Math. Z. (2015) 279:703–721
DOI 10.1007/s00209-014-1389-0

Mathematische Zeitschrift

Espace de twisteurs des structures complexes généralisées

Guillaume Deschamps

Received: 7 February 2014 / Accepted: 9 September 2014 / Published online: 6 November 2014

Résumé Le but de cet article est d'utiliser les structures complexes généralisées pour étendre la définition d'espace de twisteurs introduite par Penrose. Ainsi à toute 4-variété riemannienne (M, g) nous associons le fibré $\mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ des structures presque complexes généralisées sur M compatibles avec g. Comme dans l'article d'Atiyah et al. (Proc R Soc Lond Ser A 362:425–461, 1978), nous verrons que $\mathcal{Z}(M, g)$ admet une structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ dont nous donnerons un critère d'intégrabilité. Ceci permettra de construire une passerelle entre la géométrie riemannienne sur (M, g) et la géométrie complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(M, g)$. Dans une dernière partie nous verrons comment étendre ces constructions aux variétés quaternioniques Kähler et ferons le lien avec un résultat de Bredthauer (Nucl Phys B 773:172–183, 2007).

Mots clefs Espace des twisteurs · Structure complexe généralisée · Structure quaternionique Kähler

Table des matières

1 Introduction . . . 704
2 Préliminaires . . . 704
2.1 Structures presque complexes généralisées . . . 704
2.2 Intégrabilité . . . 705
2.3 Espaces des twisteurs “classiques” en dimension 4 . . . 706
3 Espaces des twisteurs “généralisés” en dimension 4 . . . 707
3.1 Construction . . . 707
3.2 Différence avec les constructions de Davidov et Mushkarov . . . 708
3.3 Composantes connexes . . . 709
3.4 Structure complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(M, g)$ . . . 710
4 Démonstration . . . 711

G. Deschamps (✉)
Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, Université de Brest, UMR 6205,
6 Avenue Victor le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest Cedex 3, France
e-mail: guillaume.deschamps@univ-brest.fr

4.1 Lemme technique 711
4.2 Démonstration du théorème 1 714
5 Structure presque complexe sur $\mathcal{Z}(M, g)$ 717
5.1 Critère d'intégrabilité 717
5.2 Critère de semi-intégrabilité 717
6 Dimension quelconque 718
References 720

1 Introduction

Le concept de structure complexe généralisée a été introduit par Hitchin [13] dans le but d'unifier les notions de structure presque complexe et de structure presque symplectique. C'est ensuite Gualtieri [11] qui a donné son essor à cette théorie qui intéresse désormais tout autant les mathématiciens que les physiciens. On trouvera des références dans [8].

Introduite par Penrose [19], la théorie des twisteurs permet de son côté d'associer à toute 4-variété riemannienne (M, g) un fibré $Z(M, g) \longrightarrow M$ en sphères $\mathbb{S}^2$ dont l'espace total est l'espace des structures presque complexes sur M compatibles avec g. Un des attraits de cette théorie est de coder des propriétés géométriques de (M, g) en termes de structure holomorphe sur son espace de twisteurs. En particulier, on montre que $Z(M, g)$ admet une structure presque complexe canonique $\mathbb{J}$ dont l'intégrabilité dépend de la courbure de g [1].

Le but de cet article est d'étendre la construction de Penrose aux structures complexes généralisées, c'est-à-dire d'étudier le fibré des twisteurs $\mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ défini comme le fibré des structures presque complexes généralisées sur M compatibles avec la métrique g. Nous verrons que l'espace total admet une structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ naturelle et que les fibres admettent quatre composantes connexes isomorphes à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Nous donnerons un critère d'intégrabilité de $\mathbb{J}$ qui dépendra bien entendu de la composante connexe considérée. Cela nous donnera une caractérisation simple des métriques d'Einstein, des métriques Ricci plates anti-autoduales ou des métriques à courbure sectionnelle constante en terme d'intégrabilité d'une structure complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(M, g)$ (cf. théorèmes 1 & 2).

En dimension strictement plus grande que 4, et pour toute $4n$-variété riemannienne (M, g) munie d'une structure quaternionique Kähler D, Salamon [20] a défini le fibré des twisteurs $Z(M, D) \longrightarrow M$ comme le fibré des structures presque complexes de D. C'est un fibré en sphères $\mathbb{S}^2$ muni d'une structure presque complexe canonique $\mathbb{J}$ qui est automatiquement intégrable. Dans la dernière partie de ce papier nous verrons qu'on peut encore associer à toute variété munie de deux structures quaternioniques Kähler (M, g, D_1, D_2), un fibré des twisteurs $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2) \longrightarrow M$. C'est un fibré de fibres $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ muni d'une structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ dont nous étudierons l'intégrabilité. Nous verrons en quoi c'est la généralisation naturelle de la situation en dimension quatre et en quoi cela étend un résultat de Bredthauer établi sur les variétés hyperkählériennes généralisées [5].

2 Préliminaires

2.1 Structures presque complexes généralisées

Soit M une variété de dimension $2n$. En géométrie généralisée on étudie non pas le fibré tangent de M noté TM mais plutôt la somme du fibré tangent et du fibré cotangent que nous noterons $\mathbb{T}M = TM \oplus T^{\star}M$. Sur $\mathbb{T}M$ on a une pseudo-métrique naturelle de signature $(2n, 2n)$ définie par:

$$\langle X+\xi, Y+\eta\rangle = \frac{1}{2}\Big(\xi(Y)+\eta(X)\Big), \quad \forall X, Y \in TM \text{ et } \quad \forall \xi, \eta \in T^\star M.$$

Une structure *presque complexe* sur M est la donnée d'un endomorphisme J de TM tel que $J^2 = -Id$. Une structure *presque symplectique* sur M est la donnée d'une 2-forme anti-symétrique non dégénérée $w \in \bigwedge^2 T^\star M$. En utilisant le produit intérieur, on peut voir w comme une application $w : TM \longrightarrow T^\star M$ telle que $w^\star = -w$, où $w^\star$ est l'adjoint de w. La motivation première de la géométrie généralisée est d'unifier ces deux notions.

Définition [11,13] Une structure *presque complexe généralisée* sur M est la donnée d'un endomorphisme $\mathcal{J}$ sur $\mathbb{T}M$ qui vérifie d'une part que $\mathcal{J}$ est presque complexe: $\mathcal{J}^2 = -Id$ et d'autre part que $\mathcal{J}$ est presque symplectique : $\mathcal{J}^\star = -\mathcal{J}$. Ou de manière équivalente, une structure presque complexe généralisée sur M est la donnée d'une structure presque complexe sur $\mathbb{T}M$ orthogonale pour la pseudo-métrique définie précédemment.

Remarque On peut montrer qu'il existe une structure presque complexe généralisée sur M seulement si sa dimension est paire et si M satisfait certaines conditions topologiques [11].

Propriété [11,13] Une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}$ sur M équivaut à la donnée d'un champ de sous-espaces isotropes maximaux $L \subset \mathbb{T}M \otimes \mathbb{C}$ tel que $L \cap \overline{L} = \{0\}$.

On note $pr_1 : (TM \oplus T^\star M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow TM \otimes \mathbb{C}$ la première projection.

Définition [11,13] La codimension de $pr_1(L)$ dans $TM \otimes \mathbb{C}$ est un invariant de la structure presque complexe généralisée appelé le *type* de $\mathcal{J}$.

Comme le montre les exemples suivants, la notion de structure complexe généralisée regroupe sous un même formalisme les notions de structure complexe et de structure symplectique.

Exemple 1 Une structure presque complexe J sur M définit la structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^\star \end{pmatrix}$ où $J^\star$ est l'adjoint de J sur $T^\star M$. Le type de $\mathcal{J}_J$ est n.

Exemple 2 De même une structure presque symplectique w sur M définit la structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}_w = \begin{pmatrix} 0 & -w^{-1} \\ w & 0 \end{pmatrix}$. Le type de $\mathcal{J}_w$ est 0.

Exemple 3 Toute 2-forme différentielle B sur M définit l'application orthogonale

$$\begin{aligned} e^B : TM \oplus T^\star M &\longrightarrow TM \oplus T^\star M \\ X+\xi &\longmapsto X+\xi+i_X B \end{aligned}$$

où i_X est le *produit intérieur*. Si $\mathcal{J}$ est une structure presque complexe généralisée sur M, alors $e^{-B}\mathcal{J}e^B$ aussi. Une telle transformation préserve le type.

2.2 Intégrabilité

On note $[X, Y]$ le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs X, Y sur M et $\mathcal{L}_X$ la *dérivée de Lie* suivant le champ X. On définit le *crochet de Courant* [7] pour tout $X+\xi, Y+\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}M)$ par

$$[X+\xi, Y+\eta] = [X, Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\xi).$$

Remarque Les notations ne sont pas ambiguës dans la mesure où le crochet de Courant et le crochet de Lie coïncident sur les champs de vecteurs. Par contre le crochet de Courant ne vérifie pas l'identité de Jacobi.

Définition [11,13] Une structure presque complexe généralisée $\mathcal{J}$ est dite *intégrable* si le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}$ défini par:

$$\mathcal{N}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = [\mathcal{J}\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{Y}] - \mathcal{J}[\mathcal{J}\mathcal{X},\mathcal{Y}] - \mathcal{J}[\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{Y}] - [\mathcal{X},\mathcal{Y}] \qquad \forall \mathcal{X},\mathcal{Y} \in C^\infty(\mathbb{T}M)$$

est nul sur $\mathbb{T}M$. En terme de champ de sous-espaces isotropes maximaux L cela équivaut à demander à l'espace des sections de L d'être stable par crochet de Courant.

Cette définition d'intégrabilité est naturelle au sens où elle généralise la notion d'intégrabilité des structures presque complexes et presque symplectiques comme le montre la proposition suivante.

Propriété [11]

(a) Une structure presque complexe J sur M est intégrable si et seulement si la structure presque complexe généralisée associée $\mathcal{J}_J$ est intégrable.
(b) Une structure presque symplectique w sur M est intégrable (c'est-à-dire w fermée) si et seulement si $\mathcal{J}_w$ est intégrable.
(c) Soient $\mathcal{J}$ une structure presque complexe généralisée et B une 2-forme différentielle fermée sur M. Alors $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si sa B transformation $e^{-B}\mathcal{J}e^{B}$ l'est.
(d) Une variété sans aucune structure complexe et sans aucune structure symplectique peut admettre une structure complexe généralisée [6].

2.3 Espaces des twisteurs "classiques" en dimension 4

On considère ici (M, g) une 4-variété riemannienne orientée connexe et on note $O_g(TM)$ le fibré des endomorphismes de TM orthogonaux pour la métrique g.

Définition [1] Le fibré des twisteurs d'une 4-variété riemannienne (M, g) défini par Atiyah, Hitchin et Singer est le fibré $\pi : Z(M, g) \longrightarrow M$ des structures presque complexes sur M compatibles avec la métrique g:

$$Z(M, g) = \{u \in O_g(TM)/u^2 = -Id\}.$$

La fibre $Z(\mathbb{R}^4) := \{u \in O(4)/u^2 = -Id\}$ est difféomorphe à $O(4)/U(2)$ et admet donc deux composantes connexes, chacune isomorphe à $\mathbb{S}^2$. Notons que, si $u \in O(4)$ vérifie $u^2 = -Id$, alors nécessairement $u \in SO(4)$. On dira donc qu'un endomorphisme u de TM est *compatible avec l'orientation*, et on notera $u >> 0$ si pour tous champs de vecteurs (X, Y), la famille (X, uX, Y, uY) est linéairement dépendante ou positivement orientée. Les deux composantes connexes de $Z(M, g)$ sont

$$Z^+(M, g) = \{u \in O_g(TM)/u^2 = -Id \text{ et } u >> 0\},$$
$$Z^-(M, g) = \{u \in O_g(TM)/u^2 = -Id \text{ et } u << 0\}.$$

Ces deux fibrés en sphères ont pour groupe structural $SO(3)$. Leurs fibres peuvent donc être munies de la structure complexe de $\mathbb{C}P^1$.

Plus généralement, sur $Z(M, g)$ on peut définir une structure presque complexe naturelle. En effet, la connexion de Levi-Civita induit une décomposition du fibré tangent $TZ(M, g) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ en la somme d'une distribution horizontale $\mathcal{H}$ et d'une distribution verticale (i.e. tangente aux fibres $\mathcal{V} = ker d\pi$). En un point $p \in Z(M, g)$, comme $\mathcal{H}_p$ est isomorphe à $T_{\pi(p)}M$ via $d\pi$, la distribution horizontale hérite naturellement de la structure presque complexe induite par p. La somme de cette structure presque complexe et de la structure complexe sur les fibres munit $Z(M, g)$ d'une structure presque complexe naturelle notée $\mathbb{J}$.

Le résultat fondamental sur lequel repose la théorie des twisteurs est que l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ dépend de la courbure de g. Plus exactement, notons R le tenseur de courbure défini pour tout champ de vecteurs $X, Y \in TM$ par:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Comme M est orientée, l'opérateur de Hodge induit la décomposition $\bigwedge^2 TM = \bigwedge^+ \oplus \bigwedge^-$ de sorte qu'en tant qu'endomorphisme de $\bigwedge^2 TM$, on a la décomposition du tenseur de courbure [4,21]

$$R = \begin{bmatrix} W^+ + \frac{s}{12} Id & B \\ B^\star & W^- + \frac{s}{12} Id \end{bmatrix}.$$

L'opérateur $W = W^+ + W^-$ est l'opérateur de Weyl, s est la courbure scalaire de g, B son tenseur de Ricci sans trace, $B^\star$ son adjoint et Id la matrice identité.

Théorème [1] *Pour toute* 4*-variété riemannienne orientée* (M, g)*, la structure presque complexe* $\mathbb{J}$ *est intégrable:*

(a) sur $Z^+(M, g)$ *si et seulement si* g *est anti-autoduale, c'est-à-dire* $W^+ = 0$ *;*
(b) sur $Z^-(M, g)$ *si et seulement si* g *est autoduale, c'est-à-dire* $W^- = 0$.

Remarque On identifiera toujours un endomorphisme anti-symétrique u de TM au bi-vecteur $\phi(u)$ de $\bigwedge^2 TM$ via

$$g(\phi(u), X \wedge Y) = g(uX, Y) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Ainsi on peut voir $Z^\pm(M, g)$ comme un sous-ensemble de $\bigwedge^\pm$.

3 Espaces des twisteurs "généralisés" en dimension 4

3.1 Construction

Ici encore, on considère (M, g) une 4-variété riemannienne orientée connexe. La métrique riemannienne sur TM se prolonge en une métrique sur $\mathbb{T}M$ encore notée g. On notera $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)$ le fibré des endomorphismes de $\mathbb{T}M$ orthogonaux pour la pseudo-métrique $< ., . >$ et pour la métrique g.

Définition Le fibré des twisteurs généralisés d'une 4-variété riemannienne orientée est le fibré $\pi : \mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ des structures presque complexes généralisées sur M compatibles avec la métrique g

$$\mathcal{Z}(M, g) = \{u \in \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) / u^2 = -Id\}.$$

Comme nous l'avons vu avec l'exemple 1, toute structure complexe sur M compatible avec g définit une structure complexe généralisée compatible avec g. On a donc une inclusion naturelle $Z(M, g) \subset \mathcal{Z}(M, g)$.

Nous verrons dans la partie 3.4 que la structure presque complexe $\mathbb{J}$ sur $Z(M, g)$ se prolonge de façon naturelle en une structure presque complexe généralisée sur tout $\mathcal{Z}(M, g)$. Mais avant cela nous voudrions comparer notre définition à deux autres définitions que nous pouvons trouver dans la littérature.

3.2 Différence avec les constructions de Davidov et Mushkarov

En 2006, Davidov et Mushkarov [8] ont étudié le fibré $\mathcal{G} \longrightarrow M$ de toutes les structures presque complexes généralisées sur M sans demander de compatibilité avec une métrique riemannienne. Comme dans le cas classique, si on se donne une connexion sans torsion sur M, alors $\mathcal{G}$ admet une structure presque complexe généralisée. La condition d'intégrabilité est alors très restrictive:

Théorème [8] *Soit M une 2n-variété munie d'une connexion sans torsion ∇. La structure presque complexe généralisée (naturelle) sur $\mathcal{G}$ est intégrable si et seulement si*

(i) $n = 1$;
(ii) $n \geq 2$ et ∇ est une connexion plate.

Contrairement à la construction d'Atiyah, Hitchin, Singer et contrairement à la nôtre, les fibres de $\mathcal{G} \longrightarrow M$ ne sont pas compactes. Par contre $\mathcal{Z}(M, g)$ est une sous-variété de $\mathcal{G}$, c'est même une rétraction de $\mathcal{G}$. D'autre part, comme nous le verrons dans la partie 3.4, la condition d'intégrabilité de $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M, g)$ sera beaucoup moins restrictive que celle sur $\mathcal{G}$.

L'année suivante, Davidov et Mushkarov [9] se sont intéressés à une autre variété qui ressemble à $\mathcal{Z}(M, g)$. Pour comprendre leur construction rappelons ce qu'est une structure kählérienne généralisée.

Définition [11,12] Une structure (presque) kählérienne généralisée sur $\mathbb{T}M$ est une paire $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ de structures (presque) complexes généralisées qui commutent et telles que la 2-forme définie par

$$G(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \langle \mathcal{J}_1\mathcal{X}, \mathcal{J}_2\mathcal{Y} \rangle, \quad \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{T}M,$$

soit définie positive.

Exemple Soit (M, J, w, g) une structure kählérienne classique, c'est-à-dire une structure complexe J, une structure symplectique w et une métrique riemannienne g telles qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "g"] & & T^\star M \\ & TM . \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

La métrique riemannienne g sur TM s'étend en une métrique sur $\mathbb{T}M$. En identifiant $\mathbb{T}M$ et $\mathbb{T}^\star M$ grâce à la pseudo-métrique $< .,. >$, la métrique g peut-être vue comme un endomorphisme $G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{T}M$. Comme $\mathcal{J}_J\mathcal{J}_w = \mathcal{J}_w\mathcal{J}_J = -G$, la paire $(\mathcal{J}_J, \mathcal{J}_w)$ est une structure kählérienne généralisée sur $\mathbb{T}M$.

Lorsque M est une variété de dimension deux, Davidov et Mushkarov introduisent le fibré $\mathcal{P} \longrightarrow M$ des structures presque kählériennes généralisées sur M. Une nouvelle fois, si M est munie d'une connexion sans torsion, alors $\mathcal{P}$ admet deux structures presque complexes généralisées naturelles suivant qu'on privilégie $\mathcal{J}_1$ ou $\mathcal{J}_2$.

Théorème [9] *Soit M une 2-variété munie d'une connexion sans torsion. Les structures presque complexes généralisées (naturelles) sur $\mathcal{P}$ sont intégrables si et seulement si la connexion est plate.*

La proposition suivante montre que la différence entre notre approche et la leur, outre la dimension de M, est le fait d'imposer une contrainte métrique.

Proposition 1 *Soit G l'endomorphisme de $\mathbb{T}M$ associé à la métrique g. Le fibré $\mathcal{Z}(M,g)$ est le fibré des structures presque kählériennes généralisées sur M compatibles avec g:*

$$\mathcal{Z}(M,g) \simeq \Big\{(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2) \text{ structures presque kählériennes généralisées}/\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2=\mathcal{J}_2\mathcal{J}_1=-G\Big\}.$$

Preuve Comme $G^2 = Id$, on note $C^{\pm}$ le sous-espace propre de G associé à la valeur propre ± 1. Si, au-dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M, on se donne $(\theta_1,\dots,\theta_4)$ une base orthonormée de TM et si on note $(\theta_1^\star,\dots,\theta_4^\star)$ sa base duale, alors

$$C^{\pm} = Vect\Big(\theta_1 \pm \theta_1^\star,\dots,\theta_4 \pm \theta_4^\star\Big).$$

Comme les éléments de $\mathcal{Z}(M,g)$ sont compatibles avec g, ils stabilisent les espaces propres $C^{\pm}$. La matrice d'un élément $u \in \mathcal{Z}(M,g)$ dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{T}M = C^+ \oplus C^-$ est donc de la forme: $\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ avec $u_1, u_2 \in Z(\mathbb{R}^4, e)$, où e désigne la métrique euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^4$. De plus, tout élément $u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{Z}(M,g)$ définit la structure presque kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2)$ sur M compatible avec g où

$$\mathcal{J}_1 = u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, étant donnée une structure presque kählérienne généralisée $(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2)$ sur $\mathbb{T}M$ compatible avec g, il existe [12] u_1 et u_2 deux structures presque complexes sur TM compatibles avec g telles que dans la base $TM \oplus T^\star M$ on ait

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1+u_2 & u_1-u_2 \\ u_1-u_2 & u_1+u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1-u_2 & u_1+u_2 \\ u_1+u_2 & u_1-u_1 \end{pmatrix}.$$

Dans une base $C^+ \oplus C^-$ cela donne

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & -u_2 \end{pmatrix}.$$

□

3.3 Composantes connexes

En conservant les notations de la preuve précédente, on voit que l'espace des twisteurs $\mathcal{Z}(M,g)$ admet les 4 composantes connexes suivantes:

$$\mathcal{Z}^{++}(M,g) \simeq \left\{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} / (u_1,u_2) \in Z^+(\mathbb{R}^4,e) \times Z^+(\mathbb{R}^4,e)\right\}$$

$$\mathcal{Z}^{--}(M,g) \simeq \left\{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} / (u_1,u_2) \in Z^-(\mathbb{R}^4,e) \times Z^-(\mathbb{R}^4,e)\right\}$$

$$\mathcal{Z}^{+-}(M,g) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} / (u_1,u_2) \in Z^+(\mathbb{R}^4,e) \times Z^-(\mathbb{R}^4,e) \right\}$$
$$\mathcal{Z}^{-+}(M,g) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} / (u_1,u_2) \in Z^-(\mathbb{R}^4,e) \times Z^+(\mathbb{R}^4,e) \right\}.$$

D'autre part on a vu que le fibré des twisteurs (classiques) $Z(M,g)$ pouvait être considéré comme un sous-fibré de $\mathcal{Z}(M,g)$, plus exactement

$$Z^+(M,g) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}^{++}(M,g)/u_1 = u_2 \right\},$$
$$Z^-(M,g) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}^{--}(M,g)/u_1 = u_2 \right\}.$$

L'orientation sur TM induit une orientation sur $T^\star M$ et donc sur $\mathbb{T}M$. Pour finir le parallélisme avec le cas classique, il est naturel d'introduire le fibré des structures presque complexes généralisées compatibles avec la métrique et l'orientation, soit

$$\mathcal{Z}^+(M,g) = \{u \in \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)/u^2 = -Id \text{ et } u >> 0\}$$
$$\mathcal{Z}^-(M,g) = \{u \in \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)/u^2 = -Id \text{ et } u << 0\}$$

et de voir le lien avec ce que nous avons déjà défini. On définit la parité d'une structure complexe généralisée comme la parité de son type. Dans le cas où la dimension de M est un multiple de 4, on sait que les endomorphismes u_1 et u_2 qui définissent une structure presque kählérienne généralisée doivent avoir la même parité (paire, paire) ou (impaire, impaire). Dans le premier cas u_1 et u_2 induisent la même orientation; dans le deuxième ils induisent deux orientations opposées [11,12]. Ce qui donne

Proposition 2

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^+(M,g) &= \mathcal{Z}^{++}(M,g) \sqcup \mathcal{Z}^{--}(M,g)\\ &= \left\{(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2)/\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = -G \textit{ et le type de } \mathcal{J}_1 \textit{et de} \mathcal{J}_2 \textit{ est pair}\right\},\\ \mathcal{Z}^-(M,g) &= \mathcal{Z}^{+-}(M,g) \sqcup \mathcal{Z}^{-+}(M,g)\\ &= \left\{(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2)/\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = -G \textit{ et le type de} \mathcal{J}_1 \textit{ et de } \mathcal{J}_2 \textit{ est impair}\right\}.\end{aligned}$$

3.4 Structure complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(M,g)$

Soit $\mathcal{V} = kerd\pi$ l'espace vertical tangent aux fibres de $\pi : \mathcal{Z}(M,g) \longrightarrow M$. La connexion de Levi-Civita sur M nous fournit une distribution horizontale $\mathcal{H}$ qui est en somme directe avec $\mathcal{V} : T\mathcal{Z}(M,g) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. On identifiera le dual $\mathcal{V}^\star$ (resp $\mathcal{H}^\star$) avec les formes sur $\mathbb{T}\mathcal{Z}(M,g)$ nulle sur $\mathcal{H}$ (resp. sur $\mathcal{V}$).

Le groupe structural des fibrés $\mathcal{Z}^{++}(M,g)$, $\mathcal{Z}^{-+}(M,g)$, $\mathcal{Z}^{+-}(M,g)$, $\mathcal{Z}^{--}(M,g)$ est $SO(3)$ et leurs fibres s'identifient à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Il existe donc une structure complexe sur les fibres de $\mathcal{V}$ et donc une structure complexe généralisée sur les fibres de $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\star \longrightarrow \mathcal{Z}(M,g)$. De plus en un point $p \in \mathcal{Z}(M,g)$ comme $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_p^\star$ est isomorphe à $\mathbb{T}_{\pi(p)}M$ via $d\pi$, ce sous-espace hérite naturellement de la structure presque complexe généralisée induite par p. La somme de cette structure presque complexe généralisée et de celle sur $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\star$ définit une structure presque complexe généralisée sur $\mathcal{Z}(M,g)$, qui sera notée $\mathbb{J}$.

Remarque La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ n'est pas la B-transformation d'une structure symplectique ni d'une structure complexe sur $\mathcal{Z}(M,g)$. Il y a même "un phénomène de saut" pour le type. Plus précisément la proposition 2 nous dit que $\mathbb{J}$ est:

(a) de type trois sur $\mathcal{Z}(M,g)^{+-}$ et sur $\mathcal{Z}^{-+}(M,g)$,
(b) de type quatre sur $Z(M,g) \subset \mathcal{Z}^{++}(M,g) \cup \mathcal{Z}^{--}(M,g)$,
(c) de type deux sur le complémentaire de $Z(M,g)$ dans $\mathcal{Z}^{++}(M,g) \cup \mathcal{Z}^{--}(M,g)$.

Le résultat principal de cet article est le suivant.

Théorème 1 *Pour toute* 4*-variété riemannienne orientée* (M,g)*, la structure presque complexe généralisée* $\mathbb{J}$ *sur son espace de twisteurs généralisés* $\mathcal{Z}(M,g)$ *est intégrable:*

(a) sur $\mathcal{Z}^{++}(M,g)$ *si et seulement si* g *est anti-autoduale et Ricci plate;*
(b) sur $\mathcal{Z}^{--}(M,g)$ *si et seulement si* g *est autoduale et Ricci plate;*
(c) sur $\mathcal{Z}^{+-}(M,g)$ *si et seulement si* g *est à courbure sectionnelle constante;*
(d) sur $\mathcal{Z}^{-+}(M,g)$ *si et seulement si* g *est à courbure sectionnelle constante.*

Les variétés à courbure sectionnelle constante sont les variétés dont le tenseur de courbure $R : \bigwedge^2 TM \longrightarrow \bigwedge^2 TM$ est une homothétie. Par changement conforme on peut supposer que la courbure sectionnelle est constante égale à -1, 0 ou 1. Les deux propositions suivantes nous donne les 4-variétés compactes sur lesquels on peut appliquer le théorème.

Proposition [16] *Si* (M,g) *est une 4-variété complète à courbure sectionnelle constante égale à -1, 0 ou 1, alors* M *est isométrique au quotient* $\widetilde{M}/\Gamma$ *où:*

(a) $\widetilde{M}$ *est la sphère* $\mathbb{S}^4$*, la plan* $\mathbb{R}^4$ *ou l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^4$ *munis de leur métrique usuelle,*
(b) Γ *est un sous-groupe discret du groupe des isométries de* $\widetilde{M}$ *isomorphe au groupe fondamental de* M *et dont l'action sur* $\widetilde{M}$ *est propre, discontinue et sans point fixe.*

Proposition [14] *Soit* (M,g) *une 4-variété compacte orientée munie d'une métrique anti-autoduale et Ricci plate. Alors*

(a) soit (M,g) *est plat,*
(b) soit le revêtement universel de M *est une surface* $K3$.

Dans le deuxième cas il y a les surfaces K3, les surfaces d'Enriques [2] *et leurs quotients par une involution anti-holomorphe. En particulier, si* M *est une surface d'Enriques, on a une structure complexe généralisée non triviale sur* $\mathcal{Z}^{++}(M,g)$*. Pour les surfaces K3 et les tores plats qui sont hyperkählériens, l'intégrabilité de* $\mathbb{J}$ *sur* $\mathcal{Z}^{++}(M,g)$ *était un résultat déjà connu de Bredthauer* [5].

4 Démonstration

4.1 Lemme technique

Soit (M,g) une 4-variété riemannienne, ∇ la connexion de Levi-Civita sur M et $\mathcal{Z}(M,g)$ l'espace des twisteurs associés. Soit $\mathcal{U}$ un petit ouvert de M sur lequel on a une trivialisation de $\pi : \mathcal{Z}(M,g) \longrightarrow M$ et (m,u) des coordonnées sur $\pi^{-1}(\mathcal{U})$.

Nous noterons $\overrightarrow{\mathcal{X}} \in T\mathcal{Z}(M,g)$ la partie vectorielle de $\mathcal{X} \in \mathbb{T}\mathcal{Z}(M,g)$, c'est-à-dire la projection sur $T\mathcal{Z}(M,g)$ parallèlement à $T^{\star}\mathcal{Z}(M,g)$:

$$\begin{array}{rccc} \rightarrow: & \mathbb{T}\mathcal{Z}(M,g) & \longrightarrow & T\mathcal{Z}(M,g) \\ & \mathcal{X} = X + \xi & \longmapsto & \overrightarrow{\mathcal{X}} := X. \end{array}$$

La connexion de Levi-Civita s'étend sur $\mathbb{T}M$. On définit $\mathcal{R}$ le tenseur de courbure de g par

$$\mathcal{R}(X,Y)\mathcal{Z} = [\nabla_X, \nabla_Y]\mathcal{Z} - \nabla_{[X,Y]}\mathcal{Z}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM) \text{ et } \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}M).$$

Pour alléger l'écriture, si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in T\mathcal{Z}(M,g)$ sont des champs de vecteurs sur $\mathcal{Z}(M,g)$ on écrira $\mathcal{R}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ plutôt que $\mathcal{R}(\pi_\star\mathcal{X}, \pi_\star\mathcal{Y})$.
Pour démontrer le théorème 1 nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme technique A *Soit (M,g) une 4-variété riemannienne. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M,g)$ est intégrable si et seulement si, pour tous champs $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ et pour tout point $(m,u) \in \mathcal{Z}(M,g)$, on a*

$$\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} - \overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} + \overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right)\right] = 0.$$

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de ce lemme. Soit $X+\xi$ une section de $\mathbb{T}M \longrightarrow M$. On notera $\widehat{X}+\widehat{\xi} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ le champ relevé. Un tel champ est dit *basique*.

Proposition 3 *Soient $A, B \in \mathcal{V}$ deux champs de vecteurs verticaux sur $\mathcal{Z}(M,g)$. On se donne $X \in TM$ un champ de vecteurs sur M et $\xi \in T^\star M$ une forme sur M.*

1. $[A, B] \in \mathcal{V}$,
2. $[\widehat{X}, A] \in \mathcal{V}$,
3. $[\widehat{X}+\widehat{\xi}, \mathbb{J}A] = \mathbb{J}[\widehat{X}+\widehat{\xi}, A]$,
4. $[\mathbb{J}(\widehat{X}+\widehat{\xi}), \mathbb{J}A] = \mathbb{J}[\mathbb{J}(\widehat{X}+\widehat{\xi}), A]$.

Preuve Le premier point provient du fait que la distribution verticale est l'espace tangent aux fibres de $\pi : \mathcal{Z}(M,g) \longrightarrow M$. Comme $\widehat{X}$ est un champ relevé, le deuxième point est immédiat. Et comme le transport parallèle suivant les directions horizontales respecte l'orientation et la métrique sur les fibres, il respecte la structure complexe sur l'espace tangent vertical, on a $[\widehat{X}, \mathbb{J}U] = \mathbb{J}[\widehat{X}, U]$. De plus, par définition du crochet de Courant, on vérifie que $[\widehat{\xi}, U] = 0 = [\widehat{\xi}, \mathbb{J}U]$, ce qui termine la preuve du troisième point. Le quatrième point s'obtient par "linéarité". En effet soit $(\widehat{\mathcal{X}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{X}}_8) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ une base de champs de vecteurs et de formes horizontales basiques. Comme $\mathbb{J}$ stabilise $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$, on note $[\mathbb{J}_{ij}]$ la matrice de la restriction de $\mathbb{J}$ à $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ dans cette base. En utilisant le point 3, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{J}[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}}_j, A] &= \mathbb{J}[\mathbb{J}_{ij}\widehat{\mathcal{X}}_i, A]\\ &= \mathbb{J}\big(\mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, A] - A\widehat{\mathcal{X}}_j\big)\\ &= \mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A] - \mathbb{J}A\widehat{\mathcal{X}}_j.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}}_j, \mathbb{J}A] &= [\mathbb{J}_{ij}\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A]\\ &= \mathbb{J}_{ij}[\widehat{\mathcal{X}}_i, \mathbb{J}A] - \mathbb{J}A\widehat{\mathcal{X}}_j.\end{aligned}$$

□

Corollaire 1 *Le tenseur de Nijenhuis de $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M,g)$ vérifie $\mathcal{N}(\mathcal{X}, A) = 0$ pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ et pour tout $A \in \mathcal{V}$.*

Preuve Par linéarité, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un champ basique. Le corollaire 1 est alors une conséquence immédiate des points 3 et 4 de la proposition 3. □

Proposition 4 *Soient $X, Y \in TM$ deux champs de vecteurs sur M. Au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}$, la décomposition du champ de vecteurs $[\widehat{X}, \widehat{Y}]$ en partie horizontale et verticale au point (m, u) est donnée par:*

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{[X, Y]} + [u, \mathcal{R}(X, Y)].$$

Preuve Notons G le groupe $\mathcal{O}_g(\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^{4\star}) = O(4,4) \cap O(8)$; c'est un groupe à quatre composantes connexes. Notons également θ la 1-forme de connexion sur le G-fibré principal $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)$ associée à la connexion de Levi-Civita. Soient $X, Y \in TM$ deux champs de vecteurs sur M et $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ leurs relevés horizontaux dans $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)$. Avec la convention de signe que nous avons choisie pour le tenseur de courbure, la décomposition du champ de vecteurs $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ en parties horizontale et verticale est donnée par (cf. [4,17] chap 9)

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} + (\theta|_{\mathcal{V}})^{-1}(\mathcal{R}(X, Y)),$$

où, par définition, $(\theta|_{\mathcal{V}})^{-1}(\mathcal{R}(X, Y))$ est le champ de vecteurs vertical sur $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)$ défini au point $p \in \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M)$ par

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\Big(p.\,exp(t\mathcal{R}(X, Y))\Big) = p.\,\mathcal{R}(X, Y).$$

Le groupe G agit transitivement sur les fibres de $\mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ et la variété $\mathcal{Z}(M, g)$ est le fibré associé de fibres $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Plus précisément, le groupe G agit à droite sur $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \times G & \longrightarrow & \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \\ (p, j, g) & \longmapsto & (p.g, g^{-1}.j) = (p.g, gjg^{-1}), \end{array}$$

et $\mathcal{Z}(M, g)$ est le quotient de $\mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ par cette action. On notera Π la projection:

$$\begin{array}{cccc} \Pi & : \mathcal{O}_g(\mathbb{T}M) \times (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(M, \mathcal{D}) \\ & (m, p, j) & \longmapsto & (m, u) = (m, p^{-1}jp). \end{array}$$

Comme $d\Pi\Big(p.\mathcal{R}(X, Y)\Big) = [u, \mathcal{R}(X, Y)]$, on a bien

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{[X, Y]} + [u, \mathcal{R}(X, Y)].$$

□

Corollaire 2 *Soit $U^\sharp \in \mathcal{V}^\star$ une 1-forme verticale, $\mathcal{X} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ un champ de vecteurs et de formes horizontal. Au point $(m, u) \in \mathcal{Z}(M, g)$, le tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})$ est la 1-forme horizontale définie pour tout champ de vecteurs horizontal $\overrightarrow{\mathcal{Y}} \in \mathcal{H}$ par*

$$\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})(\overrightarrow{\mathcal{Y}}) = U^\sharp\left(\Big[u, \mathcal{R}\Big(\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} - u\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge u\overrightarrow{\mathcal{Y}}\Big) + u\mathcal{R}\Big(u\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} + \overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge u\overrightarrow{\mathcal{Y}}\Big)\Big]\right).$$

Preuve Par définition du crochet de Courant, on sait que $[U^\sharp, \mathcal{X}] = [U^\sharp, \overrightarrow{\mathcal{X}}]$ est une 1-forme. Soient $A \in \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{\mathcal{Y}} \in \mathcal{H}$ deux champs de vecteurs. On a, au point $(m, u) \in \mathcal{Z}(M, g)$,

$$\begin{aligned} [U^\sharp, \mathcal{X}](A + \overrightarrow{\mathcal{Y}}) &= dU^\sharp(\overrightarrow{\mathcal{X}}, \overrightarrow{\mathcal{Y}} + A) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{X}}.U^\sharp(A) - U^\sharp([\overrightarrow{\mathcal{X}}, \overrightarrow{\mathcal{Y}} + A]) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{X}}.U^\sharp(A) - U^\sharp([\overrightarrow{\mathcal{X}}, A]) - U^\sharp([u, \mathcal{R}(\overrightarrow{\mathcal{X}}, \overrightarrow{\mathcal{Y}})]). \end{aligned}$$

Le point 3 de la proposition 3 nous assure alors que $[\mathbb{J}U^\sharp, \mathcal{X}](A) = \mathbb{J}[U^\sharp, \mathcal{X}](A)$. La partie verticale de la 1-forme $\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})$ est donc nulle. Pour la partie horizontale, le calcul précédent nous dit qu'au point (m, u) on a

$$\mathcal{N}(U^\sharp, \mathcal{X})(\overrightarrow{\mathcal{Y}}) = U^\sharp \left(\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} - \overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} + \overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right)\right]\right).$$

□

Corollaire 3 *Au point* $(m, u) \in \mathcal{Z}(M, g)$ *et pour tous champs de vecteurs et de formes horizontaux* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$*, on a*

$$\mathcal{N}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = -\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} - \overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} + \overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right)\right].$$

Preuve On note $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_8)$ une base orthonormée de $\mathbb{T}M$ (pour la métrique et la pseudo-métrique). La distribution $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ est stable par $\mathbb{J}$. On notera $[\mathbb{J}_{ij}]$ sa matrice dans la base relevée $(\widehat{\mathcal{X}_1}, \ldots, \widehat{\mathcal{X}_8})$:

$$\begin{aligned}
\left[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_i}, \mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_j}\right] &= \overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{J}\mathcal{X}_i}}.(\mathbb{J}_{rj})\, \widehat{\mathcal{X}_r} - \overrightarrow{\overrightarrow{\mathbb{J}\mathcal{X}_j}}.(\mathbb{J}_{li})\, \widehat{\mathcal{X}_l} + \mathbb{J}_{li}\mathbb{J}_{rj}\left[\widehat{\mathcal{X}_l}, \widehat{\mathcal{X}_r}\right] \\
&\quad - \mathbb{J}_{ri} d\mathbb{J}_{rj} + \mathbb{J}_{lj} d\mathbb{J}_{li} \\
\left[\mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_j}\right] + \left[\widehat{\mathcal{X}_i}, \mathbb{J}\widehat{\mathcal{X}_j}\right] &= -\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{X}_j}}.(\mathbb{J}_{li})\, \widehat{\mathcal{X}_l} + \mathbb{J}_{li}\left[\widehat{\mathcal{X}_l}, \widehat{\mathcal{X}_j}\right] + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{X}_i}}.(\mathbb{J}_{rj})\, (\widehat{\mathcal{X}_r}) + \mathbb{J}_{rj}\left[\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_r}\right] \\
&\quad + d\mathbb{J}_{ji} - d\mathbb{J}_{ij}.
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 4, on en déduit qu'au point (m, u), la partie verticale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_j})$ vaut

$$-\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{\mathcal{X}_i} \wedge \overrightarrow{\mathcal{X}_j} - \overrightarrow{u\mathcal{X}_i} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{X}_j}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u\mathcal{X}_i} \wedge \overrightarrow{\mathcal{X}_j} + \overrightarrow{\mathcal{X}_i} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{X}_j}\right)\right].$$

Pour la partie horizontale, on se donne s une section de $\mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ telle que $s(m) = u$ et $\nabla_m s = 0$. La partie horizontale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_j})$ restreinte à la sous-variété $s(M)$ est égale au relevé horizontal du tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j)$ de M munie de la structure presque complexe généralisée induite par s. Comme la connexion est sans torsion, on en déduit qu'au point m on a $\mathcal{N}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) = 0$, donc la partie horizontale de $\mathcal{N}(\widehat{\mathcal{X}_i}, \widehat{\mathcal{X}_j})$ est nulle au point (m, u) donc partout. □

Comme les fibres de $\mathcal{Z}(M, g) \longrightarrow M$ sont complexes, il est clair que quels que soient $A, B \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\star$, on a $\mathcal{N}(A, B) = 0$. Le lemme technique A est alors une conséquence directe des corollaires 1, 2 et 3.

4.2 Démonstration du théorème 1

Si on change l'orientation sur M, le fibré $\mathcal{Z}^{--}(M, g)$ devient $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$ tandis que $\mathcal{Z}^{-+}(M, g)$ devient $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$ et sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$.

La connexion de Levi-Civita ∇ stabilise $C^\pm$; donc, pour tous $X, Y \in TM$, le tenseur de courbure $\mathcal{R}(X, Y)$ aussi. Plus exactement, si $(\theta_1, \ldots, \theta_4)$ est une base orthonormée de TM et si $(\theta_1^\star, \ldots, \theta_4^\star)$ est sa base duale; alors la matrice du tenseur de courbure $\mathcal{R}(X, Y)$ dans la base $(\theta_1 + \theta_1^\star, \ldots, \theta_4 - \theta_4^\star)$, adaptée à la décomposition $\mathbb{T}M = C^+ \oplus C^-$, s'écrit $\begin{pmatrix} R(X,Y) & 0 \\ 0 & R(X,Y) \end{pmatrix}$. De plus, dans cette base un élément $u \in \mathcal{Z}(M, g)$ est de la forme $\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$. Suivant que les vecteurs $\vec{\mathcal{X}}$ et $\vec{\mathcal{Y}}$ sont dans C^+ ou dans C^-, la condition d'intégrabilité donnée par le lemme technique A équivaut à l'annulation des six tenseurs définis pour tout triplet $(m, u_1, u_2) \in \mathcal{Z}(M, g)$ et pour tous $X, Y \in TM$ par

(a) $G_1(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_1, \quad R(X \wedge Y - u_1 X \wedge u_1 Y) + u_1 R(u_1 X \wedge Y + X \wedge u_1 Y)\Big]$,

(b) $G_2(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_2, \quad R(X \wedge Y - u_1 X \wedge u_1 Y) + u_2 R(u_1 X \wedge Y + X \wedge u_1 Y)\Big]$,

(c) $G_3(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_1, \quad R(X \wedge Y - u_2 X \wedge u_2 Y) + u_1 R(u_2 X \wedge Y + X \wedge u_2 Y)\Big]$,

(d) $G_4(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_2, \quad R(X \wedge Y - u_2 X \wedge u_2 Y) + u_2 R(u_2 X \wedge Y + X \wedge u_2 Y)\Big]$,

(e) $G_5(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_1, \quad R(X \wedge Y - u_1 X \wedge u_2 Y) + u_1 R(u_1 X \wedge Y + X \wedge u_2 Y)\Big]$,

(f) $G_6(X, Y, u_1, u_2) = \Big[u_2, \quad R(X \wedge Y - u_1 X \wedge u_2 Y) + u_2 R(u_1 X \wedge Y + X \wedge u_2 Y)\Big]$.

Sur un petit ouvert $\mathcal{U}$ de M, on se fixe $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ un champ de bases orthonormées directes de TM. Cela définit une trivialisation locale des fibrés $\bigwedge^{\pm} \longrightarrow M$ via les sections

$$\begin{cases} I^+ = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \\ J^+ = \theta_1 \wedge \theta_3 - \theta_2 \wedge \theta_4 \\ K^+ = \theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I^- = \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4 \\ J^- = \theta_1 \wedge \theta_3 + \theta_2 \wedge \theta_4 \\ K^- = -\theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3. \end{cases}$$

On rappelle qu'on identifie les éléments de $\bigwedge^2 TM$ aux endomorphismes anti-symétriques de TM. Un petit calcul permet alors de vérifier que

Lemme 1 *Pour tout* $(u_1, u_2) \in \bigwedge^+ \times \bigwedge^-$ *et pour tous* $X, Y \in TM$ *on a*

1. $X \wedge Y - u_1 X \wedge u_1 Y \in \bigwedge^+$,
2. $u_1 X \wedge Y + X \wedge u_1 Y \in \bigwedge^+$,
3. $[u_1, u_2] = 0$.

Étude de l'intégrabilité sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$

On a vu dans la partie 3.3 que, sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$, les éléments u_1 et u_2 variaient dans le même espace $Z^+(\mathbb{R}^4, e)$. L'annulation des tenseurs $G_1, G_2, \ldots, G_6$ équivaut donc à celle des tenseurs G_2 et G_6. Sur la sous-variété $Z^+(M, g) \subset \mathcal{Z}^{++}(M, g)$, l'annulation du tenseur G_2 est la contrainte d'intégrabilité sur les espaces de twisteurs classiques, elle entraîne donc que g est anti-autoduale. L'annulation de G_2 impose également à la courbure scalaire d'être nulle car

$$G_2(\theta_1, \theta_3, I^+, J^+) = \frac{1}{12}[J^+, s(J^+ + J^+ K^+)] = -\frac{s}{6} K^+.$$

D'autre part on a

$$G_6(\theta_1, \theta_1, I^+, J^+) = \frac{1}{2}\Big[J^+, -R(K^-) + J^+ R(J^- - I^-)\Big],$$
$$G_6(\theta_3, \theta_3, I^+, J^+) = \frac{1}{2}\Big[J^+, \quad R(K^-) + J^+ R(J^- + I^-)\Big].$$

Si $G_6 = 0$, on doit donc avoir $\Big[J^+, R(J^-)\Big] = 0$ et de même $\Big[I^+, R(J^-)\Big] = \Big[K^+, R(J^-)\Big] = 0$. Soit $R(J^-) \in \bigwedge^-$ et plus généralement $R(\bigwedge^-) \in \bigwedge^-$, ce qui impose à la métrique g d'être Einstein.

Réciproquement, si la métrique g est anti-autoduale et Ricci plate, alors l'image de R est dans $\bigwedge^-$, et donc $[\bigwedge^+, R] = 0$. D'où l'annulation des tenseurs G_2 et G_6.

Étude de l'intégrabilité sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$

L'annulation de G_1 (resp. de G_4) est la contrainte d'intégrabilité sur l'espace des twisteurs $Z^+(M, g)$ (resp. $Z^-(M, g)$). On a donc $G_1 = G_4 = 0$ si et seulement si g est localement conformément plate. De plus sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$, l'annulation de G_2 équivaut à demander à g d'être d'Einstein. En effet:

$$G_2(\theta_1, \theta_3, I^+, u_2) = \Big[u_2, \quad R(J^+) + u_2 R(K^+)\Big] \tag{1}$$

$$G_2(\theta_1, \theta_3, K^+, u_2) = \Big[u_2, \quad R(J^+) - u_2 R(I^+)\Big] \tag{2}$$

$$G_2(\theta_1, \theta_2, J^+, u_2) = \Big[u_2, \quad R(I^+) - u_2 R(K^+)\Big] \tag{3}$$

Si $G_2 = 0$, la combinaison (1) − (2) + (3) donne $(Id + u_2)[u_2, R(I^+)] = 0$, et donc $[u_2, R(I^+)] = 0$ pour tout $u_2 \in \bigwedge^-$. On a donc $R(I^+) \in \bigwedge^+$ et plus généralement $R(\bigwedge^+) \subset \bigwedge^+$ soit $B = 0$. Réciproquement, si g est d'Einstein, le lemme 1 montre que $G_2 = 0$. Si $\mathbb{J}$ est intégrable, nécessairement g est à courbure sectionnelle constante. Pour la réciproque, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2 *Soit (M, g) est une 4-variété à courbure sectionnelle constante, c'est-à-dire $R = \lambda Id$. Sur notre ouvert $\mathcal{U}$ et pour tous champs de vecteurs $X, Y \in TM$, on a*

$$[I^+, R(X \wedge Y)] = \lambda\Big(- g(K^+X, Y)J^+ + g(J^+X, Y)K^+\Big).$$

Preuve du lemme 2 Par symétrie et par bilinéarité, on peut supposer que $X = \theta_1$ et $Y = \theta_i$

$$\begin{aligned}
R(\theta_1 \wedge \theta_2) &= \frac{\lambda(I^+ + I^-)}{2}, &\quad \text{d'où} \quad [I^+, R(\theta_1, \theta_2)] &= 0\,,\\
R(\theta_1 \wedge \theta_3) &= \frac{\lambda(J^+ + J^-)}{2}, &\quad \text{d'où} \quad [I^+, R(\theta_1, \theta_3)] &= \lambda K^+\,,\\
R(\theta_1 \wedge \theta_4) &= \frac{\lambda(K^+ - K^-)}{2}, &\quad \text{d'où} \quad [I^+, R(\theta_1, \theta_4)] &= -\lambda J^+\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne directement le lemme 2. □

Si (M, g) est une variété à courbure sectionnelle constante, elle est en particulier autoduale, anti-autoduale et d'Einstein, soit $G_1 = G_4 = G_2 = 0$. Enfin, quitte à changer de base orthonormée, on peut supposer que $u_1 = I^+$. D'après le lemme 2, on a alors

$$\begin{aligned}
&G_5(\theta_i, \theta_j, I^+, u_2)\\
&= \lambda\Big(- g\big(K^+\theta_i, \theta_j\big) + g\big(J^+\theta_i, u_2\theta_j\big) + g\big(K^+\theta_i, \theta_j\big) - g\big(J^+\theta_i, u_2\theta_j\big)\Big) J^+\\
&\quad + \lambda\Big(g\big(J^+\theta_i, \theta_j\big) + g\big(K^+\theta_i, u_2\theta_j\big) - g\big(J^+\theta_i, \theta_j\big) - g\big(K^+\theta_i, u_2\theta_j\big)\Big) K^+\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Et en retournant l'orientation on a immédiatement $G_3 = G_6 = 0$: si la métrique g est à courbure sectionnelle constante, alors $\mathbb{J}$ est intégrable. □

5 Structure presque complexe sur $\mathcal{Z}(M, g)$

5.1 Critère d'intégrabilité

Un des attraits de la théorie des twisteurs est de faire un pont entre la géométrie riemannienne et la géométrie complexe. Ainsi le résultat d'Atiyah, Hitchin et Singer traduit en terme d'intégrabilité d'une structure complexe la propriété pour une métrique d'être autoduale. Le théorème 1 exprime, lui, le fait d'être à courbure sectionnelle constante ou autoduale et Ricci plate en terme d'intégrabilité d'une structure complexe généralisée. On se propose ici d'ajouter deux passerelles en caractérisant d'une part les métriques d'Einstein et d'autre part les métriques autoduales à courbure scalaire nulle.

Pour cela, on définit une structure presque complexe sur $\mathcal{Z}(M, g)$. On sait déjà que la connexion de Levi-Civita nous fournit une décomposition $T\mathcal{Z}(M, g) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. En un point $(m, u) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ avec $u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$, on peut donc définir la structure presque complexe $\mathbb{J}_1$ sur $T\mathcal{Z}(M, g)$ comme la somme directe de la structure complexe naturelle sur $\mathcal{V}$ et de l'action de u_1 sur $\mathcal{H}$, après identification avec TM. Comme précédemment, l'intégrabilité de cette structure complexe dépend de la courbure de g. Plus exactement on a

Théorème 2 *Pour toute* 4*-variété riemannienne orientée* (M, g)*, la structure presque complexe* $\mathbb{J}_1$ *est intégrable:*

(a) sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$ *si et seulement si g est anti-autoduale à courbure scalaire nulle;*
(b) sur $\mathcal{Z}^{--}(M, g)$ *si et seulement si g est autoduale à courbure scalaire nulle;*
(c) sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$ *si et seulement si g est anti-autoduale et d'Einstein;*
(d) sur $\mathcal{Z}^{-+}(M, g)$ *si et seulement si g est autoduale et d'Einstein.*

Preuve Pour établir l'intégrabilité de $\mathbb{J}_1$ on utilise le lemme technique suivant dont la démonstration est similaire à celle du précédent. □

Lemme technique B *Au point* $(m, u) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ *avec* $u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}$*, le tenseur de Nijenhuis de* $\mathbb{J}_1$ *est nul si et seulement si, pour tout* $u \in \mathcal{Z}(M, g)$ *et pour tous* $X, Y \in TM$

$$\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} - \overrightarrow{u_1 X} \wedge \overrightarrow{u_1 Y}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u_1 X} \wedge \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{u_1 Y}\right)\right] = 0.$$

Preuve du théorème 2 La condition d'intégrabilité qui apparaît dans le lemme technique B équivaut uniquement à l'annulation des deux tenseurs G_1 et G_2 définis précédemment. Sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$ on a vu que cela entraînait $W^+ = s = 0$. Réciproquement, si $W^+ = s = 0$ alors $R(\bigwedge^+) \subset \bigwedge^-$ et le lemme 1 nous donne automatiquement l'annulation des tenseurs G_1 et G_2. De même sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$, on a vu que l'annulation de G_1 et de G_2 équivaut à g anti-autoduale et d'Einstein. Enfin, l'intégrabilité sur $\mathcal{Z}^{--}(M, g)$ et sur $\mathcal{Z}^{-+}(M, g)$ se déduit de celle de $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$ et de $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$ en renversant l'orientation. □

5.2 Critère de semi-intégrabilité

Les éléments de $\mathcal{Z}(M, g)$ stabilisent C^+ et C^-. On introduit donc $Z(C^-, g)$ l'ensemble des structures presque complexes sur C^- compatibles avec $g|_{C^-}$, soit

$$Z(C^-, g) = \{u \in End(C^-)/u^2 = -Id \text{ et } u \text{ orthogonal pour } g|_{C^-}\}.$$

Par restriction, on a la projection naturelle de $\mathcal{Z}(M, g)$ sur $Z(C^-, g)$

$$\begin{array}{rccc} pr_- : & \mathcal{Z}(M, g) & \longrightarrow & Z(C^-, g) \\ & u & \longmapsto & u|_{C^-} = u_2 . \end{array}$$

Définition On dira qu'une structure presque complexe sur $\mathcal{Z}(M, g)$ est *semi-intégrable* si la projection sur $Z(C^-, g)$ de son tenseur de Nijenhuis est nulle.

Techniquement, cela revient à demander l'annulation du tenseur G_2. Sur $\mathcal{Z}^{++}(M, g)$, la semi-intégrabilité de $\mathbb{J}_1$ entraîne l'intégrabilité. Ce n'est pas le cas sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$, où l'annulation de G_2 équivaut à demander à la métrique d'être d'Einstein.

Proposition 5 *La structure presque complexe $\mathbb{J}_1$ est semi-intégrable sur $\mathcal{Z}^{+-}(M, g)$ (ou sur $\mathcal{Z}^{-+}(M, g)$) si et seulement si la métrique g est d'Einstein.*

Cette proposition donne une interprétation complexe de la propriété d'être Einstein.

6 Dimension quelconque

La théorie des twisteurs classiques comme nous l'avons présentée en dimension 4 a été étendue en toute dimension [3,10,15,18,20,22] et en particulier aux variétés quaternioniques Kähler. Considérons donc (M, g) une $4n$-variété riemannienne avec $n > 1$. Une structure *presque hypercomplexe* sur (M, g) est un triplet (I, J, K) de structures presque complexes compatibles avec g et telles que $IJ = -JI = K$. Lorsque I, J, K sont intégrables, on parle d'une structure *hypercomplexe*. Une structure *presque quaternionique* sur (M, g) est un sous-fibré de rang trois $D \subset End(TM)$ localement engendré par une structure presque hypercomplexe. Une telle structure est dite *quaternionique Kähler* si le fibré D est préservé par la connexion de Levi-Civita [4].

Précisément, dans le cas où (M, g, D) est une variété presque quaternionique, on peut définir le fibré des twisteurs classiques $Z(M, D) \longrightarrow M$ comme le fibré des structures presque complexes sur M appartenant à D. C'est un fibré de fibres $\mathbb{S}^2$. Là encore, on peut munir $Z(M, D)$ d'une structure presque complexe naturelle. Dans ce cas l'intégrabilité est automatique.

Théorème [4,20] *Pour toute $4n$-variété quaternionique Kähler (M, g, D) avec $n > 1$, la structure presque complexe naturelle sur $Z(M, D)$ est toujours intégrable.*

Comme précédemment, on se propose de donner une version généralisée de ce théorème. Pour cela on considère (M, g, D_1, D_2) une variété riemannienne munie de deux structures quaternioniques Kähler. On note encore $C^\pm$ les sous-espaces propres de la métrique g vue comme endomorphisme de $\mathbb{T}M$. La projection de C^+ (resp. C^-) sur TM est un isomorphisme qui permet de relever la distribution D_1 (resp. D_2) en une distribution notée $D^+ \subset End(C^+)$ (resp. $D^- \subset End(C^-)$).

Définition On définit $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$ le fibré des structures presque complexes compatibles avec g dont la restriction à $C^\pm$ appartient à $D^\pm$. Dans la base $C^+ \oplus C^-$ cela donne

$$\mathcal{Z}(M, D_1, D_2) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} / u_1 \in D^+ \text{ et } \quad u_2 \in D^- \right\} .$$

C'est un fibré de fibres $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Le fibré des twisteurs classiques $Z(M, D)$ se réalise naturellement comme la sous-variété de $\mathcal{Z}(M, D, D)$ d'équation $u_1 = u_2$. D'autre part, la même construction qu'en dimension quatre permet de munir $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$ d'une structure presque complexe généralisée naturelle $\mathbb{J}$, qui n'est pas la B-transformation d'une structure complexe, ni d'une structure symplectique.

Remarque En dimension 4, $\bigwedge^+$ et $\bigwedge^-$ sont les seules structures presque quaternioniques sur (M, g). Par convention, on dira que la 4-variété $(M, g, \bigwedge^+)$ est quaternionique Kähler si elle est anti-autoduale et d'Einstein. Avec les notations de la section précédente on a

$$\mathcal{Z}^{++}(M, g) = \mathcal{Z}\left(M, \overset{+}{\bigwedge}, \overset{+}{\bigwedge}\right),$$

$$\mathcal{Z}^{+-}(M, g) = \mathcal{Z}\left(M, \overset{+}{\bigwedge}, \overset{-}{\bigwedge}\right),$$

$$\mathcal{Z}^{-+}(M, g) = \mathcal{Z}\left(M, \overset{-}{\bigwedge}, \overset{+}{\bigwedge}\right),$$

$$\mathcal{Z}^{--}(M, g) = \mathcal{Z}\left(M, \overset{-}{\bigwedge}, \overset{-}{\bigwedge}\right).$$

Avec cette convention, le théorème 1 se généralise à toute dimension sous la forme suivante

Théorème 3 *Soit $n \geq 1$ et (M, g, D_1, D_2) une $4n$-variété munie de deux structures quaternioniques Kähler. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$ est intégrable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:*

(a) la courbure scalaire de g est nulle,
(b) les éléments de D_1 et de D_2 commutent.

Les variétés hyperkählériennes généralisées admettent naturellement deux structures quaternioniques Kähler sous-jacentes. Notre théorème s'applique donc en particulier à ces variétés, et on retrouve alors le résultat de Bredthauer [5].

Preuve La cas $n = 1$ ayant déjà été traité, on suppose que $n > 1$. Alors, toutes les constructions précédentes marchent encore et, si on conserve les mêmes notations, le théorème 3 est une conséquence des trois lemmes suivants. □

Lemme technique C *Soit (M, g, D_1, D_2) une $4n$-variété munie de deux structures quaternioniques Kähler. La structure presque complexe généralisée $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$ est intégrable si et seulement si, pour tous champs $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\star$ et pour tout point $u \in \mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$, on a*

$$\left[u, \mathcal{R}\left(\overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} - \overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right) + u\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{Y}} + \overrightarrow{\mathcal{X}} \wedge \overrightarrow{u\mathcal{Y}}\right)\right] = 0.$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du premier lemme technique.

Lemma 3 [4] *Soit $n > 1$, (M, g, D) une $4n$-variété quaternionique Kähler et r le tenseur de Ricci de la métrique g. On note (I, J, K) une structure presque hypercomplexe qui engendre D au-dessus d'un ouvert de M. Au-dessus de cet ouvert et, pour tous champs de vecteurs $X, Y \in TM$, on a*

$$\begin{array}{rcl} [I, R(X,Y)] &=& -\gamma(X,Y)J + \beta(X,Y)K \\ [J, R(X,Y)] &=& -\alpha(X,Y)K + \gamma(X,Y)I \\ [K, R(X,Y)] &=& -\beta(X,Y)I + \alpha(X,Y)J \end{array} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \alpha(X,Y) = \frac{2}{n+2} r(IX, X) \\ \beta(X,Y) = \frac{2}{n+2} r(JX, X) \\ \gamma(X,Y) = \frac{2}{n+2} r(KX, X). \end{cases}$$

Lemma 4 [4] *Les variétés quaternioniques Kähler sont d'Einstein.*

Le lemme technique C nous assure que l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ sur $\mathcal{Z}(M, D_1, D_2)$ équivaut à l'annulation des six tenseurs $G_1, \ldots, G_6$ définis dans la Sect. 4.2. Si la courbure scalaire de g est nulle alors la métrique est Ricci plate et le lemme 3 nous assure que ces six tenseurs sont nuls : $\mathbb{J}$ est intégrable.

On suppose donc que la courbure scalaire de g est non nulle. On se fixe $\mathcal{U}$ un ouvert de M et (I_1, J_1, K_1) (resp. (I_2, J_2, K_2)) une structure presque hypercomplexe sur $\mathcal{U}$ qui engendre D_1 (resp. D_2). Le lemme 3 nous dit que

$$\begin{aligned} & G_2(X, Y, I_1, I_2) = 0 \\ \iff & \Big(g(K_2X, Y) - g(K_2I_1X, I_1Y) + g(J_2I_1X, Y) + g(J_2X, I_1Y)\Big)J_2 \\ & + \Big(- g(J_2X, Y) + g(J_2I_1X, I_1Y) + g(K_2I_1X, Y) + g(K_2X, I_1Y)\Big)K_2 = 0 \\ \iff & \begin{cases} K_2 + I_1K_2I_1 + [J_2, I_1] = 0 \\ -J_2 - I_1J_2I_1 + [K_2, I_1] = 0 \end{cases} \\ \iff & I_1[J_2, I_1] = [K_2, I_1]. \end{aligned}$$

Et par symétrie $\begin{cases} I_1[I_2, I_1] = [J_2, I_1] \\ I_1[K_2, I_1] = [I_2, I_1] \end{cases}$, d'où l'on en déduit que $[I_1, I_2] = 0$ et plus généralement que les éléments de D_1 commutent avec ceux de D_2. La réciproque se vérifie facilement en utilisant le lemme 3. □

References

1. Atiyah, M.F., Hitchin, N.J., Singer, I.M.: Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A **362**, 425–461 (1978)
2. Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van de Ven, A.: Compact complex surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, Berlin (2004)
3. Bérard-Bergery, L., Ochiai, T.: On some generalizations of the construction of twistor spaces. Global Riemannian geometry (Durham, 1983), Ellis Horwood Ser. Math. Appl., pp. 52–59. Horwood, Chichester (1984)
4. Besse, A.L.: Einstein manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3). Springer, Berlin (1987)
5. Bredthauer, A.: Generalized Hyperkähler geometry and supersymmetry. Nucl. Phys. B **773**, 172–183 (2007)
6. Cavalcanti, G., Gualtieri, M.: A surgery for generalized complex structures on 4-manifolds. J. Differ. Geom. **76**, 35–43 (2007)
7. Courant, T.J.: Dirac manifolds. Trans. Am. Math. Soc. **319**, 631–661 (1990)
8. Davidov, J., Mushkarov, O.: Twistor spaces of generalized complex structures. J. Geom. Phys. **56**, 1623–1636 (2006)
9. Davidov, J., Mushkarov, O.: Twistorial construction of generalized Kähler manifolds. J. Geom. Phys. **57**, 889–901 (2007)
10. Dubois-Violette, M.: Structures complexes au-dessus des variétés, applications. Mathematics and Physics. Progr. Math. **37**, 1–42 (1983)

11. Gualtieri, M.: Generalized complex geometry. Ph.D. thesis, St John's college, University of Oxford, arXiv:math/0401221, p. 107 (2003)
12. Gualtieri, M.: Generalized Kähler geometry. Commun. Math. Phys. **331**, 297–331 (2014)
13. Hitchin, N.J.: Generalized Calabi-Yau manifolds. Q. J. Math. **54**, 281–308 (2003)
14. Hitchin, N.J.: Compact four-dimensional Einstein manifolds. J. Differ. Geom. **9**, 435–441 (1974)
15. LeBrun, C.: Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry. Math. Ann. **284**, 353–376 (1989)
16. Lee, J.M.: Riemannian manifolds. An introduction to curvature. Graduate Texts Math. Springer, New York (1997)
17. O'Neil, B.: The fundamental equations of a submersion. Mich. Math. J. **13**, 459–469 (1966)
18. O'Brian, N.R., Rawnsley, J.H.: Twistor spaces. Ann. Global Anal. Geom. **3**, 29–58 (1985)
19. Penrose, R., Ward, R.S.: Twistors for flat and curved space-time. General Relativ. Grav. **2**, 283–328. Plenum, New York (1980)
20. Salamon, S.: Quaternionic Kähler manifolds. Invent. Math. **67**, 143–171 (1982)
21. Singer, I.M., Thorpe, J.A.: The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. Global Analysis, paper in honor of K. Kodaira, pp. 355–365. Princeton University Press (1969)
22. Slupinski, M.: Espaces de twisteurs kählériens en dimension 4k, k>1. J. Lond. Math. Soc. **33**, 535–542 (1986)