l'égalité (H). Bien plus tard Banachiewicz l'a réécrite d'une manière compliquée alors qu'il examinait le potentiel de Jacobi : il utilisait des coordonnées cartésiennes.

Dans une troisième partie nous avons pu déduire, en profitant des structures mises en place, l'inégalité de Sundman pour un espace de dimension arbitraire. Seuls les mouvements homographiques dont la configuration est centrale sont tels que cette inégalité soit à chaque instant une égalité.

La méthode des distances mutuelles a aussi et surtout fait avancer la résolution de la "deuxième étape". La quatrième partie propose quelques énoncés concernant les configurations équilibrées de trois corps. Si les masses sont égales, ce sont tous les triangles isocèles. La démonstration remarquablement simple de ce fait a fourni une clé indispensable dans la résolution (Albouy [2]) d'une conjecture sur laquelle R. Moeckel avait parié : toute configuration centrale plane de quatre masses égales possède au moins un axe de symétrie.

Nous tenons à remercier, entre autres, H. Cabral, R. Moeckel, D. Saari et J.C. Yoccoz pour les passionnantes discussions qui ont motivé ce travail.

1. Symétries du problème

On peut définir les positions de n points dans \mathbb{R}^p par une matrice (n, p) . Une matrice $(n - 1, p)$ suffit à les repérer à une translation près. Pour les repérer à une isométrie près, on peut former sa "matrice de Gram", une matrice carrée symétrique et positive d'ordre $n - 1$. Nous montrons dans le paragraphe qui suit comment la même construction, effectuée, quand \mathbb{R}^p est remplacé par un espace euclidien E , sans se permettre de choisir une base ni de privilégier un point, conduit à une forme quadratique β sur un hyperplan de \mathbb{R}^n noté \mathcal{D}^* . Les carrés des distances mutuelles entre les points forment $n(n - 1)/2$ coordonnées naturelles de β . Le reste de la première partie

(mécanique d'un système de points, la réduction, les invariants) expose les structures du problème des n corps en tenant compte de cette construction.

Géométrie des distances mutuelles

1.1 Définition. L'espace des "dispositions" \mathcal{D} est l'espace vectoriel de dimension $n - 1$ quotient de l'espace \mathbb{R}^n par la droite engendrée par le n -uplet $(1, \dots, 1)$.

Ainsi, les n -uplets (q_1, \dots, q_n) et $(q_1 + \lambda, \dots, q_n + \lambda)$ sont deux représentants d'un même élément de \mathcal{D} . Le dual \mathcal{D}^* de l'espace des dispositions s'identifie canoniquement à l'hyperplan de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{D}^* = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\}.$$

1.2 Proposition et définition. Soit E un espace vectoriel. L'espace $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ des applications linéaires de \mathcal{D}^* dans E s'identifie à l'espace des configurations "à translation près" de n points de E . Nous appellerons "configuration absolue" une telle application linéaire.

Démonstration. Etant donné n vecteurs $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ de E , l'application linéaire correspondante x est définie par

$$x(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{r}_i.$$

Comme $\sum \xi_i = 0$, le second membre est invariant par la translation de vecteur $\vec{s} : \vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{s}$. Donnons-nous maintenant une configuration absolue x , et un vecteur \vec{r}_1 de référence. On retrouve \vec{r}_2 en utilisant l'expression $x(-1, 1, 0, \dots, 0) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. On retrouve les autres vecteurs de la même façon.

Remarques et notations

1.3. L'espace E^n s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^n \otimes E$. Passer au quotient par l'action des translations de E revient à considérer $\mathcal{D} \otimes E$, isomorphe à $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$.

1.4. L'application \check{x} , de E^* dans \mathcal{D} , associée à une forme linéaire sur E la liste de ses n valeurs sur les n points de la configuration absolue x .

1.5. Nous notons e_{ij}^* l'élément de \mathcal{D}^* représenté par (ξ_1, \dots, ξ_n) avec $\xi_i = 1$, $\xi_j = -1$ et $\xi_k = 0$ si k est distinct de i et j . On a $x(e_{ij}^*) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

1.6. Si a est un élément d'un espace vectoriel réel de dimension finie F et b un élément du dual F^* , nous notons $\langle a, b \rangle$ ou tout aussi bien $\langle b, a \rangle$ le réel obtenu en évaluant b sur a . Nous ne distinguons donc pas F de F^{**} . Nous munirons bientôt les espaces \mathcal{D} et E de structures euclidiennes, mais nous préférons les distinguer de leur dual, pour bien dégager le rôle des masses (le choix contraire serait tenable jusqu'à la fin de la troisième partie, mais augmenterait inutilement le degré des masses dans de nombreuses équations de la quatrième).

1.7. Soient

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_a(F, F^*) &= \{x \in \mathrm{Hom}(F, F^*) \mid x = -\acute{x}\}, \\ \mathrm{Hom}_s(F, F^*) &= \{x \in \mathrm{Hom}(F, F^*) \mid x = \acute{x}\}, \\ \mathrm{Hom}_+(F, F^*) &= \{x \in \mathrm{Hom}_s(F, F^*) \mid \forall u \in F, \langle x(u), u \rangle \geq 0\}, \\ \mathrm{Isom}_+(F, F^*) &= \{x \in \mathrm{Hom}_+(F, F^*) \mid \forall u \neq 0, \langle x(u), u \rangle \neq 0\}.\end{aligned}$$

Ce dernier espace, par exemple, s'identifie à l'espace des formes quadratiques définies positives sur F . Nous parlerons d'homomorphismes plutôt que de tenseurs, parce que la composition est plus généralement pratiquée que sa traduction tensorielle, le produit contracté.

Munissons E d'une structure euclidienne, c'est-à-dire d'un élément ϵ de $\mathrm{Isom}_+(E, E^*)$: une isométrie R de E vérifie ${}^tR \circ \epsilon \circ R = \epsilon$ et transforme x en $R \circ x$.

1.8 Proposition et définition. *A la configuration absolue x l'application*

$$\begin{aligned}rel : \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^*, E) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}) \\ x &\longmapsto \beta = \acute{x} \circ \epsilon \circ x,\end{aligned}$$

associe une "configuration relative" β , qui caractérise x à une isométrie de E près. De plus, tout élément de $\mathrm{Hom}_+(\mathcal{D}^, \mathcal{D})$ est la configuration relative d'une configuration de n points dans un espace euclidien de dimension au plus $n - 1$.*

Démonstration. Cet énoncé correspond à des résultats classiques sous leur forme matricielle. On peut supposer E de dimension $n - 1$ et munir \mathcal{D} et E de bases telles que $\beta = \acute{x} \circ \epsilon \circ x$ s'écrive matriciellement $B = {}^tXX$. On sait que la donnée de B détermine X à une rotation près. De plus, $X = B^{1/2}$ est solution de $B = {}^tXX$.

Remarques

1.9. Le noyau de β est aussi le noyau de x ; l'image de β est aussi celle de \acute{x} : sa dimension – le rang de x ou de β – est la dimension de la configuration, c'est-à-dire la dimension du sous-espace affine engendré par les n points. Ces affirmations se prouvent facilement en prenant justement pour espace E ce dernier sous-espace.

1.10. En tant que forme quadratique sur \mathcal{D}^* , la configuration relative β est l'image inverse de la forme euclidienne de E par l'application x .

1.11. La donnée de β est équivalente à la donnée des $n(n - 1)/2$ carrés des distances mutuelles des points de la configuration. Cela suit des remarques 1.5 et 1.10, qui donnent $\langle \beta(e_{ij}^*), e_{ij}^* \rangle = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$. Nous savons maintenant décider si un ensemble de nombres réels positifs r_{ij} est ou non l'ensemble des longueurs des arêtes d'un polytope euclidien. Cette caractérisation par la positivité de β apparaît en haut de la page 107 de Blumenthal [1] qui ne la considère qu'*occasionally useful*. Il lui préfère des considérations de signes de déterminants de Cayley. Rappelons que si Cayley [1] est le premier à donner une expression générale, des écritures de l'aire du triangle et du volume du tétraèdre en fonction des distances mutuelles apparaissent déjà dans les travaux d'Héron d'Alexandrie et de Tartaglia respectivement...

1.12 Proposition. Soit E un espace vectoriel dont la dimension vérifie $0 \leq \dim E \leq n - 1$. L'application rel induit un difféomorphisme entre le quotient par l'action du groupe des isométries de E de l'ouvert de $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ constitué des configurations absolues de dimension maximale d'une part, et la sous-variété de $\text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ constituée des configurations relatives de rang $\dim E$ d'autre part.

Démonstration. L'équation $\zeta' \circ \epsilon \circ x + \zeta \circ \epsilon \circ x' = 0$ caractérise les éléments x' de $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ qui appartiennent au noyau de la différentielle de rel au point x . Le bivecteur de \mathcal{D} qui, en tant qu'élément de $\text{Hom}_a(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$, s'écrit $\zeta \circ \epsilon \circ x'$, a pour support l'image de ζ , et peut donc être transporté par ζ^{-1} , défini sur cette image. Le résultat est un bivecteur Ω de E^* qui vérifie $x' = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, c'est-à-dire qui définit la "rotation instantanée" de x donnée par x' . Ceci montre que rel induit un difféomorphisme local. La proposition 1.8 montre qu'il est global.

1.13 Extension du crochet de dualité. Soient F et G deux espaces vectoriels réels de dimension finie. La trace des endomorphismes, notée tr , définit une forme bilinéaire canonique non dégénérée

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, G) \times \text{Hom}(F^*, G^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\phi, \psi) & \longmapsto & tr({}^t\phi \circ \psi) \end{array}$$

qui permet d'identifier $(\text{Hom}(F, G))^*$ à $\text{Hom}(F^*, G^*)$, ce qu'on fera désormais. On notera $\langle \phi, \psi \rangle$ le réel $tr({}^t\phi \circ \psi)$. Des propriétés élémentaires de la trace découlent les identités

- (a) $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle,$
- (b) $\langle \phi, \psi \rangle = \langle {}^t\phi, {}^t\psi \rangle,$
- (c) $\langle v \circ \theta, \psi \rangle = \langle \theta, {}^t v \circ \psi \rangle,$
- (d) $\langle v \circ \theta, \psi \rangle = \langle v, \psi \circ {}^t\theta \rangle,$

où θ désigne un élément de $\text{Hom}(F, H)$, ν un élément de $\text{Hom}(H, G)$, et H un troisième espace vectoriel. Nous identifierons enfin le dual de $\text{Hom}_s(F, F^*)$ à $\text{Hom}_s(F^*, F)$ en utilisant la même formule.

1.14 Dualité et distances mutuelles. Nous notons $\sigma_{ij}^* = e_{ij}^* \otimes e_{ij}^*$ l'élément de $\text{Hom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ qui à une disposition u associe $\langle e_{ij}^*, u \rangle e_{ij}^*$. La remarque 1.11 montre que les σ_{ij}^* , $1 \leq i < j \leq n$, constituent une base de $\text{Hom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ pour laquelle $\langle \sigma_{ij}^*, \beta \rangle = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$. Autrement dit, les carrés des distances mutuelles sont les coordonnées de β dans la base duale, constituée de $n(n-1)/2$ éléments que nous notons σ_{ij} .

Mécanique d'un système de points

Lagrange [2] a mis les équations différentielles du mouvement de n corps sous la forme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i},$$

où U désigne la *fonction de forces*, opposée de l'énergie potentielle, qui s'écrit, dans le cas du potentiel newtonien, $U = \sum_{i < j} m_i m_j \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^{-1}$. Dans le langage du paragraphe précédent, cette équation devient

$$(N) \quad \epsilon \circ \ddot{x} \circ \mu = dU(x),$$

où les compositions apparaissent dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} & \ddot{x} & \\ E & \longleftarrow & \mathcal{D}^* \\ \epsilon \downarrow & & \uparrow \mu \\ E^* & \longleftarrow & \mathcal{D} \\ & dU(x) & \end{array}$$

La dérivée seconde \ddot{x} de x par rapport au temps est, comme x , un élément de $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$; l'isomorphisme ϵ est encore la structure euclidienne d'un espace vectoriel E ; enfin, U est considérée comme fonction réelle de l'espace $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$, de sorte que $dU(x)$ appartient au dual de cet espace, que nous identifions, d'après la remarque 1.13, à $\text{Hom}(\mathcal{D}, E^*)$.

Quant à μ , explicitée dans la proposition suivante, elle est définie à partir de la "forme quadratique des masses" sur \mathbb{R}^n

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|X\|^2 = m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2,$$

et elle sert à changer \vec{r}_i en $m_i \vec{r}_i$. On notera $M = m_1 + \dots + m_n$ la somme des masses et $x_G = (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)/M$ le *centre de masse* des x_i .

1.15 Proposition. Soient n réels strictement positifs m_1, \dots, m_n . Les trois expressions qui suivent définissent un même élément μ appartenant à $\text{Isom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, qui munit \mathcal{D} d'une structure euclidienne.

$$(1) \quad \mu^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{m_1}, \dots, \frac{\xi_n}{m_n} \right)$$

$$(2) \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = (m_1(x_1 - x_G), \dots, m_n(x_n - x_G))$$

$$(3) \quad \langle \mu(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j (x_i - x_j)^2$$

Démonstration. On vérifie facilement en revenant à la définition 1.1 que les applications définies par (1) et (2) sont inverses l'une de l'autre. Quant à (3), c'est une identité connue au moins depuis Leibniz qu'on peut par exemple obtenir en étendant la forme des masses aux puissances extérieures de \mathbb{R}^n : notant $L = (1, \dots, 1)$, on calcule aisément

$$\|L \wedge X\|^2 = \sum_{i < j} m_i m_j (x_i - x_j)^2.$$

Ensuite, $\|L \wedge X\|^2 = \|L\|^2 \|X\|^2$ si L et X sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\sum m_i x_i = 0$, ce qui permet de conclure en calculant $\|X\|^2$ avec (2).

Remarques

1.16. Une fois donnée la forme quadratique des masses sur \mathbb{R}^n , il est naturel de représenter le quotient \mathcal{D} de la définition 1.1 par la "section orthogonale" $x_G = 0$. C'est ainsi que réduire la symétrie de translation revient à fixer le centre de masse.

1.17. L'équation (N) est un peu moins précise que celle de Lagrange, puisqu'elle ne caractérise \ddot{x} qu'à translation près. De l'équation de Lagrange on déduit en plus que l'accélération du centre de masse est nulle.

1.18. On définit la *forme d'inertie* b , élément de $\text{Hom}_+(E^*, E)$, par la formule $b = x \circ \mu \circ x$, qu'on rapprochera de celle qui donne β . On appelle *moment d'inertie* par rapport au centre de masse la trace commune I des endomorphismes $\mu \circ \beta$ et $b \circ \epsilon$:

$$\begin{aligned} I &= \langle x \circ \mu, \epsilon \circ x \rangle = \langle \mu, \beta \rangle = \langle \epsilon, b \rangle \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_G\|^2. \end{aligned}$$

1.19. Les polynômes caractéristiques des endomorphismes $\mu \circ \beta$ et $b \circ \epsilon$ sont essentiellement les mêmes ; plus précisément, en calculant par exemple les traces des itérés, on vérifie que

$$\det(\text{Id}_{\mathcal{D}^*} - \lambda\mu\circ\beta) = \det(\text{Id}_E - \lambda b\circ\epsilon).$$

Ecrivons $1 - \eta_1\lambda + \dots + (-1)^{n-1}\eta_{n-1}\lambda^{n-1}$ ces déterminants. On montre que

$$\eta_{k-1} = \frac{1}{M} \sum_{i_1 < \dots < i_k} m_{i_1} \dots m_{i_k} \text{vol}_{i_1 \dots i_k}^2,$$

où le terme $\text{vol}_{i_1 \dots i_k}$ désigne le volume du paralléloétope de dimension $k - 1$ de E engendré par les vecteurs $i_1 i_2, \dots, i_1 i_k$, c'est-à-dire $(k - 1)!$ fois le volume du simplexe défini par les corps i_1, \dots, i_k .

Une factorisation remarquable. Supposons que U ne soit fonction que des distances mutuelles, c'est-à-dire qu'il puisse se déduire d'une fonction \hat{U} définie sur les configurations relatives avec l'expression

$$U(x) = \hat{U}(\beta) \quad \text{où} \quad \beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x.$$

Soit x' une configuration absolue quelconque. On a

$$\langle dU(x), x' \rangle = \langle d\hat{U}(\beta), x' \circ \epsilon \circ x \rangle + \langle d\hat{U}(\beta), {}^t x \circ \epsilon \circ x' \rangle.$$

Mais $d\hat{U}$ appartient au dual de $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$, soit $\text{Hom}_s(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ d'après la remarque 1.13. Il suit que ${}^t d\hat{U} = d\hat{U}$, et, d'après la règle 1.13b, que les deux termes du second membre sont égaux. Ainsi

$$\langle dU, x' \rangle = 2\langle d\hat{U}, {}^t x \circ \epsilon \circ x' \rangle = 2\langle \epsilon \circ x \circ d\hat{U}, x' \rangle,$$

où la dernière égalité découle de la règle 1.13c. On a donc la factorisation $dU = 2\epsilon \circ x \circ d\hat{U}$, qui permet d'écrire

$$(N) \quad \ddot{x} \circ \mu = 2x \circ d\hat{U}, \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x} = 2x \circ A,$$

en utilisant la définition qui suit.

1.20 Définition. Nous notons A et nous appelons endomorphisme de Wintner-Conley l'endomorphisme de \mathcal{D}^* d'expression $d\hat{U} \circ \mu^{-1}$.

Bien sûr A dépend linéairement des masses dans le cas du potentiel newtonien. Son histoire est discutée à la page 430 de Wintner [2].

La réduction

Nous voulons maintenant décrire l'état d'un système, c'est-à-dire les positions et les vitesses des corps. Nous noterons $2F$ le carré cartésien d'un espace vectoriel F (la "somme" directe de deux copies de F).

1.21 Définition. On appelle “état absolu” d’un système de n corps un élément z de $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$. On appelle “état relatif” un élément \mathcal{E} de $\text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$. On appelle “espace du mouvement” l’image de z .

Ces définitions sont justifiées par les analogues des propositions 1.2 et 1.8, obtenus à partir du diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} E^{2n} & \longrightarrow & \text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E) \xrightarrow{Rel} \text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D}) \\ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) & \longmapsto & z \longmapsto \mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z \end{array}$$

La première flèche est la “réduction” des translations, la seconde la réduction des isométries. Les compositions dans ${}^t z \circ \epsilon \circ z$ forcent le choix de $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$, plutôt que $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, 2E)$ ou $2\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$, comme représentant du carré cartésien de $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$. Nous noterons néanmoins $z = (x, y)$, x pour les positions \vec{r} , y pour les vitesses \vec{v} , de sorte que les équations du mouvement sont

$$(N) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2x \circ A.$$

Nous noterons aussi

$${}^t z \circ \epsilon \circ z = \begin{pmatrix} {}^t x \circ \epsilon \circ x & {}^t x \circ \epsilon \circ y \\ {}^t y \circ \epsilon \circ x & {}^t y \circ \epsilon \circ y \end{pmatrix} = \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma - \rho \\ \gamma + \rho & \delta \end{pmatrix}.$$

L’état relatif du système est ainsi décrit par la donnée de deux éléments β et δ de $\text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$, d’un élément γ de $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$, et d’un élément ρ de $\text{Hom}_a(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$. On peut exprimer, en utilisant (N) , la dérivée de \mathcal{E} en fonction de ces éléments

$$(N \text{ Rel}) \quad \dot{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 2\beta \circ A + \delta \\ 2{}^t A \circ \beta + \delta & 2{}^t A \circ (\gamma - \rho) + 2(\gamma + \rho) \circ A \end{pmatrix}.$$

1.22. Etant donné un endomorphisme A de \mathcal{D}^* et une forme bilinéaire θ sur \mathcal{D}^* , nous noterons

$$[A, \theta] = {}^t A \circ \theta - \theta \circ A.$$

1.23. Remarquons que si A est donné par la définition 1.20, ou plus généralement si $A \circ \mu$ est symétrique, on obtient, en notant B l’endomorphisme $\mu \circ \beta$ de \mathcal{D}^* :

$$\mu \circ [A, \beta] = A \circ B - B \circ A.$$

Les équations réduites. Utilisons la notation du 1.22 pour réécrire le système $(N \text{ Rel})$, qui généralise les systèmes obtenus par Lagrange [1] et par Betti [1] :

$$\begin{aligned}
(N \text{ Rel}) \quad & \dot{\beta} = 2\gamma, \\
& \dot{\gamma} = {}^t A \circ \beta + \beta \circ A + \delta, \\
& \dot{\delta} = 2({}^t A \circ \gamma + \gamma \circ A) - 2[A, \rho], \\
& \dot{\rho} = [A, \beta].
\end{aligned}$$

Les invariants

Cas d'un potentiel général. Les traces I , J et K des endomorphismes $\mu \circ \beta$, $\mu \circ \gamma$ et $\mu \circ \delta$ de \mathcal{D}^* s'écrivent encore

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y,$$

où le produit scalaire \cdot sur $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ est défini par

$$x_1 \cdot x_2 = \langle x_1 \circ \mu, \epsilon \circ x_2 \rangle.$$

Rappelons que $I = x \cdot x$, noté encore $\|x\|^2$, a été introduit en 1.18. Les équations du mouvement donnent

$$\dot{I} = 2J, \quad \dot{J} = K + \langle dU(x), x \rangle, \quad \dot{K} = 2\langle dU(x), \dot{x} \rangle.$$

La dernière implique la conservation de l'énergie

$$H = \frac{1}{2}K - U,$$

somme de l'énergie cinétique $K/2$ dans un repère galiléen lié au centre de masse (comparer à la remarque 1.17) et de l'énergie potentielle $-U$. Lagrange note T et V ces deux énergies.

Les homomorphismes antisymétriques ω_μ et ω , respectivement de $2\mathcal{D}$ dans $2\mathcal{D}^*$ et de $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$ dans $\text{Hom}(2\mathcal{D}, E^*)$, définis par

$$\omega_\mu(u, v) = (-\mu(v), \mu(u)), \quad \omega(z) = -\epsilon \circ z \circ \omega_\mu,$$

munissent $2\mathcal{D}$ et $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$ de structures symplectiques. Le champ de vecteurs

$$X_H = \omega^{-1}(-dH),$$

gradient symplectique du Hamiltonien H , définit les équations (N), ce qui redonne la conservation de l'énergie

$$\partial_{X_H} H = \langle dH, X_H \rangle = 0.$$

Cas d'un potentiel homogène. Supposons que U soit homogène de degré 2κ . L'expression de \dot{J} se simplifie et donne l'équation de Lagrange–Jacobi

$$\frac{\dot{J}}{2} = K + 2\kappa U = 2H + 2(\kappa + 1)U = -2\kappa H + (\kappa + 1)K.$$

Nous en déduisons, avec Jacobi [1], Cartan [1] ou Wintner [1], que les deux fonctions $J - 2Ht$ et $I - 2Jt + 2Ht^2$ sont des constantes du mouvement quand $\kappa = -1$; l'élimination du temps t entre elles donne l'intégrale première

$$G = 2IH - J^2.$$

Nous notons d'autre part Y le champ de vecteurs qui définit l'équation différentielle

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = \kappa y.$$

On résume les propriétés de ce champ en écrivant les dérivées de Lie suivant Y des trois “invariants” introduits au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \omega &= (\kappa + 1)\omega, \\ \mathcal{L}_Y H &= \partial_Y H = 2\kappa H, \\ \mathcal{L}_Y X_H &= [Y, X_H] = (\kappa - 1)X_H. \end{aligned}$$

Le calcul de $\mathcal{L}_Y(\omega(X_H))$ en utilisant une règle de Leibniz donne une dépendance entre ces relations. Cette dépendance est bien classique dans le cas où Y est hamiltonien, ce qui n'a lieu que lorsque $\kappa = -1$. Le champ Y n'est alors rien de plus que le gradient symplectique de J . Signalons enfin l'expression “relative” de Y :

$$\dot{\beta} = 2\beta, \quad \dot{\gamma} = (\kappa + 1)\gamma, \quad \dot{\delta} = 2\kappa\delta, \quad \dot{\rho} = (\kappa + 1)\rho.$$

Nous rassemblerons dans un autre travail quelques conséquences de l'existence du champ Y .

Cas d'un potentiel fonction des distances mutuelles. On peut définir l'endomorphisme A du 1.20 et obtenir l'invariance du moment cinétique

$$\mathcal{C} = z \circ \omega_\mu \circ z = -x \circ \mu \circ y + y \circ \mu \circ x$$

en calculant sa dérivée $\dot{\mathcal{C}} = 2x \circ (-\mu \circ A + A \circ \mu) \circ x = 0$. Dans le cas homogène, remarquons encore que

$$\partial_Y \mathcal{C} = (\kappa + 1)\mathcal{C}.$$

Par ailleurs, l'espace des états relatifs $\text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$ est muni d'une structure de Poisson (champ de bivecteurs “intégrable”, voir Lichnerowicz

[1]). Le bivecteur en un point \mathcal{E} est représenté par l'homomorphisme antisymétrique π de $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}, 2\mathcal{D}^*)$ dans $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$ défini par

$$\pi(\Xi) = -Rel_* \circ \omega^{-1} \circ Rel^*(\Xi) = 2(\mathcal{E} \circ \Xi \circ \omega_\mu^{-1} - \omega_\mu^{-1} \circ \Xi \circ \mathcal{E}).$$

L'homomorphisme Rel est défini à la suite de la définition 1.21, et les notations Rel_* et Rel^* désignent respectivement la dérivée de Rel au point \mathcal{E} et sa transposée. Si, conformément à la remarque 1.3, on identifie $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$ au produit tensoriel symétrique de deux copies de $2\mathcal{D}$, l'homomorphisme π devient le produit tensoriel symétrique des *homomorphismes* \mathcal{E} et ω_μ^{-1} . Le crochet de Poisson de deux fonctions F_1 et F_2 de l'espace des états relatifs s'écrit

$$\{F_1, F_2\} = \langle \pi(dF_1), dF_2 \rangle.$$

Cette structure de Poisson a pour feuilles symplectiques les intersections des sous-variétés obtenues en fixant le rang de \mathcal{E} et de celles obtenues en fixant les invariants de rotation du moment cinétique. Rappelons que d'après Albouy [1] on a l'encadrement $\text{rg}\mathcal{C} \leq \text{rg}\mathcal{E} \leq (\text{rg}\mathcal{C})/2 + n - 1$.

On fixe ces invariants en fixant les traces des itérés (d'ordre pair, celles d'ordre impair sont nulles) de $\omega_\mu \circ \mathcal{E}$, égales à celles des itérés de $\mathcal{C} \circ \mathcal{E}$ (comparer à la remarque 1.19).

2. Mouvements homographiques

Nous définissons dans les deux paragraphes suivants les configurations centrales et les configurations équilibrées, qui les englobent, à partir des deux cas extrêmes de mouvements homographiques, les mouvements homothétiques et les mouvements rigides. A partir de la dimension quatre, ces derniers ne sont pas en général périodiques, mais seulement quasi-périodiques. Nous montrons ensuite que les mouvements homographiques intermédiaires se rapprochent des premiers. Leur configuration est centrale ; ils sont en quelque sorte "homothétiques complexes". Nous examinons le cas d'exception découvert par Banachiewicz, et nous donnons enfin une caractérisation variationnelle des configurations équilibrées, que nous rapprochons de celle, classique, des configurations centrales.

Mouvements homothétiques et configurations centrales

Le potentiel U est ici supposé homogène de degré 2κ en x . Il suffit en fait que dU soit homogène de degré $2\kappa - 1$.

2.1 Définition. On appelle mouvement “homothétique” toute solution $z(t) = (x(t), y(t))$ des équations (N) telle qu’il existe une fonction réelle v du temps et une configuration absolue x_0 vérifiant $x(t) = v(t)x_0$.

2.2 Définition. Une configuration absolue x est dite “centrale” s’il existe un nombre réel λ tel que $dU(x) = 2\lambda\epsilon \circ x \circ \mu$.

Si U n’est fonction que des distances mutuelles, on pourra encore écrire cette condition $x \circ A = \lambda x$. Dans un mouvement homothétique, la configuration est à chaque instant centrale puisque, d’après la première forme de l’équation (N), on a $\epsilon^{-1} \circ dU \circ \mu^{-1} = \ddot{x} = (\ddot{v}/v)x$.

Réciproquement, étant donné une configuration centrale x et un nombre réel ζ , on déduit de l’homogénéité du potentiel que l’état $z = (x, \zeta x)$ donne naissance à un mouvement homothétique.

Mouvements rigides et configurations équilibrées

Dans ce paragraphe, le potentiel U est supposé fonction des seules distances mutuelles, c’est-à-dire de la forme $U(x) = \hat{U}(\beta)$, où $\beta = \iota_{x \circ \epsilon \circ x}$.

2.3 Définition. Un “équilibre relatif” des équations (N) est un état absolu $z = (x, y)$ tel que l’état relatif $\mathcal{E} = \iota_{z \circ \epsilon \circ z}$ soit un équilibre des équations (N Rel).

On appellera encore “mouvement d’équilibre relatif” une solution $z(t)$ des équations (N) telle que $\mathcal{E}(t)$ soit constant. Un équilibre relatif est caractérisé par l’équation $\dot{\mathcal{E}} = 0$, soit

$$(1) \quad \gamma = 0, \quad \delta + \iota_{A \circ \beta} + \beta \circ A = 0, \quad [A, \rho] = [A, \beta] = 0.$$

2.4 Définition. Un mouvement “rigide” est une solution $z(t)$ des équations (N) telle que la configuration relative $\beta(t)$ soit indépendante du temps.

2.5 Proposition. Un mouvement est rigide si et seulement s’il est d’équilibre relatif.

Démonstration. Si β est constante, donc également A , on a

$$(2) \quad \begin{aligned} 0 &= \dot{\beta} = 2\gamma, \\ 0 &= \ddot{\beta} = 2\dot{\gamma} = 2\delta + 2\iota_{A \circ \beta} + 2\beta \circ A, \\ 0 &= \beta^{(3)} = 2\dot{\delta} = -4[A, \rho], \\ 0 &= \beta^{(4)} = -4[A, \dot{\rho}] = -4[A, [A, \beta)]. \end{aligned}$$

En particulier, $\dot{\beta} = \dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$. La nullité de $\dot{\rho} = [A, \beta]$ résulte de la proposition qui suit.

2.6 Proposition et définition. Soit β une configuration relative et A la fonction de β donnée par la définition 1.20. On a

$$[A, \beta] = 0 \iff [A, [A, \beta]] = 0.$$

On appellera “configuration équilibrée” une configuration qui vérifie ces équations.

Démonstration. Calculons les coefficients des matrices associées à $[A, \beta]$ et à $[A, [A, \beta]]$ dans une base de \mathcal{D}^* qui diagonalise A . Si a_1, \dots, a_{n-1} sont les coefficients diagonaux de A , on trouve $[A, \beta]_{ij} = \beta_{ij}(a_i - a_j)$ et $[A, [A, \beta]]_{ij} = \beta_{ij}(a_i - a_j)^2$.

2.7 Définition. Une configuration “attractive” (respectivement “strictement attractive”) est une configuration relative β telle que la forme quadratique $d\hat{U}$ soit négative (respectivement définie négative) sur l'image de β .

2.8 Proposition. La configuration relative d'un équilibre relatif est équilibrée et attractive. Réciproquement, étant donné une configuration β équilibrée et attractive et un espace euclidien E de dimension $2\text{rg}\beta$, il existe un état d'équilibre relatif $z = (x, y)$ tel que $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$.

Démonstration. Considérons l'état relatif

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma - \rho \\ \gamma + \rho & \delta \end{pmatrix}$$

d'un équilibre relatif. La dernière équation du système (1) montre que β est équilibrée, la deuxième que $\delta = -2\beta \circ A$. Comme \mathcal{E} est positive, δ l'est aussi. On en déduit, en utilisant une base commune de diagonalisation de $\mu \circ \beta$ et A , que β est attractive. D'autre part, si β équilibrée et attractive est donnée, on obtient une solution \mathcal{E} positive du système (1), dont le rang vérifie la condition annoncée, en faisant $\gamma = \rho = 0$ et $\delta = -2\beta \circ A$.

2.9 Proposition. Un mouvement d'équilibre relatif est une rotation uniforme (en général non périodique si la dimension de E est au moins égale à 4) de l'état absolu. L'espace du mouvement d'un équilibre relatif dont la configuration est strictement attractive est de dimension paire.

Démonstration. La nullité de $\dot{\mathcal{E}}$ entraîne l'existence d'une “rotation instantanée de l'état” Ω , forme antisymétrique sur l'espace du mouvement telle que $\dot{z} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$. Elle peut s'exprimer (voir la preuve de la proposition 1.12) comme l'image par ${}^t z^{-1}$ du bivecteur ${}^t z \circ \epsilon \circ z$ de $2\mathcal{D}$. La constance de Ω découle

de la propriété d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Le mouvement de rotation avec Ω constant est en effet solution des équations (N). La parité de la dimension se déduit de la non-dégénérescence de Ω sur l'espace du mouvement, qui se prouve de la façon suivante. Si $\vec{r} \in \ker \Omega$, $\epsilon(\vec{r}) \in \ker \dot{z}$ puisque $\dot{z} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$. Mais $\dot{z} = (y, 2x \circ A)$, de sorte que $\epsilon(\vec{r})$ appartient à la fois au noyau de y et de $A \circ x$. Comme A est supposée non dégénérée sur l'image de x (définition 2.7), $\epsilon(\vec{r})$ appartient aussi au noyau de x et donc au noyau de z .

Remarques

2.10. L'hypothèse de stricte attraction dans la proposition 2.9 est nécessaire. On s'en assure en considérant le potentiel identiquement nul. Par ailleurs, on vérifie que $-d\hat{U} \in \text{Isom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ si U est le potentiel newtonien. Toutes les configurations sont donc strictement attractives.

2.11. Nous avons, dans la preuve de la proposition 2.8, imposé la condition $\rho = 0$ pour obtenir un état d'équilibre relatif à partir d'une configuration β donnée. En fait, (1) exige seulement $[A, \rho] = 0$, qui force la nullité de ρ sauf si A possède au moins une valeur propre multiple dont l'espace propre est contenu dans l'image de β . Baptisons cette éventualité le cas exceptionnel. Nous parlerons de cas doublement exceptionnel s'il y a deux valeurs propres doubles dans l'image de β . Dans le cas exceptionnel, on peut choisir n'importe quel bivecteur ρ de \mathcal{D} qui vérifie $[A, \rho] = 0$, $\text{Im} \rho \subset \text{Im} \beta$ (comparer à la proposition 1.12), et $\mathcal{E} \geq 0$. On se rend compte facilement de l'étendue du choix en travaillant dans une base de diagonalisation de A et de $\mu \circ \beta$. On peut en particulier faire en sorte que la dimension de l'espace du mouvement descende à $2\text{rg} \beta - 2$, et même plus bas dans le cas doublement exceptionnel. En fait, nous étudierons la restriction aux sous-espaces multiples du mouvement rigide le plus général lorsque nous étudierons, au paragraphe suivant, le mouvement des configurations centrales, qui sont les configurations équilibrées les plus exceptionnelles.

2.12. Les formes ρ et δ sont les images réciproques par x des formes $-\Omega$ et $-\Omega \circ \epsilon^{-1} \circ \Omega$. Un équilibre relatif vérifie $(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x = 2x \circ A$, équation qui suggère une caractérisation "absolue" des configurations équilibrées : ce sont les configurations x telles qu'il existe une forme symétrique S sur $\text{Im} x$ qui vérifie $\epsilon^{-1} \circ S \circ x = 2x \circ A$.

Mouvements homographiques

Dans ce paragraphe, le potentiel est supposé à la fois homogène de degré 2κ et fonction des seules distances mutuelles, c'est-à-dire de la forme $U(x) = \hat{U}(\beta)$ où \hat{U} est homogène de degré κ par rapport à la variable β . On obtiendrait les mêmes résultats en supposant seulement que $A = d\hat{U} \circ \mu^{-1}$ est homogène de degré $\kappa - 1$ en β .

2.13 Définition. *Un mouvement “homographique” est une solution $z(t)$ des équations (N) telle qu’il existe une fonction réelle v du temps et une configuration relative β_0 avec $\beta(t) = v(t)^2 \beta_0$.*

Les mouvements homothétiques et les mouvements rigides sont donc des cas particuliers de mouvements homographiques.

2.14 Proposition. *La configuration d’un mouvement homographique est toujours équilibrée. Elle est même centrale, sauf éventuellement si le degré d’homogénéité de U est -2 (i.e. si $\kappa = -1$), ou si le mouvement est rigide.*

Démonstration. Pour généraliser ce que nous avons fait pour un mouvement rigide, nous introduisons les quantités constantes β_0 , U_0 et A_0 telles que :

$$\beta = I\beta_0, \quad U = I^\kappa U_0, \quad A = I^{\kappa-1} A_0,$$

et utilisons le système (*N Rel*) pour obtenir

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{I}\beta_0 &= 2\gamma, \\ \ddot{I}\beta_0 &= 2\delta + 2I^\kappa({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0), \\ I^{(3)}\beta_0 &= -4[A, \rho] + 2(1 + \kappa)\dot{I}I^{\kappa-1}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0). \end{aligned}$$

L’équation de Lagrange–Jacobi

$$(4) \quad \ddot{I} = 4H + 4(1 + \kappa)I^\kappa U_0$$

donne $I^{(3)} = 4\kappa(1 + \kappa)\dot{I}I^{\kappa-1}U_0$, de sorte que

$$2[A_0, \rho] = (1 + \kappa)\dot{I}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0 - 2\kappa U_0 \beta_0),$$

que nous dérivons pour obtenir

$$(5) \quad 2I^\kappa[A_0, [A_0, \beta_0]] = (1 + \kappa)\ddot{I}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0 - 2\kappa U_0 \beta_0).$$

La première assertion de la proposition suit de la proposition 2.6 quand $(1 + \kappa)\ddot{I}$ est identiquement nul, ce qui n’est possible d’après (4) que dans les cas exclus dans la seconde assertion. Dans les autres cas, on a mieux : (5) prend la forme *iv* de la proposition suivante, ce qui montre que la configuration est non seulement équilibrée, mais centrale. On remarquera que remplacer \ddot{I} par le second membre de (4) ne simplifie cette preuve que dans le cas où H est non nul.

2.15 Proposition. *Les conditions suivantes sont équivalentes et caractérisent les configurations centrales relatives (i.e. les configurations relatives des configurations centrales):*

- i) il existe un réel λ tel que $({}^tA - \lambda \text{Id})|_{\text{Im } \beta} = 0$,
- ii) il existe un réel λ tel que $\beta \circ A - \lambda \beta = 0$,
- iii) il existe un réel λ tel que ${}^tA \circ \beta + \beta \circ A - 2\lambda \beta = 0$,
- iv) il existe deux réels λ et ν tels que

$${}^tA \circ \beta + \beta \circ A - 2\lambda \beta + \nu [A, [A, \beta)] = 0.$$

Ces propriétés impliquent que $[A, \beta) = 0$ (la configuration est équilibrée) et que $\lambda I = \text{tr}(\mu \circ \beta \circ A) = \kappa U$.

Démonstration. D'après la définition 2.2, une configuration centrale vérifie $x \circ A = \lambda x$, ce qui équivaut à l'inclusion de l'image de l'endomorphisme $A_\lambda = A - \lambda \text{Id}$ dans le noyau de x . Ce noyau est aussi celui de β d'après la remarque 1.9, ce qui établit l'équivalence avec *ii* et avec *i* après transposition. Il est clair que *ii* implique *iii*, et que *iii* implique *iv*. Le calcul des termes diagonaux dans le premier membre de *iv* après diagonalisation de A , qui utilise celui de la démonstration de la proposition 2.6, permet d'achever la preuve des équivalences. Enfin, *ii* entraîne que $[A, \beta) = 0$ et, en notant $B = \mu \circ \beta$, que $\text{tr}(B \circ A - \lambda B) = 0$. On déduit la valeur de λ de la définition du moment d'inertie $I = \text{tr} B$ et de l'homogénéité de \hat{U} , qui donne $\text{tr}(B \circ A) = \langle \beta, d\hat{U} \rangle = \kappa U$. Montrons autrement que *iii* implique *ii* (voir aussi la remarque 2.29). Écrivons l'expression *iii* sous la forme $A_\lambda \circ B + B \circ A_\lambda = 0$, en imitant la remarque 1.23, multiplions par B à gauche, puis à droite et soustrayons. Nous obtenons la commutation de A_λ et de B^2 , qui implique celle de A_λ et de B puisque β est positive, ce qui permet de conclure. Montrons autrement que *iv* implique *i*. L'expression *iv* montre que $\text{tr}(B \circ A_\lambda) = 0$ et que $\text{tr}(B \circ A_\lambda^2) = 0$, d'où il découle que $\text{tr}(A_\lambda \circ B \circ A_\lambda) = 0$. La positivité de β montre que l'endomorphisme dont on a pris la trace est nul, ce qui équivaut à *i*.

Nous devons maintenant décrire les mouvements homographiques les plus généraux dont la configuration est centrale. Les deux résultats qui suivent justifieraient qu'on les appelât "mouvements homothétiques complexes". Ils montrent en particulier que la dimension de l'espace du mouvement est paire et on montrerait sans peine qu'elle peut prendre toutes les valeurs paires entre $\text{rg} x$ et $2\text{rg} x$.

2.16. Rappelons qu'un espace hermitien F est canoniquement muni de trois structures (euclidienne, symplectique, complexe)

$$\kappa \in \text{Isom}_+(F, F^*), \quad \omega \in \text{Isom}_a(F, F^*), \quad \mathcal{J} \in \text{Isom}(F, F),$$

qui sont soumises aux deux relations $\omega = \kappa \circ \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^2 = -\text{Id}$. La première relation permet de déduire l'une des structures en fonction des deux autres, et la deuxième peut encore s'écrire ${}^t\mathcal{J} \circ \kappa \circ \mathcal{J} = \kappa$, c'est-à-dire $\|\mathcal{J}(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans F (les notations de la norme et du produit scalaire se rapportent comme d'habitude à la structure euclidienne).

2.17. Si l'espace E est muni d'une structure hermitienne, donnée par ϵ, Ω et $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$, une structure du même type est induite sur l'espace euclidien $F = \mathcal{D} \otimes E$ des configurations absolues. Il suffit de poser $\kappa(x) = \epsilon \circ x \circ \mu$ et $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}_E \circ x$.

2.18 Proposition. *Considérons l'état $z = (x, y)$ d'un mouvement homographique à un instant arbitrairement choisi. Supposons de plus que ce mouvement n'est pas homothétique, c'est-à-dire que y n'est pas un multiple réel de x . Pour que la configuration x soit centrale, il faut et il suffit qu'il existe sur l'espace du mouvement $\text{Im } z$ une structure hermitienne, associée à la structure euclidienne, telle que pour la structure induite y soit un multiple complexe de x .*

Démonstration. Supposons que $E = \text{Im } z$ et que cet espace possède une structure hermitienne $(\epsilon, \epsilon \circ \mathcal{J}_E, \mathcal{J}_E)$. Supposons qu'il existe un nombre complexe ζ , qu'on identifie à une combinaison linéaire réelle de Id_E et de \mathcal{J}_E , tel que $y = \zeta \circ x$. On obtient

$$\delta = {}^t y \circ \epsilon \circ y = {}^t x \circ \zeta \circ \epsilon \circ \zeta \circ x = |\zeta|^2 \beta.$$

Mais la deuxième équation du système (3) montre que δ ne peut être multiple de β que si la condition *iii* de la proposition 2.15 est réalisée : la configuration est centrale. Supposons maintenant la configuration x centrale. L'état relatif s'écrit, d'après les équations (3) et la proposition 2.15,

$$\mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z = \begin{pmatrix} I\beta_0 & J\beta_0 - \rho \\ J\beta_0 + \rho & K\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Il convient de poser, suivant une notation justifiée dans la troisième partie,

$$|\mathcal{E}| = \sqrt{IK - J^2}.$$

L'expression sous le radical s'écrit encore $\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2$. Elle est donc positive, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et ne s'annule que si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si le mouvement est homothétique. Dans le cas contraire, nous "normaliserons" z en posant $z_0 = (x_0, y_0)$ avec

$$x_0 = \sqrt{\frac{|\mathcal{E}|}{I}} x, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{E}| I}} (Iy - Jx).$$

En utilisant l'expression de \mathcal{E} , on vérifie que

$$\mathcal{E}_0 = {}^t z_0 \circ \epsilon \circ z_0 = \begin{pmatrix} |\mathcal{E}| \hat{\beta}_0 & -\rho \\ \rho & |\mathcal{E}| \beta_0 \end{pmatrix}.$$

Soit \mathcal{J}_0 l'endomorphisme de $2\mathcal{D}^*$ défini par $\mathcal{J}_0(u, v) = (-v, u)$. On voit tout de suite que $\mathcal{E}_0 \circ \mathcal{J}_0$ est antisymétrique. Cette quantité s'écrit aussi ${}^t z_0 \circ \epsilon \circ z_0'$,

avec $z'_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0$. On déduit de cette antisymétrie, exactement comme on l'avait fait dans la preuve de la proposition 1.12, l'existence d'une "rotation instantanée" Ω_0 définie sur $\text{Im } z$, telle que

$$z'_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0 = \epsilon^{-1} \circ \Omega_0 \circ z_0.$$

On a clairement

$$-z_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0^2 = (\epsilon^{-1} \circ \Omega_0)^2 \circ z_0.$$

L'endomorphisme $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega_0$ est donc la multiplication par i d'une structure hermitienne de $\text{Im } z$ et vérifie notamment $y_0 = \mathcal{J}_E \circ x_0$. Cette dernière égalité, combinée avec les définitions de x_0 et y_0 , montre que y est multiple complexe de x .

2.19. Remarquons que dans un mouvement homographique plan, y est automatiquement multiple de x pour la structure complexe naturelle. La configuration est donc centrale, même dans les cas exclus de la proposition 2.14.

2.20 Proposition. *Soit un mouvement homographique et non homothétique dont la configuration est centrale. Soit $x_0 = \|x(0)\|^{-1}x(0)$ la configuration initiale normalisée et U_0 le potentiel de cette configuration. Il existe une fonction complexe ζ du temps vérifiant*

$$\ddot{\zeta} = 2\kappa U_0 |\zeta|^{2\kappa-2} \zeta$$

et telle que $x(t) = \zeta(t)x_0$ pour la structure hermitienne de $\text{Im } z(0)$ obtenue dans la proposition 2.18. Réciproquement, étant donné un espace hermitien E , une configuration centrale normalisée x_0 et une fonction complexe ζ du temps vérifiant l'équation différentielle ci-dessus, on obtient un mouvement homographique en posant $z(t) = (\zeta(t)x_0, \dot{\zeta}(t)x_0)$.

Démonstration. Commençons par la réciproque. La proposition 2.15 donne $x \circ A = \kappa UI^{-1}x$ pour toute configuration x semblable à x_0 . C'est tout ce qu'il nous faut pour vérifier que $z(t)$ satisfait à l'équation (N). Passons à la première assertion. La proposition 2.18 montre que $y(0)$ est un multiple complexe de $x(0)$, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres complexes ζ_0 et $\dot{\zeta}_0$ tels que $z(0) = (\zeta_0 x_0, \dot{\zeta}_0 x_0)$. Or il existe une unique solution de l'équation différentielle (N) ayant cette donnée initiale: c'est $z(t) = (\zeta(t)x_0, \dot{\zeta}(t)x_0)$, où $\zeta(t)$ résout l'équation différentielle de l'énoncé, avec les conditions initiales $\zeta(0) = \zeta_0$ et $\dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}_0$.

Le cas particulier de Jacobi et Banachiewicz

La proposition 2.14 distingue le cas d'un potentiel U homogène de degré -2 , pour lequel (N) possède, nous le savons, l'intégrale supplémentaire

$G = 2IH - J^2$. On peut en fait dans ce cas réduire (N) en passant au quotient par une action du groupe des similitudes de E , et non plus seulement, comme on l'avait fait pour obtenir $(N \text{ Rel})$, par l'action des isométries de E . La première idée est d'utiliser pour ce faire le gradient symplectique de G ,

$$X_G = 2IX_H + 2HX_I - 2JX_J,$$

qui commute à X_H . Mais le flot de ce champ est très loin de définir un groupe de symétries utilisable. Nous nous servons plutôt du champ de vecteurs non hamiltonien $X_G - 2IX_H$, qui s'intègre facilement en un flot qui transforme la configuration comme le fait une homothétie. Effectuer la réduction correspondante revient à remplacer le Hamiltonien H par G . En effet, les courbes intégrales des deux Hamiltoniens se déduisent les unes des autres à l'aide du flot précédent, et G vérifie de plus

$$\{G, I\} = \{G, J\} = 0,$$

si bien que la configuration garde sa taille initiale sur les nouvelles courbes intégrales. L'énoncé qui suit est à rapprocher de la proposition 2.5.

2.21 Proposition. *Si U est homogène de degré -2 (i.e. $\kappa = -1$), les mouvements homographiques sont les équilibres du système (N) réduit par l'action du groupe des similitudes de E .*

Démonstration. Au champ $X_G - 2IX_H = 2HX_I - 2JX_J$ discuté plus haut correspond l'équation différentielle sur les états absolus

$$\dot{x} = -2Jx, \quad \dot{y} = 2Jy - 4Hx,$$

et celle sur les états relatifs

$$\dot{\beta} = -4J\beta, \quad \dot{\gamma} = -4H\beta, \quad \dot{\delta} = 4J\delta - 8H\gamma, \quad \dot{\rho} = 0.$$

Les équilibres du système (N) réduit par l'action du groupe des similitudes de E sont les *équilibres relatifs* du flot de X_G , autrement dit les états tels que $Rel_*X_G = 0$. On les caractérise en égalant les quatre seconds membres de l'équation différentielle ci-dessus aux quatre seconds membres correspondants de $(N \text{ Rel})$, multipliés par $-2I$. La première égalité donne $J\beta = I\gamma$, et montre que la dérivée de β reste proportionnelle à β dans les mouvements correspondant à ces équilibres relatifs : ce sont des mouvements homographiques. Réciproquement, les mouvements homographiques vérifient, d'après (3) et la proposition 2.14,

$$J\beta = I\gamma, \quad I\delta - 2H\beta = -2I\beta \circ A, \quad [A, \rho] = [A, \beta] = 0,$$

ce qui équivaut aux quatre égalités précédentes : ce sont des équilibres relatifs de X_G .

La proposition suivante donne des exemples de mouvements homographiques, dont notamment ceux étudiés par Banachiewicz [1]. On la rapprochera de la proposition 2.8.

2.22 Proposition. *Soit U un potentiel homogène de degré -2 . Etant donné une configuration équilibrée β_0 et un espace euclidien E de dimension $2\text{rg}\beta_0 - 1$, il existe un mouvement homographique dans E dont la configuration relative est proportionnelle à β_0 .*

Démonstration. Nous pouvons, en supposant $\langle \mu, \beta_0 \rangle = 1$, résoudre (3) en faisant

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} I\beta_0 & J\beta_0 \\ J\beta_0 & 2H\beta_0 - 2I^{-1}\beta_0 \circ A_0 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à imposer $\rho = 0$: on n'a d'autre choix que dans les cas exceptionnels indiqués dans la remarque 2.11. Soient a_1, \dots, a_{n-1} les coefficients diagonaux de A_0 et b_1, \dots, b_{n-1} ceux de $\mu \circ \beta_0$ dans une base de diagonalisation simultanée. La forme \mathcal{E} est positive si et seulement si toutes les matrices

$$b_i \begin{pmatrix} I & J \\ J & 2H - 2I^{-1}a_i \end{pmatrix}$$

le sont, ce qui revient à la positivité du déterminant $G - 2a_i$ pour tous les i tels que b_i est non nul (la trace est alors strictement positive). Il suffira d'égaliser G au maximum des $2a_i$ pour obtenir un \mathcal{E} de rang $2\text{rg}\beta_0 - 1$, ou de rang inférieur si la valeur propre minimale est multiple. On disposera encore du paramètre H .

Remarques

2.23. On a pris pour valeur de G , dans l'exemple ci-dessus, la valeur minimale autorisée. Une valeur plus grande aurait donné un mouvement en dimension paire. On ne doit pas s'étonner de l'apparition de cette intégrale première comme unique paramètre qualitatif. Quand G est fixé, le flot de $Y = X_J$ conjugue les dynamiques sur tous les niveaux de H où cette fonction prend un signe donné. Notons par ailleurs que G est positive pour tous les mouvements que l'on peut continuer indéfiniment dans le passé et dans le futur.

2.24. Lagrange concluait la partie théorique de son Essai par le paragraphe suivant, que Wintner [2] illustre à la page 431 de ses notes historiques en rappelant les résultats de Pizzetti [1] et de Banachiewicz [1] :

“J'avoue, au reste, qu'on pourrait résoudre les Problèmes précédents d'une manière plus simple par les formules ordinaires du Problème des trois Corps entre les rayons vecteurs et les angles décrits par ces rayons, si l'on

voulait se borner d'abord à l'hypothèse que les Corps se meuvent dans un même plan fixe; mais il ne serait pas aisé, ce me semble, d'en venir à bout par les mêmes formules, si l'on supposait, comme nous l'avons fait, que les Corps pussent se mouvoir dans des plans différents."

On se convaincra de l'efficacité du choix de Lagrange, le travail en distances mutuelles, en essayant démontrer autrement la proposition 2.5. Nous voulons maintenant proposer une autre approche de la preuve de la proposition 2.14, peut-être plus lumineuse, mais qui, si elle semble plus "absolue", ne diffère de la précédente que par la forme. Reprenons les notations de cette preuve, et diagonalisons tout de suite la matrice A_0 , dans une base de \mathcal{D}^* que nous notons (u_1, \dots, u_{n-1}) . Soient a_1, \dots, a_{n-1} les coefficients diagonaux de A_0 et b_1, \dots, b_{n-1} ceux de $\mu \circ \beta_0$, qui n'est pas diagonale *a priori*. On a $A(u_i) = I^{\kappa-1} a_i u_i$ et

$$\|x(u_i)\|^2 = \langle \epsilon \circ x(u_i), x(u_i) \rangle = \langle \beta(u_i), u_i \rangle = I b_i,$$

si bien que, pour tous les b_i non nuls, $\vec{s}_i = b_i^{-1/2} x(u_i)$ vérifie

$$(C) \quad \ddot{\vec{s}}_i = 2a_i \|\vec{s}_i\|^{2\kappa-2} \vec{s}_i.$$

Les $\vec{s}_i(t)$ considérés sont donc solutions de problèmes de force centrale, et satisfont tous à la contrainte $\|\vec{s}_i(t)\|^2 = I(t)$.

Lemme. *Si deux solutions $\vec{s}_1(t)$ et $\vec{s}_2(t)$ de deux problèmes de force centrale (C) vérifient $\|\vec{s}_1(t)\| = \|\vec{s}_2(t)\|$ pour tout temps t , alors ou bien $\kappa = -1$, ou bien les deux orbites sont circulaires et uniformes de périodes différentes, ou bien $a_1 = a_2$ et les deux mouvements sont isométriques.*

Démonstration. Les trois fonctions du temps $\|\vec{s}\|^2$, $(\vec{s} \cdot \dot{\vec{s}})$ et $\|\dot{\vec{s}}\|^2$ caractérisent le mouvement à isométrie près. On les notera encore I , J et K . L'énergie $H = K/2 - aI^\kappa/\kappa$ permet d'exprimer K en fonction de I . Il reste les équations $\dot{I} = 2J$ et $\dot{J} = 2H + 2aI^\kappa(1 + \kappa)/\kappa$. L'hypothèse implique $I_1 = I_2$, $J_1 = J_2$ et, si \dot{I}_1 est non nul, $H_1 = H_2$. Enfin, si $\kappa + 1$ est non nul, $a_1 = a_2$ et $K_1 = K_2$, d'où la conclusion.

L'égalité de tous les a_i correspondant à des b_i non nuls, c'est-à-dire à des $x(u_i)$ non nuls, montre que la configuration est centrale : c'est le point i de la proposition 2.15. Le lemme redémontre donc la seconde assertion de la proposition 2.14, en "expliquant" les cas d'exception.

Points critiques du potentiel

Définissons la *sous-variété isospectrale* d'une configuration relative β donnée :

$$\mathcal{S}_\beta = \{ \theta \in \text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}) \mid \text{tr}(\mu \circ \theta)^k = \text{tr}(\mu \circ \beta)^k, 1 \leq k < n \}.$$

La remarque 1.19 permet de caractériser les images réciproques de ces sous-variétés par l'application *rel*. Ce sont les sous-variétés constituées de configurations absolues ayant, à une rotation près, la même forme d'inertie b .

2.25 Proposition. *Une configuration relative β est équilibrée si et seulement si c'est un point critique de la restriction de \hat{U} à sa sous-variété isospectrale \mathcal{S}_β .*

Démonstration. Soit R une rotation de \mathcal{D}^* . On a $R \circ \mu \circ R = \mu$. Tout point de \mathcal{S}_β peut s'écrire $R \circ \beta \circ R$, si bien que les éléments β' tangents à \mathcal{S}_β au point β sont tous tels qu'il existe un élément Ω de $\text{Hom}_a(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ avec

$$\beta' = \mu^{-1} \circ \Omega \circ \beta - \beta \circ \Omega \circ \mu^{-1}.$$

Donc

$$\langle d\hat{U}(\beta), \beta' \rangle = \langle \mu^{-1} \circ d\hat{U} \circ \beta - \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1}, \Omega \rangle.$$

Le résultat suit, puisque la nullité de cette expression pour tout Ω équivaut à celle de $\mu^{-1} \circ d\hat{U} \circ \beta - \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1} = [A, \beta]$.

2.26 Proposition. *Soit E un espace euclidien de dimension arbitraire. Une configuration absolue x de $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ est centrale si et seulement si $\|x\|^{-1}x$ est un point critique de la restriction du potentiel homogène U à la sphère d'équation $I = 1$.*

Démonstration. Comme $I(x) = \|x\|^2$, on a $dI(x) = 2\epsilon \circ x \circ \mu$. La définition 2.2 traduit exactement l'existence du multiplicateur de Lagrange dont nous avons besoin.

Notons que la caractérisation de la proposition 2.26 ne se limite pas aux configurations de rang maximal. Cependant, lorsque U ne dépend que des distances mutuelles, son invariance par réflexion montre qu'un point critique quelconque x_0 de rang non maximal est aussi point critique de la restriction de U aux configurations x telles que $\text{Im } x = \text{Im } x_0$. On en déduit, en utilisant la proposition 1.12, la

2.27 Proposition. *Une configuration relative β de rang p est centrale si et seulement si β est un point critique de la restriction de \hat{U} aux configurations relatives de rang p et de taille $\langle \mu, \beta \rangle$.*

Remarques

2.28. Fixer la taille de β , c'est fixer l'invariant spectral η_1 , défini dans la remarque 1.19, de l'endomorphisme $\mu \circ \beta$. Fixer son rang à p , c'est faire $0 = \eta_{p+1} = \eta_{p+2} = \dots$. On voit ainsi directement qu'un point critique de la proposition 2.27 est en particulier un point critique de la proposition 2.25.

2.29. La quantité ${}^tA \circ \beta + \beta \circ A - 2\lambda\beta$ de la proposition 2.15 s'interprète, quand $\lambda = \kappa U/I$, comme le vecteur gradient en β de la fonction \hat{U} restreinte aux configurations de même rang et même taille que β , ou encore, comme l'image directe par *rel* du vecteur gradient en x de la fonction U restreinte à la sphère des configurations absolues de même taille que x . Ceci redémontre l'équivalence des formulations *ii* et *iii* de cette proposition.

3. L'inégalité de Sundman

Dans les articles [1] et [2], Sundman a dégagé d'intéressantes propriétés de l'évolution de la taille d'un système de trois corps, toutes reliées directement à l'homogénéité du potentiel. Nous nous contentons ici de donner une preuve indépendante de la dimension de l'espace de la fameuse inégalité de géométrie qui est au cœur de ces analyses. Notons que Siegel [1] prouve une version affaiblie de cette inégalité, ce qui complique singulièrement sa présentation des résultats de Sundman [2].

Considérons le problème plan des n corps, et repérons ces corps, une fois choisie une base orthonormée de \mathcal{D} , par les $n-1$ nombres complexes ξ_1, \dots, ξ_{n-1} . Aux vitesses seront associés les nombres complexes $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Si $|\mathcal{C}|$ désigne la valeur absolue du moment cinétique, on aura

$$\left| \sum_i \xi_i \eta_i \right|^2 = |\mathcal{C}|^2 + J^2, \quad \sum_i |\xi_i|^2 = I, \quad \sum_i |\eta_i|^2 = K.$$

Ce qu'on appelle l'inégalité de Sundman n'est rien d'autre dans ce cas que l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\mathcal{C}|^2 + J^2 \leq IK$. Dans le lemme suivant, nous remarquons que cette inégalité persiste avec une structure plus faible que celle du 2.16.

3.1 Lemme. *Soit F un espace vectoriel muni d'une forme euclidienne κ et d'un endomorphisme (éventuellement non inversible) \mathcal{J} tel que $\kappa \circ \mathcal{J}$ soit anti-symétrique. Supposons que pour tout x de F nous ayons*

$$(1) \quad \|\mathcal{J}(x)\| \leq \|x\|.$$

Alors pour tout x et tout y de F

$$(x \cdot y)^2 + (\mathcal{J}(x) \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

L'égalité est réalisée pour un couple (x, y) si et seulement si d'une part y est une combinaison linéaire de x et $\mathcal{J}(x)$, d'autre part $\|\mathcal{J}(x)\| = \|x\|$.

Démonstration. Les vecteurs x et $\mathcal{J}(x)$ sont orthogonaux pour la structure euclidienne. En projetant y dessus, on obtient

$$\frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2} + \frac{(\mathcal{J}(x) \cdot y)^2}{\|\mathcal{J}(x)\|^2} \leq \|y\|^2.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité (1).

Le choix d'un élément Ω de $\text{Hom}_a(E, E^*)$, tel que l'endomorphisme $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$ vérifie pour tout \vec{r} de E

$$(2) \quad \|\mathcal{J}_E(\vec{r})\| \leq \|\vec{r}\|,$$

munit l'espace euclidien (E, ϵ) d'une structure du type de celle considérée dans le lemme. L'extension à l'espace des configurations absolues peut se faire comme au 2.17. En effet, les égalités (1) et (2) équivalent chacune à la positivité de la forme $\epsilon - {}^t\mathcal{J}_E \circ \epsilon \circ \mathcal{J}_E$.

Voici ce que devient l'inégalité du lemme 3.1, quand on utilise l'expression $\mathcal{C} = -x \circ \mu \circ y + y \circ \mu \circ x$ du moment cinétique, qui donne l'identité

$$(3) \quad \frac{1}{2} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle = \langle y \circ \mu \circ x, \Omega \rangle = \langle y, \Omega \circ x \circ \mu \rangle = y \cdot \mathcal{J}_E \circ x.$$

3.2 Inégalité de Sundman. Pour tout élément Ω de $\text{Hom}_a(E, E^*)$ tel que $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$ vérifie l'inégalité (2), on a

$$\frac{1}{4} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle^2 \leq IK - J^2.$$

3.3 Remarque. Le premier membre de (3) est une "composante" du moment cinétique. C'est également le Hamiltonien de l'équation différentielle $\dot{x} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$, $\dot{y} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ y$. La forme Ω est donc une *rotation instantanée de l'état* au sens de la preuve de la proposition 2.9. Dans Albouy [1], le même objet avait le statut de *multiplicateur* d'un équilibre relatif, et on l'avait noté Λ .

Cas d'égalité et inégalité de Sundman optimale

3.4 Définition. Nous appelons "espace fixe" le sous-espace de E image du moment cinétique $\mathcal{C} \in \text{Hom}_a(E^*, E)$. Etant sous-entendu que nous n'inversons l'endomorphisme $[\mathcal{C}]$ que sur l'espace fixe, nous posons

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}] &= \sqrt{-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2}, \\ \mathcal{J}_{\mathcal{C}} &= [\mathcal{C}]^{-1} \circ \mathcal{C} \circ \epsilon, \\ \Omega_{\mathcal{C}} &= \epsilon \circ \mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \\ |\mathcal{C}| &= \frac{1}{2} \text{tr}[\mathcal{C}] = \frac{1}{2} \langle \mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}} \rangle. \end{aligned}$$

3.5 Proposition. Soient \mathcal{C} un élément de $\text{Hom}_a(E^*, E)$ et Ω un élément de $\text{Hom}_a(E, E^*)$ tel que l'endomorphisme $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$ vérifie l'inégalité (2). Il existe $z = (x, y)$ tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= -x \circ \mu \circ \hat{y} + y \circ \mu \circ \hat{x}, \\ \frac{1}{4} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle^2 &= \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2,\end{aligned}$$

si et seulement si Ω et \mathcal{C} sont liés par la relation $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}} + \Omega_0$, où Ω_0 est tel que $\text{Im} \Omega_0 \subset \ker \mathcal{C}$ (et ne joue aucun rôle). Dans ce cas y est une combinaison linéaire de x et $\mathcal{J}_{E \circ x}$, et l'espace du mouvement coïncide avec l'espace fixe.

Démonstration. Soit $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}} + \Omega_0$. On vérifie que les trois structures

$$\mathcal{C} \circ \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}] \circ \epsilon^{-1}, \quad \mathcal{C}, \quad \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}}^{-1}$$

munissent $E^*/\ker \mathcal{C}$, canoniquement dual à l'espace fixe, d'une structure hermitienne. Soit ζ une injection unitaire de ce dernier espace dans l'espace $2\mathcal{D}$, dont la structure hermitienne est définie par

$$\kappa_{\mu}, \quad \omega_{\mu}, \quad \mathcal{J}_0,$$

homomorphismes qui envoient respectivement un couple (u, v) de dispositions sur $(\mu(u), \mu(v))$, $(-\mu(v), \mu(u))$ et $(-v, u)$. L'état $z = \zeta$, de $2\mathcal{D}^*$ dans $\text{Im} \mathcal{C}$, vérifie les deux équations de la proposition : la première parce que, par définition, le moment cinétique est l'image directe de ω_{μ} par l'état absolu, la deuxième parce que, $z = (x, y)$ étant une application complexe, on a $y = \mathcal{J}_{\mathcal{C} \circ x}$. Réciproquement, d'après la fin du lemme 3.1, tout z qui vérifie la deuxième équation est de la forme $(x, y = \lambda x + \nu \mathcal{J}_{E \circ x})$, et satisfait de plus $\|\mathcal{J}_{E \circ x}\| = \|x\|$, qui entraîne $\mathcal{J}_{E \circ x}^2 = -x$. Transformons z en une application complexe de $2\mathcal{D}^*$ sur $\text{Im} \mathcal{C}$, de même moment cinétique, en posant $z_0 = \sqrt{\nu}(x, \mathcal{J}_{E \circ x})$. La forme $\mathcal{C} \circ \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}}$, image réciproque de κ_{μ} par \hat{z}_0 , doit être symétrique et définie positive. Le carré de l'endomorphisme $\mathcal{C} \circ \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}} \circ \epsilon$ associé à cette forme s'écrit $\mathcal{C} \circ \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}} \circ \epsilon \circ \mathcal{J}_{E \circ \epsilon} \circ \mathcal{C} \circ \epsilon$, ou encore $-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2$. Nous avons donc établi l'égalité de $-\mathcal{C} \circ \Omega = \mathcal{C} \circ \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{C}} \circ \epsilon$ et $\sqrt{-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2}$, égalité déjà vérifiée quand on fait $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}}$ (définition 3.4). Le noyau de \mathcal{C} contient donc l'image de $\Omega - \Omega_{\mathcal{C}}$.

Il suit des propositions 3.2 et 3.5 que, parmi les Ω tels que $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$ vérifie l'inégalité (2), $\Omega_{\mathcal{C}}$ maximise l'expression $\langle \mathcal{C}, \Omega \rangle$ quand on fixe \mathcal{C} . Faisant ce choix nous obtenons l'

3.6. Inégalité de Sundman optimale : $|\mathcal{C}|^2 \leq IK - J^2$. Remarquons que la proposition 3.5 donne une autre caractérisation des états considérés dans la proposition 2.18 : ce sont les cas d'égalité dans l'inégalité de Sundman. Au cours d'un mouvement homographique dont la configuration est centrale, la structure complexe donnée par la proposition 2.18 est donc celle associée au moment cinétique: nous redémontrons ainsi son invariance au cours du mouvement, déjà conséquence de la proposition 2.20. Dans les mouvements homographiques à configuration non centrale, la quantité $IK - J^2$ est une constante strictement supérieure à $|\mathcal{C}|^2$.

4. Equations des configurations équilibrées

Résolution dans le cas de trois corps

Méthode pour l'obtention d'équations explicites. Une configuration relative β définit une forme bilinéaire sur l'hyperplan \mathcal{D}^* de \mathbb{R}^n . Choisir une extension de cette forme à \mathbb{R}^n , c'est associer à β une matrice $n \times n$, qui peut être utile pour calculer. Si par exemple β correspond à une configuration absolue de n points $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$, l'identité

$$\langle \beta(\xi), \eta \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) \xi_i \eta_j = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 \xi_i \eta_j,$$

dans laquelle $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ désignent deux éléments de \mathcal{D}^* , suggère deux choix intéressants de tels représentants matriciels: la matrice des $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ et celle des $-s_{ij}/2$, où

$$s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2.$$

En général, deux matrices $n \times n$ de coefficients respectifs b_{ij} et b'_{ij} définissent la même forme bilinéaire sur \mathcal{D}^* si et seulement s'il existe $2n$ nombres réels $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ tels que pour tout i et tout j on ait

$$b'_{ij} - b_{ij} = u_i + v_j.$$

Les combinaisons $b_{ii} + b_{jj} - b_{ij} - b_{ji}$ sont indépendantes du représentant choisi. Lorsque la forme considérée est symétrique, ce sont ses coordonnées dans la base σ_{ij} de $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ définie dans la remarque 1.14. On retrouve ainsi l'expression $\beta = \sum_{i < j} s_{ij} \sigma_{ij}$.

Associons maintenant une matrice à

$$d\hat{U} = \sum_{i < j} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{ij}} ds_{ij}.$$

Une telle matrice est unique car $d\hat{U}$ définit une forme bilinéaire sur \mathcal{D} et une telle forme s'écrit de manière unique

$$(u, v) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} u_i v_j, \text{ avec pour tout } i, \sum_j \alpha_{ij} = \sum_j \alpha_{ji} = 0.$$

De l'identité $ds_{ij} = \sigma_{ij}^* = e_{ij}^* \otimes e_{ij}^*$, on déduit que

$$\langle d\hat{U}(\beta)(u), v \rangle = \sum_{i < j} \frac{\partial \hat{U}(\beta)}{\partial s_{ij}} (u_i - u_j)(v_i - v_j)$$

pour tout couple (u, v) de dispositions représentées respectivement par les n -uplets (u_1, \dots, u_n) et (v_1, \dots, v_n) . La matrice cherchée est formée des coefficients des termes $u_i v_j$ dans cette somme. Comme de plus $d\hat{U}(\beta)$ est symétrique, il nous suffit de retenir que parmi les coefficients α_{ij} de la matrice obtenue, ceux pour lesquels $i < j$ s'écrivent

$$\alpha_{ij} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{ij}}.$$

Un représentant matriciel de $\Pi = \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1} = \beta \circ A$ s'obtient simplement en effectuant le produit de représentants matriciels de β , $d\hat{U}$ et μ^{-1} . Nous prenons respectivement la matrice des $-s_{ij}/2$, celle des α_{ij} , et la matrice diagonale de coefficients diagonaux m_i^{-1} . Les coefficients du produit sont les

$$(1) \quad P_{ij} = \frac{1}{2m_j} \sum_{l \neq j} (s_{il} - s_{ij}) \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{lj}}.$$

On obtient les coordonnées de la partie symétrique de Π en formant les combinaisons invariantes $P_{ii} + P_{jj} - P_{ij} - P_{ji}$. Elles peuvent, d'après le point *iii* de la proposition 2.15, servir à écrire des équations caractérisant les configurations centrales, ce que nous ne ferons pas ici. Quant à la partie antisymétrique, elle est connue dès que sont connues les combinaisons invariantes

$$P_{ijk} = P_{ij} + P_{jk} + P_{ki} - P_{ik} - P_{kj} - P_{ji},$$

avec $i < j < k$. Si n est strictement supérieur à 3, ces combinaisons sont redondantes. En effet, l'application "produit extérieur par $(1, \dots, 1)$ " de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ dans $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$ se factorise à travers une injection linéaire de $\bigwedge^2 \mathcal{D}$ dans $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$. Les P_{ijk} , $i < j < k$, sont les coordonnées dans $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$ de l'image par cette injection du bivecteur $\Pi - {}^t\Pi$. Calculons-les : les termes où l vaut i , j ou k dans l'équation (1) font apparaître le déterminant

$$\nabla_{ijk} = \begin{vmatrix} 1/m_i & 1/m_j & 1/m_k \\ s_{jk} - s_{ki} - s_{ij} & s_{ki} - s_{ij} - s_{jk} & s_{ij} - s_{jk} - s_{ki} \\ \partial \hat{U} / \partial s_{jk} & \partial \hat{U} / \partial s_{ki} & \partial \hat{U} / \partial s_{ij} \end{vmatrix}.$$

Les termes correspondant à une autre valeur de l font apparaître

$$Y_{ijk}^l = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{jk} + s_{il} & s_{ki} + s_{jl} & s_{ij} + s_{kl} \\ \frac{1}{m_i} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{il}} & \frac{1}{m_j} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{jl}} & \frac{1}{m_k} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{kl}} \end{vmatrix},$$

de sorte que

$$P_{ijk} = -\frac{1}{2} \nabla_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq ijk} Y_{ijk}^l.$$

Jointes aux conditions de positivité de la forme β , les équations $P_{ijk} = 0$, $i < j < k$, définissent les configurations équilibrées.

Cas du potentiel newtonien. Définissons une fonction Φ sur \mathbb{R}_+ par la formule $\Phi(s) = \mathcal{G}s^{-1/2}$, où \mathcal{G} est une constante positive. Le potentiel newtonien s'écrit

$$(2) \quad \hat{U} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \Phi(s_{ij}).$$

Nous ne retiendrons de la forme particulière de Φ que certaines propriétés, par exemple la concavité de sa dérivée $\varphi = \Phi'$. Les équations que nous venons d'obtenir pour les configurations équilibrées se simplifient : la dépendance de A en les masses devient linéaire, les coefficients P_{ij} s'écrivent

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} m_l (s_{il} - s_{ij}) \varphi(s_{lj}),$$

et ∇_{ijk} et Y_{ijk}^l deviennent respectivement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_i(s_{jk} - s_{ki} - s_{ij}) & m_j(s_{ki} - s_{ij} - s_{jk}) & m_k(s_{ij} - s_{jk} - s_{ki}) \\ \varphi(s_{jk}) & \varphi(s_{ki}) & \varphi(s_{ij}) \end{vmatrix}$$

et

$$m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{jk} + s_{il} & s_{ki} + s_{jl} & s_{ij} + s_{kl} \\ \varphi(s_{il}) & \varphi(s_{jl}) & \varphi(s_{kl}) \end{vmatrix}.$$

Les configurations équilibrées de trois corps. Nous noterons désormais $a = s_{23}$, $b = s_{31}$, $c = s_{12}$ et $\nabla = \nabla_{123}$.

4.1 Proposition. *Considérons un potentiel \hat{U} défini par la formule (2) dans laquelle Φ désigne une application d'un intervalle de définition contenu dans $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} dont la dérivée φ est strictement concave ou strictement convexe. Une configuration de trois corps de masses égales est équilibrée si et seulement si elle est isocèle.*

Démonstration. L'unique équation des configurations équilibrées s'écrit en effet

$$\nabla = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Elle équivaut à l'alignement sur le graphe de φ des trois points d'abscisses a , b et c .

Nous dégageons dans le lemme suivant des incompatibilités entre l'ordre des trois masses et l'ordre des trois côtés d'une configuration équilibrée. Nous avons besoin supposer que le graphe de la fonction $\varphi = \Phi'$ vérifie aussi

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-b & b-a & c \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} \leq 0,$$

pour tout triplet ordonné $a < b < c$ de nombres réels strictement positifs appartenant à l'intervalle de définition de φ . Pour le potentiel newtonien nous savons que sous les mêmes hypothèses

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} > 0,$$

ce qui est plus fort que l'étrange inégalité (3), comme nous le montrerons au cours de la preuve du lemme. Notons qu'on peut aussi changer φ en $-\varphi$ dans l'énoncé qui suit.

4.2 Lemme. *Considérons une configuration équilibrée de trois masses m_1, m_2, m_3 formant un triangle tel que $a < b < c$. Supposons que la fonction φ , définie sur un intervalle contenu dans $]0, +\infty[$, est strictement croissante, concave, et vérifie l'hypothèse (3) ci-dessus. Si $m_1 \leq m_2$, le triangle est acutangle (tous les angles sont aigus) et $m_2 < m_3$.*

Démonstration. Remplaçons $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et $\varphi(c)$ par des constantes A , B et C telles que $A < B < C$. Considérons l'espace \mathbb{R}^3 muni des coordonnées (a, b, c) . Appelons $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ et p_7 les points d'intersection du plan $a + b + c = 1$ et des sept droites passant par l'origine et par les points $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(C - B, C - A, 2C - A - B)$, $(0, 1, 1)$,

$(0, B - A, 2C - A - B)$ et $(0, 0, 1)$. La frontière définie par l'inégalité (3) passe par les point p_1, p_4 et p_6 . Celle définie par l'inégalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} \leq 0,$$

qui exprime la concavité du graphe de φ , passe par p_2 et p_4 . Le graphe de φ ne peut donc vérifier les hypothèses du lemme si le point (a, b, c) est en dehors du quadrilatère $p_2 p_4 p_6 p_7$. On montre facilement que la condition (4) définit une région contenue dans ce quadrilatère, limitée par le segment $p_2 p_7$ et l'hyperbole passant par p_2 et p_7 et tangente à $p_2 p_4$ en p_2 . Il ne nous reste plus qu'à situer la droite

$$\nabla = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1(a - b - c) & m_2(b - c - a) & m_3(c - a - b) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Elle coupe le segment $p_4 p_5$: ∇ prend le signe de $(A - B)(B - C)(m_1 - m_2)$ en p_4 et de $m_1(C - B)$ en p_5 . Comme p_4 appartient au segment $p_3 p_5$, ∇ est encore négatif en p_3 , alors qu'il est du signe de $m_3(B - A)$ en p_1 , c'est-à-dire positif : la droite coupe aussi le segment $p_1 p_3$. Elle ne rencontre donc pas le quadrilatère $p_2 p_4 p_6 p_7$, sauf si ∇ est positive en p_2 , c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} \leq 0.$$

Cette inégalité n'est pas possible si $m_1 < m_2$ et $m_3 < m_2$. Enfin, on doit avoir $c - a - b < 0$ pour tous les points d'intersection, ce qui montre que le plus grand des trois angles du triangle est aigu.

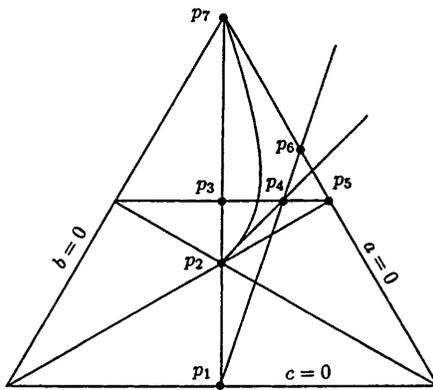


Fig. 1

Pour donner l'allure de la courbe $\nabla = 0$, et justifier les figures que nous traçons ensuite, on observe que lorsqu'on fixe b et c , ∇ est une fonction très simple de a , vérifiant notamment

$$\frac{\partial^2 \nabla}{\partial a^2} = \varphi''(a) \left((m_2 - m_3)\theta(a) - (m_2 + m_3)(b - c) \right),$$

en notant θ la fonction telle que

$$\theta(a) = a + 2 \frac{\varphi'(a)}{\varphi''(a)}.$$

Dans le cas newtonien, $\Phi(a) = \mathcal{G}a^{-1/2}$ donne $\theta(a) = a/5$: la dérivée seconde de ∇ ne peut s'annuler qu'une fois. Le lemme suivant donne un résultat optimal.

4.3 Lemme. *Pour un potentiel newtonien, la fonction $a \mapsto \nabla(a, b, c)$ s'annule au plus deux fois sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*

Démonstration. Reprenons l'expression de la dérivée seconde de ∇ . Si $m_2 - m_3$ et $b - c$ sont de signes contraires, $\partial^2 \nabla / \partial a^2$ garde un signe constant. Sinon, ∇ est équivalente à $(m_2 + m_3)(c - b)\varphi(a)$ au voisinage de $a = 0$ et à $(m_1 + m_2)(\varphi(b) - \varphi(c))a + (m_3 - m_2)(\varphi(a) - \varphi(b))a$ au voisinage de $a = +\infty$, deux expressions dont les signes coïncident. Dans les deux cas, la conclusion suit.

Remarques

4.4. Un analogue du lemme précédent pour des potentiels non newtoniens, et surtout non homogènes, s'obtient en faisant une hypothèse de monotonie sur la fonction θ , qui revient supposer que la dérivée schwarziennne de φ ne s'annule jamais. Cela provient du fait que l'équation $\nabla = 0$ définit implicitement le réel $\varphi(a)$ comme une fonction homographique de a quand b et c sont fixés.

4.5. La conclusion de 4.2 découle facilement du lemme 4.3 : il suffit d'étudier le signe de ∇ sur les triangles isocèles.

La Figure 2 décrit les configurations équilibrées pour quatre choix de masses. On a représenté en trait gras la courbe des configurations équilibrées de taille fixée et l'ellipse des triangles d'aire nulle de taille fixée. En trait fin apparaissent le triangle qui borde le sous-ensemble

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, I = 1\}$$

et quelques lignes de niveau des fonctions potentiel et aire restreintes à ce sous-ensemble. On notera que la courbe des configurations équilibrées

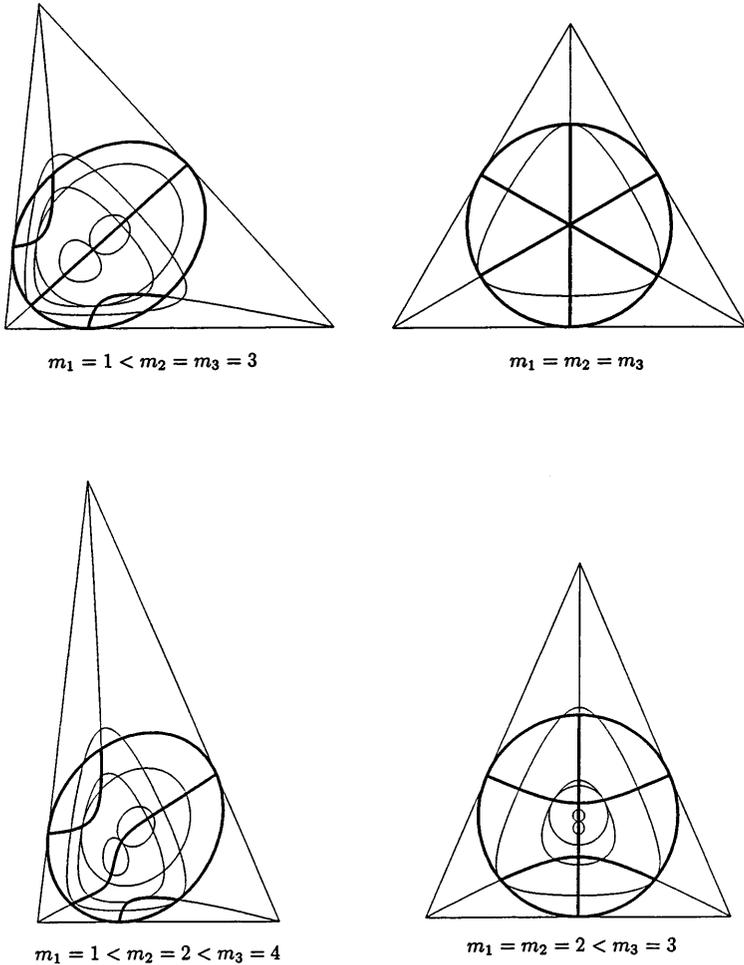


Fig. 2

contient nécessairement les points singuliers de ces restrictions, respectivement le triangle équilatéral de Lagrange ($d\hat{U}$ proportionnelle à μ) et le triangle dont le centre de masse coïncide avec l'orthocentre (β proportionnelle à μ^{-1}).

Références

A. Albouy [1] *Integral manifolds of the N-body problem*, Invent. math. 114, p. 463–488 (1993)
 A. Albouy [2] *Symétrie des configurations centrales de quatre corps*, C. R. Acad. Sci. Paris, 320, p. 217–220 (1995)
 T. Banachiewicz [1] *Sur un cas particulier du problème des trois corps*, C. R. Acad. Sci. Paris, 142, p. 510–512 (1906)

- L.M. Blumenthal [1] *Theory and applications of distance geometry*, Oxford at the Clarenton Press (1953)
- E. Betti [1] *Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra di loro*, *Annali di Matematica* s.2 t.8, p. 301–311 (1877)
- E. Cartan [1] *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann (1922)
- A. Cayley [1] *On a theorem in the geometry of position*, *œuvres* v.1, p. 1–4 (1841)
- C.G.J. Jacobi [1] *Vorlesungen über Dynamik* (1843), *Gesammelte Werke*, Chelsea (1969)
- J.L. Lagrange [1] *Essai sur le problème des trois corps*, *œuvres* v.6, p. 229–324 (1772)
- J.L. Lagrange [2] *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps*, *œuvres* v.4, p. 401–418 (1777)
- A. Lichnerowicz [1] *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, *J. of Diff. Geom.* 12, p. 253–300 (1977)
- P. Pizzetti [1] *Casi particolari del problema dei tre corpi*, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* s.5 v.13, p. 17–26 (1904)
- C.L. Siegel [1] *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer-Verlag (1956), édition anglaise avec J.K. Moser, Springer-Verlag (1971)
- K.F. Sundman [1] *Recherches sur le problème des trois corps*, *Acta Soc. Sci. Fennicae* 34 Nr. 6 (1907)
- K.F. Sundman [2] *Mémoire sur le problème des trois corps*, *Acta Math.* 36, p. 105–179 (1913)
- A. Wintner [1] *Galilei group and law of gravitation*, *Amer. Journ. of Math.* 60, p. 473–476 (1938)
- A. Wintner [2] *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press (1941)