Invent. math. 141, 239–297 (2000)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002220000069

Inventiones mathematicae

Un lemme de Morse pour les surfaces convexes

François Labourie[*]

Département de Mathématique, Université de Paris Sud, 91405 Orsay, France

Oblatum 17-XI-1998 & 2-XII-1999
Published online: 29 March 2000 – © Springer-Verlag 2000

1 Introduction

Le lemme de Morse pour les géodésiques affirme que dans une variété à courbure strictement négative et à géométrie bornée, toute quasi-géodésique est à une distance bornée d'une géodésique.

D'un point de vue dynamique, il est le pendant géométrique du "Shadowing Lemma". Il a pour conséquence les trois propriétés hyperboliques du flot géodésique d'une variété compacte à courbure strictement négative, vu ici comme un feuilletage de dimension 1 :

(i) la réunion des feuilles compactes est dense ;
(ii) une feuille générique est dense ;
(iii) les flots géodésiques de deux métriques proches à courbure négative sont conjugués.

Le but de notre d'article est d'énoncer un lemme de Morse pour les k-surfaces dans les variétés de dimension 3 à courbure négative et d'en tirer des conséquences analogues.

Commençons par définir brièvement une k-surface dans une variété M de dimension 3 à courbure plus petite que -1 pour $k \in]0, 1[$. Il s'agit d'une surface dont la *courbure extrinsèque*, c'est-à-dire le produit des courbures principales, vaut k. Les hypothèses sur k entraînent qu'une k-surface est localement convexe et à courbure intrinsèque strictement négative. Nous nous intéresserons principalement aux k-surfaces non compactes (elles le sont toutes si M est simplement connexe) et complètes dans un certain sens (voir le paragraphe 2.2 pour des précisions).

Revenons au lemme de Morse pour les k-surfaces. L'une de ses conséquences immédiates est que toute surface localement convexe à courbure extrinsèque plus grande que k, ayant de bonnes propriétés "à l'infini", est à distance bornée d'une k-surface. Ce lemme apporte aussi une solution à une sorte de problème de Plateau pour les k-surfaces. Malheureusement, pour

[*] L'auteur remercie l'Institut Universitaire de France.

énoncer correctement ce lemme, il faut introduire des définitions techniques qui sortent du cadre de cette présentation (voir la section 2 pour un énoncé précis).

Nous allons plutôt présenter dans les deux prochains paragraphes deux incarnations de ce lemme de Morse :

(1) l'étude du problème de Plateau asymptotique ;
(2) les propriétés hyperboliques de l'espace des k-surfaces.

Ces propriétés hyperboliques font apparaître l'espace des k-surfaces comme une généralisation du flot géodésique dans le monde des laminations par des surfaces ; elles sont la motivation essentielle de notre travail.

Pour énoncer de façon simple nos résultats, nous supposerons dans cette introduction que M est le revêtement universel d'une variété N compacte.

1.1 Problème de Plateau asymptotique

Notons $\partial_\infty M$ le bord à l'infini de M. Soit i un homéomorphisme local d'une surface S dans $\partial_\infty M$. Une *solution* du *problème de Plateau asymptotique* (i, S) est une immersion f de S dans M dont l'image est une k-surface et telle que i est l'application qui associe à un point s de S l'extrémité à l'infini de la normale extérieure à $f(S)$ en $f(s)$.

Donnons deux justifications de cette terminologie : d'une part, ce problème de Plateau asymptotique est une version asymptotique d'un problème plus proche du problème de Plateau usuel, à savoir déterminer une surface par son bord (*cf* proposition 5.0.1); d'autre part, lorsque i est un plongement du disque ouvert qui s'étend à un plongement du disque fermé, alors le bord à l'infini de la solution coïncide avec le bord du disque.

Cette terminologie peut être source de confusion car en général une solution d'un problème asymptotique n'a pas de bord à l'infini en un sens raisonnable. Enfin même dans le cas où i provient d'un plongement, la connaissance du bord ne suffit pas à décrire le problème de Plateau asymptotique : il faut préciser l'une des deux composantes connexes du complémentaire du bord du disque ; c'est le rôle de i.

Nous démontrerons les résultats suivants sur l'existence et l'unicité des solutions du problème de Plateau asymptotique.

Théorème A. *Il existe au plus une solution d'un problème de Plateau asymptotique.*

Le problème de Plateau asymptotique n'a pas toujours de solution :

Théorème B. *Si S est $\partial_\infty M$ privé de zéro, un, ou deux points, et si i est l'injection de S dans $\partial_\infty M$, alors le problème (i, S) n'a pas de solution.*

Par contre, nous avons les trois résultats d'existence suivants :

Théorème C. *Si (i, S) est un problème de Plateau asymptotique et si $\partial_\infty M \setminus i(S)$ contient au moins trois points distincts, alors (i, S) admet une solution.*

Théorème D. *Soit Γ un groupe agissant sur S, tel que S/Γ est une surface compacte de genre plus grand ou égal à 2. Soit ρ une représentation de Γ dans le groupe des isométries de M. Si i vérifie*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad i \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ i,$$

alors le problème (i, S) a une solution.

Théorème E. *Soit (i, U) un problème de Plateau asymptotique. Si S est un ouvert relativement compact de U, alors (i, S) admet une solution.*

On peut remarquer une analogie entre les problèmes de Plateau asymptotiques ayant des solutions, et les immersions hyperboliques du disque dans $\mathbb{C}P^1$.

Nous avions démontré dans [4] le théorème D lorsque la variété ambiante était à courbure constante. Toujours dans le cas de la courbure ambiante constante, mais en toutes dimensions, J. Spruck et H. Rosenberg ont démontré dans [5] des versions partielles de nos résultats : ils ont montré que le problème de Plateau défini par (i, U) avait une solution dans le cas où U était l'intérieur du disque fermé D et où i s'étendait en un plongement de D. Les autres résultats de [5] sont des cas particuliers du théorème 5.0.1, toujours dans le cadre de la courbure ambiante constante mais en toutes dimensions : les auteurs ne considèrent que les graphes au-dessus d'horosphères. Ceci leur permet d'écrire explicitement les équations satisfaites par la fonction dont une telle surface est le graphe. Grâce à l'hypothèse de courbure ambiante constante, ces équations sont d'une forme simple et les estimées *a priori* classiques pour les équations de Monge-Ampère peuvent alors s'appliquer. Notre méthode est différente. Nous appliquons les techniques plus flexibles de courbes pseudo-holomorphes mises au point dans [3]. Nous décrivons les k-surfaces comme des solutions d'un problème de Monge-Ampère au sens de ce dernier article. Ceci nous permet, d'une part, de sortir du cadre de la courbure constante, d'autre part, de ne pas nous restreindre aux seuls graphes au-dessus d'horosphères.

1.2 Propriétés hyperboliques de l'espace des k-surfaces

Explicitons l'analogie avec le flot géodésique. Soit N une variété compacte de dimension 3. Le fibré unitaire de N est l'espace des géodésiques pointées, c'est-à-dire des paires (γ, x) où x est un point de la géodésique γ. Le flot géodésique vu comme feuilletage de dimension 1 s'obtient en déplaçant le point x le long de la géodésique γ.

Définissons les k-surfaces pointées, comme les paires (S, x) où x est un point sur la k-surface S. Ces surfaces sont en général non compactes et ont même beaucoup de récurrence. Les tubes pointés sont les paires (T, x), où T est une géodésique et x un vecteur unitaire normal à T.

Dans [3], dans le cadre plus général des problèmes de Monge-Ampère, nous avons montré l'espace $\mathcal{N}$, constitué des k-surfaces pointées et des tubes pointés, est compact. Il possède de plus une structure de lamination définie par la condition : deux points (F, x) et (G, y) sont sur la même feuille si $F = G$.

Par abus de langage, nous appellerons $\mathcal{N}$ l'espace des k-surfaces de N.

La topologie sous-jacente, et les précautions à prendre pour traiter du cas des revêtements sont précisées dans la section 8 et dans l'article [3].

Le théorème suivant est le résultat central de cet article. Il montre que l'espace $\mathcal{N}$ possède les propriétés hyperboliques du flot géodésique.

Théorème F. *Soit $\mathcal{N}$ l'espace des k-surfaces d'une variété compacte N munie d'une métrique h_0 à courbure plus petite que -1, alors :*

- *(i) pour tout entier g, la réunion des feuilles compactes de genre plus grand que g est dense dans $\mathcal{N}$;*
- *(ii) une feuille générique est dense dans $\mathcal{N}$;*
- *(iii) $\mathcal{N}$ est stable dans le sens suivant : si h est une métrique suffisamment proche de h_0, et si $\bar{\mathcal{N}}$ est l'espace des k-surfaces pour la métrique h, alors il existe un homéomorphisme entre $\mathcal{N}$ et $\bar{\mathcal{N}}$ envoyant feuille sur feuille.*

L'espace des k-surfaces contient l'espace des tubes poinés, espace qui fibre au-dessus du flot géodésique. En ce sens, l'espace des k-surfaces “contient le flot géodésique”. Dans le cas où la courbure ambiante est constante, il contient également l'espace des plans totalement géodésiques orientés $\mathcal{P}$: en effet, les surfaces équidistantes des plans totalement géodésiques sont à courbure constante. Notre espace $\mathcal{N}$ de dimension infinie est cependant beaucoup plus gros.

Signalons, à titre de comparaison, quelques propriétés de l'espace $\mathcal{P}$ dans le cas de la courbure ambiante constante. D'après le théorème d'ergodicité de Moore, une feuille générique est dense. Pour certaines variétés arithmétiques, $\mathcal{P}$ ne contient aucune feuille compacte ; pour d'autres au contraire, il en contient un ensemble dense.

Cet espace $\mathcal{P}$ n'a pas beaucoup d'intérêt quand la courbure n'est pas constante, mais il possède une sorte de propriété de “stabilité” démontrée par M. Gromov [2] : si une métrique h sur une variété N est suffisamment proche d'une métrique g à courbure constante, alors il existe une application continue de $\mathcal{P}$, l'espace des plans totalement géodésiques pour g, dans N telle que les images des feuilles soient des surfaces minimales.

La situation décrite par le théorème F amène à se poser un certain nombre de questions :

(i) on a une abondance de mesures transverses invariantes, mais y en a-t-il une qui charge tous les ouverts ?

(ii) Quelle est la statistique des feuilles compactes ? On peut associer à chaque k-surface l'intégrale de sa courbure moyenne. Pour de bonnes raisons nous appellerons ceci *l'aire* de la k-surface. De manière naturelle, l'aire des tubes est alors la longueur de la géodésique sous-jacente (à 2π près). On peut alors montrer (ce n'est pas fait dans cet article) qu'il n'y a qu'un nombre fini $N(A)$ de feuilles compactes d'aire bornée par A. Notons $N(A, g)$ le nombre de celles qui sont de genre g. On peut poser

$$ent_g(N) = \liminf_{h \leq g,\ A \to \infty} \frac{log(N(A, g))}{A}.$$

Le nombre ent_0 est l'entropie du flot géodésique, quelles sont les valeurs de ent_g ?

(iii) Les feuilles compactes sont elles équidistribuées ?

(iv) Pour deux métriques proches, supposons que l'homéomorphisme de conjugaison puisse être choisi conforme sur chacune des feuilles, les métriques sont-elles isométriques ?

1.3 Structure de l'article

2 - *Définitions, énoncé du lemme de Morse.* Nous énonçons le lemme de Morse et donnons les définitions utilisées de manière récurrente dans l'article ainsi que quelques propriétés préliminaires.
3 - *Variations infinitésimales et déformations.* Nous y démontrons le lemme 3.0.1 qui décrit les variations infinitésimales des k-surfaces à bord.
4 - *Théorème de compacité.* Nous y étudions les limites de k-surfaces. Cette section débute par un rappel des résultats de compacité sur les problèmes de Monge-Ampère démontrés dans [3].
5 - *Problème de Plateau pour les disques.* Nous y démontrons la proposition 5.0.1 qui est une version faible du lemme de Morse.
6 - *Démonstration du lemme de Morse pour les surfaces convexes.* Nous utilisons une méthode de déformation.
7 - *Problèmes asymptotiques.* Nous y démontrons les théorèmes énoncés dans l'introduction. Nous traitons le théorème A en 7.2.1 ; les théorèmes C, D et E sont vus en 7.3.3, 7.3.1 et 7.3.2 respectivement, et enfin B est démontré en 7.4.1.
8 - *Espace des k-surfaces.* A partir de cette section, nous nous intéressons à l'espace des k-surfaces d'une variété compacte. Cet espace est introduit en 8.
9 - *Densité des feuilles périodiques.* Il s'agit de de F-(i). La démonstration est la plus délicate de cet article.
10 - *Généricité des feuilles denses.* Nous y démontrons F-(ii).
11 - *Stabilité.* Cette section contient la preuve de F-(iii).

2 Définitions, énoncé du lemme de Morse

Dans cette section, nous donnons les définitions utilisées dans cet article ainsi que quelques résultats préliminaires.

Enonçons tout de suite le lemme de Morse qui sera démontré dans le paragraphe 6.0.1 :

Lemme de Morse. *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure strictement plus petite que $-c < 0$. Soit S une surface localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c, à géométrie bornée et qui n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire, ni compacte sans bord. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k-surface Σ lentille pour S.*

De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, la courbure moyenne de Σ est uniformément bornée et en particulier Σ n'est pas dégénérée.

Les k-surfaces dégénérées et non dégénérées sont définies dans le paragraphe 2.2, les surfaces lentilles en 2.2.2. Le paragraphe sur la géométrie bornée 2.3 est nécessaire pour donner la définition 2.4 de tubulaire, horosphérique à l'infini *etc*.

2.1 *k-surfaces*

Soit S une surface localement convexe immergée dans une variété M de dimension 3. Nous noterons $\vec{n}(S)$ son *relevé de Gauss*, c'est-à-dire la surface immergée dans le fibré unitaire UM de M constituée des vecteurs normaux extérieurs à S.

Une *k-surface* est une surface (éventuellement à bord) immergée dans M dont le produit des courbures principales vaut k, et telle que la métrique induite de $\vec{n}(S)$ soit complète. Cette dernière condition n'entraîne pas *a priori* que la métrique induite de celle de M est complète. Si tel est le cas, la surface est *non dégénérée*, et *dégénérée* dans le cas contraire. Si la courbure moyenne est bornée, alors la k-surface est non dégénérée.

2.2 *Surfaces lentilles, normal étendu, bout*

2.2.1 *Normal étendu, bout*

Soit Σ une surface localement convexe immergée à bord $\partial\Sigma$ dans M. Soit $\vec{n}$ son champ de vecteurs normal extérieur et $\vec{n}_\partial$ le champ de vecteurs normal intérieur à $\partial\Sigma$ dans Σ. Posons

$$N_\partial^+ = \{u \in (T\partial\Sigma)^\perp / \ \langle u, \vec{n}_\partial\rangle \leq 0\}.$$

Le *normal étendu* de Σ est le sous-ensemble N_Σ de UM, défini par

$$N_\Sigma = \vec{n}(\Sigma) \cup N_\partial^+.$$

Dans la suite, nous identifierons souvent abusivement Σ et $\vec{n}(\Sigma)$, vu comme sous-ensemble de UM. Il est facile de voir que N_Σ est une sous-variété C^0-immergée dans UM dont le bord ∂N_Σ est l'ensemble de vecteurs normaux intérieurs à Σ le long de $\partial\Sigma$.

Le *bout B* de Σ est la variété riemannienne homéomorphe à $N_\Sigma \times]0,+\infty[$ munie de la métrique induite par l'application :

$$\begin{cases} N_\Sigma \times]0,+\infty[\to M \\ \qquad (t,\vec{n}) \mapsto \exp(t\vec{n}). \end{cases}$$

D'un point de vue métrique, on compléte le bout en ajoutant Σ, on parlera alors d'un bout complet.

2.2.2 Graphe étendu, surface lentille, champ focal, pied, fonctions inverses

Nous notons $\bar{A}$ l'adhérence d'un ensemble A dans N_Σ. Une surface S localement convexe immergée à bord ∂S est un *graphe étendu* au-dessus de Σ, s'il existe :

– un ouvert O de $int(N_\Sigma) = N_\Sigma \setminus \partial N_\Sigma$, vérifiant

$$\overline{\vec{n}(\Sigma)} \subset O \subset \bar{O} \subset int(N_\Sigma)\ ;$$

– une fonction f continue définie sur $\bar{O}$, strictement positive sur O ;

tels que :

(i) $\forall y \in \bar{O} \setminus O, \quad f(y) = 0$;
(ii) $S = \{\exp(f(u)u) \ / \ u \in O\}$;
(iii) le segment géodésique $\exp([f(u),+\infty[u)$ est extérieur à S.

Si f est bornée, nous dirons que S est un graphe étendu *borné* au-dessus de Σ. De manière symétrique, nous dirons dans ce dernier cas que Σ est *lentille* pour S, et appellerons f *fonction associée*.

Le *champ de vecteurs focal* pour un graphe étendu S au-dessus de Σ est le champ de vecteurs

$$U\ :\ \exp(f(u)u) \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=f(u)} \exp(tu).$$

Soit S un graphe étendu au-dessus de Σ. Soit $y = \exp(f(u)u)$ un point de S. Le *pied* de y est le point $x = \pi(u)$ de Σ. Ici π est la projection du fibré unitaire de M sur M.

2.2.3 Remarques

(i) Soit $\vec{\nu}$ le champ de vecteurs normal extérieur à S, et $\vec{n}$ celui de Σ. On a $\vec{\nu}(s) \neq \vec{n}(s)$ pour tous les points s de $\partial\Sigma$. En effet, l'ouvert O de la définition d'un graphe étendu contient l'adhérence de $\vec{n}(\Sigma)$ et f est strictement positive.

(ii) Avec les mêmes notations, $\vec{\nu}(\partial\Sigma) \subset int(N_\Sigma)$. En effet, d'après la condition 2.2.2 (iii), le vecteur $\vec{n}_\partial$ pointe vers l'intérieur de S ; c'est-à-dire, si s est un point de $\partial S = \partial\Sigma$, nous avons :

$$\langle \vec{n}_\partial(s), \vec{\nu}(s) \rangle \leq 0.$$

Le vecteur $\vec{\nu}(s)$ est perpendiculaire à $T(\partial\Sigma)$; il appartient donc au plan engendré par $\vec{n}_\partial(s)$ et $\vec{n}(s)$. En particulier, si $\vec{\nu}(s) \notin int(N_\Sigma)$, nous avons $\vec{\nu}(s) = -\vec{n}(s)$. Ceci est impossible : deux surfaces strictement convexes ayant en un point d'intersection deux normales opposées sont telles que leur intersection est réduite à ce point, au moins localement.

(iii) Un graphe étendu S au-dessus de Σ, se plonge naturellement dans le bout complet de Σ de telle sorte que $\partial S \subset \partial\Sigma$.

2.2.4 Fonction inverse

Introduisons une dernière notion. Soit Σ une surface lentille pour S de fonction associée λ. La *fonction inverse* est la fonction μ définie sur S par

$$\mu(\exp(\lambda(u)u)) = \lambda(u).$$

Nous avons alors l'assertion suivante :

Lemme 2.2.1 *Toute fonction inverse est 2-lipschitzienne.*

Démonstration. Notons μ la fonction inverse. Soit u et v deux éléments de N_Σ. Soit π la projection de UM sur M. Posons $x = \pi(u)$ et $y = \pi(v)$. Soit d_S la distance riemannienne intrinsèque de S. L'hypothèse de courbure négative et la convexité locale de Σ entraîne :

$$d(x, y) \leq d_S(\exp(\lambda(u)u), \exp(\lambda(v)v)).$$

De plus

$$\left|\lambda(u) - \lambda(v)\right| \leq d(x, y) + d_S(\exp(\lambda(u)u), \exp(\lambda(v)v),$$

d'où le résultat.$\diamond$

2.2.5 Déformations

La remarque 2.2.3 (i) permet de montrer le lemme évident de déformation suivant :

Lemme 2.2.2 *Soit $\{S_t\}_{t\in[0,1]}$, une famille de surfaces compactes à bord, immergées et localement convexes. Soit $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ une autre famille de surfaces compactes, immergées, localement convexes, et telle que $\partial S_t = \partial\Sigma_t$. Si Σ_0 est lentille pour S_0 alors Σ_t est lentille pour S_t pour tout t dans un voisinage de 0.*

2.3 Géométrie bornée

Rappelons quelques définitions.

2.3.1 Convergence de variétés pointées

Une *variété pointée* est une paire (M, x) où M est une variété et x un point de M. Nous dirons que la suite de variétés pointées $\{(M_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ équipées des métriques g_n *converge C^∞ sur tout compact vers la variété riemannienne* (M_∞, x_∞) équipée de la métrique g_∞, s'il existe une suite d'applications $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définies de M_∞ dans M_n, envoyant x_∞ dans x_n telle que :

(i) quelque soit R, pour n suffisamment grand, la restriction de f_n à la boule de rayon R et de centre x_∞ est C^∞ et injective ;
(ii) $f_n^* g_n$ converge C^∞ sur tout compact vers g_∞.

On ne demande pas aux applications f_n d'être continues.

Une variété M est dite à *géométrie bornée* si, pour toute suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M, la suite de variétés pointées $\{(M, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

Par abus de langage, nous dirons qu'une variété d'Hadamard M est à *géométrie bornée* si, pour toute suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de M, la suite de variétés pointées $\{(M, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente vers une variété à courbure strictement négative.

2.3.2 Remarques

(i) Une variété d'Hadamard ayant un groupe discret cocompact d'isométries est à géométrie bornée.
(ii) Rappelons brièvement la preuve du très classique lemme suivant dont nous n'avons pu trouver de référence précise dans la littérature :

Lemme 2.3.1 *Si une variété de Hadamard à courbure négative est à géométrie bornée, alors la croissance des horosphères est polynomiale.*

Démonstration. Notons pour tout $T > 0$, π_T la projection d'une horosphère sur l'horosphère intérieure à distance T. Notons ω la forme volume sur chacune des horosphères, d_H la distance intrinsèque sur l'horosphère H, et $B(R, x)$ la boule de centre x de rayon R sur une horosphère passant par x ; les hypothèses de géométrie bornée entraînent qu'il existe des nombres réels strictement positifs A, u et λ tels que :

– si x et y appartiennent à la même horosphère H,

$$d_{\pi_u(H)}(\pi_u(x), \pi_u(y)) \leq \frac{1}{2} d_H(x, y) \;;$$

– pour tout $x \in M$, nous avons $\int_{B(1,x)} \omega \leq A$;
– $\pi^*_{-u}\omega \leq \lambda\omega$.

Nous en déduisons immédiatement que la croissance du volume des boules est polynomiale :

$$Vol(B(2^n, x)) \leq \int_{B(1,\pi_{nu}(x))} \pi^*_{-nu}\omega \leq A\lambda^n. \diamond$$

2.3.3 *Convergence de sous-variétés immergées*

Par définition, une *variété immergée pointée* est un quadruplet de la forme $Q = (N, x, f, M)$ où x est un point d'une variété N, f une immersion de N dans une variété riemannienne M. Une suite de variétés immergées

$$\{Q_n = (N_n, x_n, f_n, M_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

converge C^∞ sur tout compact vers une variété immergée $Q_\infty = (N_\infty, x_\infty, f_\infty, M_\infty)$ si :

(i) la suite de variétés pointées $\{(M_n, f_n(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la variété pointée $(M_\infty, f_\infty(x_\infty))$;
(ii) la suite de variétés pointées $\{(N_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, où N_n est munie de la métrique induite par f_n, converge vers $\{(N_\infty, x_\infty)\}$, où N_∞ est munie de la métrique induite par f_∞ ;
(iii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f_∞ sur tout compact au sens où on l'imagine.

Une variété immergée (N, x, f, M) est dite *à géométrie bornée* si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\{(N, x_n, f, M)\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Plus généralement, nous dirons qu'une suite de variétés immergées

$$\{(N_n, x_n, f_n, M_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

est *à géométrie bornée* si pour toute suite de points $\{y_n \in N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la suite

$$\{(N_n, y_n, f_n, M_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

possède une sous-suite convergente.

Lorsque la variété ambiante M est sous-entendue, nous abrégerons souvent le quadruplet (N, x, f, M) décrivant une variété immergée, en une paire (N, x) en confondant ainsi de manière abusive N et son image.

2.4 Surfaces horosphériques, surface tubulaires

Dans ce paragraphe, M sera toujours une variété d'Hadamard de dimension 3 à géométrie bornée.

2.4.1 Surfaces horosphériques, pseudo-horosphères

Par définition, une surface *horosphérique* est une surface Σ convexe complète plongée, pour laquelle il existe une fonction de Busemann h vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) h est majorée sur Σ et atteint son maximum ;
(ii) le gradient de h est partout transverse à Σ.

Une suite de surfaces immergées $\{(S_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *de type horosphérique* s'il existe une suite de points $\{y_n \in S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{(S_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge vers une surface horosphérique.

Une surface immergée (Σ, x) est dite *horosphérique à l'infini* s'il existe une suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface horosphérique.

Nous dirons qu'une surface convexe complète S plongée dans M est une *pseudo-horosphère* si l'application de Gauss-Minkowski définie de S dans $\partial_\infty M$ par

$$x \mapsto \exp(+\infty\vec{n}(x)),$$

est une bijection sur $\partial_\infty M$ privé d'un point.

Une surface horosphérique est une pseudo-horosphère. La réciproque est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *Dans une variété à géométrie bornée, une pseudo-horosphère à géométrie bornée est horosphérique à l'infini.*

Démonstration. Soit $y \in \partial_\infty M$ le point évité par l'application de Gauss-Minkowski de la pseudo-horosphère S. Soit B l'ensemble convexe bordé par S. D'après les constructions de M. Anderson [1], on peut en particulier construire une suite de convexes $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $\partial_\infty C_n$ est un voisinage de y ;
(ii) $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff dans le compactifié de M vers y.

Soit maintenant d_n la fonction distance à $C_n \cap B$. D'après la condition (i), $S \setminus C_n$ est relativement compacte ; ainsi d_n atteint son maximum sur S en un point x_n. D'après la condition (ii), $\{d_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Considérons la suite $\{(S, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de surfaces immergées dans la suite de variétés riemanniennes pointées $\{(M, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque S est à géométrie bornée, la suite $\{(S, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ va converger vers une surface (S_∞, x_∞) immergée dans une variété (M_∞, x_∞). La suite de fonctions $d_n - d_n(x_n)$ va alors converger vers une fonction de Buseman sur M_∞, majorée sur S, atteignant son maximum en x_∞ et dont le gradient est dirigé vers l'extérieur de S_∞. La surface S_∞ est donc de type horosphérique, S est bien horosphérique à l'infini.$\diamond$

2.4.2 Surfaces tubulaires, tubes

Notons d_γ la distance à la géodésique γ. Par définition, une surface *tubulaire* est une surface localement convexe complète immergée Σ, pour laquelle il existe une géodésique γ telle que :

(i) d_γ est bornée sur Σ ;
(ii) le gradient u de d_γ est dirigé vers l'extérieur de Σ, c'est-à-dire $\langle u, \vec{n}\rangle \geq 0$, où $\vec{n}$ est le champ de vecteurs normal extérieur.

Remarquons que la surface est convexe, et que les lignes de gradient de d_γ sont des géodésiques, dès lors, la condition (ii) estéquivalente à la condition $\langle u, \vec{n}\rangle > 0$.

Une suite de surfaces immergées est dite *de type tubulaire* si elle possède une sous-suite qui converge vers une surface tubulaire.

Une surface immergée (Σ, x) est dite *tubulaire à l'infini* s'il existe une suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface tubulaire.

Enfin, le *tube d'une géodésique* γ est défini par

$$\vec{n}(\gamma) = \{u \in UM / \langle u, \dot{\gamma}\rangle = 0\}.$$

2.4.3 Remarque

Etre de type horosphérique, tubulaire, horosphérique ou tubulaire à l'infini pour $\{(S_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou (S, x) est une propriété qui ne dépend que de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et S respectivement et ne fait pas intervenir les points choisis sur ces surfaces.

2.5 Principe du maximum géométrique et applications

L'énoncé suivant est évident. Nous l'appelerons *principe du maximum géométrique* :

Lemme 2.5.1 *Soit S_1 et S_2 deux surfaces convexes tangentes en un point x. Soit k_i la courbure extrinsèque de S_i. Supposons que S_1 est à l'intérieur de S_2 au voisinage de x. Alors $k_1(x) \geq k_2(x)$.*

En voici quelques conséquences. Supposons que la courbure de M est plus petite que $-c < 0$. Soit k tel que $0 < k < c$. Nous avons :

Proposition 2.5.2 *Si S est une k-surface compacte telle que ∂S est inclus dans une boule B, alors S toute entière est incluse dans cette boule.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que toute sphère a une courbure plus grande que c.

Nous utiliserons la proposition 3.1.1. Soit S^r la sphère de rayon r ; soit λ_i^r les valeurs propres de l'opérateur deuxième forme fondamentale de S^r, associées aux vecteurs propres e_i^r ; soit k_i^r les courbures sectionnelles des plans perpendiculaires à S^r passant par e^i. D'après les propositions 3.1.1 et 3.2.1, la courbure κ_r de la sphère de rayon r vérifie l'équation

$$\frac{d\kappa_r}{dr} = -\kappa_r \left(\lambda_2^r \left(1 + \frac{k_1^r}{\kappa_r}\right) + \lambda_1^r \left(1 + \frac{k_2^r}{\kappa_r}\right)\right).$$

De l'inégalité

$$\frac{d\kappa_r}{dr} \geq (\kappa_r - c)(-\lambda_1^r - \lambda_2^r),$$

on déduit $\kappa_r \geq c$.

Terminons la démonstration par l'absurde. Si S n'est pas incluse dans B, on peut construire une sphère à laquelle S est tangente intérieurement. Ceci contredit le principe du maximum.$\diamond$

Le même raisonnement montre :

Proposition 2.5.3 *Une k-surface ne peut-être horosphérique.*

2.6 Domination

Soit Σ une surface lentille pour S. Soit f sa fonction associée définie sur l'adhérence d'un ouvert U du normal étendu N_Σ à Σ. Notons $\bar{A}$ l'adhérence d'un ensemble A dans N_Σ. Par définition, Σ *domine la surface* Σ_1, si :

- il existe un ouvert V de U tel que $\bar{V} \subset U$;
- il existe une fonction positive ou nulle g définie sur $\bar{V}$, telle que

$$\forall x \in V,\ \ g(x) \leq f(x)$$
$$\forall x \in \bar{V} \setminus V,\ \ g(x) = f(x) \ ;$$

- Σ_1 est le graphe de g sur V.

Dans le cas où la fonction g est strictement positive, nous dirons que Σ *domine strictement la surface* Σ_1.

On montre aisément :

Lemme 2.6.1 *Soit Σ une surface lentille pour S, $\{S_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille d'ouverts à bord de S et $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille de surfaces lentilles pour S_t, alors :*

(i) l'ensemble des t tels que Σ domine strictement Σ_t est ouvert ;
(ii) si pour tout t, $t \in]0,1]$, Σ domine strictement Σ_t alors on a l'alternative :
  - *soit Σ domine strictement Σ_0;*
  - *soit Σ est tangente intérieurement à Σ_0 en un point intérieur à Σ.*

3 Variations infinitésimales et déformations

Le but essentiel de cette section est le lemme suivant :

Lemme 3.0.1 *Soit M à courbure strictement plus petite que $-k < 0$. Soit Σ une k-surface compacte à bord $\partial\Sigma$. Soit $\{c_t\}_{t\in[0,1]}$, une famille continue de déformations de $\partial\Sigma$ telle que $c_0 = \partial\Sigma$. Soit $k(t)$ une fonction C^∞ de t telle que $k(0) = k$. Il existe alors une unique famille de $k(t)$-surfaces immergées $\{\Sigma^t\}$, pour t au voisinage de 0, telle que $\Sigma^0 = \Sigma$ et $\partial\Sigma^t = c^t$.*

De plus, s'il existe une famille immergée de surfaces $\{S^t\}_{t\in[0,1]}$ vérifiant $c_t = \partial S^t$, telle que Σ est lentille pour S^0, alors Σ^t est lentille pour S^t au voisinage de 0.

Enfin, si $S^t \subset S^s$ pour $t \geq s$ et $k(t)$ est croissante, alors Σ domine Σ^t, pour t au voisinage de 0. Si de plus $S^t \neq S^0$ ou bien $k(t)$ est strictement croissante, alors Σ domine strictement Σ^t pour t au voisinage de zéro.

La démonstration de cette proposition repose sur un résultat de déformation infinitésimale que nous allons maintenant présenter.

Soit $S \subset M$ une surface compacte immergée à bord. Notons $C_0^\infty(S)$ l'espace des fonctions C^∞ définies sur S et nulles sur le bord. Notons $\vec{n}$ le champ de vecteurs normal extérieur à S.

A toute fonction $f \in C^\infty(S)$, on peut associer une *variation de surfaces* définie pour t suffisamment petit par les immersions s_t^f :

$$\begin{cases} S \longrightarrow M, \\ x \longmapsto \exp(tf\vec{n}(x)) = s_t^f(x). \end{cases}$$

Désignons par $k_t^f(x)$ la courbure extrinsèque à la surface $s_t^f(S)$ au point $s_t^f(x)$. L'opérateur L *de variation infinitésimale de courbure extrinsèque* est alors :

$$\begin{cases} C_0^\infty(S) \longrightarrow C^\infty(S), \\ \qquad f \longmapsto L(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} k_t^f. \end{cases}$$

Nous montrerons :

Proposition 3.0.2 *Soit k un réel positif. Soit M à courbure strictement plus petite que $-k$. Si S est à courbure extrinsèque strictement comprise entre 0 et k, alors l'opérateur L est elliptique et inversible.*

Dans cette section, nous expliciterons tout d'abord l'opérateur L, puis démontrerons la proposition 3.0.2 en utilisant le principe du maximum. Enfin nous montrerons le lemme 3.0.1.

3.1 Explicitation de l'opérateur L

Calculons explicitement l'opérateur L pour une surface quelconque S. Notons :

- ∇ la connexion de Levi-Civita de M ;
- R son tenseur de courbure ;
- $\vec{n}$ le vecteur normal à S ;
- W l'endomorphisme de TS défini par $W(u) = R(\vec{n}, u)\vec{n}$;
- κ la courbure extrinsèque de S ;
- B l'opérateur deuxième forme fondamentale de S défini par $B(u) = \nabla_u \vec{n}$;
- $\mathrm{Hess}(f)$ la hessienne d'une fonction f.

Proposition 3.1.1 *Nous avons*

$$L(f) = \kappa(-\mathrm{trace}(\mathrm{Hess}(f)\circ B^{-1}) + f\,\mathrm{trace}(W\circ B^{-1}) - f\,\mathrm{trace}(B)).$$

Démonstration. Donnons tout d'abord le cadre de ce calcul. Considérons la famille d'immersions s_t^f comme une application s^f de $S \times \mathbb{R}$ dans M. Identifions S à $S \times \{0\}$. Sur le fibré E induit de TM par s^f, notons par abus de langage ∇ la connexion induite de la connexion de Levi-Civita de M. Nous pouvons maintenant voir $Ts^f = F$, comme une section de $TS^* \otimes E$. Bien sûr $d^\nabla F = 0$ et $F(\frac{\partial}{\partial t}) = f\vec{n}$ le long de $S = S \times \{0\}$.

Tout champ de vecteurs u sur S donne canoniquement naissance à un champ de vecteurs noté également u sur $S\times\mathbb{R}$ qui commute avec le champ $\frac{\partial}{\partial t}$. Considérons également $\vec{n}_t$ le champ de vecteurs normal à $S_t = s_t^f(S)$, et $\vec{n}$ la section de E qui s'en déduit. Par abus de notation, si v est une section de ce fibré E, nous noterons

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0}(x) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} v)(x, 0).$$

Soit A, la section de $TS^* \otimes E$ définie par

$$A(u) = \nabla_u \vec{n}.$$

Un premier calcul donne

$$\frac{dF(u)}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla_u(f\vec{n}) = df(u).\vec{n} + fA(u).$$

Notons $\langle,\rangle$ la métrique de M et celle qui s'en déduit sur E. Nous avons

$$0 = \frac{d\langle\vec{n}, F(u)\rangle}{dt}\Big|_{t=0} = \left\langle \frac{d\vec{n}}{dt}\Big|_{t=0}, F(u)\right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{dF(u)}{dt}\Big|_{t=0}\right\rangle.$$

Nous en tirons facilement

$$\frac{d\vec{n}}{dt}\Big|_{t=0} = F(-\nabla f).$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{dA(u)}{dt}\Big|_{t=0} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_u\vec{n}\\ &= R\left(\frac{\partial}{\partial t}, u\right)\vec{n} + \nabla_u\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\vec{n}\\ &= fR(\vec{n}, u)\vec{n} - \nabla_u\nabla f.\end{aligned}$$

Soit g la métrique induite sur TS par F, c'est-à-dire définie par

$$g(u, u) = \langle F(u), F(u)\rangle,$$

et B l'endomorphisme de TS défini par

$$g(B(u), u) = \langle A(u), u\rangle.$$

Rappelons que nous voulons calculer

$$L(f) = \frac{d\det(B)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Pour cela utilisons le fait que

$$\frac{dg(u, u)}{dt}\Big|_{t=0} = 2f\langle A(u), F(u)\rangle = 2fg(B(u), u).$$

En dérivant l'équation $g(B(u), u) = \langle A(u), u\rangle$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&g\left(\frac{dB(u)}{dt}\Big|_{t=0}, u\right)\\ &= \left\langle\frac{dA(u)}{dt}\Big|_{t=0}, u\right\rangle - fg(B(u), B(u))\\ &= f\langle R(\vec{n}, u)\vec{n}, u\rangle - \langle\nabla_u\nabla f, u\rangle - fg(B(u), B(u)).\end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{dB}{dt}\Big|_{t=0} = fR(\vec{n}, u)\vec{n} - \mathrm{Hess}(f) - fB^2.$$

La formule classique

$$\frac{d\log(\det(B))}{dt}\Big|_{t=0} = \mathrm{trace}\left(\frac{dB}{dt}\Big|_{t=0} \circ B^{-1}\right),$$

nous donne la proposition.◇

On déduit des formules démontrées dans ce paragraphe les conséquences suivantes :

Corollaire 3.1.2 *Supposons que M ait une courbure plus petite que $-c$. Les sphères et les horosphères de M ont alors une courbure plus grande que c. De plus, si S est une surface convexe, pour tout $k < c$, il existe R indépendant de S tel que la surface $S_R = \exp(R\vec{n}(S))$ ait ses courbures principales plus grandes que $k^{1/2}$ et en particulier sa courbure plus grande que k.*

3.2 Démonstration de la proposition 3.0.2

Si κ est strictement positif, B est défini positif. En particulier, L est elliptique d'indice nul. Pour conclure, il suffit de démontrer que L est injectif. La proposition suivante et le principe du maximum permettent de conclure :

Proposition 3.2.1 *Le terme de degré zéro de la formule donnée dans la proposition 3.1.1 est strictement positif :*

$$J = \mathrm{trace}(W \circ B^{-1}) - \mathrm{trace}(B) > 0.$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2) la base de vecteurs propres de B associée aux valeurs propres λ_1 et λ_2. Soit k_i la courbure du plan engendré par $\vec{n}$ et e_i. On a

$$\begin{aligned} J &= -\frac{k_1}{\lambda_1} - \frac{k_2}{\lambda_2} - \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= 1 - \lambda_2 \left(1 + \frac{k_1}{\kappa}\right) - \lambda_1 \left(1 + \frac{k_2}{\kappa}\right) > 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

3.3 Démonstration du lemme 3.0.1

Procédons par étapes et intéressons-nous tout d'abord au problème infinitésimal. Une variation infinitésimale de S^t est un champ de vecteurs ζ le long de S^t qui s'écrit sous la forme

$$\zeta = f\vec{n} + u,$$

où $u \in TS$, $f \in C^\infty(S^t)$, et qui vérifie la condition au bord

$$\forall x \in \partial S, \quad \zeta(x) = \frac{d}{dt} c_t(x).$$

Ici, nous voyons abusivement c_t comme une famille d'immersions de $\partial\Sigma$ dans M.

Pour une surface de courbure extrinsèque κ, la variation infiniésimale de courbure extrinsèque associée à une telle variation ζ est

$$L(f) + d\kappa(u),$$

où L est l'opérateur de la proposition 3.0.2. Pour résoudre infinitésimalement notre problème, nous devons donc montrer qu'il existe une unique fonction f telle que

$$L(f) = 0,$$

avec la condition au bord

$$\forall x \in \partial S, \quad f(x) = \left\langle \frac{d}{dt} c_t(x), \vec{n} \right\rangle.$$

L'existence et l'unicité de f découlent de la proposition 3.0.2. Nous pouvons maintenant utiliser le théorème d'inversion locale pour les opérateurs elliptiques pour résoudre notre problème localement, c'est-à-dire construire au voisinage de 0 une unique famille $t \mapsto \Sigma^t$, continue en t, de k-surfaces vérifiant $\Sigma^0 = \Sigma$ et $\partial\Sigma^t = c_t$.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de la deuxième partie du lemme 3.0.1. Le lemme 2.2.2 nous permet de montrer que Σ^t est lentille pour S^t.

Enfin $S^t \subset S^0$ pour $t \geq 0$, la proposition 3.2.1 assure donc que la fonction f décrivant la variation infinitésimale de Σ est positive : dans le cas d'une surface lentille nous avons $\langle \frac{d}{dt} c^t(x), \vec{n} \rangle > 0$. Ainsi Σ domine Σ^t pour t positif et suffisamment petit.

4 Théorème de compacité

Nous allons dans cette section énoncer et démontrer le théorème de compacité qui nous sera utile par la suite.

Théorème 4.0.1 *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure plus petite que $-c < 0$. Soit $\{(S_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de surfaces convexes immergées à courbure extrinsèque plus grande que c, convergeant vers (S_∞, x_∞). Supposons que cette suite est à géométrie bornée et n'est pas de type horosphérique.*

Soit k appartenant à l'intervalle $]0, c[$. Soit $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels convergeant vers k. Pour tout n, soit Σ_n une k_n-surface lentille pour S_n. Notons $y_n \in \Sigma_n$ le pied de x_n.

Nous avons alors les trois possibilités suivantes :

(i) S_∞ n'est pas tubulaire à l'infini ; alors, après extraction d'une sous-suite, la suite de surfaces pointées $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface lentille non dégénérée pour S_∞ ;

(ii) S_∞ n'est pas tubulaire, tout en étant tubulaire à l'infini ; alors après extraction d'une sous-suite, la suite de surfaces poinées $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface lentille éventuellement dégénérée pour S_∞ ;

(iii) S_∞ est tubulaire pour une géodésique γ ; alors la suite de surfaces pointées $\{(\vec{n}(\Sigma_n), \vec{n}(y_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge après extraction d'une sous-suite vers le tube de γ.

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats principaux de [3] et leurs conséquences sur ce que nous appellerons le problème de Dirichlet pour les k-surfaces. Ensuite, nous appliquerons ces résultats pour démontrer le théorème 4.0.1.

4.1 Rappels sur les problèmes de Monge-Ampère

4.1.1 Définitions

Dans [3], nous avons étudié une classe de problèmes, appelée de Monge-Ampère. Les k-surfaces en sont un exemple. De plus, nous y avons défini une classe de problèmes à bord convexe. Cette dernière classe correspond dans notre contexte au problème de Dirichlet dont nous allons maintenant donner la définition.

Un *problème de Dirichlet* pour les k-surfaces est la donnée d'un quadruplet (M, S, c, x), où c est une courbe plongée compléte, tracée sur une surface plongée S localement convexe, incluse dans une variété riemannienne M. Le point $x \in M$ sert seulement à donner un sens à la notion de convergence pour une suite de problèmes de Dirichlet.

Une *solution du problème* de Dirichlet est une k-surface Σ complète connexe immergée passant par x telle que :

- le $\partial\Sigma$ de Σ est inclus dans c ;
- Σ est intérieure à S le long de c.

Une *solution dégénérée* est une k-surface Σ telle que

- son bord $\partial\Sigma$ est complet et inclus dans c ;
- Σ est intérieure à S le long de c ;
- la surface $\vec{n}(\Sigma) \subset UM$ est complète, sans que Σ le soit.

Remarquons que dans ce cas, toute surface équidistante de Σ est complète.

Pour des raisons techniques, il nous faut introduire la définition suivante : si U est un ouvert de M contenant x, le problème $(U, S \cap U, c \cap U, x)$ sera appelé *problème restreint* à U. Alors, la *restriction à U d'une solution* Σ définie sur M est la composante connexe de $\Sigma \cap U$ contenant x.

4.1.2 Remarques

(i) Un tube est une surface rideau au sens de [3] .
(ii) Une k-surface Σ lentille pour S est un cas particulier de solution du problème de Dirichlet défini par S et ∂S.
(iii) Si la courbure moyenne d'une solution est bornée, alors la solution est non dégénérée.
(iv) Nous serons amener à considérer des problèmes de Dirichlet (M, S, c, x) et des solutions Σ pour lesquels S, c ou $\partial\Sigma$ sont vides.

4.1.3 Compacité

Soit $\varepsilon > 0$ et $\Delta = (M, S, c, x)$ un problème de Dirichlet. Notons Δ^ε le problème restreint à la boule ouverte de centre x de rayon ε. De même, Σ^ε désignera la restriction d'une solution Σ à cette boule.

Le résultat principal de l'article [3] se traduit dans le cas des k-surfaces par :

Théorème 4.1.1 *Soit* $\{\Delta_n = (M_n, S_n, c_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de problèmes de Dirichlet convergeant* C^∞ *sur tout compact vers un problème de Dirichlet*

$$\Delta_\infty = (M_\infty, S_\infty, c_\infty, x_\infty).$$

Soit $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels convergeant vers* $k \in]0, c[$. *Soit* $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* k_n*-solutions, éventuellement dégénérées de* $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Il existe alors* $\varepsilon > 0$, *pour lequel nous avons l'alternative suivante, après extraction d'une sous-suite :*

(a) soit $\{\Sigma_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une* k*-solution, éventuellement dégenérée, du problème de Dirichlet* $\Delta_\infty^\varepsilon$ *;*
(b) soit $\{\vec{n}(\Sigma_n^\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un tube. Dans ce cas, à partir d'un certain rang* $\partial\Sigma_n^\varepsilon = \emptyset$.

Les corollaires suivants de ce théorème sont particuliers à la courbure négative :

Corollaire 4.1.2 *Soit* $\{\Delta_n = (M_n, S_n, c_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de problèmes de Dirichlet convergeant* C^∞ *sur tout compact vers un problème de Dirichlet*

$$\Delta_\infty = (M_\infty, S_\infty, c_\infty, x_\infty).$$

Soit $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels convergeant vers* $k \in]0, c[$. *Pour tout* n, *soit* Σ_n *une* k_n*-solution, éventuellement dégénérée de* Δ_n. *Alors la suite de surfaces*

$$W_n = \{\exp(\vec{n}(s)), \quad s \in \Sigma_n\},$$

pointées en $\exp(\vec{n}(x_n))$, *converge* C^∞ *après extraction d'une sous-suite.*

Démonstration. En effet, la restriction de l'exponentielle à un tube est une immersion à valeurs dans M.$\diamond$

Corollaire 4.1.3 *Soit* $\{(f_n, S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de surfaces immergées localement convexes convergeant* C^∞ *sur tout compact vers une surface immergée* (f_0, S). *Soit* $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions positives définies sur* S *dont les graphes sont des* k*-surfaces. On suppose que pour tout* $y \in S$, *la suite* $\{l_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Alors après extraction d'une sous-suite, la suite de fonctions* $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* C^∞ *sur tout compact de* S *vers une fonction dont le graphe est une* k*-surface.*

Démonstration. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de compacité 4.1.1 pour la suite de problèmes de Dirichlet (à bord vide) définie dans les bouts des surfaces $f_n(S)$.$\diamond$

4.2 Une première majoration

A partir de maintenant, soit $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de surfaces immergées pointées localement convexes à courbure extrinsèque plus grande que c, convergeant vers la surface S_∞ à géométrie bornée. Soit $k\in]0,c[$. Soit $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une k_n-surface lentille pour $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit λ_n la fonction associée définie sur N_{Σ_n}, l'ensemble des vecteurs normaux étendus à Σ_n.

Montrons tout d'abord :

Proposition 4.2.1 *Si la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique, alors la suite de fonctions $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par une constante.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : soit Λ_n la borne supérieure de λ_n, supposons que $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers l'infini. Il existe alors deux suites de points $\{w_n\in S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\in N_{\Sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, telles que :

(i) $w_n=\exp(\lambda_n(v_n)v_n)$;
(ii) la suite $\{\lambda_n(v_n)-\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers zéro.

Notons S_n^R la composante connexe de l'intersection de S_n avec la boule ouverte de M de centre w_n et de rayon R. Notons U_n le champ de vecteurs focal le long de S_n.

La suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est à géométrie bornée. En extrayant au besoin une sous-suite, nous pouvons donc supposer que $\{S_n^R, w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Le lemme 2.2.1 affirme que les fonctions inverses μ_n définies sur S_n sont 2-lipschtziennes. Nous pouvons donc extraire une sous-suite telle que la suite de fonctions $\{\mu_n-\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction 2-lipschtzienne négative g. En particulier, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'infini sur S_n^R.

Nous en tirons deux conséquences :

(a) notons d_i désigne la distance riemannienne dans S_n ; pour tout L, il existe n_0, tel que si $n\geq n_0$, alors $d_i(y_n,\partial S_n^R)\geq L$; en effet, la restriction de μ_n au bord de Σ_n est nulle ;
(b) à partir d'un certain rang, pour tout $t\in]0,2R[$ et $z,\ w\in S_n^R$, on a $d(\exp(-tU_n(z),-tU_n(w))\leq d(z,w)$.

Rappelons que dans une variété à courbure négative, une hypersurface sans bord localement convexe et complète respectivement à une boule, est plongée et borde un convexe. En utilisant (a) et ce rappel, nous en déduisons que $\{S_n,v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers une hypersurface plongée pointée globalement convexe (H,v).

Extrayons une sous-suite de telle sorte que $\{U_n(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U. En utilisant (b), nous déduisons que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers le champ de gradient de la fonction de Buseman f associée à $\exp(-\infty U)$. Ce champ va être transverse à H.

Par construction, $f\big|_H-f(v)=g-g(v)$. Nous en déduisons que $f\big|_H-f(v)\leq g(v)=0$. La surface H est de donc de type horosphérique. Ceci contredit l'hypothèse.$\diamond$

4.3 Surfaces tubulaires et tubes

Introduisons une définition intermédiaire. Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de points de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notons alors $y_n \in \Sigma_n$ le point pied associé à $w_n = \exp(\lambda_n(u_n)u_n)$ (*cf* 2.2.2). Soit ε le nombre réel fourni par le théorème 4.1.1 de compacité sur les problèmes de Monge-Ampère. Soit Σ_n^ε la composante connexe de $\Sigma_n \cap B(y_n, \varepsilon)$.

Nous dirons que la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est *critique*, si la suite $\{\vec{n}(\Sigma_n^\varepsilon), u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tube autour d'une géodésique après extraction éventuelle d'une sous-suite ; c'est-à-dire si nous sommes dans le deuxième cas de l'alternative du théorème 4.1.1. Par abus de langage, nous dirons alors que la suite critique *converge* vers $\vec{n}(\gamma)$. D'après le théorème cité, à partir d'un certain rang, y_n est un point intérieur à S_n et u_n est le vecteur normal à y_n.

Nous démontrerons deux propositions. Nous avons tout d'abord :

Proposition 4.3.1 *Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique et s'il existe une suite critique, alors la surface S_∞ est tubulaire.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite critique. Soit y_n le point pied de w_n dans Σ_n. Posons $u_n = \vec{n}(y_n) \in \vec{n}(\Sigma_n)$. Par définition, après extraction d'une sous-suite, la suite de variétés immergées pointées $\{\vec{n}(\Sigma_n), u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un revêtement $\overline{\vec{n}(\gamma)}$ d'un tube pointé $\vec{n}(\gamma)$. Soit γ la géodésique associée à ce tube, et d_γ la fonction distance à cette géodésique.

Comme $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite de fonctions inverses $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers la fonction d_γ. Ainsi d'après la proposition 4.2.1, la fonction d_γ restreinte à S_∞ est bornée. Par construction, le champ de gradient de d_γ est dirigé vers l'intérieur de S_∞. Tout ceci nous dit que S_∞ est tubulaire.$\diamond$

Réciproquement, nous avons :

Proposition 4.3.2 *Supposons que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est à géométrie bornée et n'est pas de type horosphérique. Si S_∞ est tubulaire pour une géodésique γ, alors toute suite convergente de points de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est critique et converge vers $\vec{n}(\gamma)$.*

Démonstration. Soit γ la géodésique associée à S_∞ et μ la fonction distance à cette géodésique. Raisonnons par l'absurde. Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de points non critique. Notons $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in \Sigma_n$, la suite de points pieds associées. En utilisant le théorème 4.1.1, nous pouvons extraire une sous-suite telle que $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface Σ_∞, éventuellement dégénérée.

La surface S_∞ est tubulaire. La proposition 4.2.1 entraîne alors que μ est bornée sur Σ_∞. Soit Λ sa borne supérieure.

Soit $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Σ_∞ telle que $\mu(s_n)$ tende vers Λ. La variété M étant à géométrie bornée ainsi que la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous pouvons extraire une sous-suite telle que

$$\{\Delta_n = (M, s_n, \partial S_n, S_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

converge vers $\Delta_0 = (M_0, s_0, \partial S_0, S_0)$.

Appliquons le théorème de compacité 4.1.1 à la suite $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que nous voyons comme solutions des problèmes de Dirichlet Δ_n.

Nous avons donc deux possibilités :

(a) soit $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface, éventuellement dégénérée ;
(b) soit $\{(\vec{n}(\Sigma_\infty), \vec{n}(s_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tube $\vec{n}(\bar{\gamma})$.

Eliminons d'abord (b). Puisque μ est bornée sur Σ_∞, $\bar{\gamma}$ et γ sont à distance bornée l'une de l'autre. Ces deux géodésiques sont donc confondues. Autrement dit, Λ est nulle. Ainsi, la restriction de μ à Σ_∞ est nulle. Ceci est impossible pour une k-surface.

Eliminons maintenant (a). Supposons donc que $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface $(\bar{\Sigma}_\infty, s_\infty)$, peut-être dégénérée. Par construction, μ restreinte à $\bar{\Sigma}_\infty$ atteint son maximum en s_∞. Ceci signifie que $\bar{\Sigma}_\infty$ est intérieurement tangente à la surface convexe G_Λ à distance constante Λ de γ. Le principe du maximum géométrique fournit la contradiction : G_Λ est à courbure extrinsèque strictement plus grande que c.

Nous venons de montrer que toute suite convergente est critique. Par ailleurs, supposons qu'une suite critique converge vers $\vec{n}(\bar{\gamma})$. La fonction μ étant bornée, les géodésiques $\bar{\gamma}$ et γ sont confondues.$\diamond$

4.3.1 *Démonstration du théorème 4.0.1*

Soit $\{(S_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de surfaces pointées à courbure supérieure à c. Supposons que cette suite converge vers (S_∞, x_∞). Pour tout n, soit Σ_n une k-surface lentille pour S_n et y_n le pied de x_n. On suppose que la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique et est à géométrie bornée.

Si S_∞ est tubulaire, la proposition 4.3.2 donne précisément le cas (iii) de 4.0.1.

Supposons maintenant que S_∞ n'est pas tubulaire. D'après la proposition 4.3.1, aucune suite convergente de points de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est critique. Le théorème 4.1.1 entraîne que la suite $\{\Sigma_n, y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution (éventuellement dégénérée) Σ_∞ du problème de Dirichlet pour S_∞. Il reste à montrer que Σ_∞ est lentille pour S_∞.

Notons comme précédemment $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions associées convergeant vers λ_∞. Notons u le vecteur normal intérieur à ∂S_∞ dans S_∞ et $\vec{n}$ le champ de vecteurs normal extérieur à Σ_∞. Pour conclure il suffit de démontrer :

(a) λ_∞ est strictement positive sur S_∞;
(b) $\langle u, \vec{n}\rangle > 0$ le long de ∂S_∞.

La démonstration de (a) est simple : les fonctions λ_n sont positives ou nulles et il en est donc de même pour λ_∞. Si maintenant λ_∞ est nulle en un point intérieur à S_∞, nous en déduisons que Σ_∞ est tangente intérieurement à S_∞ en ce point. Ceci est impossible à cause des conditions de courbure et du principe du maximum géométrique 2.5.1.

Démontrons (b). Par passage à la limite, $\langle u, \vec{n} \rangle$ est positif ou nul le long de ∂S_∞. Si en un point z, nous avons $\langle u, \vec{n} \rangle = 0$, alors les deux surfaces sont tangentes en z. Elles ne peuvent être tangentes extérieurement : si deux surfaces convexes sont tangentes extérieurement en un point, alors au moins au voisinage de ce point leur intersection est réduite à ce point. Rappelons maintenant que chaque surface S_n est un graphe au-dessus d'un ensemble fermé du normal étendu à Σ_n. Ceci va être également vrai à la limite ; puisqu'enfin en z les surfaces sont tangentes, Σ_∞ est tangente intérieurement à S_∞. Ceci est impossible à cause des hypothèses de courbure et du principe du maximum géométrique.

Enfin, les propositions 4.3.1 et 4.3.2 montrent que S_∞ est tubulaire à l'infini, si et seulement si il existe une suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{M, w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\{\Sigma_\infty, w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est critique. En particulier, si S_∞ n'est pas tubulaire à l'infini alors la courbure moyenne des Σ_n est uniformément bornée.$\diamond$

5 Problème de Plateau pour les disques

La démonstration du lemme de Morse va se faire par étapes. La première d'entre elles est la résolution du problème de Plateau pour les disques. Le but de cette section est de démontrer un résultat plus précis :

Proposition 5.0.1 *Soit S un disque compact immergé à courbure strictement plus grande que c, dans une variété d'Hadamard à courbure plus petite que $-c$. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k-surface Σ lentille pour S.*

De plus, si $c > k_1 \geq k > 0$, si Σ_1 est la k_1-surface lentille pour un disque $S_1 \subset S$, alors Σ domine Σ_1 au sens de la définition 2.6.

Dans toute cette section et la suivante, M est une variété d'Hadamard de dimension 3, à géométrie bornée et à courbure plus petite que $-c$. De même, k est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, c[$.

Nous allons utiliser une méthode de déformation.

5.1 *Déformation contractante*

Notons f_1 l'immersion du disque S dans M. Identifions arbitrairement ce disque à la boule unité de $\mathbb{R}^2$. Soit $\{f_t\}_{t\in]0,1]}$, la famille d'immersions de S dans M définie par $f_t(x) = f_1(tx)$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 5.1.1 *Soit Σ une k-surface lentille pour f_1. Soit $k(t)$ une fonction décroissante à valeurs dans $]0, c[$ telle que $k(1) = k$. Il existe alors une famille continue de surfaces $\{\Sigma_t\}_{t\in]0,1]}$ telle que*

- *$\Sigma_1 = \Sigma$;*
- *pour tout t, Σ_t est une $k(t)$-surface lentille pour $f_t(S)$;*
- *quand t tend vers 0, Σ_t tend vers $f_1(0)$ au sens de la topologie de Hausdorff pour les compacts.*

Démonstration. La proposition 3.0.1 permet de construire pour t dans un intervalle $]a, 1]$, une $k(t)$-surface Σ_t lentille pour $f_t(S)$. Cette famille est continue et vérifie $\Sigma_1 = \Sigma$. D'après la deuxième partie de cette même assertion, si $t > s$, alors Σ_s domine Σ_t.

Pour achever la démonstration de la première partie de la proposition 5.1.1, il reste à montrer : pour toute suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a par valeurs supérieures, la suite $\{\Sigma_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface lentille pour $f(S_a)$.

D'après le théorème de compacité 4.0.1, la suite $\{\Sigma_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface, après extraction éventuelle d'une sous-suite.

Par ailleurs, soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\bar{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers a par valeurs supérieures, telles que les suites $\{\Sigma_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\Sigma_{\bar{a}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers Σ_a et $\Sigma_{\bar{a}}$. Nous en déduisons que Σ_a domine $\Sigma_{\bar{a}}$ et réciproquement. Ainsi $\Sigma_a = \Sigma_{\bar{a}}$, ce qui achève de démontrer que si t tend vers a par valeurs inférieures, Σ_t converge.

Ce dernier point termine la démonstration de la première partie de notre proposition.

La deuxième partie de la proposition découle immédiatement de la proposition 2.5.2 qui affirme : si S est une surface compacte dont le bord ∂S est inclus dans une boule B, alors toute k-surface Σ, solution du problème de Dirichlet pour S, est incluse dans la boule B.$\diamond$

5.2 Unicité

Nous pouvons maintenant montrer :

Proposition 5.2.1 *Soit S un disque compact immergé à courbure strictement plus grande que c. Soit k_1 et k tels que $0 < k \leq k_1 < c$. Si Σ est une k-surface lentille pour S, et Σ_1 une k_1-surface lentille pour $S_1 \subset S$, alors Σ domine Σ_1.*

En particulier, il existe au plus une k-surface lentille pour S.

Démonstration. Considérons comme dans le paragraphe précédent, f_1 l'immersion du disque S_1 et $\{f_t\}$ la famille contractante d'immersions associée ; soit de plus $k(t)$ une fonction strictement décroissante à valeurs dans $]0, c[$, telle que $k_1 = k(1)$.

Soit Σ_1 comme dans l'énoncé ; d'après la proposition 5.1.1, il existe une famille de k_t-surfaces Σ_t lentilles pour $f_t(S)$. Pour montrer que Σ domine Σ_1, il suffit de montrer que Σ domine Σ_t pour tout t.

En vertu du lemme de domination 2.6.1 et du principe du maximum géométrique 2.5.1, il suffit en fait de montrer qu'il existe t, tel que Σ domine strictement Σ_t. Ceci découle de la dernière partie de la proposition 5.1.1 : clairement, puisque Σ_t converge vers un point quand t tend vers 0, Σ domine Σ_t pour t suffisamment petit.$\diamond$

5.3 Existence

Pour achever la démonstration de la proposition 5.0.1, il faut montrer l'existence d'une surface lentille pour le disque immergé S. Nous allons pour cela construire une nouvelle famille de déformations de ce disque.

Ce disque étant compact, il est inclus dans une boule B. Perturbons la métrique de M dans un petit ouvert U n'intersectant pas cette boule B de façon à ce que la nouvelle métrique soit toujours à courbure plus petite que $-c$, et que de plus elle soit à courbure constante dans une boule $B_0 \subset U$. Ceci est toujours possible.

Il suffit maintenant de montrer l'existence d'une surface lentille pour la métrique perturbée. En effet, d'après la proposition 2.5.2, cette surface lentille sera incluse dans B : elle sera donc lentille pour la métrique originelle.

Montrons le lemme technique suivant :

Lemme 5.3.1 *Soit S un disque immergé à courbure extrinsèque plus grande que c. Il existe alors une déformation continue $\{S_t\}_{t\in[0,1]}$, telle que $S_0 = S$ et vérifiant*

(i) pour tout t, la courbure extrinsèque de f_t est plus grande que c ;
(ii) $S_1 \subset B_0$ est à courbure constante, et son bord est le bord d'un disque tracé dans un plan totalement géodésique de B_0.

Démonstration. Donnons une esquisse de la construction de cette déformation. Utilisons tout d'abord la déformation contractante pour déformer notre disque en un tout petit disque inclus dans le bord d'une surface convexe. Ce petit disque D_2 va être un graphe au-dessus d'un disque topologique D_3 sur une sphère S de petit rayon. Nous déformons ensuite D_2 en D_3 : si le rayon de la sphère est suffisamment petit de même que le diamètre de D_2, les surfaces intermédiaires vont avoir une courbure plus grande que c. Ensuite nous déformons D_3 en un hémisphère. Enfin, nous déplaçons la sphère S de telle sorte quelle soit incluse dans B_0 et notre manipulation est terminée.$\diamond$

Utilisons la déformation produite par ce dernier lemme pour construire une k-surface lentille pour S.

En utilisant les équidistantes aux plans totalement géodésiques dans l'espace hyperbolique, on construit tout d'abord une k-surface lentille pour S_1.

Le lemme 3.0.1 permet de construire une famille continue de k-surfaces $\{\Sigma_t\}$ lentilles pour $\{S_t\}$, pour t dans un intervalle maximal $]a, 1]$. Le théorème de compacité 4.0.1 et l'unicité 5.2.1, entraînent que Σ_t converge lorsque t tend vers a ; ainsi $a = 0$ et la démonstration est terminée.

6 Démonstration du lemme de Morse pour les surfaces convexes

Le but de cette section est la démonstration du lemme de Morse pour les surfaces convexes dont nous rappelons l'énoncé.

Lemme 6.0.1 *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure strictement plus petite que $-c < 0$. Soit S une surface localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c, à géométrie bornée. On suppose que S n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire, ni compacte sans bord. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k-surface lentille, éventuellement dégénérée, pour S.*

De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, cette k-surface est non dégénérée.

Il suffit de démontrer ce résultat quand S est un disque topologique : dans le cas général, on passe au revêtement universel et on utilise l'unicité pour conclure.

Nous supposerons dans toute la suite de cette section que M est une variété d'Hadamard à géométrie bornée de dimension 3 et à courbure plus petite que $-c$. De même, S est un disque localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c, à géométrie bornée et qui n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire.

Le lemme de Morse est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes 6.1.1 et 6.2.1, traitant successivement de l'existence et de l'unicité d'une k-surface lentille pour S.

6.1 Existence

Nous allons montrer la proposition :

Proposition 6.1.1 *Il existe une k-surface Σ lentille pour S, telle que pour toute k-surface $\bar{\Sigma}$ lentille pour S, $\bar{\Sigma}$ domine Σ. De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, Σ est non dégénérée.*

Démonstration. Soit $\{S_t\}_{t\in]0,1]}$ une famille continue de disques inclus dans S vérifiant :

(i) $S_1 = S$;
(ii) S_t est compacte à bord pour $t \neq 1$;
(iii) $S_t \subset S_s$ si $t \leq s$;
(iv) S_t converge vers un point x_0 quand t tend vers 0.

La proposition 5.0.1 permet de construire une famille $\{\Sigma_t\}_{t\in]0,1]}$ de k-surfaces lentilles pour S_t. Par ailleurs, d'après le théorème de compacité 4.1.1, on peut extraire une suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1, telle que $\{\Sigma_{t_n}, y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini vers une k-surface Σ poinée lentille pour S. Ici, y_n désigne le pied de x_0 dans Σ_{t_n}.

Si maintenant $\overline{\Sigma}$ est une autre surface lentille pour S, il est clair que $\overline{\Sigma}$ domine Σ_t pour t petit. Ensuite le lemme 2.6.1 et le principe du maximum 2.5.1 assure que $\overline{\Sigma}$ domine strictement Σ_t pour tout t. Ainsi $\overline{\Sigma}$ domine Σ.$\diamond$

6.2 *Unicité*

L'unicité d'une k-surface lentille pour S découle immédiatement de la proposition précédente 6.1.1 et de l'assertion suivante :

Proposition 6.2.1 *Si Σ_1 et Σ_2 sont deux k-surfaces lentilles pour S telles que Σ_1 domine Σ_2, alors $\Sigma_1 = \Sigma_2$.*

Démonstration. Soit N_{Σ_1} le fibré normal étendu à Σ_1. Soit F l'immersion naturelle de $M_1 = N_{\Sigma_1} \times \mathbb{R}^+$ dans M qui à $(\vec{n}, t)$ associe $\exp(t\vec{n})$. Notons μ la fonction de M_1 qui a $(\vec{n}, t)$ associe t, G_λ la surface localement convexe de niveau λ pour la fonction μ, et enfin π la projection de M_1 dans Σ_1.

Par définition, puisque Σ_1 domine Σ_2, nous pouvons trouver une immersion i de Σ_2 dans M_1, telle que $F \circ i$ est l'immersion initiale de Σ_2.

Confondons Σ_2 et son image dans M_1. Notre but est de montrer que μ restreinte à Σ_2 est nulle.

Supposons donc le contraire. Soit Λ la borne supérieure strictement positive de μ sur Σ_2. Remarquons que Λ est fini puisque Σ_2 est entre Σ_1 et S, et que S est un graphe borné au-dessus de Σ_1. Soit $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Σ_2, telle que $\{\mu(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Λ.

Extrayons de $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que la suite $\{(M, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une variété (M_∞, w_∞). Soit π la projection naturelle de M_1 dans Σ_1. Soit $z_n = \pi \circ i(w_n)$. Utilisons le théorème de compacité 4.1.1 pour extraire de la suite $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que les deux suites $\{(\Sigma_1, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{(\Sigma_2, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. En ce qui concerne $\{(\Sigma_1, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons comme toujours deux possibilités :

– soit $\{(\Sigma_1, z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface ;
– soit $\{(\vec{n}(\Sigma_1), \vec{n}(z_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tube.

Néanmoins, dans ces deux cas, puisque Λ est strictement positif, la suite de surfaces convexes pointées

$$\{(G_\Lambda, \exp(\Lambda\vec{n}(z_n))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

converge vers une surface strictement convexe lisse à courbure strictement plus grande que k.

Examinons maintenant $\{(\Sigma_2, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons aussi deux cas.

– Soit $\{\Sigma_2, w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface ; d'après notre construction cette k-surface est alors tangente intérieurement à G_Λ ; ceci contredit le principe du maximum géométrique 2.5.1 ;
– Soit $\{\vec{n}(\Sigma_2), \vec{n}(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tube $\vec{n}(\gamma)$; la géodésique γ est alors tangente intérieurement à G_Λ qui est strictement convexe ; ceci est impossible.

Ainsi Λ est nul, et la démonstration est terminée.$\diamond$

7 Problèmes asymptotiques

A partir de maintenant et dans toute la suite,
M est une variété d'Hadamard de dimension 3
à géométrie bornée et à courbure plus petite que -1.

Rappelons la définition du problème de Plateau asymptotique : soit $k \in]0,1[$; soit i un homéomorphisme local d'une surface S dans le bord à l'infini $\partial_\infty M$ de M ; nous cherchons une immersion f de S dans M, telle que :

(i) $f(S)$ est une k-surface sans bord (éventuellement dégénérée) ;
(ii) si N est l'application de Gauss-Minkowski de $f(S)$ dans $\partial_\infty M$ qui a un point associe le point à l'infini de la normale extérieure, alors

$$i = N \circ f.$$

Le couple (i, S) est la *donnée* de ce problème de Plateau asymptotique, ou plus simplement le *problème de Plateau asymptotique*. De même, le couple (f, S), ou plus simplement f, est une *solution* de ce problème. Pouréviter d'alourdir les notations, le nombre k est sous-entendu.

Nous allons résoudre ce problème tout d'abord dans le cas où S est le disque ouvert et où f s'étend en un plongement du disque fermé. Nous utiliserons ce résultat pour montrer l'unicité de la solution du problème de Plateau, puis l'existence dans les cas qui nous intéressent.

7.1 Disques plongés

Nous voulons montrer :

Lemme 7.1.1 *Soit D le disque ouvert. Soit f un plongement du disque fermé $\bar{D}$ dans $\partial_\infty M$. Alors il existe une unique k-surface plongée solution du problème de Plateau asymptotique (f, D).*

Démonstration. Soit S_0 le bord de l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus f(D)$. D'après M. Anderson [1], le bord à l'infini de S_0 coïncide avec $f(\overline{D} \setminus D)$.

Soit S_ε la surface à distance constante ε de S_0. D'après le corollaire 3.1.2, on peut choisir ε de telle sorte que la surface S_ε ait une courbure strictement plus grande que k. Remarquons que dans cette situation l'application de Gauss-Minkowski est un homéomorphisme de S_ε sur $f(D)$.

La k-surface Σ_k lentille pour S_ε produite par le lemme de Morse 6.0.1 est alors une solution du problème asymptotique. Il s'agit maintenant de montrer l'unicité de cette solution appelée pour le moment *canonique*. Soit $\bar{\Sigma}_k$ une autre solution. Nous voulons montrer que $\bar{\Sigma}_k = \Sigma_k$.

Raisonnons en deux temps.

(i) Les trois surfaces $\bar{\Sigma}_k$, Σ_k et S_0 bordent des convexes que nous noterons $\bar{O}_k$, O_k et U_0 respectivement. Nous voulons montrer que $\bar{\Sigma}_k$ se trouve à l'extérieur de Σ_k, c'est-à-dire que $O_k \subset \bar{O}_k$.

Bien sûr, nous avons

$$U_0 \subset \bar{O}_k, \quad U_0 \subset O_k.$$

Par construction, la surface Σ_k est coincée entre S_ε (c'est une surface lentille) et S_0 (elle borde un convexe). En particulier, lorsque k tend vers 0, Σ_k tend vers S_0. Notons F la surface convexe à distance ε_0 de $\bar{O}_k$; comme $U_0 \subset \bar{O}_k$, F se trouve à l'extérieur de O_k.

Soit k_0 strictement plus petit que k, choisi de telle sorte que la courbure de F soit strictement plus grande que k_0. Soit $t \mapsto k_t$ une fonction continue strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[k, k_0]$. Soit B_t, $t \in]0, 1]$, une suite exhaustive continue de compacts à bord lisse de F. Soit F_t la k_t-surface solution du problème de Plateau défini par B_t. Par le principe de maximum géométrique et un argument de déformation, F_t se trouve toujours à l'extérieur de O_k. Enfin, lorsque t tend vers 1, nous avons vu que F_t converge vers la solution du problème de Plateau pour F, c'est-à-dire $\bar{\Sigma}_k$.

Ainsi $\bar{\Sigma}_k$ se trouve à l'extérieur de Σ_k.

(ii) Maintenant, soit D^r le disque de rayon r inclus dans D, et $k(r)$ une fonction de r strictement décroissante. Notons alors S^r_ε la surface à distance constante ε du bord de l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus f(D^r)$. Soit $\Sigma^r_{k(r)}$ la $k(r)$-solution canonique du problème de Plateau asymptotique pour D^r. Les familles $\{S^r_\varepsilon\}_{r\in[0,1]}$ et $\{S^r_0\}_{r\in[0,1]}$ dépendent continûment de r, ainsi que les surfaces $\{\Sigma^r_{k(r)}\}_{r\in[0,1]}$.

Notre deuxième remarque est la suivante : pour r strictement plus petit que 1 $\bar{\Sigma}_k$ est à l'intérieur de $\Sigma^r_{k(r)}$. En effet, dans le cas contraire, il existe r tel que $\bar{\Sigma}_k$ est tangente intérieurement à $\Sigma^r_{k(r)}$. Ceci contredit le principe de maximum géométrique 2.5.1).

En faisant tendre r vers 1, on obtient bien que $\bar{\Sigma}_k = \Sigma_k$. $\diamond$

Plus tard, nous aurons besoin d'un lemme plus explicite. Ce lemme est l'analogue de la δ-hyperbolicité pour les géodésiques, ou du caractère fin des triangles en courbure strictement négative. Pour cela, notons $U^{(z,u)}_\alpha \subset M$ le cône d'angle α autour du vecteur u en z.

Remarquons le fait suivant : si $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, alors pour tout vecteur u, le point z appartient à l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus \partial_\infty U^{(z,u)}_\alpha$; en effet, z se trouve sur une géodésique évitant le cône ouvert. En particulier, si S est la k-solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty U^{(z,u)}_\alpha$, alors S est incluse dans $U^{(z,u)}_\alpha$.

Lemme 7.1.2 *Soit $0 \leq \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Soit z un point quelconque de M. Soit S la k-solution du problème de plateau asymptotique pour $\partial_\infty U^{(z,u)}_\alpha$. Il* *existe une constante* $\delta(\alpha,\beta)$ *ne dépendant que de* α,β *et* k *vérifiant : toute géodésique joignant* z *à un point de* $\partial_\infty U_\beta^{(y,u)}$ *coupe* S *à une distance plus petite que* $\delta(\alpha,\beta)$ *de* z.

Démonstration. Ce lemme découle immédiatement du résultat précédent et d'un argument de compacité.$\diamond$

7.2 Unicité

Nous voulons montrer :

Théorème 7.2.1 *Il existe au plus une solution du problème de Plateau asymptotique. De plus, soit* (f,S) *une* k*-surface (pas nécessairement complète). Soit* Σ *un ouvert de* S*, et* N *l'application de Gauss-Minkowski de* Σ *dans* $\partial_\infty M$*. Il existe alors une solution du problème de Plateau asymptotique* (N,Σ) *et cette solution est un graphe au-dessus de* (f,Σ).

Ce théorème découle immédiatement des trois propositions suivantes :

Proposition 7.2.2 *Soit* S *un disque. Soit* (f,S) *et* (g,S) *deux solutions du même problème de Plateau asymptotique. Il existe alors une troisième solution* (h,S) *de ce même problème de Plateau, tel que* (h,S) *est un graphe au-dessus de* $f(S)$ *et au-dessus de* $g(S)$.

Proposition 7.2.3 *Soit* Σ *une* k*-surface éventuellement dégénérée. Soit* Σ_1 *une* k*-surface qui est un graphe au-dessus de* Σ*. Alors* $\Sigma=\Sigma_1$.

L'unicité découle immédiatement de ces deux premières propositions, en passant au besoin au revêtement universel. La dernière partie du théorème provient du résultat suivant, qui va être l'outil fondamental dans la démonstration des deux premières propositions.

Proposition 7.2.4 *Soit* (f,S) *une* k*-surface éventuellement dégénérée. Soit* Σ *un ouvert de* S *et* N *l'application de Gauss-Minkowski de* Σ *dans* $\partial_\infty M$*. Il existe alors une solution du problème de Plateau asymptotique pour* (N,Σ) *et cette solution est un graphe au-dessus de* (f,Σ).

7.2.1 Démonstration de la proposition 7.2.4

Démonstration. Examinons tout d'abord le cas où Σ est un ouvert à bord lisse et relativement compact de S. Posons $\Sigma_0=f(\Sigma)$, et considérons Σ_r^0 la surface “à distance r” de Σ_0, c'est à dire, en notant $\vec{n}$ le champ de vecteurs normal extérieur à $f(S)$

$$\Sigma_r^0=\{\exp(r\vec{n}(s)),\ s\in\Sigma_0\}.$$

Soit ensuite Σ_r la solution du problème de Plateau pour Σ_r^0. La famille $\{\Sigma_r\}$ forme alors une famille continue. Notre but est de montrer que $\{\Sigma_r\}$

converge, quand r tend vers $+\infty$ vers une solution du problème de Plateau asymptotique (N, Σ). Nous allons raisonner par étapes.

(i) Montrons dans un premier temps que pour tout r, Σ_r est un graphe au-dessus de Σ_0.

Remarquons tout d'abord que ceci est vrai pour r petit. En effet, soit g la fonction correspondant à la variation infinitésimale de Σ_r en $r = 0$; cette fonction satisfait $L(g) = 0$ et $g\big|_{\partial\Sigma_0} > 0$, où L est l'opérateur elliptique défini en 3.0.1. Il suit de la proposition 3.2.1 et du principe de maximum que $g > 0$.

Montrons que pour tout r, Σ_r est un graphe au-dessus de Σ_0. Soit O l'ensemble des r tels que Σ_r est un graphe. L'ensemble O est évidemment un ouvert de $\mathbb{R}^+$. Soit $[0, r_0[$ la composante connexe de 0. Raisonnons par l'absurde et supposons que r_0 est fini.

Pour r plus petit que r_0, la surface Σ_r sépare le bout B de Σ_0 en deux composantes connexes l'une bornée et contenant Σ_0, et l'autre non bornée.

Par continuité, la surface Σ_{r_0} étant limite de graphes, la normale extérieure à Σ_{r_0} va toujours pointer vers une composante connexe de $B \setminus \Sigma_{r_0}$ ne contenant pas Σ_0. Par ailleurs, cette surface n'est pas un graphe. Il existe donc un point x de Σ_0 tel que la normale issue de x est tangente intérieurement à Σ_{r_0}. Soit y ce point de tangence. Par convexité locale de Σ_{r_0}, la normale extérieure en y est alors dirigée vers une composante connexe de $B \setminus \Sigma_{r_0}$ contenant x. C'est la contradiction.

(ii) Soit f_r la fonction dont Σ_r est le graphe. Montrons que pour tout $y \in \Sigma_0$, $f_r(y)$ est bornée.

Soit u le vecteur normal en y. Il existe un nombre α strictement positif et petit tel que le cône $U_\alpha^{(y,u)}$ est plongé dans le bout de Σ. Soit D la solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty U_\alpha^{y,u}$; puisque $D \subset U_\alpha^{(y,u)}$, D se plonge dans le bout de Σ. En particulier, la géodésique issue de y dans la direction de u coupe D au temps K. Par le principe du maximum géométrique la surface D va servir de barrière à la famille $\{\Sigma_r\}$. Nous en déduisons que $\forall r,\ f_r(y) \leq K$.

(iii) Nous pouvons maintenant montrer que la suite $\{\Sigma_r\}$ converge après extraction éventuelle d'une sous-suite vers une surface Σ_∞ telle que :

- Σ_∞ est le graphe d'une fonction λ définie sur Σ_0 ;
- la fonction λ est propre, *i.e.* tend vers l'infini lorsque l'on tend vers le bord de Σ_0.

Considérons la suite de fonctions $\{f_r\}$ définies au paragraphe précédent (ii). Pour chaque y de Σ_0 la suite $\{f_r(y)\}$ est croissante et bornée. Nous en déduisons immédiatement que cette suite de fonctions converge vers une fonction λ propre et de graphe convexe. Pour cela, il faut utiliser la classique compacité des convexes en courbure négative. Il reste à montrer que le graphe de la limite est une k-surface. Ceci découle du théorème de compacité 4.1.1 appliqué au problème de Dirichlet à bord vide défini sur le bout de Σ_0 et de la remarque suivante : la suite de surfaces $\{\Sigma_r\}$ est toujours transverse au champ de vecteurs normal à Σ_0 (ce sont des graphes), et en particulier, on ne peut pas voir apparaître de tubes à la limite.

(iv) Montrons enfin que la surface limite Σ_∞ est une solution du problème de Plateau asymptotique pour (N, Σ_0).

Notons B le bout de S. La surface Σ_∞ va séparer B en deux composantes connexes. Soit C la composante connexe de l'extérieur de Σ_∞. Par construction $\partial_\infty C = N(\Sigma_0)$. En particulier, nous en déduisons que l'application de Gauss-Minkowski de Σ_∞ est injective et à valeurs dans $N(\Sigma_0)$. Il reste à montrer que cette application est surjective. Pour cela, soit $v \in N(\Sigma_0)$ et soit h la fonction horosphérique associée à v. Remarquons que h est propre sur Σ_∞ ; elle admet donc un minimum, c'est-à-dire un point dont la normale extérieure pointe vers v.

(v) Il reste à examiner le cas où Σ_0 n'est pas à bord lisse et relativement compact.

Soit $\{\Sigma_r^0\}$ une suite d'ouverts à bord lisse, relativement compacts, emboîtés et dont la réunion est Σ_0. Soit B le bout de S. D'après ce que nous venons de voir, il existe une suite $\{\Sigma_r\}$ de k-surfaces dans B solutions des problèmes de Plateau asymptotiques associés à $\{\Sigma_r^0\}$. Les bouts des $\{\Sigma_r\}$ sont emboîtés et une adaptation simple de la démonstration précédente montre que la suite $\{\Sigma_r\}$ va converger vers une k-surface solution de notre problème.$\diamond$

7.2.2 Démonstration de la proposition 7.2.3

Démonstration. Soit Σ une k-surface éventuellement dégénérée. Soit Σ_1 une k-surface, graphe d'une fonction f au-dessus de Σ. Pour montrer que $\Sigma = \Sigma_1$, il suffit de montrer que f est bornée par une constante a. En effet, Σ et Σ_1 seront alors toutes deux lentilles pour la surface S_a à distance a de Σ ; l'unicité suit alors de la proposition 6.2.1.

Montrons donc que f est bornée. Soit B le bout de Σ. Supposons dans un premier temps Σ complète. Soit $y \in \Sigma$ de vecteur normal extérieur $\vec{n}$. Soit u un vecteur tangent tel que $\langle u, \vec{n}\rangle > 0$. Alors la géodésique issue de u reste tracée dans B. Cette propriété reste vraie dans le cas d'une k-surface dégénérée : en effet une telle géodésique heurte transversalement en un temps fini une surface équidistante, et une telle surface est toujours complète.

En particulier, le cône $U_{\alpha_0}^{y,\vec{n}}$ est inclus dans B, où $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\vec{n}$ désigne vecteur normal à y. Soit D_y l'unique solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty U_{\alpha_0}^{(y,\vec{n})}$ (*cf* 7.1.1). Ce disque D_y est inclus dans $U_{\alpha_0}^{y,n}$, et en particulier dans B ; d'après la proposition 7.2.4, c'est donc le graphe d'une fonction f_y au-dessus d'un ouvert U_y relativement compact de Σ. En appliquant à nouveau la proposition 7.2.4, nous en déduisons que D_y est un graphe au-dessus d'un ouvert de S_1.

Ainsi, $f(y) \leq f_y(y)$. Or $f_y(y) \leq \delta(\alpha, 0)$, où cette constante a été introduite dans le lemme 7.1.2.$\diamond$

7.2.3 Démonstration de la proposition 7.2.2

Démonstration. Soit (f, S) et (g, S) deux solutions du problème de Plateau asymptotique (i, S). Soit $\vec{n}_f$ et $\vec{n}_g$ les champs de vecteurs normaux extérieurs associés à f et g respectivement. Pour tout $y \in S$, soit D_y un disque ouvert tel que

$$i(D_y) \subset \partial_\infty U_{\alpha_0}^{(f(y),\vec{n}_f(y))} \cap \partial_\infty U_{\alpha_0}^{(g(y),\vec{n}_g(y))}.$$

Soit S_y l'unique solution du problème de Plateau asymptotique pour (i, D_y) produite par le lemme 7.1.1. D'après la proposition 7.2.4, S_y est le graphe de fonctions f_y et g_y au-dessus de (f, D_y) et (g, D_y) respectivement.

Considérons un recouvrement localement fini de S par de tels ouverts D_y où y décrit un ensemble Y. Soit

$$f_0 = \inf_{y \in Y}(f_y), \quad g_0 = \inf_{y \in Y}(g_y).$$

Par construction le graphe de f_0 et celui de g_0 coïncident. Nous avons ainsi construit une surface intermédiaire S_2 qui est un graphe à la fois au-dessus de (f, S) et au-dessus de (g, S). Pour le moment, cette surface convexe n'a pas de raison d'être lisse.

Remplaçons donc cette surface S_2 par la surface S_3 à distance r de S_2. Pour r bien choisi, indépendamment de S_2, S_3 est à courbure strictement supérieure à k. A nouveau, S_3 est un graphe au-dessus de (f, S) et (g, S).

Identifions comme d'habitude S_3 au disque D_1 de rayon 1 de $\mathbb{C}$. Soit D_r les disques de rayon r, et Σ_r les solutions du problèmes de Plateau pour D_r. Pour r petit, Σ_r est un graphe à la fois au-dessus de (f, S) et de (g, S). Ceci est également vrai par continuité pour tout r, les k-surfaces (f, S) et (g, S) faisant office de barrière.

Quand r tend vers l'infini la suite de surfaces $\{\Sigma_r\}$ tend vers une k-surface Σ_0. Pour voir cela, il suffit d'invoquer le même raisonnement que lors de la démonstration du point (iii) du paragraphe 7.2.1.$\diamond$

7.3 Existence

Démontrons maintenant les théorèmes d'existence de solutions du problème de Plateau asymptotique annoncés dans l'introduction. Rappelons en tout d'abord les énoncés.

Théorème 7.3.1 *Soit S une surface compacte de genre plus grand que* 2. *Notons $\bar{S}$ son revêtement universel. Soit ρ une représentation de $\pi_1(S)$ dans le groupe des isométries de M. Soit f un homéomorphisme local ρ-équivariant de $\bar{S}$ dans $\partial_\infty M$. Il existe alors une unique solution non dégénérée du problème de Plateau asymptotique pour $(f, \bar{S})$. De plus, cette solution est équivariante sous ρ.*

Théorème 7.3.2 *Soit f un homéomorphisme local de U dans $\partial_\infty M$. Soit S un ouvert relativement compact de U. Il existe alors une unique solution au problème de Plateau asymptotique pour (f, S).*

Nous montrerons également le résultat suivant qui peut-être conçu comme une généralisation faible du petit théorème de Picard.

Théorème 7.3.3 *Soit f un homéomorphisme local de S dans $\partial_\infty M$, évitant trois points. Alors, il existe une solution non dégénérée du problème de Plateau asymptotique pour (f, S).*

Pour démontrer les deux premiers théorèmes d'existence, nous allons à chaque fois construire une surface convexe immergée dans M dont l'application de Gauss-Minkowski définit un problème de Plateau asymptotique. Nous construirons cette surface en recollant des surfaces obtenues comme solutions de problèmes de Plateau asymptotiques pour des disques plongés.

Les deux premiers théorèmes vont chacun utiliser des lemmes ayant leur intérêt propre. Pour le premier, il faudra :

Lemme 7.3.4 *Soit S une surface localement convexe complète, qui n'est ni tubulaire, ni horosphérique à l'infini. Soit N son application de Gauss Minkowski à valeurs dans $\partial_\infty M$. Alors le problème de Plateau asymptotique (N, S) admet une solution. De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, cette k-surface n'est pas dégénérée.*

Pour le deuxième, nous utiliserons :

Lemme 7.3.5 *Soit V une surface sans bord (pas nécessairement complète) et immergée de façon localement convexe dans M. Soit N son application de Gauss-Minkowski à valeurs dans $\partial_\infty M$. Soit $S \subset V$ un ouvert relativement compact. Alors le problème de Plateau asymptotique (N, S) admet une solution.*

7.3.1 Démonstration du lemme 7.3.4

Démonstration. Soit S_1 la surface à distance r de S. Cette surface n'est évidemment ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire. Pour r bien choisi, cette surface est à courbure strictement plus grande que k. De plus, toute solution de (N, S_1) est solution de (N, S). Il est maintenant facile de vérifier que la k-surface lentille pour S_1, produite par le lemme de Morse, est une solution du problème de Plateau asymptotique.$\diamond$

7.3.2 *Démonstration du lemme 7.3.5*

Démonstration. Nous allons produire la solution du problème de Plateau asymptotique comme limite de solutions de problèmes de Plateau, comme dans la preuve de la proposition 7.2.4.

Examinons tout d'abord le cas où S est un ouvert relativement compact à bord lisse. Considérons S_r les surfaces à distance r de S. Soit Σ_r les k-surfaces lentilles pour S_r ; ces surfaces sont solutions du problème de Plateau pour S_r. Pour adapter la démonstration de la proposition 7.2.4, il suffit de faire la remarque suivante. Nous savons que, par définition des surfaces lentilles, $S = S_0$ est un graphe au-dessus d'un ouvert O du fibré normal étendu N_{Σ_0}. Si Σ_r n'a pas de raison d'être un graphe au-dessus de Σ_0, les arguments développés dans le point (i) du paragraphe 7.2.1 montrent qu'elle sera un graphe au-dessus de ce même ouvert O.

Le reste de la preuve, qui comprend les points (ii), (iii), et (iv), s'adapte sans difficulté, et permet de construire une solution du problème de Plateau pour (N, S).

Enfin dans le cas où S n'est pas à bord lisse, il suffit de construire $\bar{S}$ à bord lisse relativement compact et contenant S. Ce que nous venons de dire nous permet de construire une solution du problème de Plateau asymptotique pour $(N, \bar{S})$. L'application directe de la proposition 7.2.4 permet de conclure.$\diamond$

7.3.3 *Démonstration du théorème 7.3.1*

Démonstration. Par compacité, nous pouvons trouver des disques fermés D_i, $i \in J$, dont les intérieurs recouvrent $\bar{S}$ le revêtement universel de S, et vérifiant, si nous notons

$$I_i = \{j \in I, D_i \cap D_j \neq \emptyset\},$$

les hypothèses suivantes :

(a) Pour tout i, le cardinal de I_i est fini ;
(b) $D_i \not\subset \bigcup_{j \in I_i \setminus \{i\}} D_{i_j}$;
(c) Pour tout i, il existe un disque Δ_i contenant $\bigcup_{j \in I_i} D_{i_j}$, tel que f restreinte à Δ_i soit un plongement ;
(d) la famille $\{D_i\}$ est $\pi_1(S)$-équivariante.

D'après le lemme 7.1.1, nous pouvons construire des solutions S_j de chacun des problèmes de Plateau asymptotiques (f, D_j). Chacune de ces surfaces S_j découpe M en deux composantes dont l'une est convexe. Nous appellerons cette composante convexe C_j.

Remarquons maintenant que les hypothèses (a), (b) et (c) entraînent l'assertion suivante :

(e) si $j, k \in I_i$, alors $S_j \cap S_k \neq \emptyset$ entraîne $D_j \cap D_k \neq \emptyset$.

En effet, soit Σ_i la solution du problème de Plateau asymptotique (f, Δ_i). D'après la proposition 7.2.4, S_j est alors un graphe au-dessus de $N^{-1}(D_j) \subset \Sigma_i$. Ceci montre (e).

Remplaçons maintenant les S_i par des surfaces C^∞ proches, de façon à ce qu'elles restent convexes, vérifient (e) et soient transverses entre elles. Pour simplifier, nous gardons les mêmes notations. Soit maintenant

$$U_i = \bigcap_{j \in I_i} C_j.$$

Cet ensemble U_i est convexe. Son bord est une réunion de “faces”. Parmi celles-ci, nous distinguerons $F_i = S_i \cap \partial U_i$. La face F_i est une surface, non vide d'après (b). Son bord est une réunion d'arcs C^∞ pas nécessairement connexes, $\gamma_{(i,j)}$, $j \in I_i$, portions de $S_j \cap S_i$. Plus précisément encore

$$\gamma_{(i,j)} = S_j \cap S_i \cap U_i.$$

Nous avons même, d'après (e)

$$\gamma_{(i,j)} = S_j \cap S_i \bigcap_{k \in I_i \cap I_j} C_k.$$

En particulier $\gamma_{(i,j)} = \gamma_{(j,i)}$.

Recollons maintenant F_j avec F_i le long de $\gamma_{(i,j)}$; nous obtenons ainsi de proche en proche une surface F localement convexe ; nous la lissons, de manière C^1, en prenant la surface Σ à distance r. Il est maintenant clair que le problème de Plateau asymptotique défini par (N, Σ), où N est l'application de Gauss-Minkowski, est équivalent à notre problème de départ.

Nous voulons appliquer le lemme 7.3.4. Montrons donc que Σ est à géométrie bornée et n'est ni tubulaire à l'infini, ni horosphérique à l'infini.

Comme l'action de $\pi_1(S)$ sur Σ est cocompacte, il suffit de montrer que Σ n'est ni tubulaire, ni horosphérique.

Si Σ était horosphérique, alors par définition $\pi_1(S)$ agirait de manière cocompacte sur une horosphère. Mais ceci est impossible : d'après le lemme 2.3.1 la croissance des horosphères est polynomiale.

De même, supposons Σ tubulaire. Dans cette situation, $\pi_1(S)$ agit de manière isométrique sur le fibré normal T à une géodésique. De plus, il existe une immersion ϕ, $\pi_1(S)$-équivariante de S sur T. Ceci est impossible : T est conforme au plan privé d'un point.

Le lemme 7.3.4 permet de conclure.$\diamond$

7.3.4 Démonstration du théorème 7.3.2

Démonstration. Procédons comme dans le paragraphe précédent. Les hypothèses permettent de construire une famille finie de disques ouverts D_i, pour $i \in J$, dont les intérieurs recouvrent l'adhérence de S, et vérifiant, si nous notons

$$I_i = \{j \in I, D_i \cap D_j \neq \emptyset\},$$

les hypothèses suivantes :

(b) $D_i \not\subset \bigcup_{j \in I_i \setminus \{i\}} D_{i_j}$;
(c) Pour tout i, il existe un disque Δ_i contenant $\bigcup_{j \in I_i} D_{i_j}$, tel que f restreinte à Δ_i soit un plongement.

D'après le lemme 7.1.1, il existe des solutions S_j de chacun des problèmes de Plateau asymptotiques (f, D^j). Chacune de ces surfaces S_j découpe M en deux parties dont l'une est convexe. Nous appellerons cette composante convexe C_j.

Remarquons maintenant que les hypothèses (b) et (c) entraînent, comme dans le paragraphe précédent, l'assertion suivante :

(e) soit $j, k \in I_i$. Alors $S_j \cap S_k \neq \emptyset$ entraîne $D_j \cap D_k \neq \emptyset$.

En procédant exactement comme dans le paragraphe précédent, nous obtenons une surface convexe Σ telle que le problème de Plateau asymptotique défini par (N, Σ), où N est l'application de Gauss-Minkowski, est équivalent au problème de Plateau asymptotique $(N, \bigcup_{i \in J} D_i)$. L'ouvert S étant par hypothèse relativement compact dans $\bigcup_{i \in J} D_i$, le lemme 7.3.5 permet de conclure.$\diamond$

7.3.5 *Démonstration du théorème 7.3.3*

Démonstration. Soit i un homéomorphisme local de S dans $\partial_\infty M$ évitant trois points x_1, x_2 et x_3.

Soit $S_0 = \partial_\infty M \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ et i l'injection de S_0 dans $\partial_\infty M$. Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que le problème de Plateau asymptotique (i, S_0) a une solution. En effet, supposons que (i, S_0) a une solution. Soit (f, S) un homéomorphisme local de S dans S_0. Soit $\bar{S}$ et $\bar{S}_0$ les revêtements universels de S et S_0 respectivement. Nous pouvons alors relever f en une application $\bar{f}$ de $\bar{S}$ dans $\bar{S}_0$. La proposition 7.2.4 permet de construire une solution du problème de Plateau asymptotique pour $(\pi \circ \bar{f}, \bar{S})$ où π désigne la projection canonique de $\bar{S}_0$ dans S_0. Le théorème d'unicité 7.2.1 permet enfin de montrer que la solution ainsi obtenue est bien une solution de (f, S).

Concentrons-nous maintenant sur le cas de (i, S_0). Distinguons deux possibilités :

(i) Premièrement, supposons qu'il existe un triangle idéal T totalement géodésique dont les sommets sont nos trois points.

La surface S_ε, bord de la boule de centre T et de rayon ε, est alors à courbure plus grande que k pour un certain ε. Elle n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire. D'après le lemme 7.3.4, la k-surface lentille pour S_ε produite par le lemme de Morse est une solution du problème de Plateau asymptotique associé à S_ε. Cette solution borde un convexe, elle est donc complète. Autrement dit la k-surface ainsi obtenue n'est pas dégénérée.

(ii) Plaçons-nous dans le cas général maintenant.

Soit $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une exhaustion de S_0 par des ouverts relativement compacts. Le théorème 7.3.2 permet de construire pour tout n une solution (f_n, S_n) du problème de Plateau asymptotique pour (i, S_n). Notre but est de montrer que la suite de solutions $\{(f_n, S_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge après extraction d'une sous-suite.

Soit x un point appartenant à l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, x_3\}$. Les surfaces $f_n(S_n)$ bordent des convexes C_n qui contiennent tous x. De plus, on a

$$(*) \qquad n \geq p \Rightarrow C_p \subset C_n.$$

Posons

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Dans notre cas, l'intérieur de C est non vide. Il existe donc une sphère S_a, de centre x et de rayon a incluse dans C. Identifions cette sphère canoniquement à $\partial_\infty M$.

Nous voyons maintenant les ouverts S_n comme des sous-ensembles de S_a. Les surfaces $f_n(S_n)$ sont des graphes de fonctions λ_n au-dessus de S_n. D'après $(*)$, pour tout y, la suite $\{\lambda_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

D'après le corollaire 4.1.3, la suite de fonctions $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞ vers une fonction λ. Le graphe de cette dernière va fournir la solution du problème de Plateau (i, S_0).$\diamond$

7.4 Non existence

Le théorème suivant montre qu'un problème de Plateau asymptotique n'a pas toujours de solution :

Théorème 7.4.1 *Soit U l'ouvert de $\partial_\infty M$ obtenu en ôtant zéro, un ou deux points. Soit i l'injection de U dans $\partial_\infty M$. Le problème de Plateau asymptotique défini par (i, U) n'a pas de solution.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit Σ la solution du problème de Plateau correspondant ; dans les trois cas, cette surface est globalement convexe.

Dans le premier cas, Σ est une sphère compacte. Ceci est clairement impossible : d'après l'équation de Gauss, la métrique induite sur une k-surface est à courbure négative.

Dans le deuxième cas, Σ est une pseudo-horosphère. D'après la proposition 2.4.1, elle est horosphérique à l'infini. Il existe donc une suite de points $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface horosphérique Σ_0. Ceci est à nouveau impossible : par compacité Σ_0 est également une k-surface ; or, d'après le principe du maximum géométrique, une k-surface ne peut-être horosphérique.

Dans le dernier cas, soit γ la géodésique joignant les deux points du bord à l'infini. Soit μ la fonction distance à cette géodésique. Soit ensuite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Σ tel que la suite $\{\mu(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la borne supérieure μ_0 (peut-être infini) de μ. Nous pouvons extraire une sous suite telle que (Σ, x_n) converge vers Σ_0. Séparons en deux cas :

(i) La borne μ_0 est finie. Dans ce cas, Σ_0 est tangente intérieurement à une équidistante à une géodésique ; ceci contredit le principe du maximum géométrique.
(ii) La borne μ_0 est infinie. Dans ce cas la surface Σ_0 est une pseudo-horosphère ; nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'une telle éventualité est impossible.

$\diamond$

8 Espace des k-surfaces

Abusivement, en utilisant le relevé de Gauss, c'est-à-dire l'application qui a un point de la surface associe sa normale extérieure, nous considérerons une k-surface comme une surface immergée dans le fibré unitaire de la variété M.

Soyons un peu plus précis dans la définition d'une k-surface pour éviter le problème des revêtements multiples.

Les k-surfaces étant les solutions d'un problème elliptique, toute surface de ce type est totalement déterminée par son jet d'ordre infini en un point. On en déduit qu'étant donnée une k-surface (f, S) sans bord, où f désigne une immersion de S dans le fibré unitaire, il existe un *représentant minimal* de la k-surface (g, Σ), c'est-à-dire vérifiant la propriété suivante : pour tout k-surface $(\bar{f}, \bar{S})$ telle que $f(S) = \bar{f}(\bar{S})$, il existe un revêtement p de $\bar{S}$ sur Σ, tel que $\bar{f} = g \circ p$.

Le représentant minimal d'une k-surface est totalement déterminé par son image, et nous omettrons souvent de parler de l'immersion sous-jacente.

L'*espace des k-surfaces* $\mathcal{N}$ d'une variété N est l'espace des paires (S, x), où $x \in S$, et où S est soit un tube, soit le représentant minimal d'une k-surface sans bord (éventuellement dégenérée).

Cet espace $\mathcal{N}$ est munie d'une topologie décrite dans [3]. La notion de convergence pour cette topologie est celle des sous-variétés immergées pointées décrites dans la paragraphe 2.3.1.

Dans la section 8.1 de [3], nous avons montré que l'espace $\mathcal{N}$ est compact et muni d'une structure de lamination, c'est-à-dire de produit local. Une feuille $\mathcal{L}_S$ de cette lamination est identifiée à S qui est soit le représentant minimal d'une k-surface, soit un tube ; plus précisément, les points de cette feuille $\mathcal{L}_S$ sont les points de la forme (S, x), pour x décrivant S.

9 Densité des feuilles périodiques

A partir de maintenant, M est le revêtement universel d'une variété compacte N de dimension 3 à courbure strictement négative.

Soit $\mathcal{N}$ l'espace compact laminé associé, décrit dans la section 8. Nous voulons montrer :

Théorème 9.0.1 *La réunion des feuilles compactes est dense dans $\mathcal{N}$.*

Les feuilles compactes de $\mathcal{N}$ représentent par définition les k-surfaces compactes dans N. Nous pouvons interpréter ces surfaces compactes dans le revêtement universel de la manière suivante. Elles s'identifient aux quadruplets $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$, où :

- Γ est un groupe discret agissant de manière cocompacte sur le disque Σ ;
- ρ est une représentation de Γ dans $\pi_1(N)$;
- f est une immersion ρ-équivariante, localement convexe de Σ dans M, dont l'image est une k-surface.

Introduisons une définition : un quadruplet $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$ est une *immersion équivariante* à valeurs dans $\partial_\infty M$, lorsque

- Σ est une surface, éventuellement à bord ;
- Γ est un groupe agissant sur Σ de façon à ce que le quotient soit une surface ;
- f est un homéomorphisme local de Σ dans $\partial_\infty M$;
- ρ est une représentation de Γ dans $iso(M)$ le groupe des isométries de M.

L'ensemble devant vérifier la relation d'équivariance :

$$\forall s \in \Sigma, \quad \forall g \in \Gamma, \quad f(g.s) = \rho(g) f(s).$$

Une immersion équivariante est dite *cocompacte* si Σ/Γ est une surface compacte.

D'après le théorème 7.3.1, les feuilles compactes de la lamination $\mathcal{N}$ s'identifient aux immersions équivariantes cocompactes.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que dans la démonstration que nous allons donner, les immmersions équivariantes cocompactes qui apparaîtront seront telles que $\rho(\Gamma)$ est un groupe libre.

Décrivons maintenant la structure de cette section.

9.1 Mous introduisons une définition, l'*inclusion* des problèmes de Plateau asymptotiques, et démontrons un lemme de compacité s'y rapportant.

9.2 Nous expliquons comment approcher en un certain sens tout plongement du disque par une suite d'immersions équivariantes.

9.3 Nous décrivons un procédé de *fusion* permettant de construire de nouvelles immersions équivariantes à partir d'anciennes.
9.4 Nous définissons une classe d'immersions topologiques du disque dans les sphères appelées *quasi-plongements*. Nous montrons que tout problème asymptotique est limite de quasi-plongements.
9.5 Nous montrons que tout quasi-plongement est limite d'immersions équivariantes cocompactes ; celles-ci sont obtenues par fusion d'immersions équivariantes construites en 9.2.

Enfin, nous concluons la démonstration dans le dernier paragraphe.

9.1 Inclusion, lemme de compacité pour les inclusions

Dans ce qui suit, D_i désignera toujours une variété connexe de dimension 2 sans bord. Nous allons donner trois définitions techniques.

9.1.1 Inclusion

Introduisons une définition. Soit (f, D_1) et (g, D_2) deux problèmes de Plateau asymptotiques. S'il existe un plongement i de D_1 dans D_2, tel que $f = g \circ i$, nous dirons que (f, D_1) est *inclus* dans (g, D_2) par i , et noterons

$$(f, D_1) \subset (g, D_2) \ \ [i].$$

La petite observation suivante nous sera utile :

(i) Soit x_1 et x_2 des points de D_1 et D_2 respectivement. Supposons que pour tout ouvert U relativement compact de D_1, il existe i_U telle que

$$(f, U) \subset (g, D_2) \ \ [i_U],$$

de telle sorte que $i_U(x_1) = x_2$. Alors (f, D_1) est inclus dans (g, D_2).

9.1.2 Intersection

Une seconde définition. Soit $\{(f_n, D_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de problèmes de Plateau asymptotiques. Soit (g, D_∞) un autre problème de Plateau asymptotique. On suppose que pour tout n, il existe i_n tel que

$$(g, D_\infty) \subset (f_n, D_n) \ \ [i_n].$$

Supposons maintenant que l'inclusion de (g, D_∞) est "minimale" dans le sens suivant : si (h, U) (où U est connexe) est une donnée asymptotique telle que

$$(g, D_\infty) \subset (h, U) \ \ [j] \quad ;$$

si par ailleurs, pour tout n

$$(h, U) \subset (f_n, D_n) \quad [j_n]$$
$$i_n = j_n \circ j,$$

alors $(h, U) = (g, D_\infty)$.

Dans cette situation, nous dirons que (g, D_∞) est *l'intersection des* (f_n, D_n) *le long de* i_n, et nous noterons

$$(g, D_\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D) \ [i_n].$$

On vérifie la proposition suivante :

Proposition 9.1.1 *Supposons que*

$$(g, D) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D) \ [i_n].$$

Soit par ailleurs (h, U) *telle que, pour tout* n

$$(h, U) \subset (f_n, D) \ [j_n].$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in D$ *et* $x_1 \in U$ *tels que pour tout* n, $i_n(x_0) = j_n(x_1)$. *Alors*

$$(h, U) \subset (g, D) \ [j],$$

de telle sorte que $j_n = i_n \circ j$.

9.1.3 Limite inférieure

Une dernière définition. Nous dirons que le problème de Plateau asymptotique (g, D_∞) est *limite inférieure des* problèmes de Plateau asymptotiques (f_n, D_n) par i_n et nous noterons

$$(g, D_\infty) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D_n) \ [i_n],$$

si pour toutes les sous-suites $s(n)$, il existe p tel que

$$(g, D_\infty) = \bigcap_{n > p} (f_{s(n)}, D_{s(n)}) \ [i_{s(n)}].$$

L'exemple qui suit montre qu'il faut prendre quelques précautions avec cette notion. Soit $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite décroissante d'ouverts, obtenue en enlevant les uns après les autres les points d'un ensemble dénombrable, dont l'adhérence est un équateur. Soit f_n la représentation conforme du disque dans U_n, envoyant zéro sur le pôle nord. Nous avons deux intersections possibles des $\{(f_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$: la représentation conforme de l'hémisphère nord et celle de l'hémisphère sud.

9.1.4 Lemme de compacité

Nous voulons montrer :

Lemme 9.1.2 *Soit* $\{(f_n, D)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de problèmes de Plateau asymptotiques, admettant des solutions* $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Soit* x_0 *un point de D. Soit également un problème de Plateau asymptotique*

$$(g, D) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} (f_n, D_n)\ \ [i_n].$$

Alors, la suite de k-surfaces $\{(\phi_n, D)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *pointées en* $\{i_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *converge vers une solution du problème de Plateau asymptotique pour* (g, D).

Démonstration. Pour simplifier, notons $0 = x_0 = i_n(x_0)$. D'après le théorème 7.3.2, il existe une solution ψ du problème de Plateau asymptotique défini par (g, D). D'après la proposition 7.2.4, $\psi(D)$ est un graphe au-dessus d'un ouvert de $\phi_n(D)$ pour n suffisamment grand.

Notre première étape consiste à démontrer l'assertion :

(1) la suite $\{\phi_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ reste à distance bornée de $\psi(0)$.

Raisonnons par l'absurde. Dans le cas contraire, il existe une sous-suite $s(n)$ telle que $\{\phi_{s(n)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point m de $\partial_\infty M$.

Notons N_n l'application de Gauss-Minkowski de $\phi_{s(n)}$. Notons B_n la boule de rayon 1 de centre $\phi_{s(n)}(0)$ tracée sur $\phi_{s(n)}(D)$. Pour tout voisinage U de m, et pour n suffisamment grand, nous avons

$$\partial_\infty M \setminus U \subset N_n(B_n).$$

En particulier, $(i, \partial_\infty M \setminus U)$ est inclus dans $(f_{s(n)}, D)$ pour n suffisamment grand. La proposition 9.1.1 entraîne alors que $(i, \partial_\infty M \setminus U)$ est inclus dans (g, D).

Cette proposition entraîne également que $(i, \partial_\infty M \setminus \{m\})$ est inclus dans (g, D). Nous avons là la contradiction recherchée : le théorème 7.3.2 fournit une solution du problème de Plateau asymptotique pour $(i, \partial_\infty M \setminus \{m\})$, ce qui contredit le théorème 7.4.1.

Nous avons fini de démontrer l'assertion (1).

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème de compacité 4.1.1. Remarquons que dans notre cas, il n'y a pas de condition au bord. Extrayons donc une sous-suite $s(n)$ telle que nous ayons l'alternative :

(a) soit $\{\phi_{s(n)}(D), \phi_{s(n)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une k-surface S (peut-être dégénérée) ;
(b) soit $\{\vec{n}\circ\phi_{s(n)}(D), \vec{n}\circ\phi_{s(n)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un tube (nécessairement complet) autour d'une géodésique γ. Ici, $\vec{n}$ désigne l'application de Gauss de la surface $\phi_n(D)$ à valeurs dans le fibré unitaire de M.

Un problème de Plateau asymptotique (f, D) est associé à chacune de ces deux possibilités : l'application de Gauss-Minkowski de la surface limite dans le premier cas ; le revêtement universel de la sphère moins deux points dans l'autre cas.

Remarquons maintenant que pour tout ouvert relativement compact U de D, (f, U) est inclus dans le problème de Plateau asymptotique $(f_{s(n)}, D)$ pour n suffisamment grand ; ceci provient de la convergence sur tout compact des suites sous-jacentes. Par définition de limite inférieure, (f, U) est inclus dans le problème (g, D).

Grâce à notre observation préliminaire 9.1.1, nous en déduisons que (f, D) est inclus dans (g, D).

En particulier, le deuxième cas de l'alternative est exclu : en effet, le théorème 7.3.2 crée une solution du problème de Plateau défini par la sphère moins deux points, et contredit ainsi le théorème 7.4.1.

Enfin, prenons un ouvert relativement compact U de D. Par convergence uniforme sur tout compact, nous en déduisons que (g, U) est inclus dans (f, D). Ainsi, (g, D) est inclus dans (f, D).

En conclusion, $(g, D) = (f, D)$. D'après le théorème d'unicité de la solution d'un problème de Plateau asymptotique 7.2.1, nous en déduisons que $\{\phi_{s(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ψ.$\diamond$

9.2 Construction de groupes

Nous allons dans un premier temps exhiber des groupes associés à des plongements du disque.

Introduisons les notations suivantes : pour tout $\gamma \in \pi_1(N)$ différent de l'identité, γ^+ et γ^- désignent respectivement les points attracteurs et répulseurs de γ sur $\partial_\infty M$; si F est un sous-groupe de $\pi_1(N)$, nous notons $\Lambda(F)$ son ensemble limite et $\Omega(F) = \partial_\infty M \setminus \Lambda(F)$ son ensemble de discontinuité ; nous dirons que F est *convexe cocompact* si F agit de manière cocompacte sur $\Omega(F)$.

Le but de ce paragraphe est la proposition technique suivante :

Proposition 9.2.1 *Soit (f, D) un plongement du disque dans $\partial_\infty M$. Soit $x_i^\pm$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, $2p$ points de $f(\partial D)$. Soit $\{\gamma_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, p suites d'éléments de $\pi_1(N)$, telles que :*

(i) *les suites $\{\gamma_{i,n}^\pm\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $x_i^\pm$;*
(ii) $\forall i, n, \quad \gamma_{i,n}^\pm \notin f(D)$.

Il existe alors une suite de groupes libres convexes cocompacts $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n, \quad \exists q, \quad \forall i, \quad \gamma_{i,n}^q \in F_n, \tag{1}$$

$$\forall \gamma \in F_n \setminus \{\mathrm{id}\}, \quad \gamma(f(D)) \cap f(D) = \emptyset, \tag{2}$$

$$(f, D) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} (i_n, \Omega(F_n)) \quad [f \circ i_n^{-1}], \tag{3}$$

où i_n désigne l'injection canonique de $\Omega(F_n)$ dans $\partial_\infty(M)$.

Démonstration. Munissons $\partial_\infty M$ d'une métrique arbitraire. Fixons un entier n. Soit ε le réel défini par

$$\varepsilon = \sup_i \{d(\gamma_{i,n}^{\pm}, x_i^{\pm})\}.$$

D'après l'hypothèse (ii), ε est strictement positif. De plus, ε tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Par densité des géodésiques périodiques, il existe des éléments de $\pi_1(N)$, $\{\lambda_1, \ldots \lambda_k\}$, où k est un nombre fini dépendant de n, tels que l'ensemble

$$L = \{\lambda_i^+, \lambda_i^- \; ; 1 \leq i \leq k\},$$

soit ε-proche pour la distance de Hausdorff de $f(\partial D)$ et à l'extérieur de $f(D)$. On peut enfin faire en sorte que tous les points de L soient distincts et que $\lambda_i = \gamma_{i,n}, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

Par l'argument classique sur les groupes de Schottky, il existe q suffisamment grand tel que le groupe

$$F_n = \langle \lambda_1^q, \ldots, \lambda_k^q \rangle,$$

soit libre et agisse de manière cocompacte sur son ensemble de discontinuité.

En prenant q suffisamment grand, l'ensemble limite Λ_n est dans un ε-voisinage de L, et à l'extérieur de $f(D)$.

Toujours en prenant q suffisamment grand, on obtient la condition (2).

Pour achever la démonstration de la proposition, remarquons que Λ_n est une suite de compacts convergeant pour la métrique de Hausdorff vers le bord de $f(D)$, tout en restant à l'extérieur de $f(D)$. Ainsi nous avons bien

$$(f, D) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \inf(i_n, \Omega(F_n)) \;\; [f \circ i_n^{-1}],$$

ce que nous voulions démontrer.$\diamond$

Déjà, nous pourrions montrer que chaque plongement du disque est limite d'immersions équivariantes cocompactes : il suffit d'assembler la proposition précédente et le lemme de compacité 9.1.2.

Malheureusement, toute immersion n'est pas limite de plongement. Il faut donc raffiner cette construction. Nous devons introduire une procédure, appelée *fusion*, permettant de construire de nouvelles immersions équivariantes cocompactes. Celles-ci permettront d'approcher ce que nous appellerons des *quasi-plongements*. Ces derniers vont être denses dans les immersions.

9.3 *Fusion de groupes et de surfaces*

Nous allons expliquer dans ce paragraphe une construction permettant de construire de nouveaux problèmes de Plateau équivariants à partir d'anciens.

Introduisons tout d'abord nos notations et hypothèses.

Soit $(f_i, S_i, \Gamma_i, \rho_i)$, où $i \in \{1, 2\}$, deux immersions équivariantes. Nous supposerons ici que les S_i/Γ_i sont des surfaces à bord. Soit c_1 et c_2 deux composantes connexes du bord respectivement de S_1/Γ_1 et S_2/Γ_2. On suppose qu'il existe deux relevés v_i de ces courbes dans S_i, associés à des éléments $\gamma_i \in \Gamma_i$ tels que $\rho_1(\gamma_1) = \rho_2(\gamma_2)$. De même, on suppose qu'il existe un homéomorphisme j entre v_1 et v_2, vérifiant

$$f_1 \circ j = f_2,$$
$$\gamma_2 \circ j = j \circ \gamma_1.$$

En particulier, j descend en un homéomorphisme h entre c_1 et c_2. Notre construction est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 9.3.1 *Avec les hypothèses et notations précédentes, il existe une unique immersion équivariante* $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$ *telle que* $\Sigma/\Gamma = \Sigma_1/\Gamma_1 \cup_h \Sigma/\Gamma_2$. *De plus, en notant* ι_i *l'injection de* Σ_i *dans* Σ *qui se déduit de cette dernière identification, nous avons* $f \circ \iota_i = f_i$.

Démonstration. Il s'agit d'une construction standard.$\diamond$

L'immersion équivariante ainsi construite est appelée *fusion* des deux immersions équivariantes précédentes.

On peut remarquer alors que Γ est un produit amalgamé de Γ_1 et Γ_2. Nous verrons plus tard comment la fusion se comporte vis-a-vis de l'opération limite inférieure.

9.4 Quasi-plongements

Introduisons une définition intermédiaire.

Un homéomorphisme local f du disque ouvert D dans $\partial_\infty M$ sera appelé un *quasi-plongement*, si

(i) f se prolonge continûment en un homéomorphisme local de l'adhérence de D ;
(ii) il existe une famille finie d'arcs plongés $\{c_i\}$, $1 \leq i \leq q$ deux à deux disjoints, dont les extrémités sont dans ∂D
(iii) f s'étend en un plongement de l'adhérence de chaque composante connexe de

$$D \setminus \bigcup_{1\leq i\leq q} c_i.$$

La famille d'arcs $\{c_i\}$ de la définition sera appelée *découpe* du quasi-plongement.

En un certain sens, le résultat suivant affirme que tout homéomorphisme local est limite de quasi-plongements.

Proposition 9.4.1 *Soit* f *un homéomorphisme local de* D *dans* $\partial_\infty M$. *Soit* U *un ouvert relativement compact* U *de* D. *Il existe alors un ouvert relativement compact* V *de* D *contenant* U *tel que* (f, V) *soit un quasi-plongement.*

Démonstration. Nous allons utiliser des idées contenues dans la paramétrisation faite par Thurston de l'espace des $\mathbb{C}P^1$-structures par les laminations géodésiques mesurées.

Identifions $\partial_\infty M$ à la sphère S^2. Munissons S^2 d'une métrique à courbure constante et D de la métrique induite par f. Nous noterons $\bar{D}$ sa complétion métrique et $Fr(D) = \bar{D} \setminus D$. Au besoin, en restreignant un peu D, nous pouvons supposer que $\bar{D}$ est homéomorphe au disque fermé et que f s'étend en un homéomorphisme local de $\bar{D}$ dans S^2.

Une boule métrique ouverte de D sera appelée une *bonne boule*, si f est une isométrie de cette boule sur une boule de S^2. Une boule sera *maximale*, si c'est une bonne boule, et si elle n'est incluse dans aucune autre bonne boule qu'elle même.

Si B est une boule maximale, notons $\bar{B}$ son adhérence dans D (et non dans $\bar{D}$). Posons $Fr(B) = \bar{B} \setminus B$. Cet ensemble $Fr(B)$ est une réunion d'intervalles ouverts. Un peu de géométrie sphérique montre l'assertion : si deux points de $Fr(B)$ sont dans une même composante connexe de $Fr(B)$, alors ils appartiennent à une même bonne boule.

Nous dirons enfin que deux points x et y de $Fr(D)$ sont *joignables*, s'il existe une boule maximale B et une composante connexe A de $Fr(B)$ telle que x et y appartiennent à l'adhérence de A dans $\bar{D}$.

Soit x_1 et x_2 deux points joignables. Soit également y_1 et y_2 deux points joignables tels que $y_i \neq x_j$. Montrons tout d'abord :

(1) les points y_1 et y_2 appartiennent à la même composante connexe de $Fr(D) \setminus \{x_1, x_2\}$.

Notons B_x et B_y les bonnes boules respectives pour les paires (x_1, x_2) et (y_1, y_2). Soit A_x et A_y les composantes connexes de $Fr(B_x)$ et $Fr(B_y)$ qui s'en déduisent. Si $B_x = B_y$, les arcs A_x et A_y sont disjoints ; si $B_x \neq B_y$ les arcs de cercles A_x et A_y se coupent en au plus deux points. Dans les deux cas, A_x et A_y sont transverses. Supposons maintenant que y_1 et y_2 sont dans des composantes connexes différentes de $Fr(D) \setminus \{x_1, x_2\}$. Alors, par transversalité, A_x et A_y se rencontre transversalement en exactement un point. Dès lors, l'une des extrémités de A_x (c'est-à-dire x_1 ou x_2) appartient à l'intérieur de B_y. Nous avons la contradiction recherchée, et l'assertion (1) est démontrée.

Soit maintenant x et y deux points joignables correspondant à une boule maximale B. Traçons entre x et y la géodésique pour la métrique hyperbolique conforme de B. L'arc correspondant est appelé *bon arc*. Un raisonnement géométrique élémentaire montre que deux bons arcs ne peuvent se couper qu'en leurs extrémités.

La réunion $\mathcal{L}$ des bons arcs forme un ensemble fermé. Nous avons construit ainsi une lamination de D.

Cette construction n'est pas originale, c'est celle qui associe à toute $\mathbb{C}P^1$-structure une lamination dans la construction de Thurston déjà citée.

On remarque aisément que si A est le complémentaire de $\mathcal{L}$, toute composante connexe de A est incluse dans une bonne boule.

Nous pouvons maintenant construire une exhaustion de D par des disques compacts D_n telle que toute intersection non vide d'un bon arc avec D_n soit connexe et de longueur minorée par une constante ne dépendant que de n : par exemple, on peut trouver une métrique hyperbolique telle que la lamination soit géodésique, puis prendre une exhaustion par des convexes, et enfin éventuellement découper ces convexes en enlevant la "petite" composante connexe du complémentaire des bons arcs de petite longueur.

Fixons ensuite l'un des D_p ; montrons que f restreinte à D_p est un quasi-plongement.

Pour cela, il suffit de construire un recouvrement ouvert de D_p tel que tout ouvert O_i de ce recouvrement vérifie les propriétés suivantes :

(i) O_i est bordé par une courbe de Jordan constituée d'un nombre fini de bons arcs et d'arcs inclus dans le bord de D_p ;

(ii) il existe une découpe de cet ouvert O_i pour laquelle la restriction de f à cet ouvert soit un quasi-plongement.

En effet, supposons construit un tel recouvrement fini $\{O_i\}$. La famille de bons arcs obtenue en prenant la réunion des bons arcs inclus dans le bord des ouverts O_i, et des bons arcs provenant des découpes de ces ouverts, donnera une découpe de quasi-plongement.

Construisons maintenant ce recouvrement avec les propriétés requises. Soit $x \in D_p$, notre but est d'associer à x un ouvert O_x vérifiant (i) et (ii). Nous avons quatre cas à considérer.

(1) Le point $x \in A = D \setminus \mathcal{L}$. Nous prenons simplement comme ouvert O_x la composante connexe de x dans $A \cap D_p$. La longueur de la trace des bons arcs sur D_p étant minorée, il n'y a qu'un nombre fini de bons arcs dans le bord de cette composante connexe.

(2) Le point x se trouve sur un bon arc isolé. Ce bon arc sépare A en deux composantes connexes. Nous prenons alors comme ouvert O_x la réunion de ces deux composantes connexes, avec la découpe donnée par le bon arc passant par x.

(3) Le point x se trouve sur un bon arc c associé à une boule maximale B, isolé d'un côté mais pas de l'autre, c'est-à-dire si c borde une composante O connexe de A, et s'il existe une suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'arcs distincts de c tendant vers c. Dans ce cas, nous pouvons remarquer que pour n suffisamment grand, la région U_n bordée par c et c_n est telle que $U_n \cap D_p$ est incluse dans B. Posons alors $O_x = (O \cup U_n \cup c) \cap D_p$. Ce dernier ouvert est bien inclus dans B.

(4) Le point x appartient à un bon arc c et il existe deux suites de bons arcs tendant vers c, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, telles que la région U_n comprise entre

c_n et g_n contienne c. Il suffit de remarquer que pour n suffisamment grand $U_n \cap D_p$ est inclus dans B, et de poser enfin $O_x = U_n \cap D_p$.

Notre construction est terminée.$\diamond$

9.5 *Quasi-plongements et immersions équivariantes cocompactes*

Le résultat essentiel de cette section est une généralisation de la proposition 9.2.1 au cas des quasi-plongements.

Proposition 9.5.1 *Soit (f, D) un quasi-plongement. Il existe alors une suite d'immersions équivariantes cocompactes $\{(f_n, S_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$(f, D) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} (f_n, S_n) \quad [i_n].$$

Démonstration. Soit (f, D) un quasi-plongement. D'après la définition, il existe une famille finie d'arcs plongés $\{c_i\}$, $1 \leq i \leq q$ deux à deux disjoints, dont les extrémités sont dans ∂D, et telle que f s'étend en un plongement de l'adhérence de chaque composante connexe D_j de

$$D_c = D \setminus \bigcup_{1\leq i\leq q} c_i.$$

Orientons les arcs c_i. Notons $x_i^{\pm}$ leurs extrémités et $D_{i^{\pm}}$ les composantes connexes de D_c bordées par c_i.

Par densité des géodésiques périodiques, nous pouvons trouver des suites $\{\gamma_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(N)$ telles que :

(i) les suites $\{\gamma_{i,n}^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(x_i^{\pm})$;
(ii) $\forall\, i, n \;\; \gamma_{i,n}^{\pm} \notin f(D_i^{\pm})$.

D'après le lemme 9.2.1, pour toute composante D_j de D_c, il existe une suite de groupes libres convexes cocompacts $\{F_{j,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, si c_i est dans le bord de D_j,

(iii) $\forall n, \;\; \exists q, \;\; \gamma_{i,n}^{q} \in F_{j,n}$;
(iv) $\forall \gamma \in F_{j,n} \setminus \{id\}, \;\; \gamma(f(D_j)) \cap f(D_j) = \emptyset$;
(v) $(f, D_j) = \liminf_{n\in\mathbb{N}}(p_{j,n}, D)$.

Ici $p_{j,n}$ désigne la projection du revêtement universel de $\Omega(F_{j,n})$ identifié à D, choisi de telle sorte que $p_{j,n}(0) = y_j \in D_j$.

Pour tout j, n, notons $\bar{S}_{j,n}$ la surface compacte

$$\bar{S}_{j,n} = \Omega(F_{j,n})/F_{j,n},$$

et $\pi_{j,n}$ la projection naturelle de $\Omega(F_{j,n})$ sur $\bar{S}_{j,n}$. La condition (iv) assure que $\pi_{j,n} \circ f$ est un plongement de D_j dans $\bar{S}_{j,n}$.

Dans la construction précédente, nous pouvons éventuellement prendre des sous-groupes d'indice fini des $F_{j,n}$; nous avons également une certaine liberté concernant le choix des générateurs des groupes $F_{j,n}$ autres que les γ_i.

Pour continuer notre démonstration, nous allons raffiner notre construction. Utilisons la latitude que nous venons de décrire de telle sorte que les groupes $F_{j,n}$ vérifient les propriétés supplémentaires suivantes :

(vi) le groupe F_n engendré par la réunion des $F_{j,n}$ est lui-même convexe cocompact ;
(vii) $f(c_i) \subset \Omega(F_n)$.

Choisissons maintenant, pour tout i, n, des voisinages $B^{\pm}_{i,n}$ de $\gamma^{\pm}_{i,n}$, homéomorphes à la boule fermée, disjoints deux à deux, tels que

(viii) $\gamma_{i,n}(\partial_\infty M \setminus B^-_{i,n}) \subset B^+_{i,n}$;
(ix) $\lim_{n\to\infty}(diam(B^{\pm}_{i,n})) = 0$;
(x) ces voisinages rencontrent les images des c_i exactement en leurs extrémités :

$$f(c_i) \cap B^{\pm}_{i,n} = f(x^{\pm}_i).$$

A nouveau, si besoin en était, nous avons pris des sous-groupes d'indice fini des $F_{j,n}$.

Construisons encore pour tout entier n, et tout $j \in \{1, \ldots, q\}$, une courbe $c_{i,n}$ tracée sur $\Omega(F_n)$, telle que :

(xi) $f(c_i) \subset c_{n,i}$;
(xii) $\gamma_{i,n}(c_{i,n}) = c_{i,n}$;
(xiii) $c_{n,i} \setminus f(c_i) \subset B^+_{i,n} \cup B^-_{i,n}$.

Pour ce faire, il faut procéder de la manière suivante : d'après la condition (viii), $\gamma_{i,n}(f(c_i)) \subset B^+_{i,n}$; par ailleurs, $B^+_{i,n} \setminus B^-_{i,n}$ est connexe de même que son adhérence A ; d'après la condition (x), cette adhérence A rencontre $f(c_i)$ exactement en $f(x^+_i)$, et $\gamma_{i,n}(f(c_i))$ en $\gamma_{i,n}(f(x^-_i))$. Choisissons donc dans A un chemin plongé $\lambda_{i,n}$ joignant $f(x^+_i)$ et $\gamma_{i,n}(f(x^-_i))$. Nous pouvons alors prendre comme courbe $c_{i,n}$, la réunion des images itérées de l'arc $f(c_i) \cup \lambda_{i,n}$:

$$c_{i,n} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \gamma^p_{i,n}(f(c_i) \cup \lambda_{i,n}).$$

Enfin, en prenant éventuellement des sous-groupes d'indice fini des $F_{j,n}$, la condition (xiii) et le fait que les $B^{\pm}_{i,n}$ sont deux à deux disjoints, nous permettent d'assurer la condition supplémentaire suivante :

(xiv) pour tout j et n, si $c_{i_1}, \ldots c_{i_m}$, sont tracées dans le bord de D_j, alors les courbes $\pi_{j,n}(c_{i_k,n})$ sont des courbes plongées et d'intersection vide dans $\bar{S}_{j,n} = \Omega(F_n)/F_n$.

Rappelons que D_j est une composante connexe de

$$D \setminus \bigcup_{1\leq i\leq q} c_i.$$

Nous avons fini d'imposer des conditions supplémentaires aux groupes $F_{j,n}$.

Commençons la démonstration. D'après la condition (iv), $\pi_{j,n} \circ f$ est un plongement de D_j dans

$$U_{j,n} = \bar{S}_{j,n} \setminus \bigcup_{1\leq k\leq m} \pi_{j,n}(c_{i_k,n}).$$

Notons $\Sigma_{j,n}$ la composante connexe de $U_{j,n}$ dans laquelle s'envoie D_j. Par construction, $\Sigma_{j,n}$ est une surface dont le bord s'identifie à la réunion des courbes $\pi_{j,n}(c_{i_k,n})$. Soit $\Gamma_{j,n}$ le groupe fondamental de $\Sigma_{j,n}$, et $S_{j,n}$ son revêtement universel.

L'étape suivante va être de fusionner toutes les surfaces $S_{j,n}$. La procédure est la suivante : pour tout i et n, la construction décrite en 9.3, permet de fusionner S_n^{i+} et S_n^{i-} le long de $c_{i,n}$. En procédant de proche en proche, nous produisons ainsi une immersion équivariante cocompacte (f_n, S_n, Γ_n) ayant la propriété suivante : il existe un plongement i_n de D dans S_n tel que $f = f_n \circ i_n$ c'est-à-dire

$$(f, D) \subset (f_n, S_n) \ \ [i_n].$$

Par ailleurs les courbes $c_{i,n}$ donnent naissance à des courbes $q_{i,n}$ tracées sur S_n telles que $i_n(c_i) \subset q_{i,n}$ et $f_n(q_{i,n}) = c_{i,n}$.

Pour conclure, il nous suffit de montrer

$$(f, D) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} (f_n, S_n) \ \ [i_n].$$

Soit $s(n)$ une sous-suite et (g, U) un plongement d'un ouvert U connexe, tels que

$$\begin{aligned} (g, U) &\subset (f_{s(n)}, S_{s(n)}) \ [j_{s(n)}], \\ (f, D) &\subset (h, U) \qquad\quad [j], \end{aligned}$$

avec $i_{s(n)} = j_{s(n)} \circ j$. Pour simplifier les notations, nous allons supposer $s(n) = n$.

Voyons j comme une inclusion, et supposons que D est un ouvert de U. Notons $Z(D)$ la frontière de D dans U. Nous voulons montrer que $Z(D)$ est vide. Raisonnons par l'absurde et supposons que cet ensemble est non vide.

Munissons $\partial_\infty M$ d'une métrique annexe, U, S_n et D des métriques induites. D'après notre hypothèse (ix),

$$\lim_{n\to\infty} (diam(B_{i,n}^{\pm})) = 0.$$

Il existe donc un point x de $Z(D)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall i, n \;\; d(g(x), B^{\pm}_{i,n}) \geq \varepsilon,$$
$$\forall i, \;\; d(x, c_i) \geq \varepsilon.$$

En particulier, l'hypothèse (xiii) entraîne :

(xv) $\forall i, n \;\; d(i_n(x), q_{i,n}) \geq \varepsilon.$

Pour ε suffisamment petit, g est une bijection de la boule B^U_ε de rayon ε de centre x dans U, vers la boule B_ε de centre $g(x)$ de rayon ε dans $\partial_\infty M$.

Le point x appartient nécessairement à la frontière d'une des composantes D_j de

$$D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

Rappelons maintenant que S_n est la réunion de copies isométriques des surfaces $S_{j,n}$, bordées par les courbes $q_{i,n}$ qui s'envoient par f_n sur les courbes $c_{i,n}$.

La condition (xv) nous permet d'affirmer que $j_n(B^U_\varepsilon)$ est inclus dans l'intérieur d'une de ces copies de $S_{j,n}$. En particulier, puisque

$$B_\varepsilon = g(B^U_\varepsilon) = f_n \circ j_n(B^U_\varepsilon),$$

nous en déduisons que pour tout n, $g(B_\varepsilon)$ est inclus dans $\Omega(F_{j,n})$. Ceci est impossible : la limite de Hausdorff des $\Lambda(F_{j,n})$ contient $Fr(D_j)$, et donc $g(x)$, par construction.

Ce dernier point est la contradiction recherchée.$\diamond$

9.6 Démonstration du théorème 9.0.1

Nous pouvons maintenant démontrer la densité des feuilles périodiques dans l'espace laminé $\mathcal{N}$.

Tout d'abord la proposition 9.5.1 et le lemme 9.1.2 entraînent que l'adhérence de la réunion des feuilles périodiques contient l'ensemble des quasi-plongements.

Le théorème 9.0.1 suit alors de la proposition 9.4.1 et de la proposition suivante

Proposition 9.6.1 *Soit (f, D) un problème de Plateau asymptotique. Soit $\{U\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite emboîtée d'ouverts relativement compacts de D telle que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = D.$$

Notons $\{(\phi_n, U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de solutions des problèmes de Plateau asymptotiques définis par $\{(f, U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenues par le théorème 7.3.2. Nous avons alors les deux résultats suivants :

(i) *si* (f, D) *admet une solution* (ϕ, D)*, alors la suite* $\{(\phi_n, U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pointées à l'origine de D converge vers* (ϕ, D) *;*
(ii) *supposons que D est le revêtement universel de* $\partial_\infty M$ *privé des deux extrémités d'une géodésique* γ *; soit* f *la projection canonique de D dans* $\partial_\infty M$ *; notons* S_n *l'ensemble des vecteurs normaux extérieurs à la surface* $\phi_n(U_n)$ *; alors la suite de surfaces* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, immergées dans UM pointées à l'origine de D, converge vers le tube de* γ*.*

Démonstration. Montrons (i) tout d'abord. D'après le théorème 7.2.1, pour tout n, $\phi_n(U_n)$ est le graphe d'une fonction f_n au-dessus de $\phi(U_n)$. D'après le lemme 7.1.2

$$\forall x \in D,\ \exists K,\ \text{tel que } \forall n, \quad f_n(x) \leq K.$$

Les arguments de compacité habituels montrent que la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact. Le graphe de la limite est une solution du problème de Plateau asymptotique défini par (f, D). L'unicité de la solution du problème de Plateau asymptotique montre que cette fonction limite est identiquement nulle. Ceci démontre l'assertion (i).

En ce qui concerne l'assertion (ii), il suffit de montrer la propriété suivante : il n'existe pas de sous-suite $s(n)$, telle que la suite de k-surfaces $\{(\phi_{s(n)}, U_{s(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ pointées à l'origine de D, converge vers k-surface. En effet, dans ce cas, d'après le théorème de compacité 4.1.1, la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le tube d'une géodésique. Par construction de D, cette géodésique ne peut être que γ. Maintenant, si la suite de k-surfaces $\{(\phi_{s(n)}, U_{s(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ pointées à l'origine de D converge vers une k-surface, celle-ci est une solution du problème de Plateau asymptotique défini par $\partial_\infty M$ privé d'un ou deux points. Ceci contredit le théorème 7.4.1.$\diamond$

9.6.1 Remarque

Soit (f, D) un problème de Plateau asymptotique qui s'étend en un homéomorphisme local d'un voisinage du disque fermé dans $\partial_\infty M$. Soit (ϕ, D) une k-surface solution du problème de Plateau asymptotique (f, D). Alors, (ϕ, D) n'est pas tubulaire à l'infini. En effet, si (ϕ, D) était tubulaire à l'infini, il existerait une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\partial_\infty M$, telle que le cardinal de $f^{-1}(x_n)$ tende vers l'infini. Ceci est une contradiction.

9.7 Feuilles périodiques de même genre

Nous voulons démontrer :

Proposition 9.7.1 *Soit* $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(f_n, S_n, \Gamma_n, \rho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'immersions équivariantes cocompactes telle que le genre de* S_n/Γ_n *soit borné. Soit* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points telle que* $x_n \in S_n$ *et que* $\{f_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *reste dans un compact.*

Supposons que $\{(f_n, S_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(f_\infty, S_\infty, x_\infty)$*, nous avons alors les possibilités suivantes :*

(i) soit il existe Γ_∞ *et* ρ_∞ *telle que* $(f_\infty, S_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$ *est cocompacte. Dans ce cas* $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante à partir d'un certain rang,*
(ii) soit (f_∞, S_∞) *est dégénérée ou tubulaire à l'infini.*

Remarquons qu'il découle de la proposition 9.6.1 et de la remarque 9.6.1 que l'ensemble des k-surfaces qui ne sont ni dégénérées, ni tubulaires à l'infini est dense dans l'espace $\mathcal{N}$.

La proposition 9.7.1 et l'unicité énoncée dans le lemme de Morse entraîne que l'ensemble des k-surfaces compactes de même genre est discret. Nous en déduisons un raffinement du théorème 9.0.1 :

Théorème 9.7.2 *Soit* $g \in \mathbb{N}$*, alors l'ensemble des feuilles compactes de genre plus grand que* g *est dense dans* $\mathcal{N}$*.*

9.7.1 Démonstration de 9.7.1

Montrons tout d'abord :

Proposition 9.7.3 *Soit* S *une* k*-surface à courbure moyenne bornée. Munissons* S *de la métrique induite de celle de* N*. Le rayon d'injectivité de* S *est alors strictement positif.*

Démonstration. Le théorème de compacité 4.1.1 montre que S est à géométrie bornée. Le rayon d'injectivité est donc bien uniformément minoré.$\diamond$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 9.7.1. D'après l'équation de Gauss, la courbure des métriques sur S_n est comprise entre deux constantes strictement négatives.

Supposons tout d'abord que le diamètre de S_n/Γ_n est uniformément borné. Alors S_n/Γ_n converge vers une surface compacte. Ainsi, la limite de la suite

$$\{(f_n, S_n, \Gamma_n, \rho_n)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

est une immersion équivariante cocompacte. En particulier, la suite $\{(\Gamma_n, \rho_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ devient constante à partir d'un certain rang. D'après l'unicité énoncée dans lemme de Morse, la suite $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elle même est constante à partir d'un certain rang.

Si maintenant le diamètre de S_n/Γ_n tend vers l'infini, le rayon d'injectivité de S_∞ est nul. D'après la proposition 9.7.3, la courbure moyenne de f_∞ n'est pas bornée. La surface (f_∞, S_∞) est donc dégénérée ou tubulaire à l'infini.$\diamond$

10 Généricité des feuilles denses

Nous nous proposons de démontrer :

Théorème 10.0.1 *L'ensemble des points de $\mathcal{N}$ par lesquels passent des feuilles denses, est dense et est une intersection dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. Nous allons en fait démontrer un résultat plus fort. Notons $\mathcal{M}$ l'espace laminé associé à M, c'est-à-dire tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M}/\pi_1(N)$. Nous montrerons que dans $\mathcal{M}$ une feuille générique est dense.

Remarquons tout d'abord que l'espace $\mathcal{N}$ possède une base dénombrable d'ouverts. Pour cela, il suffit de trouver une application continue injective de $\mathcal{N}$ dans un espace à base dénombrable. Notons donc $N(k)$, l'espace des k-jets de plans de N, et $N(\infty)$ la limite projective des $N(k)$. Cet espace est à base dénombrable. Par ellipticité, l'application naturelle de $\mathcal{N}$ dans $N(\infty)$ est injective et continue. De même, $\mathcal{M}$ est à base dénombrable.

La topologie de $\mathcal{N}$ provient donc d'une métrique qui en fait un espace complet. L'espace $\mathcal{M}$ jouit également de cette propriété. En particulier le théorème de Baire s'applique.

Pour conclure, soit X et Y deux points de $\mathcal{M}$. Il nous suffit de montrer qu'il existe deux suites de points $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tendant respectivement vers X et Y, telles que pour tout n, X_n et Y_n sont sur la même feuille $\mathcal{L}_n$.

Nous nous donnons donc deux k-surfaces pointées (f_∞, S, x) et (ϕ_∞, Σ, y), dans M; notons f, et ϕ respectivement, leurs applications de Gauss-Minkowski à valeurs dans $\partial_\infty M$.

Soit maintenant $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des exhaustions de S et Σ par des ouverts relativement compacts, contenant x et y respectivement. Soit (f_n, S_n), et (ϕ_n, Σ_n), les solutions des problèmes de Plateau asymptotiques définis respectivement par (f, XSS_n), et (ϕ, Σ_n). D'après la proposition 9.6.1, $\{(f_n, S_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{(\phi_n, \Sigma_n, y)\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergent respectivement vers (f_∞, S, x) et (ϕ_∞, Σ, y).

Par ailleurs, pour tout entier p, nous pouvons construire une famille de données asymptotiques $\{(h_{(p,n)}, U_{(p,n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et des injections $i_{(p,n)}$ et $j_{(p,n)}$ de S_p et Σ_p dans $U_{(p,n)}$ respectivement, telles que

$$
\begin{aligned}
(f_p, S_p) &= \liminf_{n\in\mathbb{N}}(h_{(p,n)}, U_{(p,n)})\ [i_{(p,n)}],\\
(\phi_p, \Sigma_p) &= \liminf_{n\in\mathbb{N}}(h_{(p,n)}, U_{(p,n)})\ [j_{(p,n)}].
\end{aligned}
$$

Donnons l'esquisse de cette construction : il suffit de rejoindre $f(S_p)$ et $\phi(\Sigma_p)$ par des rubans dont l'épaisseur tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

En utilisant le théorème 7.3.2, c'est-à-dire en restreignant au besoin $U_{(p,n)}$, nous pouvons enfin faire en sorte que, pour tout n et p, le problème de Plateau asymptotique $(h_{(p,n)}, U_{(p,n)})$ possède une solution $(H_{(p,n)}, U_{(p,n)})$.

D'après le lemme 9.1.2, la suite de k-surfaces pointées

$$
\{(H_{(p,n)}, U_{(p,n)}, i_{(p,n)}(x))\}_{n\in\mathbb{N}},
$$

converge vers (f_p, S_p, x), et, respectivement, la suite

$$\{(H_{(p,n)}, U_{(p,n)}, j_{(p,n)}(y))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

converge vers (ϕ_p, Σ_p, y). Il existe donc une sous-suite $s(n)$ telle que les suites de k-surfaces pointées

$$\{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, i_{(s(n),n)}(x))\}_{n\in\mathbb{N}},$$
$$\{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, j_{(s(n),n)}(y))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

convergent respectivement vers (f_∞, S, x) et (ϕ_∞, Σ, y).

Enonçons ceci dans le cadre de $\mathcal{M}$. Les suites de points de $\mathcal{M}$ définies par

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, i_{(s(n),n)}(x))\}_{n\in\mathbb{N}},$$
$$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, j_{(s(n),n)}(y))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

convergent vers $X = (f_\infty, S, x)$ et $Y = (\phi_\infty, \Sigma, y)$. Par ailleurs, pour tout n, X_n et Y_n appartiennent à la même feuille $\mathcal{L}_n$, définie par

$$\mathcal{L}_n = (H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}).$$

C'est ce que nous voulions démontrer.$\diamond$

11 Stabilité

Notre but dans cette section est de démontrer un résultat analogue au théorème de stabilité du flot géodésique des variétés à courbure strictement négative :

Théorème 11.0.1 *Soit N une variété compacte de dimension 3. Soit g une métrique à courbure strictement plus petite que -1, et $k \in]0, 1[$. Notons $\mathcal{N}_g^k$ son espace des k-surfaces.*

Soit k et l appartenant à $]0, 1[$. Soit g et h deux métriques appartenant à la même composante connexe de l'espace des métriques à courbure plus petite que -1. Il existe alors un homéomorphisme Φ de $\mathcal{N}_g^k$ dans $\mathcal{N}_h^l$ envoyant feuille sur feuille.

11.1 Un lemme

Nous voulons montrer :

Lemme 11.1.1 *Soit g une métrique à courbure strictement négative sur N et c une constante strictement positive. Il existe un voisinage U de g pour la topologie C^∞ tel que : pour toute surface immergée complète à géométrie bornée (f, S) dont les courbures principales (pour la métrique g) sont plus grandes que c, pour toutes métriques h et $\bar{h}$ dans U ; si (f, S) est horosphérique à l'infini pour h, alors (f, S) est horosphérique à l'infini pour $\bar{h}$.*

Démonstration. On peut choisir U de façon à ce que (f, S) ait une courbure extrinsèque plus grande que $c^2/4$ pour toutes les métriques de U. En particulier, S est une surface localement convexe pour toutes ces métriques.

Pour conclure, il suffit de montrer que si (f, S) est horosphérique pour h, alors (f, S) est horosphérique à l'infini pour $\bar{h}$. Or, si (f, S) est horosphérique, elle (ou plus exactement son image inverse dans le revêtement universel) borde un ensemble convexe ayant exactement un point à l'infini. Le bord à l'infini étant un invariant de quasi-isométrie, nous en déduisons que le convexe bordé par (f, S) a lui aussi un seul point à l'infini pour $\bar{h}$.

La surface (f, S) est donc une pseudo-horosphère pour la métrique g. Par le lemme 2.4.1, elle est horosphérique à l'infini pour $\bar{h}$.$\diamond$

11.1.1 Démonstration du théorème 11.0.1

Il suffit de considérer le cas de deux métriques $\bar{h}$ et h suffisamment proches au sens C^∞. Nous allons les prendre dans un ouvert U donné par lemme précédent pour une constante c adéquate.

Soit $\mathcal{L} = (f, S)$ une feuille de $\mathcal{N}^k_{\bar{h}}$. Nous voyons ici (f, S) comme une immersion de S dans UN le fibré unitaire de N. Notons f_R l'application de S dans N, donnée par

$$f_R \ : \ s \mapsto \exp(R f(s)).$$

D'après le corollaire 3.1.2, pour R choisi suffisamment grand indépendamment de S, chacune des courbures principales de f_R est plus grande qu'une constante c, avec $c > l^{1/2}$.

Ainsi pour une h est une métrique suffisamment proche de $\bar{h}$, l'immersion (f_R, S) est à courbure plus grande que l.

Construisons notre homéomorphisme Φ. Séparons en deux cas.

(i) Supposons que (f, S) est un tube.

Alors, d'après le lemme de Morse pour les géodésiques, (f_R, S) est tubulaire pour la métrique h. Soit γ la géodésique correspondante et T son tube. Nous avons donc une projection radiale naturelle π de $f_R(S)$ sur T. Nous posons enfin si $x \in S$

$$\Phi(f, S, x) = (T, \pi \circ f_R(x)),$$

où nous voyons maintenant (f, S, x), *resp.* $(T, \pi \circ f_R(x))$, comme un point de $\mathcal{N}^k_{\bar{h}}$, *resp.* de $\mathcal{N}^l_h$.

(ii) Supposons que (f, S) n'est pas un tube.

D'après le lemme de Morse pour les géodésiques, (f_R, S) n'est pas tubulaire pour h. De plus, par le lemme 11.1.1 (f_R, S) n'est pas horosphérique à l'infini. Le lemme de Morse 6.0.1, permet de construire une l-surface lentille pour la métrique h, $(\bar{f}, \bar{S})$ pour (f_R, S). Enfin, notons π la projection qui a tout point de (f_R, S) associe son pied sur $(\bar{f}, \bar{S})$. Nous pouvons alors définir

$$\Phi(f, S, x) = (\bar{f}, \bar{S}, \pi \circ f_R(x)).$$

A nouveau, nous voyons (f, S, x), *resp.*$(\bar{f}, \bar{S}, \pi \circ f_R(x))$, comme un point de $\mathcal{N}^k_{\bar{h}}$, *resp.* de $\mathcal{N}^l_h$.

Par construction, Φ envoie feuille sur feuille. La continuité de Φ provient du théorème de compacité 4.0.1.

Pour démontrer que Φ est une bijection, remarquons tout d'abord que Φ envoie bijectivement chaque feuille sur chaque feuille. Soit maintenant $\bar{\Phi}$ l'application obtenue en inversant les rôles de h et $\bar{h}$. L'unicité dans le lemme de Morse entraîne que $\Phi \circ \bar{\Phi}$ envoie chaque feuille dans elle-même. L'application $\Phi \circ \bar{\Phi}$ est donc une bijection, ce qui entraîne que Φ est une bijection.$\diamond$

Références

1. M. Anderson, The Dirichlet Problem at infinity for manifolds of negative curvature, J. Differ. Geom. **18**, 701–722 (1983)
2. M. Gromov, Foliated Plateau Problem I, G.A.F.A. **1**, 14–79 (1991)
3. F. Labourie, Equations de Monge-Ampère, courbes holomorphes et laminations, G.A.F.A. **7**, 496–534 (1997)
4. F. Labourie, Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et $\mathbb{CP}^1$-structures, J. London Math. Soc. **45**, 549–565 (1992)
5. H. Rosenberg, J. Spruck, On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space, J. Differ. Geom. **40–2**, 379–409 (1994)