

## Fibration de Hitchin et endoscopie

Bao Châu Ngô

Département de Mathématiques, UMR 8628, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

Oblatum 4-IV-2005 & 8-IX-2005

Published online: 1 February 2006 – © Springer-Verlag 2006

*Mermoz, décidément, s'était retranché derrière son ouvrage, pareil au moissonneur qui, ayant bien lié sa gerbe, se couche dans son champ.*

Terre des hommes. **Saint Exupéry.**

**Abstract.** We propose a geometric interpretation of the theory of elliptic endoscopy, due to Langlands and Kottwitz, in terms of the Hitchin fibration. As applications, we prove a global analog of a purity conjecture, due to Goresky, Kottwitz and MacPherson. For unitary groups, this global purity statement has been used, in a joint work with G. Laumon, to prove the fundamental lemma over a local fields of equal characteristics.

Nous proposons dans cet article une interprétation géométrique de la théorie d'endoscopie elliptique, due à Langlands et Kottwitz, à l'aide de la fibration de Hitchin.

L'espace de module  $\mathcal{M}$  des paires de Hitchin (cf. [11]) dépend de la donnée d'une courbe projective lisse  $X/\mathbb{F}_q$  et d'un fibré inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et d'un schéma en groupes réductifs  $G$  au-dessus de  $X$ . Il paramètre les paires  $(E, \varphi)$  où  $E$  est un  $G$ -torseur sur  $X$  et où  $\varphi$  est une section globale du fibré vectoriel  $\mathrm{ad}(E) \otimes \mathcal{L}$ . Le nombre de  $\mathbb{F}_q$ -points de  $\mathcal{M}$  s'exprime formellement comme le côté géométrique de la formule des traces sur l'algèbre de Lie pour une certaine fonction test très simple. Le découpage de la formule des traces en classes de conjugaison stables correspond de façon évidente au morphisme de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$  associant à une paire  $(E, \varphi)$  le polynôme caractéristique de l'endomorphisme infinitésimal  $\varphi$ . L'espace affine de Hitchin  $\mathbb{A}$  dont la dimension dépend du triplet  $(X, G, \mathcal{L})$ , paramètre ces polynômes caractéristiques. La somme des intégrales orbitales globales dans une classe de conjugaison stable donnée  $a \in \mathbb{A}(k)$ , compte formellement le nombre de points rationnels de la fibre de Hitchin  $f^{-1}(a)$ ; ces nombres pouvant être infinis pour les caractéristiques  $a$  non elliptiques.

Pour un groupe  $G$  semi-simple, il y a un ouvert dense  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  de  $\mathbb{A}$  au-dessus duquel le morphisme  $f$  est propre, en particulier de type fini et où les intégrales orbitales consistent en des sommes finies. Cet ouvert contient les classes de conjugaison stable rationnelles qui sont géométriquement elliptiques c'est-à-dire les classes qui restent elliptiques après toute extension du corps des constants. Dans ce travail, nous nous sommes limités à cet ouvert elliptique. Notre notion d'ellipticité est un peu différente de la notion standard en ce qu'elle concerne uniquement le tore maximal et non le centre de  $G$ .

Du côté automorphe, Langlands [18] et Kottwitz [15] ont réécrit la partie elliptique de la formule des traces en une somme où on voit apparaître une première sommation sur l'ensemble des classes de conjugaison stables des tores maximaux  $T$  de  $G$  définis sur le corps global de  $X$ , puis une deuxième sommation sur les éléments  $\kappa \in \hat{T}^\Gamma$  où  $\hat{T}$  est le tore dual complexe de  $T$ , muni d'une action finie du groupe de Galois  $\Gamma$  du corps  $F$  des fonctions rationnelles de  $X$ . L'objet de cet article est de donner une interprétation géométrique de cette formule, autrement dit de trouver une décomposition de l'image directe  $f_*\mathbb{Q}_\ell$ , du moins de sa restriction à l'ouvert elliptique.

De notre point de vue, il est naturel d'invertir l'ordre dans la sommation ci-dessus. On trouvera d'abord une *décomposition canonique de la cohomologie perverse de la fibration de Hitchin en somme directe*

$${}^p\text{H}^i(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{[\kappa]} {}^p\text{H}^i(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$$

qu'on appellera la  $[\kappa]$ -décomposition. Cette somme s'étend sur l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison  $[\kappa]$  des caractères d'ordre fini  $\kappa : \mathbb{X}^\vee \rightarrow \mathbb{C}^\times$  où on a noté  $\mathbb{X}^\vee$  le groupe des cocaractères du tore maximal abstrait de  $G$  et où  $W' = W \rtimes \Theta$ ,  $W$  étant le groupe de Weyl,  $\Theta$  étant le groupe de Galois d'un revêtement fini étale de  $X$  sur lequel  $G$  devient une forme intérieure d'un groupe constant.

Les relations précises entre  $T$  et  $\kappa$ , comprenant notamment  $\kappa \in \hat{T}^\Gamma$ , sont inhérentes à la formule de Langlands et Kottwitz. Elles se traduiront, dans notre approche, en *une estimation du support de la partie  $[\kappa]$ -isotypique*  ${}^p\text{H}^i(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$ . On démontre que la partie  $\kappa$ -isotypique est supportée par la réunion des images dans  $\mathbb{A}$  des espaces affines de Hitchin  $\mathbb{A}_H$  des *groupes endoscopiques non ramifiés*  $H$  associés à  $\kappa$ , voir le théorème 10.4 qui est le résultat principal de cet article.

Dans la démonstration récente du lemme fondamental pour les groupes unitaires [20], cette description du support a joué le rôle d'un énoncé de pureté analogue à une conjecture de Goresky, Kottwitz et MacPherson [9]. On pourrait s'attendre à ce qu'il en est de même en général, voir la discussion à la fin de §10.

L'ingrédient de base pour construire la  $[\kappa]$ -décomposition est l'existence d'une action d'un champ de Picard relatif  $P/\mathbb{A}$  sur la fibration de Hitchin  $\mathcal{M}/\mathbb{A}$ . Par exemple, si  $G = \text{GL}(n)$ , on peut associer à toute

caractéristique  $a \in \mathbb{A}$ , un revêtement spectral  $Y_a \rightarrow X$  fini de degré  $n$  qui est génériquement étales pour des caractéristiques  $a \in \mathbb{A}$  génériques. D'après Hitchin [11] et Beauville, Narasimhan et Ramanan [2], la fibre  $f^{-1}(a) = \mathcal{M}_a$  s'identifie à la jacobienne compactifiée de  $Y_a$ . Dans ce cas, le champ de Picard  $P_a$  n'est autre que la jacobienne de  $Y_a$  et l'action de  $P_a$  sur  $\mathcal{M}_a$  est l'action évidente de la jacobienne sur la jacobienne compactifiée par produit tensoriel. Dans le cas des groupes classiques, on peut également deviner  $P$  et son action sur  $\mathcal{M}$ . La définition uniforme du champ de Picard  $P/\mathbb{A}$  est fondée sur le schéma en groupes  $J$  des centralisateurs réguliers de  $G$ .

Le champ de Picard relatif  $P/\mathbb{A}$  agit sur la fibration de Hitchin et par conséquent, sur les faisceaux de cohomologie  ${}^p H^i(f_* \mathbb{Q}_\ell)$ . Le lemme d'homotopie (cf. [20] 3.2) nous dit que cette action se factorise à travers une action du faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A})$  dont la fibre en un point géométrique  $a \in \mathbb{A}$  est le groupe des composantes connexes  $\pi_0(P_a)$ .

Sur l'ouvert  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  de  $\mathbb{A}$ , le faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A})$  est un faisceau en groupes abéliens finis. Dans un voisinage d'un point  $a$  elliptique,  ${}^p H^i(f_* \mathbb{Q}_\ell)$  se décompose selon les caractères du groupe fini  $\pi_0(P_a)$  et c'est ainsi qu'on peut faire apparaître les caractères endoscopiques  $\kappa$ .

L'action du champ de Picard  $P$  sur la fibration de Hitchin peut être considérée comme l'interprétation géométrique de l'opération d'extraction de l'intégrale orbitale globale un nombre de Tamagawa. L'intégrale orbitale globale divisée par ce volume, se décompose alors en un produit d'intégrales orbitales locales. Cette formule de produit s'interprète géométriquement : le quotient d'une fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  par le champ de Picard fibre  $P_a$  se décompose en un produit. A partir de cette formule produit, on retrouve l'obstruction cohomologique, construite par Langlands et Kottwitz, pour qu'une collection des classes de conjugaison locales, toutes dans une classe de conjugaison stable donnée, se recollent en une classe de conjugaison rationnelle : l'obstruction se trouve tautologiquement dans  $H^1(k, P_a)$ .

*Remerciements.* J'ai été très influencé par les travaux de Kottwitz sur l'endoscopie, tout particulièrement dans le calcul crucial de  $\pi_0(P_a)$ .

J'ai profité de nombreuses conversations avec G. Laumon sur la fibration de Hitchin et sur le lemme fondamental. Quand je commençais à étudier la fibration de Hitchin et le lien avec l'endoscopie, il m'a suggéré de compter le nombre de points de l'espace de module de Hitchin : ce comptage s'est relevé particulièrement inspirant pour la suite. Sa vigilance m'a également permis de rectifier et d'améliorer l'énoncé de la  $[\kappa]$ -décomposition.

Je remercie L. Breen et M. Raynaud pour leur aide précieuse dans la réalisation de ce travail et tout particulièrement A. Abbes qui m'a indiqué une référence utile à EGA IV.3. Par ailleurs, la tenue d'un groupe de travail sur l'endoscopie et le lemme fondamental au printemps 2003, à l'IHES et à l'Université Paris 13, m'a été une grande aide. Je saisis l'occasion pour remercier ses participants, en particulier P.-H. Chaudouard, J.-F. Dat, L. Fargues, A. Genestier et L. Lafforgue. Je remercie J.-F. Dat et D. Gaitsgory et tout particulièrement le referee pour leurs lectures attentives du manuscrit qui ont épargné à cet article quelques erreurs et O. Gabber pour m'avoir signalé une restriction nécessaire sur la caractéristique. Je remercie V. Drinfeld qui m'a suggéré l'énoncé de la proposition 6.8 qui aura rendu plus clair le fil de l'article.

### 1. Comptage des paires de Hitchin

Soit  $k = \mathbb{F}_q$  un corps fini et  $\bar{k}$  sa clôture algébrique. Dans tout l'article, on va supposer que la caractéristique de  $k$  est suffisamment grande. On en donnera une borne précise dans §2.

Soit  $X$  une courbe projective lisse géométriquement connexe sur  $k$ . Notons  $\eta = \text{Spec}(F)$  son point générique,  $F$  étant le corps des fonctions de  $X$  et notons  $|X|$  l'ensemble des points fermés de  $X$ . Pour toute  $v \in |X|$ , notons  $F_v$  la complétion de  $F$  pour la topologie  $v$ -adique. On va fixer un diviseur effectif  $D = \sum_{v \in |X|} d_v[v]$  de degré  $d = \sum_{v \in |X|} d_v \deg(v)$ . Soit  $\mathcal{O}_X(D)$  le fibré en droites associé à ce diviseur et  $L_D$  le  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $X$  associé à ce fibré en droites. On supposera que  $\deg(D) > 2g - 2$ .

Soit  $\mathbb{G}$  un groupe réductif connexe *déployé*<sup>1</sup> sur  $k$  et  $G$  un schéma en groupes sur  $X$  qui localement pour la topologie étale de  $X$ , est isomorphe à  $X \times \mathbb{G}$ . Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{G}$  est un groupe algébrique sur  $k$  qui s'insère dans la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{G}^{\text{ad}} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{G}) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G}) \rightarrow 1$$

où  $\mathbb{G}^{\text{ad}}$  est le quotient de  $\mathbb{G}$  par son centre et où  $\text{Out}(\mathbb{G})$  est un groupe discret, cf. [23]. Le groupe  $\mathbb{G}$  a des épingleages définis sur  $k$ , fixons-en un. Le sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  fixant ce scindage s'envoie bijectivement sur  $\text{Out}(\mathbb{G})$  et induit donc un scindage  $\text{Out}(\mathbb{G}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{G})$  de la suite exacte ci-dessus.

Soit  $x$  un point géométrique de  $X$ . La donnée de  $G$  induit un  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G$  sur  $X$  dont la classe d'isomorphisme est un élément

$$[\tau_G] \in H^1(\pi_1(X, x), \text{Aut}(\mathbb{G})(\bar{k})).$$

En utilisant la projection  $\text{Aut}(\mathbb{G}) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  on obtient un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G^{\text{Out}}$ . La classe d'isomorphisme  $[\tau_G^{\text{Out}}] \in H^1(\pi_1(X, x), \text{Out}(\mathbb{G}))$  consiste en un homomorphisme

$$\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$$

puisque  $\mathbb{G}$  étant déployé, l'action de  $\pi_1(X, x)$  sur  $\text{Out}(\mathbb{G})$  via  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  est triviale. Nous allons noter  $\Theta$  l'image de  $\pi_1(X, x)$  dans  $\text{Out}(\mathbb{G})$ . L'homomorphisme surjectif  $\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \Theta$  définit un revêtement  $X_\Theta$  de  $X$  étale galoisien de groupe de Galois  $\Theta$  et pointé par un point géométrique  $x_\Theta$  de  $X_\Theta$ .

Le relèvement  $\text{Out}(\mathbb{G}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{G})$  construit à partir du scindage, nous donne à nouveau un  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G^{\text{ext}}$ . Ce tosseur correspond à un schéma en groupes quasi-déployé  $G^{\text{ext}}$  sur  $X$  dont  $G$  est une forme intérieure. Le schéma en groupes  $G$  est quasi-déployé si les  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseurs  $\tau_G$  et  $\tau_G^{\text{ext}}$  sont isomorphes.

---

<sup>1</sup> Tout groupe réductif connexe sur un corps fini est quasi-déployé et cela suffit pour nous. Néanmoins, comme  $\mathbb{G}$  sert seulement comme modèle auquel  $G$  est localement isomorphe à pour la topologie étale, il n'y a pas de raison de ne pas supposer  $\mathbb{G}$  déployé.

On appelle *paires de Hitchin*, par rapport à  $X, G$  et  $\mathcal{O}_X(D)$ , les paires  $(E, \varphi)$  où  $E$  est un  $G$ -torseur sur  $X$  et où  $\varphi \in H^0(X, \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D))$ ,  $\text{ad}(E)$  étant le fibré vectoriel sur  $X$  obtenu en tordant le fibré vectoriel  $\text{Lie}(G)$  muni de l'action adjointe de  $G$  par le  $G$ -torseur  $E$ . On considère le champ  $\mathcal{M}$  classifiant ces paires. Il associe à tout  $\mathbb{F}_q$ -schéma  $S$  la catégorie en groupoïdes des paires  $(E, \varphi)$  où  $E$  est un  $G$ -torseur sur  $X \times S$  et où  $\varphi \in H^0(\text{ad}(E) \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(D))$ ,  $\text{pr}_X : X \times S \rightarrow X$  étant la projection évidente sur  $X$ . C'est un champ algébrique.

On va décrire de façon adélique la catégorie  $\mathcal{M}(k)$  des paires de Hitchin définies sur  $k$ . Soit  $(E, \varphi)$  un objet de  $\mathcal{M}(k)$ . La classe d'isomorphisme de la fibre générique de  $E$  définit un élément  $\text{cl}_\eta(E)$  de  $H^1(F, G)$ .

**Lemme 1.1** *Soit  $E$  un  $G$ -torseur sur  $X$ . L'élément  $\text{cl}_\eta(E)$  de  $H^1(F, G)$  qui correspond à la classe d'isomorphisme du  $G$ -torseur  $E_\eta$ , a l'image triviale dans  $H^1(F_v, G)$  pour toutes les places  $v$  de  $X$ . Inversement soit  $c$  un élément de*

$$\ker^1(F, G) = \ker[H^1(F, G) \rightarrow \prod_v H^1(F_v, G)].$$

*Alors, il existe un  $G$ -torseur  $E$  sur  $X$  dont la classe d'isomorphisme de la fibre générique  $\text{cl}_\eta(E)$  est l'élément  $c$ .*

*Démonstration.* Soit  $\text{cl}_v(E)$  l'image de  $\text{cl}_\eta(E)$  dans  $H^1(F_v, G)$ . Cet élément est aussi l'image de l'élément de  $\beta_v \in H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_v), G)$ , la classe d'isomorphisme du  $G$ -torseur  $E_{\mathcal{O}_v}$  sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ . Ce  $H^1$  étant trivial par un théorème de Lang, on déduit que l'élément  $\text{cl}_v(E) \in H^1(F_v, G)$  est trivial.

Inversement, soit  $E_\eta$  un  $G$ -torseur sur le point générique  $\eta$  de  $X$  ayant la classe d'isomorphisme  $c \in \ker^1(F, G)$ . On peut prolonger  $E_\eta$  en un  $G$ -torseur  $E_U$  sur un ouvert  $U$  de  $X$ . Sur un point  $v$  du complémentaire de  $U$ , on peut recoller  $E_U$  avec le  $G$ -torseur triviale sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ , parce que la restriction à  $F_v$  de  $E_U$  est un  $G$ -torseur trivial. On obtient ainsi un  $G$ -torseur sur  $X$  dont la classe d'isomorphisme de la fibre générique est l'élément  $c$ . □

Deux  $G$ -torseurs sur  $X$  seront dits isogènes s'ils ont des fibres génériques isomorphes. On a démontré que l'ensemble des classes d'isogénie de  $G$ -torseur sur  $X$  est en bijection canonique avec le sous-ensemble  $\ker^1(F, G)$  de  $H^1(F, G)$  constitué des éléments localement triviaux. Dans le cas où  $G$  est un groupe semi-simple adjoint ou simplement connexe, d'après un théorème de Kneser, cet ensemble est réduit à l'élément neutre de  $H^1(F, G)$ . Ce n'est pas le cas en général. Notons au passage que l'ensemble de  $\ker^1(F, G)$  apparaît également dans le comptage des points des variétés de Shimura (cf. [16]).

Pour tous  $c \in \ker^1(F, G)$ , on choisit un  $G$ -torseur modèle  $\mathbb{E}_c$  sur  $X$  dont la fibre générique a la classe d'isomorphisme  $c$  et qui est muni des trivialisations sur tous les traits  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  avec  $v \in |X|$ . Soit  $G_c$  le schéma en groupes des automorphismes de  $\mathbb{E}_c$  et  $\text{Lie}(G_c)$  le schéma en algèbres de

Lie associé. Les trivialisations locales choisies induisent des isomorphismes entre les changements de base à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  de  $G$  et de  $G_c$ .

Considérons donc la catégorie  $\mathcal{R}_c$  des triplets  $(E, \varphi, \iota)$  formée d'une paire de Hitchin  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(k)$  et d'une rigidification de la fibre générique  $E_\eta \iota : E_\eta \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}_{c,\eta}$ . Le groupe des automorphismes d'un tel triplet est trivial puisqu'un automorphisme de  $E$  qui fixe la trivialisations générique  $\iota$  est nécessairement l'identité si bien que la catégorie  $\mathcal{R}_c$  est discrète.

**Proposition 1.2** *On a une équivalence de catégories entre la catégorie  $\mathcal{R}_c$  des triplets  $(E, \varphi, \iota)$  comme ci-dessus, et la catégorie discrète des uplets*

$$(\gamma, (g_v)_{v \in |X|})$$

constitués

- d'un élément  $\gamma \in \text{Lie}(G_c)(F)$ ,
- d'un  $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$  pour chaque  $v \in |X|$  tel que pour presque toutes  $v$ ,  $g_v$  est la classe neutre,

qui vérifient  $\text{ad}(g_v)^{-1}(\gamma) \in \varpi_v^{-d_v} \text{Lie}(G)(\mathcal{O}_v)$  pour tous  $v \in |X|$ . Ici,  $\varpi_v$  est une uniformisante de  $F_v$ .

*Démonstration.* La donnée de la trivialisations  $\iota$  induit un isomorphisme de  $F$ -algèbres de Lie  $\text{ad}(E_\eta) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(G_c)_\eta$ . La section  $\varphi \in H^0(X, \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D))$  définit un élément  $\gamma \in \text{Lie}(G_c)(F)$  puisque le fibré en droites  $\mathcal{O}_X(D)$  est lui aussi trivialisé génériquement.

Puisqu'on s'est donné des trivialisations de  $\mathbb{E}_c$  sur les traits  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ , le  $G$ -torseur  $E$  muni d'un isomorphisme avec  $\mathbb{E}_c$  au-dessus du point générique de  $X$ , est équivalente à la donnée pour tous  $v \in |X|$  d'un élément  $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$  lesquels sont presque tous neutres. Dans cette bijection

$$(E, \iota) \leftrightarrow (g_v)_{v \in |X|},$$

via l'identification des fibres génériques  $\text{ad}(\iota) : \text{ad}(E)_\eta \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{c,\eta}$ , les réseaux  $\text{ad}(E)(\mathcal{O}_v)$  et  $\text{ad}(g_v)\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  se correspondent. Ainsi, pour que  $\gamma \in \mathfrak{g}_c(F)$  définit une section globale de  $\text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D)$ , il faut et il suffit que pour tous  $v \in |X|$ , on a

$$\gamma \in \varpi_v^{-d_v} \text{ad}(g_v)\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$$

ce qui est équivalent à la condition  $\text{ad}(g_v)^{-1}\gamma \in \varpi_v^{-d_v} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . □

**Corollaire 1.3** *On a une équivalence de catégories entre  $\mathcal{M}(k)$  et la catégorie dont les objets sont les triples  $(c; \gamma, (g_v)_{v \in |X|})$  avec*

- $c \in \ker^1(F, G)$ ,
- $\gamma \in \text{Lie}(G_c)(F)$ ,
- pour tout  $v \in |F|$  une classe  $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$  qui est presque partout triviale,
- $\text{ad}(g_v)^{-1}\gamma \in \varpi_v^{-d_v} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$

et dont l'ensemble des flèches d'un objet  $(c; \gamma, (g_v)_{v \in |X|})$  sur un autre objet  $(c'; \gamma', (g'_v)_{v \in |X|})$  est

- vide si  $c \neq c'$  ;
- l'ensemble des éléments  $\xi \in G_c(F)$  tels que  $\gamma' = \text{ad}(\xi)\gamma$  et  $g'_v = \xi g_v$  si  $c = c'$ .

Cet énoncé nous conduit à écrire une égalité qui pour l'instant n'a pas de sens car les sommes en jeu sont infinies

$$|\mathcal{M}(k)| = \sum_{\alpha \in \ker^1(F, G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}(\alpha)(F)/\text{conj.}} O_\gamma(1_D)$$

où  $O_\gamma(1_D)$  est l'intégrale orbitale globale

$$O_\gamma(1_D) = \int_{G_\gamma(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)} 1_D(\text{ad}(g)^{-1}\gamma) dg$$

de la fonction

$$1_D = \bigotimes_{v \in |X|} 1_{\varpi_v^{-d_v} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)},$$

$1_{\varpi_x^{-d_x} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)}$  étant la fonction caractéristique du compact ouvert  $\varpi^{-d_x} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)$  de  $\mathfrak{g}(F_v)$ , le produit tensoriel sur toutes les places  $v \in |X|$  étant le produit tensoriel restreint. Cette égalité sera un très bon guide pour la suite de l'article.

## 2. Morphisme de Hitchin et section de Kostant

On supposera désormais que la caractéristique de  $k$  ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl  $W$  de  $\mathbb{G}$ .

Dans cette section, on rappelle la construction, due à Hitchin, du morphisme qui associe à une paire de Hitchin, son « polynôme caractéristique ». On commencera par rappeler le théorème de restriction de Chevalley. La construction présentée ici qui est bien entendu la même que la construction originale de Hitchin, peut sembler singulièrement encombrante. Ceci est du en partie à notre désir de traiter uniformément des schémas groupes réductifs  $G$  sur  $X$ . Par ailleurs, le langage de champs qui semble lourd ici se montrera efficace dans la suite de l'article.

De règle générale, on commence par une construction sur le groupe constant  $\mathbb{G}$ , on vérifie que la construction est  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -équivariante, puis on le tord par le  $\text{Aut}(G)$ -torseur  $\tau_G$  pour passer à  $G$ . On utilisera un indice  $\mathbb{G}$  ou la police « double-barre » pour désigner les objets attachés à  $\mathbb{G}$ .

Dans §1, on a fixé un épinglage de  $\mathbb{G}$  défini sur  $k$ . Cet épinglage consiste en un tore maximal  $\mathbb{T}$  de  $\mathbb{G}$ , un sous-groupe de Borel  $\mathbb{B}$  contenant  $\mathbb{T}$  tous les deux définis sur  $k$ , et enfin pour toute racine simple  $\alpha \in \Delta$ , un vecteur non nul  $\mathbf{x}_\alpha$  de l'espace propre de  $\mathfrak{g}_\alpha$  de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbb{G})$  où  $\mathbb{T}$  agit par le caractère  $\alpha$ . L'hypothèse  $\mathbb{G}$  déployé implique que ces vecteurs sont définis sur  $k$ . On

note  $\mathbf{x}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{x}_\alpha$ . Pour toute  $\alpha \in \Delta$ , on peut choisir de façon unique un vecteur non nul  $\mathbf{x}_{-\alpha}$  dans l'espace propre de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathfrak{g}$  de caractère  $-\alpha$  tel que  $[\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_{-\alpha}] = \alpha^\vee$ . On note  $\mathbf{x}_- = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{x}_{-\alpha}$ . Le sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  fixant cet épinglage s'envoie bijectivement sur le groupe  $\text{Out}(\mathbb{G})$  de sorte que  $\text{Out}(\mathbb{G})$  agit canoniquement sur  $\mathbb{G}$  en fixant l'épinglage. On en déduit une action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbb{G}$  à travers  $\text{Out}(\mathbb{G})$  qui est différente de l'action tautologique de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbb{G}$ .

Notons  $k[\mathfrak{g}]$  l'algèbre des fonctions polynômiales sur  $\mathfrak{g}$ . L'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  induit une action de  $\mathbb{G}$  sur cette algèbre  $k[\mathfrak{g}]$ . Soit  $k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}}$  la sous-algèbre de  $k[\mathfrak{g}]$  des fonctions invariantes sous l'action adjointe  $\mathbb{G}$ . Notons  $\mathfrak{t}$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{T}$ . Soit  $k[\mathfrak{t}]^W$  la sous-algèbre des  $W$ -invariants de  $k[\mathfrak{t}]$ . On note  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}} = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W)$ . Le groupe  $\text{Out}(\mathbb{G})$  agit sur  $k[\mathfrak{t}]$  et sur  $W$  donc sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ . On en déduit une action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  à travers son quotient  $\text{Out}(\mathbb{G})$ . L'énoncé suivant a été démontré par Kostant en caractéristique nulle et étendu par Veldkamp aux caractéristiques positives suffisamment grandes par rapport au système de racines, voir [12] et [24].

**Théorème 2.1** *Supposons que  $k$  est un corps de caractéristique ne divisant pas l'ordre du groupe de Weyl  $|W|$ .*

1. *La restriction de  $\mathfrak{g}$  à  $\mathfrak{t}$  induit un isomorphisme  $k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}} \xrightarrow{\sim} k[\mathfrak{t}]^W$ . De plus,  $k[\mathfrak{t}]^W$  est une algèbre de polynômes en les variables  $u_1, \dots, u_r$  qui sont homogènes de degrés  $m_1 + 1, \dots, m_r + 1$  qui ne dépendent pas des choix des  $u_i$ . On a donc un morphisme  $\mathbb{G}_m$ -équivariant  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  où  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}} = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W)$  muni de l'action de  $\mathbb{G}_m$  défini par  $t \cdot (u_1, \dots, u_r) = (t^{m_1+1}u_1, \dots, t^{m_r+1}u_r)$ .*
2. *Soit  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  l'ouvert de  $\mathfrak{g}$  des éléments dont la dimension du centralisateur est égale à la dimension de  $r$ . Alors le morphisme restreint  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est un morphisme lisse dont les fibres sont des orbites sous  $G$ .*
3. *Soit  $\mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+}$  l'algèbre de Lie du centralisateur de  $\mathbf{x}_+$ . Alors, le sous-espace affine  $\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+}$  est contenu dans  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  et de plus, la restriction de  $\chi$  à cet espace définit un isomorphisme  $\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ . Son inverse est une section de Kostant  $\epsilon : \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ .*

Nous avons besoin d'un énoncé sur la section de Kostant qui tient compte de l'action de  $\mathbb{G}_m$ . Considérons l'action  $\rho(\mathbb{G}_m)$  sur  $\mathfrak{g}$  qui agit trivialement sur  $\mathfrak{t}$  et pour toute racine  $\alpha$ ,  $\rho(\mathbb{G}_m)$  agit sur l'espace propre  $\mathfrak{g}_\alpha$  par  $\rho(t)(x_\alpha) = t^{\text{ht}(\alpha)}x_\alpha$  pour tous  $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ . En particulier  $\rho(t)\mathbf{x}_+ = t\mathbf{x}_+$  de sorte que  $\rho(\mathbb{G}_m)$  laisse stable le sous-espace vectoriel  $\mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+}$  de  $\mathfrak{g}$ . Du fait que  $\rho(t)\mathbf{x}_- = t^{-1}\mathbf{x}_-$ , il ne laisse pas stable la section de Kostant  $\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+}$ . Considérons l'action  $\rho_+$  de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g}$  définit par

$$\rho_+(t)(x) = t\rho(t)(x)$$

le composé de  $\rho$  par l'homothétie. Il est clair que

$$\rho_+(t)(\mathbf{x}_-) = \mathbf{x}_-$$

et que  $\rho_+(\mathbb{G}_m)$  laisse stable  $\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}_+}$ .

**Proposition 2.2** *L'isomorphisme  $\epsilon^{-1} : \mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est  $\mathbb{G}_m$ -équivariante pour l'action de  $\rho_+(\mathbb{G}_m)$  sur  $\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+}$  et pour l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  mentionné dans le théorème.*

*Démonstration.* L'action de  $\mathbb{G}_m$  à travers  $\rho$  sur  $\mathfrak{g}$  laisse stable  $\mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+}$  et est diagonalisable. Soit  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  une base de  $\mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+}$  formée de vecteurs propres sous l'action  $\rho(\mathbb{G}_m)$  de valeurs propres  $\rho(t)\mathbf{v}_i = t^{n_i}\mathbf{v}_i$  avec  $n_i \in \mathbb{N}$ . En ajoutant l'homothétie, on a  $\rho_+(t) = t^{n_i+1}(\mathbf{v}_i)$ .

Soit  $x \in \mathfrak{g}$  régulier. Il existe un unique  $y = \mathbf{x}_- + \sum_{i=1}^r v_i^*(y)\mathbf{v}_i$  conjugué à  $x$ . Les fonctions  $x \mapsto v_i^*(y)$  engendrent alors l'algèbre des polynômes  $\text{ad}(\mathbb{G})$ -invariantes sur  $\mathfrak{g}$ . Il reste à démontrer qu'ils sont homogènes de bon degré.

Pour tout  $t \in \mathbb{G}_m$ ,  $tx$  est conjugué à  $ty = t\mathbf{x}_- + \sum_{i=1}^r tv_i^*(y)\mathbf{v}_i$ . Cet élément est conjugué par  $\text{ad} \circ \rho(t)$  à

$$\text{ad} \circ \rho(t)(ty) = \mathbf{x}_- + \sum_{i=1}^r t^{n_i+1} v_i^*(y)\mathbf{v}_i$$

puisque pour toute racine simple  $\alpha \in \Delta$ ,  $\langle -\alpha, \rho^\vee \rangle = -1$ , si bien que les polynômes  $u_i$  sur  $\mathfrak{g}$  qui correspondent à  $v_i^*$  via l'isomorphisme de Kostant  $k[\mathfrak{g}]^{\text{ad}(G)} \xrightarrow{\sim} k[\mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+}]$ , sont bien des polynômes homogènes de degré  $n_i + 1$ . En particulier, l'ensemble des  $n_i$  et l'ensemble des  $m_i$  sont identiques, ce qui est d'ailleurs un théorème de Kostant. □

**Proposition 2.3** *Le morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -équivariant pour l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathfrak{g}$  induite de l'action tautologique sur  $\mathbb{G}$  et l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  à travers  $\text{Out}(\mathbb{G})$ . La section de Kostant  $\epsilon : \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbf{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+} \subset \mathfrak{g}$  est  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -équivariante pour l'action de  $\text{Out}(\mathbb{G})$  sur  $\mathfrak{g}$  qui fixe l'épinglage.*

Nous allons maintenant rappeler la construction du morphisme de Hitchin dans un langage un peu différent de [11]. Soit  $\mathbb{S}$  un schéma de base quelconque. Pour tout  $\mathbb{S}$ -groupe algébrique lisse  $G$ , on note  $\mathbf{B}G$  le classifiant de  $G$  au-dessus de  $\mathbb{S}$ . Ce champ associe à tout  $\mathbb{S}$ -schéma  $S$  la catégorie en groupoïdes des  $G$ -torseurs sur  $S$ . Pour tout  $G$ -torseur  $E$  sur  $S$ , on note  $h_E : S \rightarrow \mathbf{B}G$  le morphisme associé. Pour tout  $\mathbb{S}$ -schéma  $V$  muni d'une action relative de  $G$ , on note  $[V/G]$  le champ quotient de  $V$  par  $G$ . Par définition, il associe à tout  $\mathbb{S}$ -schéma  $S$  la catégorie dont les objets consistent en un  $G$ -torseur  $E$  sur  $S$  plus une section  $\varphi : S \rightarrow V_S \times^G E$  de l'image réciproque de  $V$  tordue par le tosseur  $E$ . Cette construction s'applique en particulier au  $\mathbb{S}$ -fibré vectoriel  $V$  muni d'une action  $\nu : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Pour tout  $G$ -torseur  $E$  sur une base  $S$ , on note  $\nu(E) = V \times^G E$  le fibré vectoriel tordu par  $\nu$  sur  $S$ , de fibres isomorphes à  $V$ . Le quotient  $[V/G]$  classe les  $G$ -torseurs  $E$  sur  $X$  munis d'une section  $\varphi \in H^0(S, \nu(E))$ .

Maintenant  $\mathbb{S}$  sera la courbe  $X$  et  $G$  sera le schéma en groupes réductifs sur  $X$  comme dans le paragraphe précédent. Le groupe  $G$  agit sur le fibré

vectoriel  $\text{Lie}(G)$  par l'action adjointe. Par ailleurs  $\mathbb{G}_m$  agit sur  $\text{Lie}(G)$  par homothétie et ses deux actions commutent.

Soit  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(S)$  un point de  $\mathcal{M}$  à valeurs dans un  $k$ -schéma  $S$ . La donnée de  $E$  induit un morphisme  $h_E : X \times S \rightarrow \mathbf{B}G$ . Le fibré en droites  $\mathcal{O}_X(D)$  associé au diviseur  $D$  de  $X$ , induit un morphisme  $h_D : X \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . On a donc un morphisme  $h_E \times h_D : X \times S \rightarrow \mathbf{B}G \times \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . La donnée de la section  $\varphi \in H^0(X \times S, \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D))$  est donc équivalente à la donnée d'un morphisme

$$h_{E,\varphi} : X \times S \rightarrow [\text{Lie}(G)/(G \times \mathbb{G}_m)]$$

qui relève  $h_E \times h_D : X \times S \rightarrow [\mathbf{B}G \times \mathbf{B}\mathbb{G}_m]$ . La donnée des tels morphismes  $h_{E,\varphi}$  détermine donc le couple  $(E, \varphi)$  et vice versa.

Soit  $\tau_G$  le  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur associé à  $G$  comme dans §1. L'algèbre de Lie de  $G$  s'obtient alors en tordant  $\mathfrak{g}$  par  $\tau_G$

$$\text{Lie}(G) = \mathfrak{g} \times^{\text{Aut}(\mathbb{G})} \tau_G$$

de même que  $G = \mathbb{G} \times^{\text{Aut}(\mathbb{G})} \tau_G$ . On a une action stricte de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $[\mathfrak{g}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m]$  de sorte qu'on peut également tordre  $[\mathfrak{g}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m]$  par le  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G$ . On obtient ainsi

$$[\mathfrak{g}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m] \times^{\text{Aut}(\mathbb{G})} \tau_G = [\text{Lie}(G)/G \times \mathbb{G}_m].$$

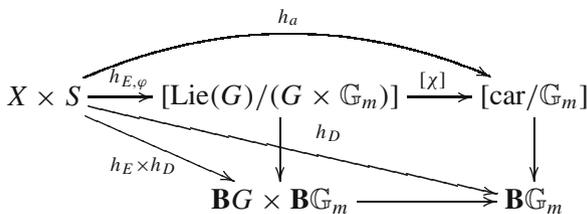
On a une action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  à travers  $\text{Out}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  de sorte qu'on peut tordre  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  par  $\tau_G$

$$\mathbf{car} := \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \times^{\text{Aut}(\mathbb{G})} \tau_G.$$

Le morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  étant  $\text{Aut}(\mathbb{G}) \times \mathbb{G}_m$ -équivariant, il induit un morphisme de  $X$ -schémas  $\text{Lie}(G) \rightarrow \mathbf{car}$  qui est  $G \times \mathbb{G}_m$ -équivariant. On en déduit un morphisme de champs quotients

$$[\chi] : [\text{Lie}(G)/(G \times \mathbb{G}_m)] \rightarrow \mathbf{car}/\mathbb{G}_m.$$

Pour définir le morphisme de Hitchin, il suffit maintenant de composer avec  $[\chi]$  comme dans le diagramme



Il associe donc une flèche  $h_{E,\varphi}$  au-dessus de  $h_E \times h_D$  une flèche  $h_a$  au-dessus de  $h_D$ .

**Lemme 2.4** *Le foncteur qui associe à un  $k$ -schéma  $S$  la catégorie des flèches  $S \times X \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  au-dessus de la flèche  $h_D : X \times S \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$  est représentable par un espace affine  $\mathbb{A}$  appelé l'espace affine de Hitchin.*

*Démonstration.* La donnée de  $h_a$  est équivalente à la donnée d'une section

$$a : X \times S \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$$

de l'espace affine  $\mathbf{car}$  tordu par le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_D$  au-dessus de  $X \times S$ . Le tordu  $\mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  est l'espace total d'un fibré vectoriel sur  $X$  car il provient après torsion de l'espace affine  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ . Par suite, le foncteur ci-dessus mentionné est représentable par l'espace affine associé à l'espace des sections globales de ce fibré vectoriel.  $\square$

Dans le cas où  $G$  est isomorphe au-groupe constant  $G \xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{G}$ ,  $\mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  est l'espace total du fibré totalement décomposé  $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X((m_i + 1)D)$ . L'espace de ses sections globales est

$$\mathbb{A}(k) = \bigoplus_{i=1}^r H^0(X, \mathcal{O}_X((m_i + 1)D)).$$

C'est la description originale de Hitchin de cet espace affine. Dans le cas où  $G$  est le groupe unitaire associé à un revêtement étale quadratique  $X' \rightarrow X$ , le fibré inversible de carré trivial sur  $X$  associé à  $X' \rightarrow X$ , intervient dans la description de l'espace de Hitchin, voir [20].

Il sera bien commode de pouvoir choisir un  $k$ -point dans la fibre  $\mathcal{M}_a$ . Ceci nécessite des hypothèses supplémentaires sans lesquelles  $\mathcal{M}_a(k)$  pourrait être vide.

**Proposition 2.5** *On supposera que  $G$  est quasi-déployé c'est-à-dire que les  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseurs  $\tau_G$  et  $\tau_G^{\text{ext}}$  construits dans §1 sont isomorphes. On se donne de plus une racine carrée  $L_D^{\otimes 1/2}$  de  $L_D$ . Alors, il existe une section du morphisme de Hitchin.*

*Démonstration.* On va construire une section du morphisme de Hitchin en modelant sur la section de Kostant.

On a vu que la section de Kostant  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+}$  induit un isomorphisme

$$[\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/\mathbb{G}_m] \xrightarrow{\sim} [(\mathfrak{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+})/\rho_+(\mathbb{G}_m)].$$

En considérant l'homomorphisme diagonal  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ , on obtient un morphisme

$$[(\mathfrak{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathbf{x}^+})/\rho_+(\mathbb{G}_m)] \rightarrow [\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m \times \rho(\mathbb{G}_m)]$$

où dans champ but, le premier facteur de  $\mathbb{G}_m$  agit par l'homothétie et où le second par  $\rho$ . La petite complication vient du fait que l'homomorphisme  $\rho : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  ne factorise par un caractère  $\mathbb{G}_m \rightarrow G$  et il faut en prendre une racine carrée.

Notons donc  $\mathbb{G}_m^{[2]} \rightarrow \mathbb{G}_m$  l'homomorphisme d'une copie de  $\mathbb{G}_m$  notée  $\mathbb{G}_m^{[2]}$  dans  $\mathbb{G}_m$  qui consiste à l'élévation à la puissance 2. Par le changement de base  $\mathbf{B}\mathbb{G}_m^{[2]} \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ , on obtient les morphismes

$$[\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/\mathbb{G}_m^{[2]}] \xrightarrow{\sim} [(\mathbf{x}_- + \mathbf{g}^{\mathbf{x}_+})/\rho_+(\mathbb{G}_m^{[2]})] \rightarrow [\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m^{[2]} \times \rho(\mathbb{G}_m^{[2]})]$$

où  $\mathbb{G}_m^{[2]}$  agit à travers l'homomorphisme  $\mathbb{G}_m^{[2]} \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

On a maintenant un cocaractère  $2\rho : \mathbb{G}_m^{[2]} \rightarrow \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}$  qui induit un morphisme

$$[\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m^{[2]} \times \rho(\mathbb{G}_m^{[2]})] \rightarrow [\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m^{[2]} \times \mathbb{G}].$$

En composant, on obtient donc un morphisme

$$[\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/\mathbb{G}_m^{[2]}] \rightarrow [\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m^{[2]} \times \mathbb{G}]$$

qui relève le morphisme de Chevalley  $[\mathfrak{g}/\mathbb{G}_m^{[2]} \times \mathbb{G}] \rightarrow [\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/\mathbb{G}_m^{[2]}]$ . Le morphisme ci-dessus est équivariant pour l'action de  $\text{Out}(\mathbb{G})$  de sorte qu'on peut le tordre par le toseur  $\tau^{\text{ext}}(\mathbb{G})$ . En utilisant l'hypothèse  $G$  quasi-déployé  $\tau(G) = \tau^{\text{ext}}(G)$ , on en déduit un morphisme

$$[\mathbf{car}/\mathbb{G}_m^{[2]}] \rightarrow [\text{Lie}(G)/G \times \mathbb{G}_m^{[2]}].$$

Maintenant, la donnée d'une flèche  $h_a : X \times S \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  au-dessus de  $h_D : X \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$  correspondant au  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_D$ , plus une racine carrée  $L_D^{\otimes 1/2}$  de  $L_D$ , correspond simplement à une flèche  $h_a^{1/2} : X \times S \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m^{[2]}]$ . En composant avec la section définie ci-dessus on obtient une flèche

$$h_\phi^{1/2} : X \times S \rightarrow [\text{Lie}(G)/G \times \mathbb{G}_m^{[2]}]$$

qui consiste en une flèche

$$h_\phi : X \times S \rightarrow [\text{Lie}(G)/G \times \mathbb{G}_m]$$

au-dessus de  $h_D : X \times S \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ , plus d'une racine carrée de  $L_D$ .  $\square$

### 3. Centralisateurs

Dans cette section, on va construire un schéma en groupes lisse  $J$  au-dessus de  $\mathbf{car}$  muni d'un homomorphisme  $\chi^*J \rightarrow I$  vers le schéma en groupes des centralisateurs  $I$  au-dessus de  $\mathfrak{g}$ . Cet homomorphisme est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  des éléments réguliers de  $\mathfrak{g}$ .

Considérons le schéma en groupes  $I$  sur  $\mathfrak{g}$  des paires

$$I_{\mathbb{G}} = \{(x, g) \in \mathfrak{g} \times \mathbb{G} \mid \text{ad}(g)x = x\}.$$

L'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$  se relève à  $I$  de façon évidente  $\text{ad}(h)(x, g) = (\text{ad}(h)x, hgh^{-1})$ . L'action par homothétie de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g}$  se relève également  $t(x, g) = (tx, g)$ . On en déduit un schéma en groupes

$$[I_{\mathbb{G}}] := [I_{\mathbb{G}}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m]$$

au-dessus de  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ . De plus, l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $[\mathfrak{g}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m]$  relève à  $[I_{\mathbb{G}}]$  de sorte qu'on peut tordre  $[I_{\mathbb{G}}]$  par le  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  torseur  $\tau_G$ . On obtient ainsi un schéma en groupes  $[I]$  au-dessus de  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ . Notons un énoncé tautologique.

**Lemme 3.1** *Soit  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(S)$  une paire de Hitchin. Soit  $h_{E,\varphi} : X \times S \rightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$  le morphisme associé. Alors on a*

$$I_{E,\varphi} = h_{E,\varphi}^*[I].$$

Le morphisme caractéristique de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  admet une section, due à Kostant  $\epsilon : \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}$  dont l'image est contenue dans l'ouvert dense  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  des éléments réguliers de  $\mathfrak{g}$ . On note  $J_{\mathbb{G}} = \epsilon^*I_{\mathbb{G}}$  et on l'appelle le *centralisateur régulier*. La façon dont on construit ici  $J_{\mathbb{G}}$  dépend de la section de Kostant mais il n'en dépend pas en fait.

Par définition,  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est l'ouvert de  $\mathfrak{g}$  des éléments  $x$  dont le centralisateur  $I_x$  a dimension égale à  $r$  le rang de  $\mathfrak{g}$ . On sait de plus qu'au-dessus de  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ , le schéma en groupes  $I_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}$  est lisse. Puisque l'image de la section de Kostant  $\epsilon$  est contenu dans  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ , le schéma en groupes  $J_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est aussi lisse de dimension relative  $r$ . Rappelons qu'ici on a utilisé l'hypothèse que la caractéristique de  $k$  ne divise pas l'ordre de groupe de Weyl de  $\mathbb{G}$ . Il sera intéressant de savoir si en petites caractéristiques, la restriction de  $I_{\mathbb{G}}$  à  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est encore plate. Si c'est le cas, la plupart des résultats de ce travail devrait se généraliser en petites caractéristiques.

**Proposition 3.2** *On a un isomorphisme canonique  $\chi^*J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  qui, de plus, se prolonge en un homomorphisme de schéma en groupes  $\chi^*J_{\mathbb{G}} \rightarrow I_{\mathbb{G}}$ .*

*Démonstration.* Considérons le morphisme

$$\beta : \mathbb{G} \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\text{reg}}$$

défini par  $(g, a) \mapsto \text{ad}(g)\epsilon(a)$  où  $\epsilon : \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}$  est la section de Kostant. C'est un morphisme lisse et surjectif donc fidèlement plat. L'image inverse de  $I_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  par  $\beta$  est l'ensemble des triplets  $(g, a; h)$  tel que  $\text{ad}(hg)\epsilon(a) = \text{ad}(g)\epsilon(a)$ . L'image inverse de  $\chi^*J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  sur  $\mathbb{G} \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est l'ensemble des triplets  $(g, a; h')$  tel que  $\text{ad}(h')\kappa(a) = \kappa(a)$ . On a clairement un isomorphisme

$$\beta^*\chi^*J|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \xrightarrow{\sim} \beta^*I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$$

défini par  $(g, a, h') \mapsto (g, a; h)$  avec  $h = gh'g^{-1}$ .

En vertu du théorème de descente fidèlement plate, pour démontrer que cet isomorphisme descend en un isomorphisme  $\chi^* J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$ , il suffit de démontrer une égalité de cocycle sur

$$(G \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}}) \times_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} (G \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}}).$$

Ce produit fibré est l'espace des  $(g_1, g_2; a)$  tels que  $\text{ad}(g_1)\epsilon(a) = \text{ad}(g_2)\epsilon(a)$ , ou autrement dit  $g_1^{-1}g_2 \in I_{\kappa(a)}$ . L'égalité de cocycle à démontrer consiste entre l'égalité entre les deux isomorphismes entre les images inverses de  $\chi^* J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  et  $I_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  donné par  $h' \mapsto g_1 h' g_1^{-1}$  et  $h' \mapsto g_1 h' g_1^{-1}$ . Ils se diffèrent l'un de l'autre de l'automorphisme intérieur  $\text{int}(g^{-1}g_2)$  de  $I_{\kappa(a)}$  lequel n'est autre l'identité parce que  $I_{\kappa(a)}$  est un groupe *commutatif*. On en déduit par le théorème de descente fidèlement plate de Grothendieck, un isomorphisme  $\chi^* J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$ .

Puisque  $J_{\mathbb{G}}$  est lisse sur  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ ,  $\chi^* J_{\mathbb{G}}$  est un schéma en groupes lisse sur  $\mathfrak{g}$ . Puisque  $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est un fermé de codimension trois de  $\mathfrak{g}$ , en particulier plus grande que deux,  $\chi^* J - \chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  est un fermé de codimension plus grand que 2 du schéma  $\chi^* J_{\mathbb{G}}$ . Celui-ci est par ailleurs un schéma lisse donc normal. Le morphisme  $\chi^* J_{\mathbb{G}}|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \rightarrow I_{\mathbb{G}}$  à valeur dans le schéma affine  $I_{\mathbb{G}}$  se prolonge donc en un unique morphisme  $\chi^* J_{\mathbb{G}} \rightarrow I_{\mathbb{G}}$  [EGA IV.4 20.4.12]. L'unicité du prolongement implique que celui-ci est un homomorphisme de schémas en groupes sur  $\mathfrak{g}$ . □

Cette proposition généralise une opération bien connue dans le cas  $GL(n)$ . L'espace  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  classe dans ce cas les polynômes unitaires de degré  $n$ . Pour tout  $a \in \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  vu comme un polynôme unitaire  $a \in k[t]$ ,  $J_a$  est le groupe des éléments inversibles de l'algèbre  $k[t]/(a)$ . Pour toute application linéaire  $x : k^n \rightarrow k^n$  de polynôme caractéristique  $a$ , on peut faire agir l'algèbre  $k[t]/(a)$  sur l'espace vectoriel  $k^n$  en faisant agir la variable  $t$  comme l'endomorphisme  $x$ . Cette action commute à  $x$  si bien qu'elle définit un homomorphisme  $J_a \rightarrow I_x$  où  $I_x$  est le centralisateur de  $x$ .

**Proposition 3.3** *Il existe un schéma en groupes  $[J]$  au-dessus du quotient  $[\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$ , uniquement déterminé à un unique isomorphisme près, dont l'image inverse sur  $\mathbf{car}$  est le schéma des centralisateurs réguliers  $J$ . De plus, sur  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ , on a un homomorphisme canonique  $[\chi]^*[J] \rightarrow [I]$  dont la restriction à  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m]$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* L'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g}$  par l'homothétie préserve l'ouvert  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  des éléments réguliers, d'où une action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  et donc une action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$ , compatible à l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ . Cette action induit par la descente fidèlement plate une action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $J$  compatible à l'action  $\nu_{\chi}(\mathbb{G}_m)$  sur  $\mathbf{car}$ . En prenant le quotient au sens des champs de  $J$  par cette action de  $\mathbb{G}_m$ , on obtient le schéma en groupes  $[J_{\mathbb{G}}]$  sur  $[\mathbf{car}/\nu_{\chi}(\mathbb{G}_m)]$  désiré. L'homomorphisme  $[\chi]^*[J_{\mathbb{G}}] \rightarrow [I_{\mathbb{G}}]$  s'obtient également de  $\chi^* J_{\mathbb{G}} \rightarrow I_{\mathbb{G}}$  par la descente fidèlement plate.

Pour passer du groupe constant  $\mathbb{G}$  au schéma en groupes  $G$ , on utilise de nouveau le  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G$ . En tordant  $[J_{\mathbb{G}}]/[\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  par  $\tau_G$ , on obtient un schéma en groupes lisses  $[J]/[\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  qui vient avec un homomorphisme  $\chi^*[J] \rightarrow [I]$  entre schémas en groupes sur  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ .  $\square$

**Proposition 3.4** *Le morphisme  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}] \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est une gerbe liée par  $J$ . De plus, cette gerbe est neutralisée par la section de Kostant et on a un isomorphisme  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -équivariant*

$$[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}] \xrightarrow{\sim} [\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/J].$$

*Démonstration.* Il revient au même de démontrer l’isomorphisme

$$[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}] \xrightarrow{\sim} [\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/J].$$

Pour cela, on utilise la section de Kostant  $\kappa : \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  et le morphisme  $\mathbb{G} \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  donné par  $(g, a) \mapsto \text{ad}(g)\kappa(a)$ . Ce morphisme est lisse et surjectif. Puisque  $J = \kappa^*I$  où  $I$  est le schéma en groupes des centralisateurs, on a un isomorphisme

$$(\mathbb{G} \times \mathbf{car}_{\mathbb{G}})/J \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^{\text{reg}}$$

d’où on déduit l’isomorphisme  $[\mathbf{car}_{\mathbb{G}}/J] \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}]$  en divisant par l’action de  $\mathbb{G}$ . Puisque la section de Kostant est  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -équivariante, la neutralisation de la  $J$ -gerbe  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}]$  est  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -équivariante.  $\square$

Notons que la neutralisation définie par la section de Kostant est  $\text{Out}(G)$ -équivariante mais n’est pas  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -équivariante pour l’action de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathfrak{g}$  déduite de l’action tautologique de  $\text{Aut}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbb{G}$ . La structure de  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/\mathbb{G}]$  comme  $J$ -gerbe est quant à elle  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -équivariante. On en déduit le corollaire suivant après la torsion par le  $\text{Aut}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G$ .

**Proposition 3.5** *Au-dessus de  $X$ ,  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G]$  est une  $J$ -gerbe au-dessus de  $\mathbf{car}$ . Cette gerbe est neutre si  $G$  est quasi-déployée c’est-à-dire si  $\tau_G = \tau_G^{\text{ext}}$ .*

Le centralisateur régulier  $J_{\mathbb{G}}$  au-dessus de  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  peut être décrit d’une autre façon d’après un résultat de Donagi et Gaitsgory que nous allons passer en revue (cf. [8]). Considérons le revêtement fini galoisien  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  de groupe de Galois  $W$ , ramifié le long du diviseur

$$D = \bigcup_{\alpha \in \Phi} D_{\alpha}$$

où  $D_{\alpha}$  est l’hyperplan de  $D$  est défini par la dérivée  $d\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_{\alpha}$ , et est aussi le lieu des points fixes de l’involution  $\mathfrak{s}_{\alpha} \in W$  associée à la racine  $\alpha$ . Considérons le faisceau en groupes  $\mathcal{J}^+$  sur  $\mathbf{car}$  qui associe à tout  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ -schéma  $S$ , le groupe des morphismes

$$t : \tilde{S} = S \times_{\mathbf{car}_{\mathbb{G}}} \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{T}$$

qui sont  $W$ -équivariants. Soit  $\tilde{s} \in \tilde{S}$  un point fixe de  $\mathfrak{s}_{\alpha}$ , alors  $t(\tilde{s})$  est un point fixe par  $\mathfrak{s}_{\alpha}$  dans  $\mathbb{T}$ . On en déduit que  $\alpha(t(\tilde{s})) = \pm 1$ .

**Définition 3.6** Soit  $\mathcal{J}$  le sous-foncteur ouvert de  $\mathcal{J}^+$  qui associe à tout  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ -schéma  $S$  le groupe des morphismes  $t : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{T}$  qui sont  $W$ -équivalents et tels que pour tout  $\tilde{s} \in \tilde{S}$  fixe par l'involution  $\mathbf{s}_\alpha$ , on a  $\alpha(t(\tilde{s})) \neq -1$ .

La condition subtile  $\alpha(t(x)) \neq -1$  pour les  $x$  tels que  $s_\alpha(x) = x$ , fait la distinction entre  $\mathrm{SL}_2$  et  $\mathrm{PGL}_2$ . Dans ces deux cas, le tore maximal  $\mathbb{T}$  est isomorphe à  $\mathbb{G}_m$ , le groupe de Weyl  $W = \mathfrak{S}_2$  agit sur  $\mathbb{T}$  par  $t \mapsto t^{-1}$  et le sous-groupe des points fixes de  $\mathbb{T}$  sous  $W$  est  $\{\pm 1\}$ . Dans le cas  $\mathrm{SL}_2$ , la racine positive consiste en le caractère  $\alpha(t) = t^2$ ; dans le cas  $\mathrm{PGL}_2$ , c'est le caractère  $\alpha(t) = t$ . Ainsi, la condition  $\alpha(t(x)) \neq -1$  est vide dans le cas  $\mathrm{SL}_2$ , mais elle est non vide dans le cas  $\mathrm{PGL}_2$ .

L'énoncé suivant est dû à Donagi et Gaitsgory (cf. [8] théorème 11.6).

**Proposition 3.7** On a un isomorphisme  $J_{\mathbb{G}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}$  entre faisceaux en groupes au-dessus de  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ .

Le théorème 11.6. de loc. cit s'énonce dans un contexte légèrement différent qu'ici. En particulier, leur centralisateur régulier est un schéma en groupes lisse sur une base différente de  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$ . Toutefois, on peut montrer facilement que les deux énoncés sont équivalents en utilisant la résolution simultanée de Grothendieck qui relie les deux bases.

Après torsion par le  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G^{\mathrm{Out}}$  au-dessus de  $X$ , on obtient l'énoncé analogue pour le schéma en groupes  $J$  au-dessus de  $\mathbf{car}$ . On a en effet  $\mathbf{car} = \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \times^{\mathrm{Out}(\mathbb{G})} \tau_G^{\mathrm{Out}}$  et  $J = J_{\mathbb{G}} \times^{\mathrm{Out}(\mathbb{G})} \tau_G^{\mathrm{Out}}$ .

Rappelons qu'on a un revêtement fini étale  $X_\Theta \rightarrow X$ , pointé par un point géométrique  $x_\Theta$ , de groupe de Galois  $\Theta$  où  $\Theta$  est l'image de l'homomorphisme  $\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{G})$  associé au  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G^{\mathrm{Out}}$ . On a un morphisme fini ramifié

$$X_\Theta \times \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}$$

dont la restriction à la partie semi-simple régulière  $X_\Theta \times \mathfrak{t}^{\mathrm{ssr}} \rightarrow \mathbf{car}^{\mathrm{ssr}}$  est étale galoisien de groupe de Galois  $W' = W \rtimes \Theta$ .

La proposition suivante est une conséquence immédiate de 3.7.

**Proposition 3.8** Comme faisceau sur la topologie étale de  $\mathbf{car}$ ,  $J$  associe à tout  $\mathbf{car}$ -schéma  $S$  le groupe des flèches  $W'$ -équivalentes

$$t : \tilde{S} = (X_\Theta \times \mathfrak{t}) \times_{\mathbf{car}} S \rightarrow \mathbb{T}$$

telles que pour toute racine  $\alpha$  et pour tout  $\tilde{s} \in \tilde{S}$  fixe par l'involution  $\mathbf{s}_\alpha$ , on a  $\alpha(t(\tilde{s})) \neq -1$ .

#### 4. Action de $P_a$ sur $\mathcal{M}_a$

Dans cette section, on construit l'action canonique du champ de Picard relatif  $P$  au-dessus de  $\mathbb{A}$  sur la fibration de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$ . On démontre ensuite que l'action de  $P_a$  sur  $\mathcal{M}_a = f^{-1}(a)$  est simplement

transitive pour des caractéristiques  $a$  très régulières. Plus généralement, pour des caractéristiques génériquement semi-simples régulières, on démontre une formule de produit pour le quotient  $[\mathcal{M}_a/P_a]$ .

Soit  $a : S \rightarrow \mathbb{A}$  un  $k$ -schéma au-dessus de  $\mathbb{A}$ . La donnée de  $a$  est équivalente à la donnée d'une flèche  $h_a : X \times S \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  qui relève  $h_D : X \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . En prenant l'image réciproque de  $[J]$ , on a un schéma en groupes lisse  $J_a := h_a^*[J]$  au-dessus de  $X \times S$ . Notons  $P_a$  la catégorie de Picard des  $J_a$ -torseurs sur  $X \times S$ . La règle  $a \mapsto P_a$  définit un champ de Picard au-dessus de l'espace affine de Hitchin  $\mathbb{A}$  qu'on note  $P$ .

On va maintenant construire une action de  $P$  sur le champ  $\mathcal{M}$  relativement au-dessus de  $\mathbb{A}$ . Soit  $S$  un  $\mathbb{F}_q$ -schéma et  $a \in \mathbb{A}(S)$ . La fibre  $f^{-1}(a)$  est la catégorie des paires  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(S)$  ayant la caractéristique  $a$ . Il s'agit de faire agir la catégorie de Picard  $P_a$  sur cette catégorie fibre  $\mathcal{M}_a$ .

Pour tout objet  $(E, \varphi)$  de  $f^{-1}(a)$ , on a le schéma en groupes  $I_{E,\varphi}$  qui représente le faisceau des automorphismes de  $(E, \varphi)$  au-dessus de  $X \times S$ . On a un homomorphisme de schémas en groupes

$$J_a \rightarrow I_{(E,\varphi)}$$

qui se déduit de l'homomorphisme canonique  $\chi^*J \rightarrow I$  sur  $\mathfrak{g}$ . Il s'ensuit qu'on peut tordre la paire  $(E, \varphi)$  à l'aide de tout torseur sous  $J_a$  sans changer la caractéristique de  $(E, \varphi)$ . Ceci définit l'action de  $P_a$  sur  $\mathcal{M}_a$ .

D'après le théorème de restriction de Chevalley-Kostant, rappelé en §2, on sait que l'anneau des fonctions algébriques sur l'espace affine  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  est canoniquement isomorphe à l'anneau  $k[\mathfrak{t}]^W$  des fonctions sur  $\mathfrak{t}$  qui sont  $W$ -invariantes. On a donc un morphisme  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  qui est fini, génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $W$ . Soit  $\mathfrak{B}_{\mathbb{G}}$  le lieu de branchement de  $\pi$ . C'est le diviseur de  $\mathbf{car}_{\mathbb{G}}$  défini par l'annulation de la fonction discriminante  $\prod_{\alpha \in \Phi} d\alpha$ . Ici, les fonctions  $d\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  désignent la dérivation de la racine  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ ; leur produit étant visiblement invariant par  $W$ . Après torsion par le  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\tau_G^{\text{Out}}$ , on obtient au-dessus de  $X$ , un morphisme fini ramifié  $\mathfrak{t} \times^{\text{Out}(\mathbb{G})} \tau_G^{\text{Out}} \rightarrow \mathbf{car}_{\mathbb{G}} \times^{\text{Out}(\mathbb{G})} \tau_G^{\text{Out}}$  que nous allons noter  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}$ . On notera  $\mathfrak{B} \subset \mathbf{car}$  le lieu de branchement de  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}$  qui se déduit de  $\mathfrak{B}_{\mathbb{G}}$  par torsion par  $\tau_G^{\text{Out}}$ .

Une caractéristique  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  est une section

$$h_a : \bar{X} \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D.$$

Elle est dite *très régulière* si  $h_a(X)$  coupe transversalement le lieu de branchement  $\mathfrak{B} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  du morphisme fini qui se déduit de  $\pi$  en tordant par le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_D$

**Définition 4.1** *La caractéristique  $a$  est dite très régulière si l'image de la section  $s_a(X)$  coupe transversalement le diviseur  $\mathfrak{B} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$ , c'est-à-dire qu'elle coupe ce diviseur dans sa partie lisse avec la multiplicité un en chaque point de l'intersection.*

Lorsque le diviseur  $D$  est très ample, les caractéristiques très régulières forment un ouvert dense de  $\mathbb{A}$  d'après le théorème de Bertini (cf. [7]).

**Proposition 4.2** *Soit  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  une caractéristique très régulière. Soit  $(E, \varphi)$  une paire de Hitchin de caractéristique  $a$ . Alors l'application induite*

$$h_{E,\varphi} : X \rightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$$

se factorise par l'ouvert  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m]$ .

*Démonstration.* Le problème étant local, on peut remplacer  $X$  par  $\text{Spec}(k[[t]])$ ,  $E$  par un  $G$ -torseur trivial et  $L_D$  par un  $\mathbb{G}_m$ -torseur trivial. La section  $\varphi$  est alors une flèche

$$\varphi : \text{Spec}(\bar{k}[[t]]) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g},x})$$

où  $\mathcal{O}_{\mathfrak{g},x}$  est le localisé de  $\mathfrak{g}$  en un point  $x \in \mathfrak{g}$ . Notons  $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathfrak{g},x} \rightarrow k[[t]]$  l'homomorphisme local associé. Notons  $\mathfrak{m}_x$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{g},x}$ ; on a  $(\varphi^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_x$  en vertu de la localité de  $\varphi^\#$ .

On doit démontrer que  $x \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ . Si ce n'est pas le cas, on a

$$\text{discr} = \prod_{\alpha \in \Phi} d\alpha \in \mathfrak{m}_x^2$$

puisque la fonction discriminante s'annule à l'ordre au moins 2 à un point  $x \in \mathfrak{g}$  non régulier. Il s'ensuit que l'image de  $\text{discr}$  dans  $k[[t]]$  est de valuation au moins 2. Ceci contredit l'hypothèse que la caractéristique  $a$  est très régulière. □

L'énoncé suivant est une variante d'un théorème de Faltings (cf. [7] III.2).

**Proposition 4.3** *Si  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  est une caractéristique très régulière, l'action du champ de Picard  $P_a$  sur la fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  est simplement transitive. Autrement dit,  $\mathcal{M}_a$  est une gerbe liée par le champ de Picard  $P_a$ .*

*Sous l'hypothèse supplémentaire de 2.5, cette gerbe est neutre.*

*Démonstration.* Soit  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  une caractéristique très régulière. La donnée de  $a$  est équivalente à la donnée d'une flèche  $h_a : \bar{X} \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  au-dessus de  $h_D : \bar{X} \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . La donnée d'un  $S$ -point  $(E, \varphi)$  dans la fibre  $\mathcal{M}_a$ , est équivalente à la donnée d'une flèche  $h_{E,\varphi}$  qui, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times S & \xrightarrow{h_{E,\varphi}} & [\mathfrak{g}/(G \times \mathbb{G}_m)] \\ & \searrow h_a & \downarrow [\chi] \\ & & [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m] \end{array}$$

relève le morphisme  $h_a$  constant sur le facteur  $S$ .

L'hypothèse  $a$  très régulière force la flèche  $h_{E,\varphi}$  à se factoriser par l'ouvert  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m]$ . Or,  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/(G \times \mathbb{G}_m)]$  est une  $J$ -gerbe au-dessus de  $[\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  de sorte que la fibre  $\mathcal{M}_a$  est un torseur sous la catégorie de Picard  $P_a$  des  $J_a$ -torseurs.  $\square$

Lorsque la caractéristique  $a$  n'est plus très régulière, l'action de  $P_a$  sur  $\mathcal{M}_a$  n'est plus simplement transitive. On peut encore dire quelque chose sur le quotient  $[\mathcal{M}_a/P_a]$  si la caractéristique de  $a$  est *génériquement semi-simple régulière*. Dans le cas où  $G = \text{GL}_n$  et  $p > n$ , cette hypothèse signifie que la courbe spectrale est réduite.

**Définition 4.4** Une caractéristique  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  est dite *génériquement semi-simple régulière*, si l'image du morphisme  $h_a : X \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  qui lui est associé, n'est pas contenue dans  $\mathfrak{B} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  où  $\mathfrak{B} \subset \mathbf{car}$  est le lieu de branchement du morphisme  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbf{car}$ .

On note  $\mathbb{A}^\heartsuit$  l'ouvert de  $\mathbb{A}$  des  $a$  *génériquement semi-simple régulières*. Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$ . Soit  $U_a$  l'image réciproque de  $\bar{X}$  du complémentaire de  $[\mathfrak{B}/v_\chi(\mathbb{G}_m)]$ . Le complémentaire  $\bar{X} - U_a$  est alors un ensemble fini de points. Soit  $v \in \bar{X} - U_a$ . Notons  $\bar{X}_v$  le complété de  $\bar{X}$  en  $v$ , le disque formel autour de  $\bar{X}$ , et  $\bar{X}_v^\bullet$  le disque formel pointé.

Considérons la catégorie  $\mathcal{M}_{a,v}$  des paires  $(E_v, \varphi_v)$  où  $E_v$  est un  $G$ -torseur sur  $\bar{X}_v$  et  $\varphi_v$  est une section de  $\varphi_v \in H^0(\bar{X}_v, \text{ad}(E_v) \otimes \mathcal{O}_X(D))$  ayant pour caractéristique  $a$ . Autrement dit  $\mathcal{M}_{a,v}$  est la catégorie des flèches

$$h_{\varphi_v} : \bar{X}_v \rightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$$

qui relève la flèche  $h_{a_v} : \bar{X}_v \times [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  déduites de  $a : \bar{X} \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$ . Notons  $J_{a_v}$  la restriction de  $J_a$  à  $\bar{X}_v$ ; on a  $J_{a_v} = h_{a_v}^*[J]$ . Soit  $P_{a,v}$  la catégorie de Picard des  $J_{a,v}$ -torseurs sur  $\bar{X}_v$ . On a une action de la catégorie de Picard  $P_{a,v}$  sur la catégorie  $\mathcal{M}_{a,v}$  définie de la même façon que l'action de  $P_a$  sur  $\mathcal{M}_a$ . On peut former des 2-catégories quotients  $[\mathcal{M}_{a,v}/P_{a,v}]$  analogues locaux du 2-quotient  $[\mathcal{M}_a(\bar{k})/P_a(\bar{k})]$ , voir le complément qui suit pour un petit résumé sur les 2-catégories quotients.

**Lemme 4.5** Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  une caractéristique *génériquement semi-simple régulière*. Les 2-catégories quotients  $[\mathcal{M}_a(\bar{k})/P_a(\bar{k})]$  et  $[\mathcal{M}_{a,v}/P_{a,v}]$  sont alors équivalentes à des 1-catégories.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que le critère de Dat pour qu'un 2-quotient soit équivalent à une 1-catégorie, cf. lemme 4.7 qui suit. Dans le cas local, il s'agit de démontrer que pour tout objet  $(E_v, \varphi_v)$  de  $\mathcal{M}_{a,v}$ , l'homomorphisme

$$\text{Aut}_{P_{a,v}}(1_{P_{a,v}}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{M}_{a,v}}(E_v, \varphi_v)$$

du groupe des automorphismes de l'objet neutre de  $P_{a,v}$  dans celui de  $(E_v, \varphi_v)$  qui se déduit de l'action de  $P_{a,v}$  sur  $\mathcal{M}_{a,v}$  est un homomorphisme injectif.

Pour démontrer cette injectivité, notons que la restriction du disque formel  $\overline{X}_v$  au disque formel pointé  $\overline{X}_v^\bullet$  induit des homomorphismes injectifs lesquels sont représentés par les flèches verticales dans le diagramme suivant

$$\begin{CD} \text{Aut}_{P_{a,v}}(1_{P_{a,v}}) @>>> \text{Aut}_{\mathcal{M}_{a,v}}(E_v, \varphi_v) \\ @VVV @VVV \\ \text{Aut}(1_{P_{a,v}}|_{\overline{X}_v^\bullet}) @>>> \text{Aut}((E_v, \varphi_v)|_{\overline{X}_v^\bullet}) \end{CD}$$

De plus, l'hypothèse que  $a$  est génériquement semi-simple régulière implique que la flèche horizontale en bas est un isomorphisme. Il s'ensuit que la flèche horizontale en haut est également injective. La même démonstration vaut pour le quotient  $[\mathcal{M}_a(\overline{k})/P_a(\overline{k})]$ . □

Supposons que la catégorie  $\mathcal{M}_a(\overline{k})$  est non vide. C'est le cas notamment si les hypothèses de 2.5 soient satisfaites. Soit  $(E^*, \varphi^*)$  un point dans  $\mathcal{M}_a(\overline{k})$  par exemple le point de Kostant construit dans 2.5. Soit  $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$  l'ensemble des  $(E_v, \varphi_v, \iota_v^\bullet)$  où  $(E_v, \varphi_v)$  est un objet de  $\mathcal{M}_v(a)$  et où  $\iota_v^\bullet$  est un isomorphisme au-dessus du disque pointé  $\overline{X}_v^\bullet$  entre  $(E_v, \varphi_v)$  et la paire de base  $(E^*, \varphi^*)$ . Considérons aussi le groupe  $P_{a,v}^\bullet$  des  $J_{a_v}$ -torseurs sur  $\overline{X}_v$  munis d'une trivialisations sur  $\overline{X}_v^\bullet$ . On a encore une action de  $P_{a,v}^\bullet$  sur  $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$ .

**Théorème 4.6** *Supposons que la catégorie  $\mathcal{M}_a(\overline{k})$  est non vide. Alors, on a des équivalences de catégories*

$$[\mathcal{M}_a(\overline{k})/P_a(\overline{k})] = \prod_{v \in \overline{X} - \overline{U}_a} [\mathcal{M}_{a,v}/P_{a,v}] = \prod_{v \in \overline{X} - \overline{U}_a} [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet].$$

*Démonstration.* On a des morphismes naturels qui forment un triangle :

$$\begin{CD} \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet] @>\alpha>> [\mathcal{M}_a/P_a] \\ @V\beta VV @AA\gamma A \\ \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}/P_{a,v}] \end{CD}$$

où :

- la flèche  $\alpha$  est une flèche de recollement formel à la Beauville-Laszlo (cf. [1]). À l'aide des isomorphismes sur les disques pointés  $\overline{X}_v^\bullet$ , elle recolle les  $G$ -torseurs  $E_v$  sur les disque  $\overline{X}_v$  à la restriction de  $E^*$  à l'ouvert complémentaire de la réunion des  $v$ , en un  $G$ -torseur  $E$  sur  $\overline{X}$ . Les sections  $\varphi_v$  et  $\varphi^*$  se correspondant via l'isomorphisme sur le disque

pointé, se recollent donc en une section  $\varphi$  de  $\text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D)$  au-dessus de  $X$ . Ce foncteur de recollement est compatible à l'action de  $P_{a_v}^\bullet$  et de  $P_a$  et définit donc une flèche entre les quotients.

- la flèche  $\beta$  est l'oubli des trivialisations génériques.
- la flèche  $\gamma$  est la restriction de  $\overline{X}$  à  $\overline{X}_v$ .

Il est clair que  $\beta = \gamma \circ \alpha$ .

Il suffit de démontrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des équivalences de catégorie. Montrons d'abord que le foncteur

$$\alpha : \prod_{v \in \overline{X} - \overline{U}_a} [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet / P_{a,v}^\bullet] \rightarrow [\mathcal{M}_a(\overline{k}) / P_a(\overline{k})]$$

est pleinement fidèle. Donnons-nous  $m = (m_v)$  et  $n = (n_v)$  avec  $m_v, n_v$  dans  $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$  pour toutes places  $v \in \overline{X} - \overline{U}_a$  et un isomorphisme de  $\alpha(m)$  dans  $\alpha(n)$  dans  $[\mathcal{M}_a / P_a]$ . Cet isomorphisme consiste en un objet  $p$  de  $P_a$  qui envoie  $\alpha(m)$  sur  $\alpha(n)$  vus comme objets de  $\mathcal{M}_a$ . Or les restrictions de  $\alpha(m)$  et  $\alpha(n)$  à l'ouvert  $\overline{U}_a$  sont isomorphes à la restriction de  $(E^*, \varphi^*)$  de sorte que le  $J_a$ -torseur  $p$  est muni d'une trivialisations sur l'ouvert  $\overline{X} - \overline{U}_a$ . Il définit donc un objet de  $\prod_v P_{a,v}$ . Ceci prouve que le foncteur  $\alpha$  est pleinement fidèle.

Montrons maintenant que  $\alpha$  est une foncteur essentiellement surjectif. Soit  $m$  un objet de  $\mathcal{M}_a$ . Sur l'ouvert  $\overline{U}_a$ , il existe un  $J_a$ -torseur  $p'$  tel que  $p'm|_{\overline{X}} = (E^*, \varphi^*)|_{\overline{U}_a}$ . On peut prolonger le  $J_a$ -torseur  $p'$  sur  $\overline{X}^0$  en un  $J_a$ -torseur  $p$  sur  $\overline{X}$  parce que sur les disques pointés, n'importe quel  $J_a$ -torseur est trivial. Les deux points  $pm$  et  $(E^*, \varphi^*)$  sont munis d'un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\overline{U}_a$ . On en déduit les points  $m_v$  de  $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$  tels qu'en recollant les  $m_v$  avec le point base  $(E^*, \varphi^*)$ , on obtient  $pm$ .

On démontre de façon similaire que le foncteur  $\beta$  est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. □

**Complément : 2-catégorie quotient** Rappelons la construction de la 1-catégorie quotient d'un ensemble  $X$  par l'action d'un groupe  $G$ . La catégorie quotient est la catégorie qui résout un problème universel

- $Q$  est une catégorie muni d'un foncteur  $\pi : X \rightarrow Q$ ,  $X$  étant considéré comme une catégorie sans autres flèches que les identités.
- $\iota$  est un isomorphisme de foncteur  $\pi \circ \text{pr}_X \xrightarrow{\sim} \pi \circ \text{act}$  où  $\text{pr}_X, \text{act} : G \times X \rightrightarrows X$  sont les application respectivement de projection sur  $X$  et de l'action de  $G$  sur  $X$ .
- $\iota$  vérifie une égalité de 1-cocycle sur  $G \times G \times X$ .

La catégorie quotient  $Q$  est construit comme la catégorie ayant l'ensemble des objets l'ensemble  $\text{ob}(Q) = X$ , et pour tous  $x_1, x_2 \in \text{ob}(Q)$ ,

$$\text{Hom}_Q(x_1, x_2) = \{q_g \mid g \in G \text{ tel que } gx_1 = x_2\}.$$

La structure de composition dans la catégorie  $Q$  vient de la multiplication dans le groupe  $G$ . Pour tout  $g \in G, x \in X$ , on a donc une flèche canonique  $q_g \in \text{Hom}_Q(x, gx)$  qui définit l'isomorphisme entre les deux foncteurs  $\pi \circ \text{pr}_X \xrightarrow{\sim} \pi \circ \text{act}$ .

Soient maintenant  $X$  une catégorie en groupoïdes et  $G$  une catégorie de Picard agissant sur  $X$ . Le quotient  $Q$  de  $X$  par  $G$  est une 2-catégorie qui résout un problème universel :

- $Q$  est une 2-catégorie munie d'un 2-foncteur  $\pi : X \rightarrow Q$ ,  $X$  étant considéré comme une 2-catégories n'ayant que des 2-flèches identités.
- un objet donné dans la 1-catégorie  $\text{Hom}(\pi \circ \text{pr}_X, \pi \circ \text{act})$  où  $\text{pr}_X, \text{act} : G \times X \rightrightarrows X$  sont respectivement les foncteurs de projection sur  $X$  et de l'action de  $G$  sur  $X$ .
- une 2-flèche donnée au niveau de  $G^2 \times X$ .
- une égalité de 2-cocycle sur la 2-flèche au niveau de  $G^3 \times X$ .

Cette 2-catégorie quotient  $Q$  peut être construite comme suit.

- L'ensemble des objets de  $Q$  est l'ensembles des objets de  $X$ .
- Soit  $x_1, x_2 \in \text{ob}(X)$ , les objets de la 1-catégorie  $\text{Hom}_Q(x_1, x_2)$  sont les paires  $q_{g,\alpha} = (g, \alpha)$  où  $g$  est un objet de  $G$  et  $\alpha \in \text{Hom}_X(gx_1, x_2)$ .
- Une 2-flèche  $q_{g,\alpha} \Rightarrow q_{g',\alpha'}$  est un élément  $\beta \in \text{Hom}_G(g, g')$  tel que le triangle formé de  $\text{act}(\beta, 1_{x_1}) : gx_1 \rightarrow g'x_1, \alpha : gx_1 \rightarrow x_2$  et  $\alpha' : g'x_1 \rightarrow x_2$ , commute.

J.-F. Dat m'a expliqué le critère suivant pour qu'un 2-quotient soit équivalent à une 1-catégorie.

**Lemme 4.7** *Pour que le 2-quotient d'une catégorie en groupoïdes  $X$  par l'action d'un catégorie de Picard  $Q$  soit équivalente à une 1-catégorie, il faut et il suffit que pour tout objet  $x$  de  $X$ , l'homomorphisme*

$$\text{Aut}_Q(1_Q) \rightarrow \text{Aut}_X(x)$$

déduit de l'action de  $Q$  sur  $X$ , soit un homomorphisme injectif.

*Démonstration.* Pour que le 2-quotient  $[X/Q]$  soit équivalente à une 1-catégorie, il faut et il suffit que pour tous objets  $x_1, x_2$  de  $[X/Q]$ , la 1-catégorie des flèches de  $x_1$  dans  $x_2$  soit une catégorie discrète. Par construction du 2-quotient, ceci revient à l'injectivité mentionnée dans l'énoncé.  $\square$

### 5. Lissité

Dans la section 1, on a un homomorphisme  $\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  dont l'image est  $\Theta$ . Soit  $\Theta_{\text{geo}}$  le sous-groupe de  $\Theta$  l'image du groupe fondamental géométrique de  $X$

$$\rho_G^{\text{geo}} : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$$

où  $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$ . Puisque  $\pi_1(\overline{X}, x)$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(X, x)$ ,  $\Theta_{\text{geo}}$  est un sous-groupe distingué de  $\Theta$ . Notons  $\overline{X}_{\Theta}^{\text{geo}}$  le revêtement fini

étale galoisien de  $\overline{X}$  de groupe de Galois  $\Theta_{\text{geo}}$  associé. Il est pointé par  $x_{\Theta}^{\text{geo}}$  au-dessus de  $x$ .

Nous supposons dans cette section que le groupe des caractères  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{T}$  n'a pas de vecteurs non triviaux invariants sous  $W'_{\text{geo}} = W \rtimes \Theta_{\text{geo}}$ . C'est en particulier le cas si  $\mathbb{G}$  est un groupe semi-simple. Nous allons dans ce cas démontrer que le produit fibré  $\mathcal{M} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}^{\heartsuit}$  est lisse et que le morphisme  $P \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}^{\heartsuit} \rightarrow \mathbb{A}^{\heartsuit}$  est lisse.

Soit  $a \in \mathbb{A}(\overline{k})$  une caractéristique génériquement semi-simple régulière correspondant à une section  $h_a : \overline{X} \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$ . Soit  $\tilde{X}_a \rightarrow \overline{X}$  le revêtement fini plat, génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $W'_{\text{geo}}$  obtenu par l'image réciproque du morphisme  $h_a : \overline{X} \rightarrow [\mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D] \otimes_k \overline{k}$  du revêtement  $[\overline{X}_{\Theta}^{\text{geo}} \times \mathfrak{t} \times^{\mathbb{G}_m} L_D] \rightarrow [\mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D] \otimes_k \overline{k}$ . Notons  $J_a = h_a^*[J]$  et  $\text{Lie}(J_a)$  son schéma en algèbres de Lie.

**Lemme 5.1** *Pour toutes caractéristiques  $a \in \mathbb{A}^{\heartsuit}(\overline{k})$ , on a l'annulation*

$$H^0(\overline{X}, \text{Lie}(J_a)) = 0.$$

*Démonstration.* D'après 3.3, pour tout  $\overline{X}$ -schéma  $S$ , les sections du faisceau  $\text{Lie}(J_a)$  au-dessus de  $S$  sont les sections de  $\tilde{S} = S \times_{\overline{X}} \tilde{X}_a$  à valeurs dans  $\mathfrak{t}$  qui sont  $W'_{\text{geo}}$ -équivariants. Ainsi  $H^0(\overline{X}, \text{Lie}(J_a))$  est le groupe des sections  $\tilde{X}_a \rightarrow \mathfrak{t}$  qui sont  $W'_{\text{geo}}$ -équivariantes. Puisque  $\tilde{X}_a$  est une courbe propre géométriquement connexe réduite d'après l'hypothèse génériquement semi-simple régulière  $H^0(\tilde{X}, \mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ . Or, le sous-espace des sections  $W'_{\text{geo}}$ -équivariantes  $\mathfrak{t}^{W'_{\text{geo}}} = 0$  s'annule de sorte que  $H^0(\overline{X}, \text{Lie}(J_a)) = 0$ .  $\square$

**Proposition 5.2** *La restriction  $P \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}^{\heartsuit}$  de  $P$  à l'ouvert des caractéristiques génériquement semi-simples régulières, est lisse au-dessus de  $\mathbb{A}^{\heartsuit}$ .*

*Démonstration.* Pour tous  $a \in \mathbb{A}(\overline{k})$  l'algèbre de Lie de  $P_a$  est l'espace vectoriel  $H^1(\overline{X}, \text{Lie}(J_a))$ . Au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{A}^{\heartsuit}$ , la dimension de cet espace vectoriel reste constant parce que  $H^0(\overline{X}, \text{Lie}(J_a))$  s'annule d'après le lemme précédent.  $\square$

D'après Biswas et Ramanan (cf. [4]), l'espace tangent de  $\mathcal{M}$  en un point  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(\overline{k})$  se calcule comme suit. Formons le complexe à deux crans de faisceaux localement libres sur  $\overline{X}$

$$\text{ad}(E, \varphi) = [0 \rightarrow \text{ad}(E) \xrightarrow{\text{ad}(\varphi)} \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0]$$

où la flèche  $\text{ad}(\varphi)$  est donnée par  $x \mapsto [x, \varphi]$  pour toutes sections locales  $x$  de  $\text{ad}(E)$ . L'espace tangent de  $\mathcal{M}$  en le point  $(E, \varphi)$  est alors le premier groupe d'hypercohomologie  $H^1(\overline{X}, \text{ad}(E, \varphi))$ .

**Proposition 5.3** *Supposons que  $f(E, \varphi) = a \in \mathbb{A}^{\heartsuit}(\overline{k})$  c'est-à-dire que le polynôme caractéristique de  $\varphi$  soit génériquement semi-simple régulière. Alors,  $H^2(\overline{X}, \text{ad}(E, \varphi)) = 0$  dès que  $\text{deg}(D) > 2g - 2$ .*

*Démonstration.* L'existence de la forme de Killing implique que le fibré vectoriel  $\text{ad}(E)$  est auto-dual. Le complexe parfait  $[\text{ad}(E) \xrightarrow{\text{ad}(\varphi)} \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D)]$  est donc dual au complexe  $[\text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(-D) \otimes \Omega_X \xrightarrow{\text{ad}(\varphi)} \text{ad}(E) \otimes \Omega_X]$ . Par dualité de Serre, il suffit de démontrer que

$$H^0(\overline{X}, [\text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(-D) \otimes \Omega_X \xrightarrow{\text{ad}(\varphi)} \text{ad}(E) \otimes \Omega_X]) = 0$$

dès que  $\text{deg}(D) > 2g - 2$ .

Notons  $K = \ker[\text{ad}(E) \rightarrow \text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_X(D)]$  le noyau de la flèche  $\text{ad}(\varphi) : x \mapsto [x, \phi]$  ;  $K$  est un  $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -Module localement libre puisque qu'il est une sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de  $\text{ad}(E)$ . De même, le quotient  $M = \text{ad}(E)/K$ , étant isomorphe à une sous- $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -Module de  $\text{ad}(E) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(D)$ , est aussi localement libre.

Le commutant  $K$  de  $\varphi$  est un faisceau en sous-algèbres de Lie de  $\text{ad}(E)$ . Sur l'ouvert dense  $U_a$  de  $\overline{X}$ ,  $K$  est un faisceau en sous-algèbres de Cartan. Puisque  $K$  est localement libre, le crochet est partout nul sur  $K$ . L'action de  $K$  sur  $\text{ad}(E)$  par dérivation induit donc une action de  $K$  sur  $\text{ad}(E)/K = M$  c'est-à-dire on a un homomorphisme de faisceaux en algèbres de Lie

$$K \rightarrow \text{End}(M).$$

Cet homomorphisme est injectif sur un ouvert dense, donc partout injectif puisque  $K$  est localement libre. Notons  $A$  le sous-faisceau de  $\text{End}(M)$  des sections commutantes à l'image de  $K$  qui contient donc  $K$  puisque le crochet est nul sur  $K$ . La  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre  $A$  étant un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de  $\text{End}(M)$ , est nécessairement localement libre comme  $\mathcal{O}_X$ -Module. Puisqu'elle est génériquement commutatif, elle est partout commutative. On a donc un homomorphisme injectif de  $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -Modules localement libres  $K \rightarrow A$  où  $A$  a de plus une structure de  $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -algèbres. On en déduit une flèche injective

$$H^0(\overline{X}, K \otimes \mathcal{O}_X(-D) \otimes \Omega_{\overline{X}}) \rightarrow H^0(\overline{X}, A \otimes \mathcal{O}_X(-D) \otimes \Omega_{\overline{X}})$$

de sorte qu'il suffira de démontrer l'annulation du dernier  $H^0$ .

Considérons le revêtement  $Y = \text{Spec}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(A)$  fini et plat de  $\overline{X}$ . Il suffit de démontrer que pour tout faisceau inversible  $L$  de degré négatif sur  $X$ ,  $H^0(Y, L) = 0$ . Ceci est évident car la restriction de  $L$  à toute composante connexe du normalisé de  $Y$  est encore de degré strictement négatif.  $\square$

### 6. Description de $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$

Dans cette section, on va décrire le faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$  dont la fibre au-dessus d'un point géométrique  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  est  $\pi_0(P_a)$ . La construction du faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$  est basée sur l'énoncé suivant de Grothendieck (cf. [EGA IV.3] 15.6.4)

**Proposition 6.1** *Soient  $Y$  un schéma noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini, plat, à fibres géométriquement réduites. Soit  $g : Y \rightarrow X$  une section de  $f$ . Pour tous points  $y \in Y$ , notons  $X_y^0$  la composante connexe de  $X_y$  contenant  $g(y)$ . Alors, la réunion  $X^0$  des  $X_y^0$  est un ouvert de Zariski de  $X$ .*

Voici une conséquence de cet énoncé.

**Proposition 6.2** *Soient  $Y$  un schéma noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini, plat, à fibres géométriquement réduites. Pour tout ouvert étale  $Y' \rightarrow Y$ , considérons la relation d'équivalence sur  $X(Y') = \text{Mor}_Y(Y', X)$  définie comme suit : deux sections*

$$g_1, g_2 : Y' \rightarrow X' = X \times_Y Y'$$

*sont équivalentes si pour tous  $y' \in Y'$ ,  $g_1(y')$  et  $g_2(y')$  appartiennent à la même composante connexe de la fibre  $X_{y'}$ . Soit  $\pi_0(X/Y)$  le faisceau associé au préfaisceau des sections de  $f : X \rightarrow Y$  modulo cette relation d'équivalence. Ce faisceau est un faisceau constructible. De plus, pour tout point  $y \in Y$ , la fibre en  $y$  de  $\pi_0(X/Y)$  est  $\pi_0(X_y)$ . Il en est de même pour les points géométriques.*

*Démonstration.* Pour toute section  $g : Y' \rightarrow X$  de  $f : X \rightarrow Y$  au-dessus d'un ouvert étale  $Y'$  de  $Y$ , on a un ouvert de Zariski  $U_g$  de  $X' = X \times_Y Y'$  dont la trace sur la fibre  $X_{y'}$  au-dessus de chaque point  $y' \in Y'$  est la composante connexe de  $X_{y'}$  contenant le point  $g(y')$ . De plus, on peut trouver une telle section  $g$  passant par n'importe quel point  $x$  dans le lieu de lissité de  $f$  quitte à rétrécir l'ouvert  $Y'$ . Par la quasi-compacité du lieu lisse de  $f$ , il existe un nombre fini d'ouverts étales  $\{Y'_i\}_{i=1}^n$  et des sections  $g_i : Y'_i \rightarrow X$  telles que la réunion disjointe des ouverts  $U_{g_i}$  s'envoie surjectivement sur le lieu lisse de  $f$ . On en déduit la constructibilité de  $\pi_0(X/Y)$ . Cette constructibilité peut aussi se déduire de la constructibilité de  $\mathbb{R}^{2d} f_! \mathbb{Q}_\ell$  où  $d$  est la dimension relative de  $f$ .

Soit  $y$  un point de  $Y$ . Il faut montrer que  $\pi_0(X_y)$  est la limite inductive des ensembles des classes d'équivalence de  $X(Y')$  quand  $Y'$  parcourt l'ensemble des voisinages étales pointés par le point  $y$ .

Pour toute section  $g : Y' \rightarrow X$  de  $f$  au-dessus d'un voisinage étale  $Y'$  pointé par  $y$ , le point  $g(y)$  appartient à une unique composante connexe de la fibre  $X_y$ . Si  $g_1, g_2 : Y' \rightarrow X$  sont équivalentes, les points  $g_1(y)$  et  $g_2(y)$  appartiennent à la même composante connexe de  $X_y$  de sorte qu'on a bien défini une application de l'ensemble des sections de  $f$  au-dessus du voisinage  $Y'$  modulo l'équivalence dans l'ensemble  $\pi_0(X_y)$ . Ces applications sont compatibles à la restriction d'un voisinage  $Y'$  pointé par  $y$  à un voisinage  $Y''$  plus petit si bien qu'elles s'organisent en une application de la limite inductive dans  $\pi_0(X_y)$ .

Cette application est surjective. En effet, soit  $\alpha \in \pi_0(X_y)$ . Puisque la fibre  $X_y$  est réduite, il existe un point lisse  $x \in X_y$  dans la composante connexe  $\alpha$ . Puisque c'est un point lisse, on peut l'étendre à un voisinage

étale  $Y'$  pointé par  $y$ . L'image de l'application de  $X(Y')$ , modulo la relation d'équivalence, dans  $\pi_0(X_y)$  contient donc  $\alpha$ .

Soient maintenant  $g_1, g_2$  deux sections de  $f$  au-dessus d'un voisinage étale  $Y'$  pointé  $y$  telles que  $g_1(y)$  et  $g_2(y)$  appartiennent à la même composante connexe de  $X_y$ . Soit  $X'_1$ , respectivement  $X'_2$ , l'ouvert de Zariski de  $X' = X \times_Y Y'$ , dont la trace sur toutes les fibres  $X_{y'}$  de  $f$  sont la composante connexe de  $g_1(y')$ , respectivement  $g_2(y')$ . Les deux ouverts  $X'_1$  et  $X'_2$  ont donc la même trace sur  $X_y$  si bien que leur intersection est un ouvert non-vide de  $X$ . Puisque  $f$  est une application ouverte, l'image de  $X'_1 \cap X'_2$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $y$  qu'on va noter  $Y''$ . Pour tout  $y' \in Y''$ , les traces de  $X'_1$  et  $X'_2$  sur la fibre  $X_{y'}$  en sont deux composantes connexes ayant une intersection non vide. On a donc  $X'_1 \cap X_{y'} = X'_2 \cap X_{y'}$  pour tout  $y' \in Y''$ . On en déduit que  $X'_1 \cap f^{-1}(Y'') = X'_2 \cap f^{-1}(Y'')$  c'est-à-dire les restrictions de  $g_1$  et  $g_2$  à  $Y''$  sont équivalentes. L'application de la limite inductive dans  $\pi_0(X_y)$  est injective et donc bijective.

La même démonstration vaut si on remplace un point  $y \in Y$  par un point géométrique  $\bar{y}$  et les voisinages pointés par  $y$  par les voisinages pointés par  $\bar{y}$ . La fibre géométrique  $\pi_0(X/Y)$  en  $\bar{y}$  est alors le groupe des composantes connexes  $\pi_0(X_{\bar{y}})$  de la fibre géométrique  $X_{\bar{y}}$ . □

D'après la proposition 5.2,  $P$  est un champ de Picard relatif lisse au-dessus de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ . Il résulte alors de la proposition précédente qu'il existe un faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$  pour la topologie étale de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  tel que pour tout point (géométrique)  $a$  de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ , la fibre de  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$  en  $a$  est le groupe des composantes connexes  $\pi_0(P_a)$  de la fibre de  $P$  en  $a$ .

On commence par décrire les fibres du faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$ . Soit  $a$  un point géométrique de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ . Soit  $J_a = h_a^*[J]$  le schéma en groupes lisse image réciproque par  $h_a : \bar{X} \rightarrow [\mathbf{car}/v_\chi(\mathbb{G}_m)]$  du centralisateur régulier  $[J]$ . Notons  $U_a$  l'image inverse du lieu des caractéristiques semi-simples régulières ; cet ouvert est non vide d'après l'hypothèse génériquement semi-simple régulière. La restriction de  $J_a$  à  $U_a$  est un schéma en tores. Le schéma en groupes  $J_a$  étant lisse, il existe un sous-schéma ouvert  $J_a^0$  qui en tous points géométriques  $x$  de  $\bar{X}$ , la fibre de  $(J_a^0)_x$  est la composante neutre de  $(J_a)_x$ . L'immersion ouverte  $J_a^0 \rightarrow J_a$  est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\bar{U}_a$  puisque les tores sont connexes. Le quotient  $J_a/J_a^0$  est donc un faisceau gratte-ciel de fibres finies, concentré dans le fermé de dimension zéro  $\bar{X} - U_a$ .

Soit  $P'_a$  le champ de Picard des  $J_a^0$ -torseurs sur  $\bar{X}$ . Quand  $a$  varie, les  $P'_a$  s'organisent aussi en un champ de Picard relatif  $P'$  au-dessus de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ . En effet, au-dessus de  $\mathbb{A}^\heartsuit \times X$ , on a le schéma en groupes affines commutatifs lisse  $J^0$  qui est la composante neutre de  $J$ . La construction de  $P'$  est alors la même que celle de  $P$  en remplaçant  $J$  par  $J^0$ . Par ailleurs,  $P'$  et  $P$  ont le même espace tangent à cause de la suite exacte

$$H^0(\bar{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a/J_a^0)$$

où  $H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0)$  est un groupe fini et où  $H^1(\overline{X}, J_a/J_a^0) = 0$ . On en déduit que  $P'$  est également lisse au-dessus de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  de sorte qu'on dispose d'un faisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^\heartsuit)$  dont les fibres sont les groupes  $\pi_0(P'_a)$ .

**Proposition 6.3** *On a la suite exacte*

$$H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow \pi_0(P'_a) \rightarrow \pi_0(P_a) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Dans la suite exacte

$$H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a/J_a^0) = 0$$

les groupes  $H^1(\overline{X}, J_a^0)$  et  $H^1(\overline{X}, J_a)$  sont les groupes des classes d'isomorphisme des catégories de Picard  $P'_a(\overline{k})$  et  $P_a(\overline{k})$ . La surjectivité essentielle du foncteur  $P'_a(\overline{k}) \rightarrow P_a(\overline{k})$  implique la surjectivité essentielle de sa restriction aux composantes neutres  $P'^0_a(\overline{k}) \rightarrow P^0_a(\overline{k})$ . On en déduit la suite exacte

$$H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow \pi_0(P'_a) \rightarrow \pi_0(P_a) \rightarrow 0$$

qu'on voulait. □

Cette suite exacte permet en principe de ramener le calcul de  $\pi_0(P_a)$  à celui de  $\pi_0(P'_a)$  du moment qu'on sait décrire la flèche  $H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow \pi_0(P'_a)$ . Il est possible de la calculer dans le cas des groupes classiques, et nous allons présenter en détail ce calcul dans le cas  $SL(2)$  dans §11. Malheureusement, nous ne savons pas formuler une description générale. Cette difficulté va réapparaître dans la démonstration du théorème principal 10.4 où heureusement, il est possible de la contourner à l'aide d'un lemme de Kottwitz. Il serait plus satisfaisant d'avoir une description directe de cette flèche.

En revanche, il est possible de décrire  $\pi_0(P'_a)$  de façon générale à l'aide d'un autre lemme de Kottwitz. Le schéma en groupes  $J_a^0$  est un schéma en groupes lisse à fibres connexes sur  $\overline{X}$  et sa restriction  $J_a^0|_{U_a} = J_a|_{U_a}$  à l'ouvert  $U_a$  est un tore. Ce tore admet un modèle de Néron connexe canonique  $\text{Ner}^0(J_a|_{U_a})$  qui est un schéma en groupes lisse à fibre connexe sur  $\overline{X}$ , prolongeant le schéma en tores  $J_a|_{U_a}$ , et universel pour cette propriété. En particulier, on a un homomorphisme canonique

$$J_a^0 \rightarrow \text{Ner}^0(J_a|_{U_a}).$$

**Proposition 6.4** *L'homomorphisme du champ de Picard des  $J_a^0$ -torseurs dans celui des  $\text{Ner}^0(J_a|_{U_a})$ -torseurs induit un isomorphisme sur leurs groupes des composantes connexes.*

*Démonstration.* L'homomorphisme  $J_a^0 \rightarrow \text{Ner}^0(J_a|_{U_a})$  est injectif comme un homomorphisme de faisceaux. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow J_a^0 \rightarrow \text{Ner}^0(J_a|_{U_a}) \rightarrow K \rightarrow 0$$

où  $K$  est un faisceau supporté par  $\overline{X} - U_a$ . On a  $H^1(\overline{X}, K) = 0$  et  $H^0(\overline{X}, K)$  est un groupe algébrique affine connexe. La proposition se déduit donc de la suite exacte longue

$$H^0(\overline{X}, K) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\overline{X}, \text{Ner}^0(J_a|_{U_a})) \rightarrow H^1(\overline{X}, K) = 0$$

qui se déduit de la suite exacte courte précédente de la même manière que 6.2. □

On se ramène au calcul du groupe des composantes connexes du champ de Picard des toseurs sous le modèle de Néron connexe  $\text{Ner}^0(J_a|_{U_a})$ . Pour cela, nous utilisons un lemme général du à Kottwitz (cf. [13]).

Fixons un point géométrique  $u$  de l'ouvert  $U_a$  et notons  $\Gamma = \pi_1(U_a, u)$  le groupe fondamental de  $U_a$  pointé en  $u$ . La catégorie des tores sur  $U_a$  est alors équivalente à la catégorie des  $\mathbb{Z}$ -modules libres munis d'une action finie de  $\Gamma$ . On associe à un tore  $\mathcal{T}$  sur  $U_a$  la fibre en  $u$  du faisceau  $\mathbb{X}_*(\mathcal{T})$  des cocaractères de  $\mathcal{T}$ , munie de l'action naturelle de  $\pi_1(U_a, u)$ . Un tore  $\mathcal{T}$  est dit induit s'il existe une base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{X}_*(\mathcal{T})_u$  telle que l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{X}_*(\mathcal{T})_u$  se déduit d'une action transitive de  $\Gamma$  sur cette base. Le lemme 2.2 de [13] peut s'énoncer comme suit.

**Lemme 6.5** *Soit  $A$  un foncteur de la catégorie des tores sur  $U_a$  dans la catégorie des groupes abéliens vérifiant les propriétés suivante :*

1. *le foncteur  $A$  est exact à droite c'est-à-dire il transforme une suite exacte de tores  $1 \rightarrow \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_3 \rightarrow 0$  en une suite exacte à droites de groupes abéliens*

$$A(\mathcal{T}_1) \rightarrow A(\mathcal{T}_2) \rightarrow A(\mathcal{T}_3) \rightarrow 0,$$

2. *si  $\mathcal{T}$  est un tore induit, il existe un isomorphisme canonique  $A(\mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ .*

*Soit  $u$  un point géométrique de  $U_a$ . Il existe un isomorphisme canonique du foncteur  $\mathcal{T} \mapsto A(\mathcal{T})$  dans le foncteur  $\mathcal{T} \mapsto [\mathbb{X}_*(\mathcal{T})_u]_\Gamma$  qui associe à un tore  $\mathcal{T}$  le groupe abélien des coinvariants de  $\Gamma = \pi_1(U_a, u)$  dans le groupe des cocaractères  $\mathbb{X}_*(\mathcal{T})_u$ .*

On va appliquer ce lemme de Kottwitz au foncteur  $A$  construit comme suit. Un tore  $\mathcal{T}$  sur  $U_a$  se prolonge canoniquement en un  $\overline{X}$ -schéma en groupes lisses à fibres connexe  $\text{Ner}^0(\mathcal{A})$ , le modèle de Néron connexe de  $\mathcal{T}$ . On pose

$$A(\mathcal{T}) = \pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T})))$$

le groupe des composantes connexes du champ de Picard des toseurs sous  $\text{Ner}^0(\mathcal{T})$  sur  $\overline{X}$ .

**Lemme 6.6** *Le foncteur  $\mathcal{T} \mapsto \pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T})))$  est un foncteur exact à droite. De plus, pour les tores induits  $\mathcal{T}$ , on a un isomorphisme canonique  $\pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T}))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Soit  $1 \rightarrow \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_3 \rightarrow 1$  une suite exacte de tores sur  $U_a$ . On en déduit une suite exacte entre les modèles de Néron localement de type fini

$$1 \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{T}_1) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{T}_2) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{T}_3) \rightarrow 1.$$

Soit  $x \in \overline{X} - U_a$  un point dans le complémentaire de  $U_a$ , soit  $I_x$  le sous-groupe d'inertie en  $x$ . D'après [21], le groupe de composantes connexes de la fibre en  $x$  du modèle de Néron est

$$\pi_0(\text{Ner}(\mathcal{T}_\alpha)) = (\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_\alpha))_{I_x}.$$

pour tous  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . On en déduit une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \text{Ner}^0(\mathcal{T}_\alpha) \rightarrow \text{Ner}(\mathcal{T}_\alpha) \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X} - U_\alpha} (\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_\alpha))_{I_x} \rightarrow 0$$

où  $(\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_\alpha))_{I_x}$  est vu comme un gratte-ciel planté en  $x$ . On a maintenant une suite exacte à droite

$$\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_1)_{I_x} \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathcal{T}_2)_{I_x} \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathcal{T}_3)_{I_x} \rightarrow 0$$

puisque le foncteur des coinvariants est exacte à droite. En utilisant le diagramme du serpent, on voit que parmi les homomorphismes entre leurs modèles de Néron connexes

$$\text{Ner}^0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow{\phi_1} \text{Ner}^0(\mathcal{T}_2) \xrightarrow{\phi_2} \text{Ner}^0(\mathcal{T}_3)$$

$\phi_1$  est injectif,  $\phi_2$  est surjectif mais  $\text{im}(\phi_1) \neq \ker(\phi_2)$ . Plus précisément, on a

$$\ker(\phi_2)/\text{im}(\phi_1) = \bigoplus_{x \in \overline{X} - U_\alpha} \ker(\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_1)_{I_x} \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathcal{T}_2)_{I_x}).$$

Posons  $\mathcal{T}'_1 = \ker(\phi_2)$ . On a alors deux suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{T}'_1 \rightarrow \text{Ner}^0(\mathcal{T}_2) \xrightarrow{\phi_2} \text{Ner}^0(\mathcal{T}_3) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \text{Ner}^0(\mathcal{T}_1) \rightarrow \mathcal{T}'_1 \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X} - U_\alpha} \ker(\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_1)_{I_x} \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathcal{T}_2)_{I_x}) \rightarrow 0.$$

Dans la première suite exacte,  $\mathcal{T}'_1$  est un schéma en groupes sur  $\overline{X}$  à fibre générique géométriquement connexe de sorte que  $H^2(\overline{X}, \mathcal{T}'_1) = 0$  d'après un théorème de Tsen [22]. On en déduit la suite exacte

$$H^1(\overline{X}, \mathcal{T}_1) \rightarrow H^1(\overline{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_2)) \rightarrow H^1(\overline{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_3)) \rightarrow 0.$$

Dans la seconde suite exacte,  $\bigoplus_{x \in \bar{X} - U_a} \ker(\mathbb{X}_*(\mathcal{T}_1)_{I_x} \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathcal{T}_2)_{I_x})$  est supporté par un schéma de dimension nulle de sorte que son  $H^1$  est nul. On en déduit la surjectivité de la flèche

$$H^1(\bar{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_1)) \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathcal{T}'_1).$$

On en déduit une suite exacte à droite

$$H^1(\bar{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_1)) \rightarrow H^1(\bar{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_2)) \rightarrow H^1(\bar{X}, \text{Ner}^0(\mathcal{T}_3)) \rightarrow 0$$

qui induit une suite exacte à droite des  $\pi_0$

$$\pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T}_1))) \rightarrow \pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T}_2))) \rightarrow \pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T}_3))) \rightarrow 0.$$

Le foncteur  $\mathcal{T} \mapsto \pi_0(\text{Tors}(\text{Ner}^0(\mathcal{T})))$  est donc un foncteur exact à droite.

Considérons maintenant un tore induit  $\mathcal{T}$ . Il existe donc une base de  $\mathbb{X}_*(T)_{\bar{u}}$  munie d'une action transitive de  $\pi_1(U_a, \bar{u})$ . Cet ensemble fini d'une action de  $\pi_1(U_a, \bar{u})$ , définit un revêtement fini étale connexe  $\pi_U : \tilde{U} \rightarrow U_a$ . On vérifie alors que  $\mathcal{T} = (\pi_U)_* \mathbb{G}_m$ . Par normalisation on obtient un revêtement fini ramifié  $\tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ . On vérifie que  $\text{Ner}^0(\mathcal{T}) = \pi_* \mathbb{G}_m$  de sorte que

$$\text{Tors}(\text{Ner}^0(\pi_* \mathbb{G}_m)) = \text{Pic}(\tilde{X}).$$

La courbe  $\tilde{X}$  étant irréductible, on a  $\pi_0(\text{Pic}(\tilde{X})) = \mathbb{Z}$ . □

**Corollaire 6.7** *Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  et  $u \in U_a(\bar{k})$ . On a un isomorphisme canonique  $\pi_0(P'_a) \simeq [\mathbb{X}_*(J_a)_u]_\Gamma$  où  $\mathbb{X}_*(J_a)_u$  est la fibre en  $u$  du faisceau des cocaractères du tore  $J_a|_{U_a}$  et où  $\Gamma = \pi_1(U_a, u)$ .*

Le corollaire précédent décrit les fibres géométriques  $\pi_0(P'_a)$  du faisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^\heartsuit)$  à l'aide de la monodromie du tore  $J_a|_{U_a}$ . Nous allons maintenant regarder comment cette monodromie varie en fonction de  $a$ .

Notons  $U$  l'image réciproque de  $\mathbf{car}^{\text{ssr}} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  par la flèche tautologique

$$X \times \mathbb{A}^\heartsuit \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D.$$

Par définition de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ , les fibres du morphisme  $U \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$  sont non vides et connexes.

Soit  $X_\Theta$  le revêtement fini étale galoisien de  $X$  de groupe de Galois  $\Theta$  associé à  $\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \Theta$  comme dans la section 1. On a alors un morphisme fini

$$(X_\Theta \times \mathfrak{t}) \times^{\mathbb{G}_m} L_D \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$$

qui au-dessus de l'ouvert  $\mathbf{car}^{\text{ssr}} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  est étale galoisien de groupe de Galois  $W' = W \rtimes \Theta$ . Par image réciproque, on obtient ainsi un  $W'$ -torseur

$$\tilde{U} \rightarrow U$$

au-dessus de la  $\mathbb{A}^\heartsuit$ -courbe  $U$ . Le morphisme  $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$  est un morphisme lisse de sorte qu'on dispose d'un faisceau d'ensembles  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  sur la

topologie étale de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  dont la fibre au-dessus de  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\tilde{U}_a$  d'après la proposition 6.2. Comme  $\tilde{U}$  est un  $W'$ -torseur au-dessus de  $U$  et  $U$  ont des fibres non vides et connexes,  $W'$  agit sur le faisceau  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  et cette action est transitive fibres à fibres.

L'énoncé suivant m'a été suggéré par Drinfeld.

**Proposition 6.8** *Il existe un isomorphisme canonique de faisceaux*

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)] \otimes_{W'} \mathbb{X}^\vee \rightarrow \pi_0(P'/\mathbb{A}^\heartsuit).$$

*Démonstration.* Commençons par construire la flèche canonique. Localement pour la topologie étale, une section de  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  est représentée par une section de  $\tilde{U}$ . Il suffit donc de construire à partir d'une section

$$\tilde{u}_S : S \rightarrow \tilde{U}_{a_S} = \tilde{U} \times_{\mathbb{A}^\heartsuit, a_S} S$$

au-dessus d'un ouvert étale  $a_S : S \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$ , un homomorphisme de faisceaux dépendant de  $\tilde{u}_S$

$$\mathbb{X}_S^\vee \rightarrow \pi_0(P'/S)$$

puis de vérifier que cet homomorphisme est invariant pour la relation d'équivalence 6.2 et qu'il vérifie une certaine propriété  $W'$ -équivariante qui sera précisée.

D'après 3.8, l'image réciproque de  $J^0$  par le morphisme  $\tilde{U}_{a_S} \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$  est canoniquement isomorphe au tore constant  $\tilde{U}_{a_S} \times \mathbb{T}$  de sorte qu'on a un isomorphisme entre leurs faisceaux des cocaractères

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{U}_{a_S}}(\mathbb{G}_m, J^0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_{\tilde{U}_{a_S}}^\vee.$$

Avec la donnée de la section  $\tilde{u}_S$ , on a un isomorphisme canonique

$$\tilde{u}_S^* \mathrm{Hom}_{U_{a_S}}(\mathbb{G}_m, J^0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_S^\vee.$$

Soit  $J_{a_S}^0$  l'image réciproque de  $J^0$  par le morphisme  $X \times S \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$ . Soit  $u_S : S \rightarrow U_{a_S}$  l'image de  $\tilde{u}_S$ . On a alors une trivialisaton de  $\mathrm{Hom}_{U_a}(\mathbb{G}_m, J_a^0)$  sur le complété formel  $U_{a_S}$  le long de la section  $u_S$ .

Un cocaractère  $\mu \in \mathbb{X}^\vee$  induit alors sur le complété formel  $X_{S, u_S}$  de  $X \times S$  le long de la section  $u_S$ , un homomorphisme de  $\mathbb{G}_m$  dans la restriction de  $J_{a_S}^0$ . Le fibré inversible  $\mathcal{O}_{X \times S}(u_S)$  fournit un  $\mathbb{G}_m$ -torseur sur  $X \times S$  trivialisé sur le complémentaire de la section  $u_S$ , de sorte qu'en poussant par le caractère  $\mu$ , on obtient un  $J_{a_S}^0$ -torseur sur  $X_{S, u_S}$  muni d'une trivialisaton sur le complémentaire de la section  $u_S$ . D'après le théorème de recollement formel de Beauville-Laszlo (cf. [1]), on peut recoller ce  $J_{a_S}^0$ -torseur sur  $X_{S, u_S}$  avec le  $J_{a_S}^0$ -torseur neutre sur le complémentaire de  $u_S$  pour produire un  $J_{a_S}^0$ -torseur sur  $X \times S$ . On a donc produit un  $S$ -point de  $P'_S$  à partir de  $\mu \in \mathbb{X}^\vee$ .

Cette construction fournit un homomorphisme

$$\lambda(\tilde{u}_S) : \mathbb{X}_S^\vee \rightarrow P'_S$$

dépendant de la section  $\tilde{u}_S$ . En composant avec l'homomorphisme évident  $P'_S \rightarrow \pi_0(P'/S)$ , on a un homomorphisme de faisceaux

$$\pi_0(\lambda(\tilde{u}_S)) : \mathbb{X}_S^\vee \rightarrow \pi_0(P'/S).$$

Soit  $\tilde{u}'_S : S \rightarrow \tilde{U}_{a_S}$  une section équivalente à  $\tilde{u}_S$  au sens de 6.2. Les deux homomorphismes

$$\pi_0(\lambda(\tilde{u}_S)), \pi_0(\lambda(\tilde{u}'_S)) : \mathbb{X}_S^\vee \rightarrow \pi_0(P'/S)$$

sont alors égaux. Ceci se démontre par un argument d'homotopie comme suit. D'après 6.1, il existe l'ouvert de Zariski  $\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)$  de  $\tilde{U}_S$  dont la trace sur chaque fibre  $\tilde{U}_s$  de  $\tilde{U}_S$  au-dessus d'un point  $s \in S$ , est la composante neutre de  $U_s$  contenant  $\tilde{u}_s(s)$ . Du fait que  $\tilde{u}_S$  et  $\tilde{u}'_S$  sont équivalentes,  $\tilde{u}'_S$  se factorise aussi à travers l'ouvert  $\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)$ . Au-dessus de  $\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)$ , on a une flèche canonique

$$\mathbb{X}_{\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)}^\vee \rightarrow \pi_0(P'/\tilde{U}_S(\tilde{u}_S))$$

à cause de la projection vers  $\tilde{U}_S$ . Les flèches  $\pi_0(\lambda(\tilde{u}_S)), \pi_0(\lambda(\tilde{u}'_S))$  s'obtiennent en restreignant cette dernière aux sections  $\tilde{u}_S$  et  $\tilde{u}'_S$ . Puisque le morphisme  $\text{pr}_S : \tilde{U}_S(\tilde{u}_S) \rightarrow S$  est un morphisme lisse à fibres géométriquement connexes,  $\text{pr}_S^*$  induit un isomorphisme

$$\text{Hom}(\mathbb{X}_S^\vee, \pi_0(P'/S)) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{X}_{\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)}^\vee, \pi_0(P'/\tilde{U}_S(\tilde{u}_S)))$$

d'après le lemme 4.2.5 de [3]. L'égalité de  $\pi_0(\lambda(\tilde{u}_S)), \pi_0(\lambda(\tilde{u}'_S))$  s'en déduit.

Par ailleurs, 3.8 implique que pour tout  $w' \in W'$ , pour tout  $\mu \in \mathbb{X}^\vee$ , on a

$$\lambda(\tilde{u}_S)(\mu) = \lambda(w'\tilde{u}_S)(w'\mu).$$

La conjonction de ce qui précède implique qu'on a un homomorphisme

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)] \otimes_{W'} \mathbb{X}^\vee \rightarrow \pi_0(P'/\mathbb{A}^\heartsuit).$$

Pour vérifier qu'il est un isomorphisme, il suffit de le faire fibres à fibres et c'est ce que dit le corollaire 6.7.  $\square$

### 7. Stratification

Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$ . La fibre  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)_a$  est un espace homogène sous le groupe  $W'$ . Les sous-groupes d'isotropie de  $W'$  agissant sur cette fibre forment une classe de  $W'$ -conjugaison de sous-groupes de  $W'$  qu'on va noter  $[\Sigma'_a]$ .

Le faisceau  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  étant constructible, il existe une stratification de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  telle que sa restriction aux strates est localement constante. Si les strates

sont connexes, ce qu'on peut supposer, les classes de  $W$ -conjugaison  $[\Sigma'_a]$  sont constantes quand le point géométrique  $a$  varie le long de l'une de ces strates de sorte qu'à chaque strate est associée une classe de  $W'$ -conjugaison de sous-groupes de  $W'$ . Dans cette section, on va construire explicitement cette stratification dont les strates sont indexées par certaines classes de  $W'$ -conjugaison de sous-groupes de  $W'$  vérifiant une contrainte qui sera précisée dans le lemme 7.1.

Soit  $x$  un point géométrique de  $X$ . Dans la section 1, on a un homomorphisme  $\rho_G : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  dont l'image est un groupe fini  $\Theta$ . On a aussi un revêtement étale galoisien  $X_\Theta$  de  $X$  de groupe de Galois  $\Theta$  pointé par un point géométrique  $x_\Theta$  au-dessus de  $x$  associé à  $\rho_G$ . Nous avons noté  $\Theta_{\text{geo}}$  l'image du groupe fondamental géométrique  $\pi_1(\overline{X}, x)$  dans  $\Theta$  et  $W'_{\text{geo}}$  le sous-groupe  $W \rtimes \Theta_{\text{geo}}$  de  $W' = W \rtimes \Theta$ .

Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\overline{k})$  et supposons que  $x \in U_a$  où  $U_a$  est la fibre de  $U$  en  $a$  avec  $U$  et  $\tilde{U}$  comme dans 6.8. Choisissons un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{U}_a$  au-dessus de  $x$ . Le groupe  $W'$  agit transitivement sur l'ensemble des composantes connexes de  $\tilde{U}_a$ . Soit  $\Sigma_a(\tilde{x})$  le sous-groupe de  $W'$  qui stabilise la composante connexe de  $\tilde{U}_a$  contenant le point  $\tilde{x}$ . La classe de  $W'$ -conjugaison  $[\Sigma_a]$  de  $\Sigma_a(\tilde{x})$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{x}$ . Par construction, on a un morphisme  $\tilde{U}_a \rightarrow X_\Theta$ .

Supposons que  $\tilde{x}$  est au-dessus du point  $x_\Theta$  de  $X_\Theta$ . L'homomorphisme  $\pi_1(U_a, x) \rightarrow W'$  donné par  $\tilde{x}$  relève alors l'homomorphisme  $\rho_G^{\text{geo}} : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \Theta$  donné par  $\tilde{x}_\Theta$ . En particulier, l'image de  $\Sigma'_a(\tilde{x})$  dans  $\Theta$  est  $\Theta_{\text{geo}}$ . Puisque  $\Theta_{\text{geo}}$  est un sous-groupe distingué de  $\Theta$ , tous les  $W'$ -conjugés de  $\Sigma'_a(\tilde{x})$  ont l'image  $\Theta_{\text{geo}}$  dans  $\Theta$ . On retient la contrainte suivante sur la classe de  $W'$ -conjugaison  $[\Sigma'_a]$ .

**Lemme 7.1** *Pour tout  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\overline{k})$ , tous les membres de la classe de  $W'$ -conjugaison  $[\Sigma'_a]$  ont l'image  $\Theta_{\text{geo}}$  dans  $\Theta$ .*

Pour tout sous-groupe  $\Sigma'$  de  $W'$  dont l'image dans  $\Theta$  est  $\Theta_{\text{geo}}$ , considérons la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre des fonctions  $\Sigma'$ -invariantes sur  $X_\Theta \times \mathfrak{t}$ . Son spectre, désigné par  $(X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma'$ , est muni d'une action de  $\mathbb{G}_m$  induite de l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{t}$ . Soit  $\mathbb{B}_{\Sigma'}$  le schéma qui représente l'ensemble des sections de

$$h_b : X \rightarrow ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D$$

où  $L_D$  est le  $\mathbb{G}_m$ -torseur associé à  $\mathcal{O}_X(D)$ . On a un morphisme

$$\pi_{\Sigma'} : ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D \rightarrow ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/W') \times^{\mathbb{G}_m} L_D$$

qui induit un morphisme

$$\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'} \rightarrow \mathbb{A}.$$

Considérons l'ouvert  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit$ , l'image réciproque de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  dans  $\mathbb{B}_{\Sigma'}$ . Pour tout  $b \in \mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit(\overline{k})$ , le revêtement

$$X_\Theta \times \mathfrak{t} \rightarrow (X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma'$$

induit par image réciproque un revêtement fini  $\tilde{X}_b \rightarrow \bar{X}$  qui est génériquement étale. Nous allons noter  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\max}$  l'ouvert de  $\mathbb{B}^{\heartsuit}$  qui consiste en les points  $b \in \mathbb{B}_{\Sigma'}^{\heartsuit}(\bar{k})$  tels que le revêtement  $\tilde{X}_b \rightarrow \bar{X}$  est irréductible.

**Proposition 7.2** *Le morphisme  $\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'}^{\heartsuit} \rightarrow \mathbb{A}^{\heartsuit}$  est un morphisme fini et net. En particulier,  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\heartsuit}$  est représentable.*

Soit  $\bar{\mathbb{A}}_{\Sigma'}$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}^{\heartsuit}$  image du morphisme fini  $\pi_{\Sigma'}^X$ . Il existe alors un ouvert  $\mathbb{A}_{\Sigma'}$  de  $\bar{\mathbb{A}}_{\Sigma'}$  tel que  $(\pi_{\Sigma'}^X)^{-1}(\mathbb{A}_{\Sigma'})$  est l'ouvert  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\max}$  de  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\heartsuit}$ . De plus, le morphisme restreint  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\max} \rightarrow \mathbb{A}_{\Sigma'}$  est un morphisme fini étale de degré  $|\text{Nor}_W(\Sigma')|/|\Sigma'|$ .

*Démonstration.* Le lemme suivant va être utilisé à plusieurs reprises dans la démonstration de la proposition.

**Lemme 7.3** *Soit  $S$  un  $k$ -schéma normal intègre. Soient  $V$  et  $\tilde{V}$  des  $S$ -schémas et  $v : \tilde{V} \rightarrow V$  un  $S$ -morphisme fini. Soit  $h : S \rightarrow V$  une section de  $V$ . Supposons qu'il y a un ouvert non vide  $S'$  de  $S$  sur lequel  $h' = h|_{S'}$  se relève en une section  $\tilde{h}' : S' \rightarrow \tilde{V} \times_S S'$ . Alors la section  $\tilde{h}'$  se prolonge de façon unique en une section  $\tilde{h} : S \rightarrow \tilde{V}$  qui relève  $h$ .*

*Démonstration.* Soit  $h(S)$  l'image de la section  $h$  et  $v^{-1}(h(S))$  son image réciproque dans  $\tilde{V}$ . Puisque  $v$  est un morphisme fini,  $v^{-1}(h(S))$  est un  $S$ -schéma fini. La section  $\tilde{h}'$  de  $\tilde{V}$  au-dessus de l'ouvert  $S'$ , relève  $h' = h|_{S'}$  si bien qu'elle est à l'image dans  $v^{-1}(h(S))$ . Notons  $Z'$  l'image de  $\tilde{h}'$  dans  $v^{-1}(h(S))$  et  $Z$  l'adhérence schématique de  $Z'$  dans  $v^{-1}(h(S))$ . Puisque  $v^{-1}(h(S))$  est un  $S$ -schéma fini,  $Z$  est un  $S$ -schéma fini intègre bi-rationnel à  $S$ . Puisque  $S$  est supposé normal et intègre, ceci implique que  $Z \rightarrow S$  est un isomorphisme. En l'inversant, on obtient la section  $\tilde{h}$  de  $\tilde{V}$  qui relève la section  $h$  de  $V$ . □

Démontrons d'abord que le morphisme  $\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'}^{\heartsuit} \rightarrow \mathbb{A}^{\heartsuit}$  est *quasi-fini*. Soit  $a \in \mathbb{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$  une caractéristique génériquement semi-simple régulière et soit  $h_a : \bar{X} \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  la section associée. Soit  $U_a$  l'ouvert non vide de  $\bar{X}$  où  $a$  est une caractéristique semi-simple régulière. On doit démontrer qu'il y a au-plus un nombre fini de relèvements de  $h_a$  en une section  $h_b$  dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X_{\Theta} \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D & \\
 & \nearrow h_b & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{h_a} \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D & 
 \end{array}$$

D'après le lemme précédent, la donnée du relèvement  $h_b$  est équivalente à la donnée de  $h_b$  sur l'ouvert  $U_a$ . La théorie de Galois usuelle montre

que ceci est possible si et seulement si l'image  $\Sigma'_a$  de la représentation de monodromie

$$\rho_a : \pi_1(U_a, u) \rightarrow W'$$

soit conjugué à un sous-groupe de  $\Sigma'$ . De plus, dans ce cas, il y a exactement  $|\text{Nor}_{W'}(\Sigma'_a)|/|\Sigma'_a|$  relèvements différents.

Démontrons que le morphisme  $\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$  est *propre*. Soit  $S$  un trait et soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(S)$  un  $S$ -point de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  donné par un morphisme  $h_s : S \times X \rightarrow \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D$ . Supposons qu'au-dessus du point générique  $\eta$  de  $S$ ,  $h_a(\eta)$  se relève en  $h_b(\eta) : \eta \times X \rightarrow ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D$ . Alors  $h_b(\eta)$  se prolonge de façon unique en une section  $h_b : S \times X \rightarrow ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D$  relevant  $h_a$  d'après le lemme précédent.

Démontrons que le morphisme  $\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$  est *net*. Donnons-nous deux flèches

$$h_b, h_{b'} : X \times \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \rightarrow M = ((X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma') \times^{\mathbb{G}_m} L_D$$

qui induisent la même flèche

$$h_a : X \times \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \rightarrow N = \mathbf{car} \times^{\mathbb{G}_m} L_D.$$

Soit  $U_a$  l'ouvert de  $X$  image réciproque de l'ouvert semi-simple régulier de  $\mathbf{car}$  et supposons que  $U_a$  soit non-vide. Puisqu'au-dessus de  $\mathbf{car}^{\text{ssr}}$  le morphisme  $(X_\Theta \times \mathfrak{t})/\Sigma' \rightarrow \mathbf{car}$  est étale, les deux flèches  $h_b$  et  $h_{b'}$  sont nécessairement égales au-dessus de  $U_a$ . Ceci implique que  $h_b = h_{b'}$  car la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre  $\mathcal{O}_X[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$  est plate.

Le morphisme  $\pi_{\Sigma'}^X : \mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit \rightarrow \mathbb{A}^\heartsuit$  fini et donc en particulier représentable, a fortiori  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit$  est représentable. L'image de  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^\heartsuit$  dans  $\mathbb{A}^\heartsuit$  est un sous-schéma fermé  $\overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma']}$  de  $\mathbb{A}^\heartsuit$  dont les points géométriques  $a$  sont caractérisés par le fait que la classe de  $W'$ -conjugaison  $[\Sigma'_a]$  contient un membre qui est un sous-groupe de  $\Sigma'$ .

Si  $\Sigma'_1$  est un sous-groupe de  $\Sigma'$ , on a l'inclusion de sous-schémas fermés  $\overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma'_1]} \subset \overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma']}$ . On a donc un ouvert de  $\overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma']}$  qui consiste en les points  $a \in \overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma]}(\bar{k})$  tels que  $[\Sigma'_a]$  est la classe de  $W'$ -conjugaison de  $\Sigma'$ . Son image réciproque dans  $\mathbb{B}^\heartsuit$  est l'ouvert  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\max}$ . Au-dessus de  $\overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma]}$ , le morphisme  $\mathbb{B}_{\Sigma'}^{\max} \rightarrow \overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma]}$  est un morphisme fini, net dont toutes les fibres géométriques ont  $|\text{Nor}_{W'}(\Sigma')|/|\Sigma'|$  points. Dans un voisinage hensélien, un morphisme fini et net est la réunion disjointe d'immersions fermées. Si celui a de plus un nombre constant de points dans ses fibres géométriques, il doit être réunion disjointe d'isomorphismes. C'est donc un morphisme fini étale.  $\square$

La conjonction de 7.1 et 7.2 implique qu'on a une stratification de  $\mathbb{A}^\heartsuit$

$$\mathbb{A}^\heartsuit = \bigsqcup_{[\Sigma']} \overline{\mathbb{A}}_{[\Sigma']}$$

où  $[\Sigma']$  parcourt l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison de sous-groupes de  $W'$  satisfaisant à la contrainte 7.1.

**Corollaire 7.4** *Le faisceau  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  est localement constant le long de la strate  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$  de fibre typique  $W'/\Sigma'$ . Le faisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^\heartsuit)$  est localement constant le long de la strate  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$  de fibre typique  $\mathbb{X}_{\Sigma'}$ .*

*Démonstration.* La proposition 7.2 montre que  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^\heartsuit)$  est localement constant le long des strates  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$  de fibre typique  $W'/\Sigma'$ . La seconde assertion s'en déduit en vertu de 6.8. □

**Définition 7.5** *Un point  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  est dit elliptique si pour un membre arbitraire  $\Sigma'_a$  de la classe de  $W'$ -conjugaison  $[\Sigma'_a]$ , le groupe  $\mathbb{X}_{\Sigma'_a}^\vee$  des  $\Sigma'_a$ -coinvariants des cocaractères est un groupe fini.*

Il est clair sur cette définition que l'ensemble des  $a$  elliptiques est une réunion des strates  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$ .

**Corollaire 7.6** *Supposons que le groupe des caractères  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{T}$  n'a pas d'invariants non triviaux sous l'action de  $W'$  ce qui est le cas si  $G$  est semi-simple. L'ensemble des caractéristiques  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$  elliptiques forment un ouvert non vide  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  de  $\mathbb{A}^\heartsuit$ .*

*Cet ouvert est caractérisé par la propriété  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\bar{k})$  si et seulement si  $\pi_0(P_a)$  est fini.*

*Démonstration.* D'après la relation d'adhérence décrite ci-dessus, si un point  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit$  est elliptique, toutes ses généralisations le sont. Il s'ensuit que la réunion des strates  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$  pour les classes de conjugaison des sous-groupes  $\Sigma' \subset W'$  tels que le groupe des coinvariants  $\mathbb{X}_{\Sigma'}^\vee$  est fini, forme un ouvert de  $\mathbb{A}$ . Il reste à vérifier que celui-ci est non vide. D'après [7], il existe des caractéristiques  $a$  très régulières, voir définition 4.1, pour lesquels le groupe de monodromie est automatiquement tout le groupe  $W'_{\text{geo}}$ . Celles-ci sont alors clairement elliptiques.

Si  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\bar{k})$ , le groupe  $\pi_0(P'_a)$  est fini. La suite exacte 6.3 implique alors que  $\pi_0(P_a)$  est aussi fini car il est un quotient de  $\pi_0(P'_a)$ . Dans cette suite exacte dont le terme  $H^0(\bar{X}, J_a/J_a^0)$  est un groupe fini, la finitude de  $\pi_0(P_a)$  implique celle de  $\pi_0(P'_a)$ . D'après le corollaire précédent,  $\pi_0(P'_a)$  fini si et seulement si  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\bar{k})$ . □

Pour  $G$  un groupe classique semi-simple, on peut vérifier qu'au-dessus de l'ouvert elliptique  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$ , l'espace de module  $\mathcal{M}^{\text{ell}}$  est un champ de Deligne-Mumford et le morphisme  $f^{\text{ell}} : \mathcal{M}^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$  est un morphisme propre de type fini en suivant les arguments de [7]. Dans le cas unitaire, c'est fait dans [20], nous en donnerons une démonstration détaillée dans un travail futur pour les autres groupes classiques.

### 8. La $[\kappa]$ -décomposition

L'action de  $P$  sur  $\mathcal{M}$  relativement à  $\mathbb{A}$  induit une action de  $P$  sur la cohomologie de  $\mathcal{M}$  c'est-à-dire pour tout  $\mathbb{A}$ -schéma  $a : S \rightarrow \mathbb{A}$ , le groupe  $P(S)$

agit sur la restriction à  $S$  de  $f_*\mathbb{Q}_\ell$ . Considérons cette action au-dessus de l'ouvert  $\mathbb{A}^\heartsuit$ . Sur cet ouvert,  $P$  est lisse de sorte qu'on peut définir  $P^0$  sa composante neutre relative en vertu de 6.1. D'après le lemme d'homotopie (cf. [20] 3.2), si  $p$  est une section de  $P^0$ ,  $p$  agit trivialement sur les faisceaux de cohomologie perverse  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)$ . On en déduit une action du faisceau étale  $\pi_0(P/\mathbb{A}^\heartsuit)$  sur les faisceaux pervers  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)$ . Sur l'ouvert elliptique  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$ ,  $\pi_0(P/\mathbb{A}^{\text{ell}})$  est un faisceau en groupes abéliens finis. Cette action induit localement une décomposition en somme directe de  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)$ .

**Proposition 8.1** *Soient  $S$  un schéma de type fini,  $A$  un faisceau en groupes abéliens finis pour la topologie étale de  $S$  et  $K$  un faisceau pervers sur  $S$ . Supposons que  $A$  agit sur  $K$ . En particulier, le groupe fini  $\Gamma(S, A)$  agit sur  $K$  qui induit une décomposition*

$$K = \bigoplus_{\kappa \in \Gamma(S, A) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times} K_\kappa$$

où  $\kappa$  parcourt l'ensemble des caractères du groupe des section globales de  $S$ . Pour tout caractère  $\kappa$  de  $\Gamma(S, A)$ ,  $K_\kappa$  est supporté par le fermé  $S_\kappa$  constitué des point  $\bar{s} \in S$  tel que le caractères  $\kappa : \Gamma(S, A) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  se factorise par l'homomorphisme de restriction aux fibres  $\Gamma(S, A) \rightarrow A_{\bar{s}}$ .

*Démonstration.* Soit  $a \in \Gamma(S, A)$  une section telle que  $\kappa(a) \neq 1$ . Soit  $U(a)$  l'ouvert de  $S$  où la section  $a$  s'annule. Pour démontrer que  $K_\kappa$  est supporté par  $S_\kappa$  qui est le fermé complémentaire de la réunion des ouverts  $U(a)$  avec  $\kappa(a) \neq 1$ , il suffit de démontrer que  $K_\kappa|_{U(a)} = 0$  pour des tels  $a$ . Ceci est clair car  $a$ , étant égal à la section neutre sur  $U(a)$ , agit trivialement sur  $K|_{U(a)}$ . Pour tous caractères  $\kappa$  de  $\Gamma(S, A)$  tels que  $\kappa(a) \neq 1$ , on a  $K_\kappa|_{U(a)} = 0$ .  $\square$

Soit  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(k)$  une caractéristique définie sur  $k$ , soit  $S_a$  l'enséhlisé de  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  en  $a$ . Soit  $\bar{a}$  un point géométrique au-dessus de  $a$ . Alors, la fibre de  $\pi_0(P_{\bar{a}})$  en le point  $\bar{a}$  est un groupe abélien fini muni d'une action de  $\text{Gal}(\bar{k}/k) = \langle \sigma \rangle$ .

**Corollaire 8.2** *Sur  $S_a$ , on a une décomposition canonique*

$${}^p\mathbf{H}^j(f_{S_a,*}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{[\kappa]} {}^p\mathbf{H}^j(f_{S_a,*}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$$

où  $\kappa$  parcourt l'ensemble des classes de  $\sigma$ -conjugaison de caractères de  $\pi_0(P_{\bar{a}})$  et où géométriquement  ${}^p\mathbf{H}^j(f_{S_a,*}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est la somme directe des facteurs isotypiques  ${}^p\mathbf{H}^j(f_{S_a,*}\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa'}$  avec  $\kappa'$  dans la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $\kappa$ .

De plus,  ${}^p\mathbf{H}^j(f_{S_a,*}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est supporté par le sous-schéma fermé de  $S_a$  constitué des points  $\bar{s} \in S$  tels qu'il existe au moins un caractère  $\kappa'$  dans la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $\kappa$  tel que  $\kappa' : \pi_0(P_a)^{(\sigma)} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  se factorise par l'homomorphisme canonique  $\pi_0(P_a)^{(\sigma)} \rightarrow \pi_0(P_{\bar{s}})$ .

*Démonstration.* La somme directe  $\bigoplus_{\kappa' \in [\kappa]}^p \mathbf{H}^j(f_{S_{a,*}} \mathbb{Q}_\ell)_{\kappa'}$  est stable par  $\sigma$  et définit un facteur direct de  ${}^p\mathbf{H}^j(f_{S_{a,*}} \mathbb{Q}_\ell)$ . L'énoncé sur le support se déduit du lemme précédent.  $\square$

Comme on verra dans §9, cette décomposition au-dessus d'un voisinage d'un point rationnel de  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  correspond à la réécriture habituelle de la somme des intégrales orbitales globales dans une classe de conjugaison stable donnée, en une somme de  $\kappa$ -intégrales orbitales à l'aide d'une transformation de Fourier sur le groupe fini des obstructions. On peut aussi considérer la décomposition globale sur l'ouvert  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  qui correspond alors à la préstabilisation de la partie elliptique de la formule des traces. Dans cette situation globale, il nous faudra introduire le formalisme de cofaisceaux, évident mais inhabituel.

Revenons à la situation générale où on a au-dessus d'une base  $S$  un faisceau en groupes abéliens finis  $A$  agissant sur un faisceau pervers  $K$ . Pour tout ouvert étale  $U$  de  $S$ , considérons le groupe  $A(U)^*$  des caractères d'ordre fini de  $A(U)$ . Si  $U'$  est un ouvert étale de  $U$ , la flèche de restriction  $A(U) \rightarrow A(U')$  induit une flèche de corestriction  $A(U')^* \rightarrow A(U)^*$ . On appelle *précofaisceau* sur  $S$  un foncteur covariant de la catégorie des ouverts étales de  $S$  dans la catégorie des ensembles. En particulier,  $U \mapsto A(U)^*$  est un précofaisceau.

On appelle *cofaisceau* un précofaisceau  $\text{Co}$  qui vérifie en plus une propriété de recollement : pour tout ouvert étale  $U$  de  $S$ , pour tout recouvrement étale  $U_1$  de  $U$ , et pour  $U_2 = U_1 \times_U U_1$ , l'ensemble  $\text{Co}(U)$  est l'ensemble quotient de  $\text{Co}(U_1)$  par la relation d'équivalence  $\text{Co}(U_2) \rightrightarrows \text{Co}(U_1)$ .

Tout comme pour les faisceaux, on peut associer un cofaisceau  $\text{Co}$  à un précofaisceau  $\text{Preco}$ . Pour tout ouvert étale  $U$  de  $S$ , on prend pour  $\text{Co}(U)$  la limite projective sur les recouvrements étales  $U_1 \rightarrow U$  des ensembles des classes d'équivalence de  $\text{Preco}(U_1)$  par le relation d'équivalence  $\text{Preco}(U_2) \rightrightarrows \text{Preco}(U_1)$  où  $U_2 = U_1 \times_U U_1$ .

L'énoncé suivant est tautologique. Nous allons néanmoins en esquisser une démonstration car la notion du cofaisceau est moins familier que celle du faisceau.

**Proposition 8.3** *Soit  $A$  un faisceau en groupes abéliens finis sur  $S$  qui agit sur un faisceau pervers  $K$  sur  $S$ . Soit  $A^{\text{co}}$  le cofaisceau associé au précofaisceau  $U \mapsto A(U)^*$  où  $A(U)^*$  est l'ensemble des caractères d'ordre fini de  $A(U)$ . Alors pour tout ouvert étale  $U$  de  $S$ , on a une décomposition de la restriction de  $K$  à  $U$*

$$K|_U = \bigoplus_{[\alpha] \in A^{\text{co}}(U)} (K|_U)_{[\alpha]}$$

et pour tout  $[\alpha] \in A^{\text{co}}(U)$  et pour tout ouvert étale  $U'$  de  $U$ , on a la relation de compatibilité

$$((K|_U)_{[\alpha]})|_{U'} = \bigoplus_{\substack{[\alpha'] \in A^{\text{co}}(U') \\ [\alpha'] \mapsto [\alpha]}} (K|_{U'})_{[\alpha']}$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que pour tout recouvrement étale  $U_1$  de  $U$ , on a une décomposition canonique

$$K|_U = \bigoplus_{[\alpha]} (K|_U)_{[\alpha]}$$

où  $[\alpha]$  parcourt l'ensemble des classes d'équivalence de  $A(U_1)_*$  pour la relation d'équivalence  $A(U_2)^* \rightrightarrows A(U_1)^*$ .

En effet, on a une décomposition

$$K|_{U_1} = \bigoplus_{\alpha \in A(U_1)^*} (K|_{U_1})_\alpha$$

à cause de l'action du groupe abélien  $A(U_1)$  sur  $K|_{U_1}$ . Regroupons les facteurs directs  $(K|_{U_1})_\alpha$  selon la relation d'équivalence  $A(U_2)^* \rightrightarrows A(U_1)^*$ , la somme directe

$$\bigoplus_{\alpha \in [\alpha]} (K|_{U_1})_\alpha$$

descend alors à  $U$ . □

Pour le cas particulier du faisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^{\text{ell}})$ , on a des renseignements explicites sur les sections globales de  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^{\text{ell}})^{\text{co}}$  par la proposition 6.8.

**Proposition 8.4** *On a une application canonique de l'ensemble des sections globales du cofaisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^{\text{ell}})^{\text{co}}$ , dans l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison  $[\kappa]$  des caractères d'ordre fini  $\kappa : \mathbb{X}^\vee \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ .*

*Démonstration.* Choisissons un recouvrement étale  $S_1 \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$  au-dessus duquel  $\pi_0(\tilde{U}/S_1)$  admet une section qu'on va noter  $\beta$ . Grâce à cette section, par la proposition 6.8, on a une flèche surjective

$$\mathbb{X}_{S_1}^\vee \rightarrow \pi_0(P'/S_1).$$

On a ainsi une application de  $\pi_0(P'/S_1)$  dans l'ensemble des caractères d'ordre fini  $\kappa : \mathbb{X}^\vee \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ .

Soient  $S_2 = S_1 \times_{\mathbb{A}^\circ} S_1$  et  $\text{pr}_1(\beta)$ ,  $\text{pr}_2(\beta)$  les images réciproques de  $\beta$  sur  $S_2$ . Puisque  $W'$  agit transitivement sur les fibres de  $\pi_0(\tilde{U}/\mathbb{A}^{\text{ell}})$ , il existe une section  $w' \in \Gamma(S_2, W')$  tel que  $w'\text{pr}_1(\beta) = \text{pr}_2(\beta)$ . On en déduit une application de l'ensemble des sections globales du cofaisceau  $\pi_0(P'/\mathbb{A}^{\text{ell}})^{\text{co}}$ , dans l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison  $[\kappa]$  des caractères d'ordre fini  $\kappa : \mathbb{X}^\vee \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ . Cette application ne dépend ni du choix de  $U_1$  ni du choix de la section  $\beta$ . □

On déduit de 8.3 et 8.4 une décomposition

$${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{[\kappa]} {}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$$

où la somme directe est étendue sur l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison des éléments d'ordre fini de  $\hat{T}$ .

**Théorème 8.5** *Supposons que la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $|W|$ . Supposons que le groupe des caractères  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{T}$  n'a pas d'invariants non triviaux sous  $W'$ . C'est notamment le cas si  $G$  est semi-simple.*

*Sur l'ouvert  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  de  $\mathbb{A}$ , qui est non vide sous les hypothèses précédentes, on a une décomposition canonique*

$${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{[\kappa]} {}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$$

*où la somme directe est étendue sur l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison des éléments d'ordre fini de  $\hat{T}$ .*

*Soit  $\kappa$  un élément d'ordre fini de  $\hat{T}$ . Le facteur direct  $\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est supporté par le fermé  $\bar{\mathbb{S}}_{[\kappa]}$  constitué des points  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\bar{k})$  tel que pour tout point géométrique  $\tilde{u} \in \tilde{U}_a$ , l'un des caractères  $\kappa$  de la  $W'$ -classe  $[\kappa]$  se factorise à travers le composé de l'homomorphisme*

$$\pi_0(\lambda(\tilde{u})) : \mathbb{X}^\vee \rightarrow \pi_0(P'_a)$$

*défini dans la démonstration de 6.8 et l'homomorphisme  $\pi_0(P'_a) \rightarrow \pi_0(P_a)$ .*

*En particulier,*

$$\bar{\mathbb{S}}_{[\kappa]} \subset \bigsqcup_{[\Sigma']} \mathbb{A}_{[\Sigma']}$$

*où  $[\Sigma']$  parcourt l'ensemble des classes de  $W'$ -conjugaison de sous-groupes de  $W'$  contenant au moins un membre  $\Sigma'$  qui stabilise  $\kappa$  et où  $\mathbb{A}_{[\Sigma']}$  est strate associée à  $[\Sigma']$  comme dans la section 7.*

*Démonstration.* La première assertion résulte de 8.3 et 8.4. La seconde assertion résulte de 8.1. La troisième assertion résulte de la seconde, de la propositions 6.8 et du corollaire 7.4. □

**Corollaire 8.6** *La composante indexée  $[\kappa]$ , avec  $\kappa \in \hat{T}$ , est non nulle seulement si la  $W$ -orbite de  $\kappa$  est stable par  $\Theta_{\text{geo}}$ .*

*Démonstration.* D'après l'estimation du support, si celle-ci est non vide, il existe un sous-groupe  $\Sigma'$  de  $W' = W \rtimes \Theta$  d'image  $\Theta_{\text{geo}}$  dans  $\Theta$  qui fixe  $\kappa$ . Il revient au même de dire que la  $W$ -orbite de  $\kappa$  est stable par  $\Theta_{\text{geo}}$ . □

L'énoncé de support du théorème 8.6 va être raffiné dans la section §10 une fois qu'on aura introduit les groupes endoscopiques. Disons pour l'instant que le théorème 8.6 est déjà optimal dans le cas où  $G$  est un groupe réductif de centre connexe comme le groupe unitaire où les groupes semi-simple adjoints. Dans ce cas,  $P'_a = P_a$  car  $J_a$  a des fibres connexes.

### 9. Le lien avec les $\kappa$ -intégrales orbitales

La décomposition du corollaire 8.2 correspond bien à la décomposition de la somme des intégrales locales dans une classe de conjugaison stable, en somme des  $\kappa$ -intégrales orbitales. Soit  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(k)$  une caractéristique elliptique à valeur dans  $k$ . D’après §2, le nombre de  $k$ -points de la fibre  $\mathcal{M}_a$  est donné par la formule

$$|\mathcal{M}_a(k)| = \sum_{\alpha \in \ker^1(F, G)} \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{g}(\alpha)/\text{conj.} \\ \chi(\gamma) = a}} O_\gamma(1_D).$$

D’après Langlands et Kottwitz (cf. [18], [15]) cette somme peut être transformée en une somme de  $\kappa$ -intégrales orbitales. Nous allons passer en revue cette transformation de notre point de vue.

Considérons le morphisme quotient

$$\mathcal{M}_a \rightarrow [\mathcal{M}_a/P_a] = \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet]$$

dont le quotient se décompose en produit des facteurs locaux d’après 4.5. Au-dessus de chaque  $k$ -point  $\underline{m} = (m_v)$  de  $\prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet]$ , on a un  $P_a$ -torseur dont la classe d’isomorphisme définit un élément  $\text{inv}(\underline{m}) \in H^1(k, P_a)$ . Cette classe s’annule si et seulement si le torseur a un  $k$ -point. Notons que la suite exacte longue associée à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow P_a^0 \rightarrow P_a \rightarrow \pi_0(P_a) \rightarrow 1$$

induit un isomorphisme

$$0 = H^1(k, P_a^0) \rightarrow H^1(k, P_a) \xrightarrow{\sim} H^1(k, \pi_0(P_a)) \rightarrow H^2(k, P_a^0) = 0,$$

en vertu des annulations résultant du théorème de Lang et de la dimension cohomologique d’un corps fini [22]. Soit  $\bar{a}$  un point géométrique au-dessus de  $a$ . Le groupe  $H^1(k, P_a)$  est isomorphe au groupe des  $\sigma$ -coinvariants de  $\pi_0(P_{\bar{a}})$

$$H^1(k, P_a) = \pi_0(P_{\bar{a}})_{(\sigma)}$$

et donc en particulier, fini.

On peut maintenant compter d’une autre façon le nombre de  $k$ -points de  $\mathcal{M}_a$

$$|\mathcal{M}_a(k)| = |P_a(k)| \sum_{\substack{\underline{m} \in \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet](k) \\ \text{inv}(\underline{m}) = 0}} \frac{1}{|\text{Aut}(\underline{m})(k)|}.$$

En faisant opérer la transformation de Fourier sur le groupe fini  $\pi_0(P_{\bar{a}})_{(\sigma)}$ , on peut réécrire cette somme à l’aide des  $\kappa$ -intégrales orbitales

$$|\mathcal{M}_a(k)| = |P_a^0(k)| \sum_{\substack{\kappa: \pi_0(P_a) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ \sigma(\kappa) = \kappa}} \sum_{\underline{m} \in \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet/P_{a,v}^\bullet](k)} \langle \kappa, \text{inv}(\underline{m}) \rangle \frac{1}{|\text{Aut}(\underline{m})(k)|}$$

car  $|P_a(k)/P_a^0(k)| = |\pi_0(P_{\bar{a}})^{(\sigma)}| = |\pi_0(P_{\bar{a}})_{(\sigma)}|$ . On a donc

$$|\mathcal{M}_a(k)| = \sum_{\substack{\kappa: \pi_0(P_{\bar{a}}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ \sigma(\kappa) = \kappa}} O_a^\kappa(1_D)$$

avec

$$O_a^\kappa(1_D) = |P^0(k)| \sum_{\underline{m} \in \prod_v [\mathcal{M}_{a,v}^\bullet / P_{a,v}^\bullet](k)} \langle \kappa, \text{inv}(\underline{m}) \rangle \frac{1}{\text{Aut}(\underline{m})(k)}.$$

Notons que le choix d'un  $k$ -point de  $\mathcal{M}_a$  est implicite dans cette définition de  $O_a^\kappa(1_D)$  car les  $\mathcal{M}_{a,v}^\bullet$  dépendent de ce point base. Il est commode de prendre pour point base le point de Kostant construit dans 2.5 sous l'hypothèse que  $G$  est quasi-déployé et qu'on s'est donné une racine carrée de  $L_D$ .

Du fait que pour  $\underline{m} = (m_v)$ ,  $\text{inv}(\underline{m})$  est une somme des invariants locaux  $\text{inv}(m_v)$ ,  $O_a^\kappa(1_D)$  se décompose en produit de  $\kappa$ -intégrales orbitales locales

$$O_a^\kappa(1_D) = |P^0(k)| \prod_{v \in |X|} O_{a,v}^\kappa(1_{D_v}).$$

Cette décomposition du nombre de  $k$ -points de  $\mathcal{M}_a$  est essentiellement la même que la  $[\kappa]$ -décomposition de la proposition 8.2 en vertu de l'énoncé suivant.

**Proposition 9.1** *Pour tous  $\kappa : \pi_0(P_{\bar{a}}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ , si  $\sigma(\kappa) \neq \kappa$ , on a*

$$\text{Tr}(\sigma, {}^p\text{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa], \bar{a}}) = 0$$

pour tous  $j$ . Si  $\sigma(\kappa) = \kappa$  ou autrement dit si la  $\sigma$ -orbite  $[\kappa]$  est un singleton, on a

$$\text{Tr}(\sigma, \sum_j (-1)^j [{}^p\text{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa], \bar{a}}]) = O_a^\kappa(1_D).$$

*Démonstration.* Si  $\sigma(\kappa) \neq \kappa$ ,  $\sigma_a$  permute circulairement les facteurs directs  ${}^p\text{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa', \bar{a}}$  avec  $\kappa'$  dans la  $\sigma$ -orbite  $[\kappa]$ . Un tel opérateur a nécessairement une trace nulle. Le cas  $\sigma(\kappa) = \kappa$  résulte l'appendice A.3 de [20].  $\square$

On en déduit le pendant arithmétique du corollaire 8.6.

**Corollaire 9.2** *Soit  $\kappa$  un caractère d'ordre fini de  $\mathbb{X}^\vee$  dont la  $W$ -orbite est stable par  $\Theta_{\text{geo}}$ . Soit  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(k)$ . Pour que*

$$\text{Tr}(\sigma, {}^p\text{H}^j(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa], \bar{a}}) \neq 0$$

*il est nécessaire que la  $W$ -orbite de  $\kappa$  soit stable par  $\Theta$ .*

### 10. Le lien avec les groupes endoscopiques

On suppose toujours que le groupe des caractères  $\mathbb{X}$  de  $\mathbb{T}$  n'a pas de  $W'_{\text{geo}}$ -invariants non triviaux ce qui est notamment le cas si  $G$  est un groupe semi-simple. Cette hypothèse implique en particulier l'existence des  $a \in \mathbb{A}^\vee(\bar{k})$  elliptiques.

Soit  $\hat{G}$  le groupe dual connexe complexe de  $\mathbb{G}$ . Il est muni d'un épinglage comprenant en particulier d'un tore maximal  $\hat{T}$  et d'un sous-groupe de Borel  $\hat{B}$  comprenant  $\hat{T}$ . On pose  ${}^L G_{\text{geo}} = \hat{G} \rtimes \Theta_{\text{geo}}$  où  $\Theta_{\text{geo}}$  est l'image de l'homomorphisme  $\rho_G : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  associé au torseur  $\tau_G^{\text{out}}$  et où le produit semi-direct est construit à partir de l'action de  $\Theta_{\text{geo}}$  sur  $\hat{G}$  qui fixe l'épinglage.

Soit  $\kappa$  un élément d'ordre fini de  $\hat{T}$ . Notons  $\hat{H}$  la composante neutre du centralisateur  $({}^L G)_\kappa$  de  $\kappa$  dans  ${}^L G$ . C'est le sous-groupe réductif connexe de  $\hat{G}$  engendré par  $\hat{T}$  et les sous-groupes radiciels  $X_{\alpha^\vee}$  de  $\hat{G}$  associées aux racines  $\alpha^\vee : \hat{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$  telles que  $\alpha^\vee(\kappa) = 1$ . Le groupe réductif connexe  $\hat{H}$  vient avec un épinglage déduit de celui de  $\hat{G}$ .

Notons  $W_H$  le groupe de Weyl de  $\hat{T}$  dans  $\hat{H}$  et  $(W'_{\text{geo}})_\kappa$  le sous-groupe des éléments de  $W'_{\text{geo}} = W \rtimes \Theta_{\text{geo}}$  qui fixent  $\kappa$ . On a  $W_H = N(\hat{T}, \hat{H})/\hat{T}$  et  $(W'_{\text{geo}})_\kappa = N(\hat{T}, ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa)/\hat{T}$  où  $N(\hat{T}, \hat{H})$  et  $N(\hat{T}, ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa)$  sont les normalisateurs de  $\hat{T}$  dans  $\hat{H}$  et dans  $({}^L G)_\kappa$ . On en déduit un isomorphisme  $N(\hat{T}, ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa)/N(\hat{T}, \hat{H}) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_\kappa/W_H$  et donc un homomorphisme

$$(W'_{\text{geo}})_\kappa/W_H \rightarrow ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa/\hat{H}.$$

**Lemme 10.1** 1. L'homomorphisme  $(W'_{\text{geo}})_\kappa/W_H \rightarrow ({}^L G)_\kappa/\hat{H}$  est un isomorphisme.

2. Soit  $(W'_{\text{geo}})_\kappa^{\text{out}}$  le sous-groupe de  $(W'_{\text{geo}})_\kappa$  des éléments qui laissent stable l'ensemble des racines positives de  $\hat{H}$ . Alors

$$(W'_{\text{geo}})_\kappa = W_H \rtimes (W'_{\text{geo}})_\kappa^{\text{out}}.$$

*Démonstration.* 1. Il revient au même de démontrer que l'homomorphisme

$$N(\hat{T}, ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa)/N(\hat{T}, \hat{H}) \rightarrow ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa/\hat{H}$$

est un isomorphisme. Il est injectif parce que  $N(\hat{T}, \hat{H})$  est l'intersection  $N(\hat{T}, ({}^L G_{\text{geo}})_\kappa) \cap \hat{H}$ . Il est surjectif car tout automorphisme de  $\hat{H}$  peut être modifié par un homomorphisme intérieur pour faire un automorphisme qui fixe l'épinglage de  $\hat{H}$  et stabilise en particulier  $\hat{T}$ .

2. Il suffit de démontrer tout élément  $w \in (W'_{\text{geo}})_\kappa$  s'écrit de façon unique sous la forme  $w_\kappa = w_H w_\kappa^{\text{out}}$  avec  $w_H \in W_H$  et  $w_\kappa^{\text{out}} \in (W'_{\text{geo}})_\kappa^{\text{out}}$ . En effet,  $w_\kappa$  agit sur l'ensemble des racines de  $\hat{H}$  et on peut modifier cette

action par un unique élément  $w_H$  pour qu'il stabilise l'ensemble des racines positives de  $\hat{H}$ .  $\square$

**Définition 10.2** Une donnée endoscopique<sup>2</sup> géométrique non ramifiée, consiste en un couple  $(\kappa, \rho)$  constitué d'un élément

$$\rho : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}}$$

tel que le composé

$$\pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}} \simeq (W'_{\text{geo}})_{\kappa} / W_H \rightarrow W'_{\text{geo}} / W = \Theta_{\text{geo}}$$

est l'homomorphisme  $\rho_G^{\text{geo}}$  de la section 5.

Ceci implique en particulier que le sous-groupe  $(W'_{\text{geo}})_{\kappa}$  des éléments de  $W'_{\text{geo}}$  qui fixent  $\kappa$ , se surjecte sur  $\Theta_{\text{geo}}$  autrement dit la  $W$ -orbite de  $\kappa$  est stable par  $\Theta_{\text{geo}}$ . Donc  $\kappa$  vérifie la contrainte 8.6.

Soit  $(\kappa, \rho)$  une donnée endoscopique géométrique non ramifiée comme ci-dessus. Soit  $\mathbb{H}$  le groupe déployé sur  $k$  dont le dual complexe est  $\hat{H}$ . Notons  $\rho_H$  l'homomorphisme composé

$$\rho_H : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}} \simeq (W'_{\text{geo}})_{\kappa} / W_H \rightarrow \text{Out}(\hat{H}) = \text{Out}(\mathbb{H}).$$

Notons  $\Theta_H$  l'image de l'homomorphisme  $\rho_H : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}}$  et posons  $W'_H = W_H \rtimes \Theta_H$ . On a alors les inclusions

$$W'_H = W_H \rtimes \Theta_H \subset W_H \rtimes (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}} = (W'_{\text{geo}})_{\kappa} \subset W'_{\text{geo}}.$$

L'homomorphisme  $\rho_H : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{H})$  nous fournit un  $\text{Out}(\mathbb{H})$ -torseur  $\tau_H^{\text{out}}$  sur  $\overline{X}$  et donc un schéma en groupes quasi-déployé  $H$  sur  $\overline{X}$  obtenu en tordant  $\mathbb{H}$  muni de l'action de  $\text{Out}(\mathbb{H})$  fixant un épingleage, par le  $\text{Out}(\mathbb{H})$ -torseur  $\tau_H^{\text{out}}$ .

Soit  $\overline{X}_{\Theta_H}$  le revêtement fini étale de  $\overline{X}$  pointé par un point géométrique  $x_{\Theta_H}$  au-dessus du point  $x$ , attaché à l'homomorphisme  $\rho_H : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow \Theta_H$ . Du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\overline{X}, x) & \xrightarrow{\rho_H} & \Theta_H \\ & \searrow \rho_G^{\text{geo}} & \downarrow \\ & & \Theta_{\text{geo}} \end{array}$$

est commutatif, il existe un  $X$ -morphisme  $\overline{X}_{\Theta_H} \rightarrow \overline{X}_{\Theta}^{\text{geo}}$  envoyant le point  $x_{\Theta_H}$  sur le point  $x_{\Theta}^{\text{geo}}$  de  $X_{\Theta}^{\text{geo}}$ .

---

<sup>2</sup> Notre définition diffère légèrement de la définition de [14] 7.1.

On a l'espace de module de Hitchin  $\mathcal{M}_H$  associé à  $H$  et au diviseur  $D$  ainsi que le morphisme de Hitchin

$$f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathbb{A}_H$$

où  $\mathbb{A}_H$  est l'espace des sections

$$\overline{X} \rightarrow ((\overline{X}_{\Theta_H} \times \mathfrak{t})/W'_H) \times^{\mathbb{G}_m} L_D.$$

Le morphisme évident

$$(\overline{X}_{\Theta_H} \times \mathfrak{t})/W'_H \rightarrow (\overline{X}_{\Theta}^{\text{geo}} \times \mathfrak{t})/W'_{\text{geo}}$$

induit un morphisme de l'espace affine de Hitchin pour  $H$  vers l'espace affine de Hitchin pour  $G$

$$\mathbb{A}_H \rightarrow \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \otimes_k \overline{k}.$$

Le cas où  $\hat{G}$  a un groupe dérivé simplement connexe est très agréable. Dans ce cas, le centralisateur  $\hat{G}_\kappa$  est connexe de sorte que  $\hat{H} = \hat{G}_\kappa$ . Il s'ensuit que  $\Theta_H = \Theta$  et les revêtements étales  $X_{\Theta_H}$  et  $\overline{X}_{\Theta}$  de  $X$  sont les mêmes. Dans ce cas particulier, le morphisme  $\mathbb{A}_H \rightarrow \overline{\mathbb{A}}$  est l'un des morphismes  $\mathbb{B}_{\Sigma'} \rightarrow \mathbb{A}$  déjà considérés dans la section 7.

**Proposition 10.3** *Dans l'ouvert  $\overline{\mathbb{A}}^\heartsuit$ , le morphisme  $\mathbb{A}_H^\heartsuit \rightarrow \overline{\mathbb{A}}^\heartsuit$  est un morphisme fini et net. Soit  $\mathbb{A}_H^{\text{max}}$  l'ouvert de  $\mathbb{A}_H$  où la monodromie de  $J_{H,a}$  est maximale en l'occurrence est égale à  $W'_H$ . La restriction de  $\mathbb{A}_H^\heartsuit \rightarrow \overline{\mathbb{A}}^\heartsuit$  à  $\mathbb{A}_H^{\text{max}}$  est finie et étale sur son image.*

*Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux homomorphismes  $\pi_1(\overline{X}, \overline{x}) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}^{\text{out}}$  qui ne sont pas conjuguées. Alors les images de  $\mathbb{A}_{H(\rho_1)}^\heartsuit$  et  $\mathbb{A}_{H(\rho_2)}^\heartsuit$  dans  $\overline{\mathbb{A}}^\heartsuit$  sont des sous-schémas localement fermés disjoints.*

*Démonstration.* L'assertion sur la finitude et la netteté se démontre comme 7.2. L'assertion sur la disjonction des images pour de différentes  $\rho$  se démontre comme suit. Soit  $a \in \overline{\mathbb{A}}^\heartsuit(\overline{k})$  un point géométrique dans l'image de  $\mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ . Soit  $u$  un point de l'ouvert  $U_a$  où  $J_a$  est un tore. La monodromie de  $J_a|_{U_a}$  est donné par un homomorphisme  $\pi_1(U_a, u_a) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}$  lequel passe au quotient pour déterminer  $\rho : \pi_1(\overline{X}, x) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_{\kappa}/W_H$  à conjugaison près. Ainsi la monodromie du tore  $J_a|_{U_a}$  détermine  $\rho$  à conjugaison près.  $\square$

**Théorème 10.4** *Supposons que la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $|W|$ . Supposons que  $\mathbb{X}^\vee$  n'a pas d'invariants sous  $W'_{\text{geo}}$ .*

*Soient  $\kappa$  un élément d'ordre fini de  $\hat{T}$ . Le facteur direct  ${}^p H^j(f_*^{\text{ell}} \mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est supporté par la réunion des images des  $\mathbb{A}_{H_\rho}$  pour différentes données endoscopiques géométriques non ramifiées  $(\kappa, \rho)$ . En particulier, si la  $W$ -orbite de  $\kappa$  n'est pas stable sous  $\Theta_{\text{geo}}$ , ce facteur direct est nul.*

*Démonstration.* Soit  $a$  un point géométrique de  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  tel que la fibre en  $a$  de l'un des faisceau pervers  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est non nulle. Le point  $a$  correspond à un morphisme  $h_a : \overline{X} \rightarrow [\mathbf{car}/\mathbb{G}_m]$ . Notons  $U_a$  l'image inverse de  $[\mathbf{car}^{\text{ssr}}/\mathbb{G}_m]$  et  $u$  un point géométrique de  $U_a$ . Soit  $\tilde{U}_a$  le revêtement étale galoisien de  $U_a$  de groupe de Galois  $W'_{\text{geo}}$  comme dans 6.8. Soit  $\tilde{u}$  un point géométrique de  $\tilde{U}_a$  au-dessus de  $u$ . Ce choix donne un homomorphisme  $\rho_a : \pi_1(U_a, u_a) \rightarrow W'_{\text{geo}}$  d'image  $\Sigma'_a$ .

D'après le théorème 8.4, pour que la fibre en  $a$  de l'un des faisceau pervers  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$  soit non nulle, il est nécessaire que l'un des conjugués de  $\Sigma'_a$  soit contenu dans  $(W'_{\text{geo}})_\kappa$  le sous-groupe de  $W'_{\text{geo}}$  fixateur de  $\kappa$ . On peut supposer que  $\Sigma'_a \subset (W'_{\text{geo}})_\kappa$  quitte à changer  $\tilde{u}$ .

Rappelons que l'homomorphisme  $\pi_1(U_a, u_a) \rightarrow \pi_1(\overline{X}, u_a)$  est surjectif et a un noyau engendré par les sous-groupes d'inertie  $I_x$  pour les points  $x \in \overline{X} - U_a$ . Pour démontrer que  $a$  provient d'un espace de Hitchin  $\mathbb{A}_{H_p}$  défini précédemment, il suffit de démontrer que l'homomorphisme composé de  $\rho_a : \pi_1(U_a, u) \rightarrow (W'_{\text{geo}})_\kappa$  et  $(W'_{\text{geo}})_\kappa \rightarrow (W'_{\text{geo}})_\kappa/W_H$  se factorise par  $\pi_1(\overline{X}, u)$ . Il revient au même de démontrer que pour tout  $x \in \overline{X} - U_a$ , la restriction de cet homomorphisme aux sous-groupes d'inertie  $I_x$  est triviale.

Le schéma en groupes commutatif lisse  $J_a$  sur  $\overline{X}$  admet un sous-schéma en groupes des composantes neutres  $J_a^0$  : pour tout point géométrique  $x \in \overline{X}$ , la fibre en  $x$  de  $J_a^0$  est la composante neutre de la fibre en  $x$  de  $J_a$ . On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow J_a^0 \rightarrow J_a \rightarrow J_a/J_a^0 \rightarrow 0$$

dont le conoyau  $J_a/J_a^0$  est supporté par  $\overline{X} - U_a$ . En effet, au-dessus de  $U_a$ ,  $J_a$  est un tore et en particulier a des fibres connexes.

Le faisceau  $J_a/J_a^0$  étant supporté par un schéma de dimension nulle, on en déduit une suite exacte

$$H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\overline{X}, J_a) \rightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte à droite

$$H^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow \pi_0(H^1(\overline{X}, J_a^0)) \rightarrow \pi_0(H^1(\overline{X}, J_a)) \rightarrow 0.$$

Puisque  $J_a^0$  est un schéma en groupes lisse à fibres connexes et génériquement torique, on a un isomorphisme

$$\pi_0(H^1(\overline{X}, J_a^0)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}_{\Sigma'_a}^\vee$$

de groupe des composante connexes du champ des  $J_a^0$ -torseurs est le groupe des coinvariants de  $\pi_1(U_a, u_a)$  dans le groupe des cocaractères  $\mathbb{X}^\vee$ . L'élément  $\kappa \in \hat{T}$  définit donc un caractère

$$\kappa : \pi_0(H^1(\overline{X}, J_a^0)) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times.$$

L'hypothèse que la fibre de l'un des faisceaux pervers  ${}^p\mathbf{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$  est non nulle, implique que  $\kappa$  se factorise à travers  $\pi_0(\mathbf{H}^1(\overline{X}, J_a))$  autrement dit la restriction de  $\kappa$  au groupe fini  $\mathbf{H}^0(\overline{X}, J_a/J_a^0)$  est nulle.

Soit  $x$  un point dans  $\overline{X} - U_a$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0((J_a)_x) & \longrightarrow & \pi_0(J_a(F_x)/J_a^0(\mathcal{O}_x)) & \longrightarrow & \pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^0(\overline{X}, J_a/J_a^0) & \longrightarrow & \pi_0(\mathbf{H}^1(\overline{X}, J_a^0)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathbf{H}^1(\overline{X}, J_a)) \end{array}$$

où  $\pi_0(J_a(F_x)/J_a^0(\mathcal{O}_x)) = \mathbb{X}_x^\vee$ . L'élément  $\kappa$  peut être vu comme un caractère

$$\kappa : \pi_0(J_a(F_x)/J_a^0(\mathcal{O}_x)) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$$

dont la restriction à  $\pi_0((J_a)_x)$  est nulle. Autrement dit  $\kappa$  est dans l'image de l'application duale

$$\pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x))^* \rightarrow \pi_0(J_a(F_x)/J_a^0(\mathcal{O}_x))^* = \hat{T}^{I_x}.$$

Il est maintenant nécessaire de prendre un groupe auxiliaire  $G_1$  comme dans [15, 7.5]. La construction de loc. cit. fournit une suite exacte de schémas en groupes réductifs connexes sur  $X$

$$1 \rightarrow G \rightarrow G_1 \rightarrow C \rightarrow 1$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $C$  est un tore sur  $X$ ,
- $G_1$  est un groupe réductif de centre connexe,
- son dual complexe  $\hat{G}_1$  a un groupe dérivé simplement connexe.

On renvoie à loc. cit. pour la construction de  $G_1$ . Disons seulement que dans le cas  $G$  semi-simple, l'argument qui suit, avec quelques modifications mineures, marchera aussi si on prend  $G_1$  le groupe adjoint de  $G$ .

On peut définir sur  $\mathbf{car}_{G_1} = \mathfrak{t}_1/W$  le centralisateur régulier  $J_1$  de  $G_1$ . Puisque  $G_1$  est un groupe réductif connexe à centre connexe,  $J_1$  est alors un schéma en groupes commutatif, lisse et à fibres connexes. On a de plus un homomorphisme de l'image réciproque de  $J$  sur  $\mathbf{car}_{G_1}$  dans  $J_1$ , qui se déduit de l'homomorphisme  $G \rightarrow G_1$ . En retirant sur  $X$  par l'homomorphisme  $h_a$ , on a une suite exacte de schémas en groupes lisses

$$1 \rightarrow J_a \rightarrow J_{1,a} \rightarrow C \rightarrow 1.$$

On en déduit une suite exacte

$$1 \rightarrow J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x) \rightarrow J_{1,a}(F_x)/J_{1,a}(\mathcal{O}_x) \rightarrow C(F_x)/C(\mathcal{O}_x) \rightarrow 1.$$

Puisque  $C$  est un tore sur  $X$ ,  $C(F_x)/C(\mathcal{O}_x) \simeq \mathbb{Z}^c$  où  $c$  est le rang de  $C$ . En particulier,  $C(F_x)/C(\mathcal{O}_x)$  est un groupe discret. Il s'ensuit que la composante

neutre de  $J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x)$  s'envoie bijectivement sur la composante neutre de  $J_{1,a}(F_x)/J_{1,a}(\mathcal{O}_x)$ . Par conséquent, la flèche

$$\pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x)) \rightarrow \pi_0(J_{1,a}(F_x)/J_{1,a}(\mathcal{O}_x))$$

est injective. Après dualisation, on obtient un *homomorphisme surjectif*

$$\hat{T}_1^{I_x} = \pi_0(J_{1,a}(F_x)/J_{1,a}(\mathcal{O}_x))^* \rightarrow \pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x))^*$$

où  $\hat{T}_1$  est le tore maximal de  $\hat{G}_1$ . Puisque  $\kappa$  appartient à l'image

$$\pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x))^* \rightarrow \pi_0(J_a(F_x)/J_a^0(\mathcal{O}_x))^* = \hat{T}^{I_x},$$

il s'ensuit que  $\kappa$  appartient à l'image de l'application composée

$$\hat{T}_1^{I_x} \rightarrow \pi_0(J_a(F_x)/J_a(\mathcal{O}_x))^* \rightarrow \hat{T}^{I_x}.$$

Il suffit maintenant d'invoquer un lemme de Kottwitz pour terminer la démonstration du théorème. □

**Lemme 10.5** *Si  $\kappa$  appartient à l'image de  $\hat{T}_1^{I_x} \rightarrow \hat{T}^{I_x}$ , alors l'homomorphisme  $I_x \rightarrow \text{Out}(\mathbb{H})$  est trivial.*

*Démonstration.* Pour la commodité du lecteur, on rappellera l'argument de Kottwitz avec nos notations légèrement différentes des siennes.

Rappelons qu'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \hat{C} \rightarrow \hat{G}_1 \rightarrow \hat{G} \rightarrow 1.$$

Notons  $\hat{T}_1$  l'image réciproque de  $\hat{T}$  dans  $\hat{G}_1$ . Les plongements  $\eta_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow \hat{G}$  et  $\eta_{\hat{T}_1} : \hat{T}_1 \rightarrow \hat{G}_1$  sont  $I_x$ -équivariant à conjugaison près. Contenu du fait que  $I_x$  agit trivialement sur  $\hat{G}$  et  $\hat{G}_1$  pour tout  $\sigma \in I_x$ , il existe  $g_1^\sigma \in \hat{G}_1$  tel que pour tous  $t_1 \in \hat{T}_1$ , on a

$$\eta_{\hat{T}_1}(\sigma(t_1)) = \text{Int}(g_1^\sigma)(\eta_{\hat{T}_1}(t_1)).$$

Soit  $g^\sigma$  l'image de  $g_1^\sigma$  dans  $\hat{G}$ , on a alors la relation similaire

$$\eta_{\hat{T}}(\sigma(t)) = \text{Int}(g^\sigma)(\eta_{\hat{T}}(t))$$

pour tout  $t \in \hat{T}$ .

Soit  $\kappa_1 \in \hat{T}_1^{I_x}$  ayant  $\kappa$  comme image dans  $\hat{T}^{I_x}$ . Soit  $\hat{H}$  la composante neutre du centralisateur de  $\kappa$  dans  $\hat{G}$  et  $\hat{H}_1$  la composante neutre du centralisateur de  $\kappa_1$  dans  $\hat{G}_1$ . Puisque  $\hat{G}_1$  est simplement connexe,  $\hat{H}_1$  est tout le centralisateur de  $\kappa_1$ . L'homomorphisme  $\hat{H}_1 \rightarrow \hat{H}$  est surjectif car il induit un isomorphisme sur les algèbres de Lie. Nous allons fixer des épinglages compatibles de  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_1$  et de  $\hat{G}$ ,  $\hat{G}_1$  avec tores maximaux  $\hat{T}$ ,  $\hat{T}_1$ . D'après Langlands, il existe un unique action de  $I_x$  sur  $\hat{H}_1$  et  $\hat{H}$  fixant ces

épinglages tels que les plongements  $\hat{T}_1 \rightarrow \hat{H}_1 \rightarrow \hat{G}_1$  et  $\hat{T} \rightarrow \hat{H} \rightarrow \hat{G}$  sont  $I_x$ -équivariants à conjugaison près. De plus l'homomorphisme surjectif  $\hat{H}_1 \rightarrow \hat{H}$  est  $I_x$ -équivariant. Notons que les faits que  $\hat{T}_1 \rightarrow \hat{H}_1$  est  $I_x$ -équivariant par conjugaison et que  $\kappa_1 \hat{T}_1^{I_x}$  est centralisé par  $\hat{H}_1$  impliquent que  $\kappa_1$  est aussi fixé par l'action de  $I_x$  sur  $\hat{H}_1$ .

Il s'agit de démontrer que pour tout  $\sigma \in I_x$ , l'image de  $\sigma$  dans  $\text{Out}(\hat{H})$  est trivial. Il suffit de démontrer que son image dans  $\text{Out}(\hat{H}_1)$  est trivial. Or, puisque l'inclusion  $\eta_{\hat{H}_1} : \hat{H}_1 \rightarrow \hat{G}_1$  est  $I_x$ -équivariant à conjugaison près, il existe  $g_1^\sigma \in \hat{G}_1$  tel que

$$\eta_{\hat{H}_1}(\sigma(h_1)) = \text{Int}(g_1^\sigma)(\eta_{\hat{H}_1}(h_1))$$

pour tout  $h \in \hat{H}_1$ . Appliquer cette relation à  $\kappa_1$  qui est fixé par  $\sigma$ , cette relation implique que  $g_1$  centralise  $\kappa_1$ . Puisque  $\hat{H}_1$  est tout le centralisateur de  $\kappa_1$ , ceci implique que l'action de  $\sigma$  sur  $\hat{H}_1$  est intérieur.

Ceci termine la démonstration du lemme 10.5 et donc celle du théorème 10.4. □

Cette description du support de la partie  $\kappa$ -isotypique joue le rôle d'un énoncé de pureté, analogue à la conjecture de pureté de Goresky-Kottwitz-MacPherson [9], importante dans leur approche du lemme fondamental par la cohomologie équivariante.

Au lieu de démontrer la pureté de la cohomologie des fibres de Springer conjecturée par Goresky, Kottwitz et MacPherson, on va démontrer que les images réciproques de  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  aux espaces affines de Hitchin des groupes endoscopiques  $\mathbb{A}_H^{\text{max}}$  sont pures. Dans le cas unitaire, cet énoncé a été suffisant pour démontrer le lemme fondamental.

En utilisant un résultat de Faltings [7], on peut vérifier qu'au-dessus de l'ouvert elliptique  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$ , le champ  $\mathcal{M}^{\text{ell}}$  est un champ de Deligne-Mumford lisse, et que le morphisme de Hitchin  $f^{\text{ell}} : \mathcal{M}^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$  est propre et de type fini. Alors, les facteurs directs  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  de l'image directe, sont purs par un théorème de Deligne (cf. [6]). Maintenant, les images réciproques aux  $\mathbb{A}_H^{\text{ell}}$  sont pures parce que  $\mathbb{A}_H^{\text{max}}$  est fini et étale au-dessus de son image dans  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$  et que le facteur direct  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$  est supporté par la réunion disjointe des adhérences des images des  $\mathbb{A}_{H_\rho}^{\text{max}}$  pour les différentes classes de données endoscopiques non ramifiées  $(\kappa, \rho)$ .

Notons enfin l'énoncé suivant qui découle immédiatement de la description de Donagi-Gaitsgory du centralisateur régulier, voir proposition 3.8.

**Proposition 10.6** *Soit  $p_G^H : \text{car}_H \rightarrow \text{car}_G$  le morphisme canonique de l'espace des caractéristiques de  $H$  dans celui de  $G$ . On a alors un homomorphisme canonique*

$$(p_G^H)^* J_G \rightarrow J_H$$

*entre les centralisateur réguliers qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier semi-simple.*

Ces ingrédients ont été utilisés dans la démonstration du lemme fondamental pour le groupe unitaire [20] et sont donc établis ici en toute généralité. Il y a d'autres ingrédients de loc. cit. qui ne peuvent pas se généraliser. En particulier, dans loc. cit. on a utilisé un plongement  $H \rightarrow G$  qui localement pour la topologie étale de  $X$  fait de  $H$  un sous-groupe de Levi de  $G$ . Ce plongement n'existe pas en général et il faudra suppléer d'autres arguments.

**11. Le cas  $SL(2)$**

On discute dans cette dernière section du cas simple du groupe  $SL(2)$  et redémontre le théorème 10.2 dans ce cas-ci. Pour cela, on donnera une description de la flèche  $H^0(\bar{X}, J_a/J_a^0) \rightarrow \pi_0(P'_a)$  en utilisant les modèles de Néron plutôt que la contourner par le lemme 10.3.

Pour  $G = SL(2)$ , l'espace affine de Hitchin est l'espace

$$\mathbb{A}(\bar{k}) = H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_X(2D)).$$

Pour tout  $a \in H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_X(2D))$ , on trace une courbe  $Y_a$  d'équation  $t^2 - a = 0$  sur l'espace total  $V_D$  du fibré en droites  $\mathcal{O}_X(D)$  au-dessus de  $\bar{X}$ . Cette courbe vient avec un morphisme fini  $p_a : Y_a \rightarrow \bar{X}$  de degré 2 dont le groupe des automorphismes est  $\{1, \tau\}$ . L'involution  $\tau$  agit par  $\tau(t) = -t$  et a pour points fixes dans  $Y_a$  les points d'intersection de  $Y_a$  avec la section zéro de  $V_D$ . Notons  $U_a$  l'ouvert maximal de  $\bar{X}$  au-dessus duquel  $Y_a$  est étale : c'est le complément des points dans  $X$  images des points d'intersection de  $Y_a$  avec la section nulle. La caractéristique  $a \in \mathbb{A}(\bar{k})$  est elliptique si et seulement si  $Y_a$  est irréductible. Supposons que  $a$  est elliptique.

Le schéma en groupes  $J_a = h_a^*[J]$  défini dans la section 4 associe à tout  $X$ -schéma  $S$  le groupe

$$J_a(S) = \{s \in \Gamma(S \times_X Y_a, \mathcal{O}^\times) \mid \tau(s)s = 1\}.$$

La restriction de  $J_a$  à  $U_a$  est donc un tore et ses fibres en les points  $x \in \bar{X} - U_a$  ont pour groupe de composantes connexes  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Soit  $J_a^0$  le sous-schéma en groupes de  $J_a$  de ses composantes neutres. On a alors la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow J_a^0 \rightarrow J_a \rightarrow \bigoplus_{x \in \bar{X} - U_a} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_x \rightarrow 0$$

qui induit une suite longue

$$H^0(\bar{X}, \bigoplus_{x \in \bar{X} - U_a} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_x) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a) \rightarrow 0.$$

Cette suite induit une suite exacte à droite des  $\pi_0$

$$H^0(\bar{X}, \bigoplus_{x \in \bar{X} - U_a} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_x) \rightarrow \pi_0(P'_a) \rightarrow \pi_0(P_a) \rightarrow 0$$

où  $P'_a$  est le champ de Picard des  $J_a^0$ -torseurs. On sait d'après 6.4 que  $\pi_0(P'_a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , le groupe des coinvariants de  $\pi_1(U_a, u)$  dans  $\mathbb{X}^\vee = \mathbb{Z}$  de sorte que  $\pi_0(P_a)$  est trivial ou est égal à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dépendant de la nullité ou de la non-nullité de la flèche

$$\beta : H^0(\overline{X}, \bigoplus_{x \in \overline{X} - U_a} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_x) \rightarrow \pi_0(P'_a).$$

La flèche  $\beta$  est une somme des flèches de bord

$$\beta_x : \pi_0(J_{a,x}) \rightarrow \pi_0(P'_a) = (\mathbb{X}_u^\vee)_{\pi_1(U_a, u)}$$

qui peuvent être décrites de façon relativement concrète. Soit  $\text{Ner}(J_a|_{U_a})$  le modèle de Néron du tore  $J_a|_{U_a}$ . Par la propriété universelle des modèles de Néron, on a un homomorphisme

$$J_a \rightarrow \text{Ner}(J_a|_{U_a})$$

qui induit en particulier des flèches

$$\pi_0(J_{a,x}) \rightarrow \pi_0(\text{Ner}(J_a|_{U_a}))_x.$$

D'après Kottwitz et Rapoport (cf. [21] 2.2 (iii)), le groupe des composantes de la fibre en  $x$  du modèle de Néron est le groupe des coinvariants sous l'inertie du groupe des cocaractères

$$\pi_0(\text{Ner}(J_a|_{U_a})_x) = (\mathbb{X}_u^\vee)_{I_x}$$

où  $I_x \subset \pi_1(U_a, u)$  est le sous-groupe d'inertie en  $x$ . La flèche  $\beta_x$  est alors le composé de la flèche purement locale  $\pi_0(J_{a,x}) \rightarrow \pi_0(\text{Ner}(J_a|_{U_a}))_x$  et de la flèche évidente  $(\mathbb{X}_u^\vee)_{I_x} \rightarrow (\mathbb{X}_u^\vee)_{\pi_1(U_a, u)}$ .

**Lemme 11.1** *Soit  $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\overline{k})$  une caractéristique elliptique pour  $\text{SL}(2)$ . Alors  $\pi_0(P_a) = 0$  dès qu'il existe un point de ramification de  $\pi_a : Y_a \rightarrow X$  qui est unibranche. Dans le cas où tous les points de ramification de  $Y_a \rightarrow X$  ont deux branches, on a  $\pi_0(P_a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Il revient au même de démontrer que la flèche de bord

$$\beta_x : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_x \rightarrow \pi_0(P'_a) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

est non nulle si et seulement si le point de  $Y_a$  au-dessus de  $x$  est unibranche. Examinons les deux cas.

*Le cas d'un point de ramification à deux branches :* Soit  $x$  un point de branchement de  $\overline{X}$  au-dessus duquel le point  $\tilde{x}$  de  $Y_a$  a deux branches. Soit  $\mathcal{O}_x$  l'anneau local complété de  $\overline{X}$  en  $x$  et  $F_x$  son corps des fonctions. Soit  $\mathcal{O}_{Y_a, \tilde{x}}$  le complété de  $Y_a$  en  $\tilde{x}$  et  $E_x$  l'anneau total des fractions de  $\mathcal{O}_{Y_a, \tilde{x}}$ . Puisque  $Y_a$  est deux branches en  $x$ ,  $E_x$  est un produit de deux corps. Puisque  $E_x/F_x$  est de degré 2, on a  $E_x = F_x \times F_x$ . On en déduit que l'inertie  $I_x$  agit trivialement sur  $\mathbb{X}^\vee$  de sorte que  $\mathbb{X}_{I_x}^\vee = \mathbb{Z}$ .

La flèche  $\beta_x : (J_{a,x}/J_{a,x}^0) \rightarrow \mathbb{X}_{\pi_1(U_a)}^\vee$  se factorise à travers  $\mathbb{X}_{I_x}^\vee$ . Or la flèche  $(J_{a,x}/J_{a,x}^0) \rightarrow \mathbb{X}_{I_x}^\vee$  est nécessairement nulle car  $(J_{a,x}/J_{a,x}^0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est un groupe fini et  $\mathbb{X}_{I_x}^\vee = \mathbb{Z}$  n'a pas de torsion. Donc  $\beta_x = 0$  dans le cas de deux branches.

*Le cas d'un point de ramification à une seule branche :* Mettons-nous maintenant au voisinage d'un point de branchement  $x$  tel qu'en le point  $\tilde{x}$  de  $Y_a$  au-dessus de  $\bar{X}$ ,  $Y_a$  est unibranche. Gardons les mêmes notations que dans le cas précédent.  $E_x$  est une extension ramifiée de degré 2 de  $F_x$  et le groupe d'inertie  $I_x$  agit sur  $\mathbb{X}^\vee = \mathbb{Z}$  par  $d \mapsto -d$ . La flèche  $\mathbb{X}_{I_x}^\vee \rightarrow \mathbb{X}_{\pi_1(U_a,u)}^\vee$  est donc un isomorphisme.

Le groupe  $J(F_x)$  est l'ensemble des éléments de norme 1 de  $E_x^\times$ . On constate que  $J(F_x)$  est contenu dans les entiers de  $E_x$ . En particulier, il est borné. Le modèle Néron  $\text{Ner}(J_a|_{U_a})$  est donc de type fini et a pour  $\mathcal{O}_v$ -points les points

$$\text{Ner}(J_a|_{U_a})(\mathcal{O}_x) = J(F_x).$$

Sa fibre spéciale a deux composantes connexes selon que la section  $s$  prend la valeur 1 ou  $-1$  en le point  $\tilde{x}$  de  $Y_a$ .

On a  $J_a(\mathcal{O}_v) \subset \text{Ner}(J_a|_{U_a})(\mathcal{O}_v)$  et  $J_a^0(\mathcal{O}_v) \subset \text{Ner}^0(J_a|_{U_a})(\mathcal{O}_v)$ . L'homomorphisme canonique

$$J_a(\mathcal{O}_v)/J_a^0(\mathcal{O}_v) \rightarrow \text{Ner}(J_a|_{U_a})(\mathcal{O}_v)/\text{Ner}(J_a|_{U_a})^0(\mathcal{O}_v)$$

est un isomorphisme. En effet on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} J_a(\mathcal{O}_v)/J_a^0(\mathcal{O}_v) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Ner}(J_a|_{U_a})(\mathcal{O}_v)/\text{Ner}(J_a|_{U_a})^0(\mathcal{O}_v) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \{\pm 1\} & \end{array}$$

où les deux flèches en biais associent à la classe d'une section  $s$  de  $J_a$  ou de  $\text{Ner}(J_a|_{U_a})$ , définie au voisinage de  $\tilde{x}$ , sa valeur prise en  $s$ . Celles-ci étant des isomorphismes, il en est de même de la flèche horizontale. Dans le cas d'un point de ramification unibranche, la flèche  $\beta_v$  est un donc isomorphisme. □

**Lemme 11.2** *Soit  $Y_a$  un revêtement double de  $\bar{X}$  génériquement étale dont tous les points de ramifications ont deux branches. Alors, la normalisation  $\tilde{Y}_a$  de  $Y_a$  est un revêtement partout non ramifié de  $X$ .*

*Démonstration.* Après normalisation, au-dessus d'un point de branchement  $x \in \bar{X}$ , il y a deux points de  $\tilde{Y}_a$  correspondant aux deux branches passant par le point de ramification au-dessus de  $x$ . Le revêtement  $\tilde{Y}_a \rightarrow X$  est alors nécessairement étale. □

La donnée d'un revêtement double étale de  $\bar{X}$  est équivalente à la donnée d'un homomorphisme  $\rho : \pi_1(\bar{X}, u) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Elle est aussi équivalente à la

donnée d'un fibré inversible  $\mathcal{L}_\rho$  sur  $\overline{X}$  muni d'un isomorphisme  $\mathcal{L}_\rho^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\overline{X}}$ . Soit  $V_{\mathcal{L}_\rho} \rightarrow \mathbb{A}_X^1$  le morphisme de l'espace total de  $\mathcal{L}_\rho$  dans l'espace total de  $\mathcal{O}_{\overline{X}}$  donné sur les sections locales par  $s \mapsto s^{\otimes 2}$ . Alors, on retrouve le revêtement double étale de  $\overline{X}$  en prenant l'image réciproque de la section 1 de  $\mathbb{A}_X^1$ .

**Lemme 11.3** *Soit  $a \in H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_X(2D))$  tel que la courbe  $Y_a$  tracée sur l'espace total  $V_D$  du fibré vectoriel  $\mathcal{O}_X(D)$ , n'a que des points de ramification à deux branches. Soit  $\rho : \pi_1(\overline{X}, u) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  le quotient du groupe fondamental correspondant au revêtement non ramifié de  $\overline{X}$  obtenu en normalisant  $Y_a$ . Alors le diviseur d'annulation  $\text{div}(a)$  est de la forme*

$$\text{div}(a) = 2D'$$

*$D'$  étant un diviseur effectif tel que  $\mathcal{O}_{\overline{X}}(D' - D)$  soit isomorphe à  $\mathcal{L}_\rho$  où  $\mathcal{L}_\rho$  est le fibré inversible de carré neutre, associé à  $\rho$ . Il existe de plus une section*

$$b \in H^0(\overline{X}, \mathcal{L}_\rho \otimes \mathcal{O}_X(D))$$

*bien déterminée à un signe près, tel que  $b^{\otimes 2} = a$ .*

*Démonstration.* On sait que localement le revêtement  $Y_a$  est déterminé par une équation de la forme  $t^2 - a = 0$  où  $t$  est la coordonnée verticale du fibré en droites et où la section  $a$  est vue localement comme une fonction sur  $X$  à l'aide de trivialisations locales de  $\mathcal{O}_X(2D)$ . Les points de branchement  $x \in \overline{X}$  sont les points où  $a$  s'annule. Le germe de  $Y_a$  au-dessus d'un point de branchement  $x$ , est unibranche si  $a$  s'annule en  $x$  à l'ordre impair, et  $Y_a$  a deux branches si  $a$  s'annule en  $x$  à l'ordre pair. Ainsi  $Y_a$  n'a que des points de ramification à deux branches si et seulement si le diviseur d'annulation de  $a$  est de la forme

$$\text{div}(a) = 2D'$$

où  $D'$  est un diviseur effectif. Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\overline{X}}(D' - D)$ . Alors la section  $a$  de  $\mathcal{O}_X(2D)$  ayant  $2D'$  comme diviseur d'annulation, définit un isomorphisme  $\mathcal{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\overline{X}}$ . La section  $a$  fournit par ailleurs un isomorphisme de

$$V_{\mathcal{O}_X(2D)} \times_{\overline{X}} (\overline{X} - D') \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\overline{X}-D'}^1$$

au-dessus duquel on a un isomorphisme

$$V_{\mathcal{O}_X(D)} \times_{\overline{X}} (\overline{X} - D') \xrightarrow{\sim} V_{\mathcal{L}} \times_{\overline{X}} (\overline{X} - D').$$

Il s'ensuit qu'au-dessus de  $\overline{X} - D'$ , le revêtement double étale  $Y_a$  et celui qui se déduit du fibré de carré neutre  $\mathcal{L}$  sont isomorphes. L'isomorphisme se prolonge sur tout  $\overline{X}$  par normalisation.

L'isomorphisme  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\overline{X}}(D')$  fournit à  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(D)$  une section  $b$  dont le diviseur d'annulation est  $D'$ . La section  $b^{\otimes 2}$  de  $\mathcal{O}_X(2D)$  a alors

le même diviseur d'annulation que  $a$ . En modifiant  $b$  par un scalaire, on a  $b^{\otimes 2} = a$ . □

La conjonction des trois lemmes précédents fournit la description suivante du faisceau  $\pi_0(P/\mathbb{A}^{\text{ell}})$ . Soit  $\text{Pic}_{\overline{X}}[2]^*$  l'ensemble des points d'ordre deux non triviaux de la jacobienne de  $\overline{X}$ . Pour chaque  $\mathcal{L}_\rho \in \text{Pic}_{\overline{X}}[2]^*$ , notons  $H_\rho$  le tore endoscopique elliptique au-dessus de  $\overline{X}$  défini comme la forme extérieure de  $\mathbb{G}_m$  associée à la représentation du groupe fondamental  $\rho : \pi_1(\overline{X}, u) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Son espace affine de Hitchin est

$$\mathbb{A}_{H_\rho} = H^0(\overline{X}, \mathcal{L}_\rho \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}(D)).$$

Notons  $\mathbb{S}_\rho$  l'image de  $\mathbb{A}_{H_\rho}^{\text{ell}}$  dans  $\mathbb{A}^{\text{ell}}$ . Alors  $\pi_0(P/\mathbb{A}^{\text{ell}})$  est supporté par la réunion disjointe

$$\bigsqcup_{\mathcal{L}_\rho \in \text{Pic}_{\overline{X}}[2]^*} \mathbb{S}_\rho.$$

Sa restriction à chaque  $\mathbb{S}_\rho$  est le faisceau constant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Le morphisme de faisceaux

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_0(P'/\mathbb{A}^{\text{ell}}) \rightarrow \pi_0(P/\mathbb{A}^{\text{ell}})$$

définit une action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)$  et décompose ce faisceau pervers en somme de deux composantes isotypiques

$${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell) = {}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_+ \oplus {}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_-.$$

On peut vérifier directement dans le cas  $\text{SL}(2)$  que  $\mathcal{M}^{\text{ell}}$  est un champ de Deligne-Mumford lisse et que le morphisme  $f^{\text{ell}} : \mathcal{M}^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$  est un morphisme propre de type fini. Il s'ensuit que le faisceau pervers  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)$  est pur, ainsi que ses facteurs directs  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_+$  et  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_-$ . Le morceau  ${}^p\text{H}^j(f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell)_-$  est supporté par  $\bigsqcup_{\mathcal{L}_\rho \in \text{Pic}_{\overline{X}}[2]^*} \mathbb{S}_\rho$  de sorte que son image réciproque à chaque  $\mathbb{S}_\rho$  est pure.

### Références

1. Beauville, A., Laszlo, Y.: Un lemme de descente. C. R. Acad. Sci., Paris **320**, 335–340 (1995)
2. Beauville, A., Narasimhan, M., Ramanan, S.: Spectral curves and generalized theta divisor. J. Reine Angew. Math. **398**, 169–179 (1989)
3. Beilinson, A., Bernstein, J., Deligne, P.: Faisceaux pervers. Astérisque **100**, 5–171 (1982)
4. Biswas, I., Ramanan, S.: Infinitesimal study of Hitchin pairs. J. Lond. Math. Soc. **49**, 219–231 (1994)
5. Bosch, S., Lutkebohmert, W., Raynaud, M.: Neron models. Ergeb. Math. **21**, 1–325 (1990)
6. Deligne, P.: La conjecture de Weil II. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **52**, 137–252 (1980)

7. Faltings, G.: Stable  $G$ -bundles and projective connections. *J. Algebr. Geom.* **2**, 507–568 (1993)
8. Donagi, R., Gaitsgory, D.: The gerb of Higgs bundles. *Transform. Groups* **7**, 109–153 (2002)
9. Goresky, M., Kottwitz, R., MacPherson, R.: Homology of affine Springer fiber in the unramified case. *Duke Math. J.* **121**, 509–561 (2004)
10. Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et de morphismes de schémas, chapîtres III et IV. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **28**, 5–255 (1966) et **32**, 5–361 (1967)
11. Hitchin, N.: Stable bundles and integrable connections. *Duke Math. J.* **54**, 91–114 (1987)
12. Kostant, B.: Lie group representations on polynomial rings. *Am. J. Math.* **85**, 327–404 (1963)
13. Kottwitz, R.: Isocrystal with additionnal structures. *Compos. Math.* **56**, 201–220 (1985)
14. Kottwitz, R.: Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.* **51**, 611–650 (1984)
15. Kottwitz, R.: Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.* **275**, 365–399 (1986)
16. Kottwitz, R.: Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Am. Math. Soc.* **2**, 373–444 (1992)
17. Kottwitz, R.: Transfert factors for Lie algebra. *Represent. Theory* **3**, 127–138 (1999)
18. Langlands, R.: Les débuts d’une formule des traces stables. *Publ. Univ. Paris 7*, vol. 13 (1983)
19. Laumon, G.: Fibres de Springer et Jacobiennes compactifiées. Prépublication arXiv
20. Laumon, G., Ngô, B.C.: Le lemme fondamental pour les groupes unitaires. Prépublication arXiv
21. Rapoport, M.: A guide to the reduction of Shimura varieties. *Astérisque* **298**, 271–358 (2005)
22. Serre, J.-P.: Cohomologie galoisienne. *Lect. Notes Math.*, vol. 5. Springer 1973
23. Springer, T.: Reductive groups. In: *Automorphic Forms, Representations, and  $L$ -Functions*. *Proc. Symp. Pure Math.* vol. 33-1, pp. 3–27. Am. Math. Soc. 1979
24. Veldkamp, F.D.: The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic  $p$ . *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **5**, 217–240 (1972)