

Transferts sur les groupes de Chow à coefficients

Frédéric Déglise

Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue, Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France (e-mail: deglise@math.univ-paris13.fr)

Received : 15 July 2004 ; in final form : 12 April 2005

Published online : 2 November 2005 – © Springer-Verlag 2005

Résumé Dans cet article, nous construisons des transferts au sens de la théorie des complexes motiviques de V. Voevodsky (cf [1], chap. 5) sur les groupes de Chow à coefficients définis par M. Rost. On remarquera particulièrement que ceci définit des transferts sur les faisceaux de K-théorie de Milnor non ramifié en même temps que sur les groupes de Chow classiques grâce à une méthode unifiée. Enfin, la méthode donne des transferts dans le cas d'un corps non nécessairement parfait, et permet d'obtenir un large éventail de faisceaux avec transferts dont la cohomologie est invariante par homotopie alors que la théorie de Voevodsky ne donne de tels faisceaux que dans le cas où le corps est parfait.

Transfers on Chow groups with coefficients

Abstract In this article, we construct canonical transfers, in the sense of V. Voevodsky, on Chow groups with coefficients introduced by M. Rost. As a concrete example, we get such a structure for unramified Milnor K-theory and for the classical Chow groups using a unified method. It is important to underline that this theory works over any base field, even in the non perfect case. This gives a lot of examples of sheaves with transfers which have homotopy invariant cohomology over non perfect fields, in contrast with the fact that the theory of Voevodsky works only for perfect fields.

Notations

On fixe un corps de base k . On dit qu'un k -schéma est essentiellement de type fini s'il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe au spectre d'une k -algèbre essentiellement de type fini.

On fixe un k -schéma essentiellement de type fini S .

Les schémas que l'on considère sont tous munis d'une structure de S -schéma telle que le k -schéma sous-jacent est séparé et essentiellement de type fini. On dira par abus de langage qu'un tel schéma est lisse si il est formellement lisse sur S .

De même, les corps E que l'on considère sont tous des points $\text{Spec}(E) \rightarrow S$ et sont de degré de transcendance fini sur k . Les morphismes de corps respectent cette structure. Les valuations v sur E sont toujours supposées telles que l'anneau des entiers de v est une sous- k -algèbre de E essentiellement de type fini.

Lorsque Z est un sous-schéma fermé d'un schéma X , on note $C_Z X$ le cône normal de Z dans X . Si l'immersion de Z dans X est régulière, ce cône est un fibré isomorphe au fibré normal de Z dans X que l'on note $N_Z X$.

Introduction

Le but final de cet article est de construire des transferts au sens de [1], chap. 5 sur les groupes de Chow à coefficients définis dans [7] (cf prop. 6.9). L'idée principale est d'utiliser l'action canonique des groupes de Chow classiques, facteurs directs des groupes de Chow à coefficients dans la K-théorie de Milnor, sur les groupes de Chow à coefficients quelconques (cf ex. 5.5).

Pour mener cette méthode à bien, nous avons besoin de compléter la théorie de l'intersection construite par Rost pour les groupes de Chow à coefficients.

Nous commençons cet article par rappeler synthétiquement la théorie des modules de cycles définie par M. Rost (cf [7]). Cette partie ne contient que des définitions et des résultats de Rost cités sans preuve. L'intérêt pour nous est aussi de fixer quelques conventions qui diffèrent un peu de l'article original [7]. Ainsi, nous utilisons plutôt l'indexation cohomologique des groupes de Chow à coefficients, et nous numérotions la deuxième graduation des groupes de Chow (appelés «twists») différemment de celle adoptée dans *loc.cit.* (cf rem. 1.5). Par ailleurs, nous considérons par la notation $\bullet \rightarrow$ des morphismes de complexes de cocycles à coefficients à *homotopie près*.

Les trois parties suivantes visent à introduire les *morphismes de Gysin raffinés* (cf 4.1) qui nous permettent d'énoncer une formule de projection généralisée (par. 4.5). On en déduit une théorie des morphismes de Gysin associés à des morphismes localement d'intersection complète et nous montrons toutes les propriétés standards de ces morphismes comme l'associativité et la formule de projection. On notera particulièrement que, bien que l'associativité résulte essentiellement de la méthode introduite dans [7] (cf proposition 3.22), la formule de projection est démontrée grâce à la considération des morphismes de Gysin raffinés (cf corollaire 4.6 et proposition 5.9).

L'article se clôt par la construction des transferts sur les groupes de Chow à coefficients dans un module de cycle sur k , sans supposer que k est parfait. La difficulté principale, une fois que la définition est en place, est de démontrer la compatibilité des transferts au produit de composition des correspondances finies. Notons que cette vérification est délicate et qu'elle n'apparaît pour le moment que rarement dans la littérature. Une fois que toutes les propriétés requises pour ces

transferts ont été obtenue, nous obtenons aussi une expression plus simple pour ces transferts (cf 6.6).

Signalons que cette construction sera utilisée, dans le cas d'un corps parfait pour montrer que le foncteur qui à un module de cycles associe un faisceau avec transferts invariant par homotopie définit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des modules de cycles dans la catégorie formée par ces faisceaux – et donc dans la catégorie des complexes motiviques définie dans [1], chap. 5.

1. Rappels et notations

Nous effectuons quelques rappels concernant la théorie des modules de cycles de M. Rost (cf [7]).

1.1. Pré-modules de cycles

Rappelons qu'un pré-module de cycles M sur S est la donnée d'un foncteur covariant qui à tout corps E associe un module gradué $M(E)$ sur l'anneau gradué $K_*^M(E)$ de K-théorie de Milnor de E . Ce foncteur est muni de deux structures supplémentaires :

1. Pour toute extension finie de corps L/E , on se donne un morphisme $M(L) \rightarrow M(E)$ de degré 0.
2. Pour tout corps valué (E, v) de corps résiduel $\kappa(v)$, on se donne un morphisme $M(E) \rightarrow M(\kappa(v))$ de degré -1 .

Ces données doivent de plus satisfaire plusieurs relations, qui sont celles vérifiées par le foncteur de K-théorie de Milnor.

De manière plus précise, on peut décrire formellement ces relations en introduisant une catégorie intermédiaire $\tilde{\mathcal{E}}_S$ telle que les modules de cycles soient exactement les foncteurs covariants de $\tilde{\mathcal{E}}_S$ vers la catégorie des groupes abéliens.

La catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_S$ a pour objets les couples (E, n) formée d'un corps E et d'un entier $n \in \mathbb{Z}$ et nous décrivons ses morphismes par générateurs et relations :

Générateurs :

- D1** : $\varphi_* : (E, n) \rightarrow (L, n)$ pour $\varphi : E \rightarrow L, n \in \mathbb{Z}$.
- D2** : $\varphi^* : (L, n) \rightarrow (E, n)$, pour $\varphi : E \rightarrow L$ fini, $n \in \mathbb{Z}$.
- D3** : $\gamma_x : (E, n) \rightarrow (E, n+r)$, pour $x \in K_r^M(E), n \in \mathbb{Z}$.
- D4** : $\partial_v : (E, n) \rightarrow (\kappa(v), n-1)$, pour (E, v) corps valué, $n \in \mathbb{Z}$.

Relations :

- R0** : Pour tous $x \in K_*^M(E), y \in K_*^M(E), \gamma_x \circ \gamma_y = \gamma_{x,y}$
- R1a** : $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$
- R1b** : $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$
- R1c** : Soit $\varphi : K \rightarrow E, \psi : K \rightarrow L$ fini. Pour $z \in \text{Spec}(E \otimes_K L)$, notons $\bar{\varphi}_z : L \rightarrow E \otimes_K L/z$ et $\bar{\psi}_z : E \rightarrow E \otimes_K L/z$ les morphismes induits :

$$\psi_* \varphi^* = \sum_{z \in \text{Spec}(E \otimes_K L)} \text{lg}(E \otimes_K L_z) \cdot (\bar{\varphi}_z)^* (\bar{\psi}_z)_*$$
 où pour un anneau artinien A , l'entier $\text{lg}(A)$ désigne la longueur de A .
- R2a** : pour tous $\varphi : E \rightarrow L, x \in K_*^M(E), \varphi_* \circ \gamma_x = \gamma_{\varphi_*(x)} \circ \varphi_*$

R2b : pour tous $\varphi : E \rightarrow L$ fini, $x \in K_*^M(E)$, $\varphi^* \circ \gamma_{\varphi_*(x)} = \gamma_x \circ \varphi^*$

R2c : pour tous $\varphi : E \rightarrow L$ fini, $y \in K_*^M(L)$, $\varphi^* \circ \gamma_y \circ \varphi_* = \gamma_{\varphi^*(y)}$

R3a : Soit $\varphi : E \rightarrow L$, v valuation sur L , w valuation sur E telles que $v|_{E^\times} = e \cdot w$ avec $e > 0$. Notons $\bar{\varphi} : \kappa(w) \rightarrow \kappa(v)$ le morphisme induit :

$$\partial_v \circ \varphi_* = e \cdot \bar{\varphi}_* \circ \partial_w$$

R3b : Soit $\varphi : E \rightarrow L$ fini, v valuation sur E . Si w est une extension de v à L , on note $\bar{\varphi}_w$ le morphisme induit par φ sur les corps résiduels :

$$\partial_v \circ \varphi^* = \sum_{w/v} \bar{\varphi}_w^* \circ \partial_w$$

R3c : Soit $\varphi : E \rightarrow L$, v valuation sur L nulle sur E^\times : $\partial_v \circ \varphi_* = 0$

R3d : pour (E, v) corps valué, π uniformisante de v : $\partial_v \circ \gamma_{\{-\pi\}} \circ \varphi_* = \bar{\varphi}_*$

R3e : pour (E, v) corps valué, u unité de v : $\partial_v \circ \gamma_{\{u\}} = -\gamma_{\{u\}} \circ \partial_v$.

Définition 1.1. *Un pré-module de cycles sur S est un foncteur $M : \tilde{\mathcal{E}}_S \rightarrow \mathcal{A}b$. Un morphisme de pré-modules de cycles est une transformation naturelle.*

1.2. Modules de cycles

Les définitions qui suivent ont pour but d'associer à tout schéma X et tout module de cycles M un complexe de «cycles de X à coefficients dans M » analogue à celui construit par Kato dans [4] avec la K-théorie de Milnor :

Définition 1.2. *Soient M un pré-module de cycles sur S , et X un schéma.*

1. Pour tout point x de X , on pose $M(x) = M(\kappa(x))$.
2. Supposons X normal. Soit η son point générique et z un point de codimension 1. Alors z correspond à une valuation discrète v_z sur le corps des fonctions de X , égal à $\kappa(\eta)$. D'après l'axiome D4, on définit donc

$$\partial_z^X = \partial_{v_z} : M(\eta) \rightarrow M(z).$$

3. Soient x et y des points de X . On note Z l'adhérence réduite de x dans X . On note \tilde{Z} le normalisé de Z ; le morphisme canonique $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est fini.

Supposons que $y \in Z^{(1)}$, et notons \tilde{Z}_y la fibre de f au-dessus de y . Alors, tout point $z \in \tilde{Z}_y$ est de codimension 1 dans \tilde{Z} . Pour un tel point z , on note $\varphi_z : \kappa(y) \rightarrow \kappa(z)$ le morphisme induit par f sur les corps résiduels ; c'est un morphisme fini.

On pose alors :

$$\partial_y^x = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{z \in \tilde{Z}_y} \varphi_z^* \circ \partial_z^{\tilde{Z}} & \text{si } y \in Z^{(1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} : M(x) \rightarrow M(y).$$

Avec ces notations, nous pouvons introduire les deux axiomes suivants sur les pré-modules de cycles :

Définition 1.3. *Soit M un pré-module de cycles sur S . On dit que M est un module de cycles si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (FD) Pour tout schéma normal X de point générique η , et pour tout $\rho \in M(\eta)$, l'ensemble $\{x \in X^{(1)} \mid \partial_x^\eta(\rho) \neq 0\}$ est fini.
- (C) Pour tout schéma X intègre, local et de dimension 2, dont on note η le point générique et x_0 le point fermé, on a

$$\sum_{x \in X^{(1)}} \partial_{x_0}^x \circ \partial_x^\eta = 0.$$

On note $\mathcal{M}Cycl_S$ la catégorie des modules de cycles sur S , munie des morphismes de pré-modules de cycles.

Comme annoncé, on obtient finalement le complexe de (co)cycles à coefficients dans M :

Définition 1.4. Soient M un module de cycles sur S , et X un schéma.

Pour tout entier naturel p , on pose :

$$C^p(X; M) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M(x).$$

Pour tout entier naturel p , on définit un morphisme

$$d_{X,M}^p = \sum_{(x,y) \in X^{(p)} \times X^{(p+1)}} \partial_y^x.$$

D'après les axiomes des modules de cycles, $C^*(X; M)$, muni de ces morphismes, est un complexe. On définit le p -ième groupe de Chow à coefficients dans M , noté $A^p(X; M)$, comme le p -ième groupe de cohomologie du complexe de cocycles à coefficients dans M .

Remarque 1.5. Les groupes abéliens $C^p(X; M)$ porte une graduation naturelle induite par la graduation de M : $C^p(X; M)_r = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M_r(x)$. Comme les différentielles sont homogènes par rapport à cette graduation, les groupes $A^p(X; M)$ sont aussi naturellement gradués. Nous appelons les indices de cette graduation les *twists*.

Exemple 1.6. Pour justifier la terminologie «groupe de Chow à coefficients», le lecteur observera que dans le cas où $M = K_*^M$, pour le twist 0, $A^p(X; K_*^M)_0$ est le groupe des cycles de X de codimension p modulo équivalence rationnelle.

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante, due à M. Rost (cf *loc. cit.* 2.3), des modules de cycles sur un corps parfait :

Théorème 1.7 (Rost). Supposons que k est parfait.

Soit M un pré-module de cycles sur k . Alors, M est un module de cycles si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour toute extension de type fini E/k :

(FDL) Pour tout $\rho \in E(t)$, l'ensemble

$$\{v \text{ valuation géométrique sur } E(t)/E \mid \partial_v(\rho) \neq 0\}$$

est fini.

(WR) Soit ∂_∞ le résidu associé à la valuation à l'infini de $E(t)$, alors

$$\partial_\infty(A^0(\mathbb{A}_E^1; M)) = 0.$$

La référence pour ce théorème est [7] theorem 2.3.

1.3. Morphismes des complexes de cocycles à coefficients

Nous fixons maintenant un module de cycles M sur S .

Soient X et Y des S -schémas.

Nous noterons conventionnellement $X \bullet \rightarrow Y$ toute collection α de morphismes de groupes abéliens $C^p(X; M)_r \rightarrow C^{p+d}(Y; M)_{r+n}$ indexée par $p \in \mathbb{Z}$, où (d, n) est un couple d'entiers fixé, appelé bidegré de α , qui commutent *au signe près* avec les différentielles. Par ailleurs, nous considérons plutôt les classes formées par ces morphismes à homotopie près.

De tels morphismes induisent donc un morphisme canonique sur la cohomologie des complexes, c'est-à-dire les groupes de Chow à coefficients, avec le même bidegré. Ce sont ces morphismes qui nous intéressent *in fine*.

Un morphisme $\alpha : X \bullet \rightarrow Y$ est donc défini par une collection de morphismes (éventuellement nuls) $\alpha_y^x : M(y) \rightarrow M(x)$ pour $x \in X$ et $y \in Y$.

Si L/E est une extension de corps, $\varphi : E \rightarrow L$ l'inclusion canonique. Nous notons encore, suivant Rost, $r_{L/E} = \varphi_* : M(E) \rightarrow M(L)$ (resp. $c_{L/E} = \varphi^* : M(L) \rightarrow M(E)$ si L/E est finie).

Rappelons les quatre morphismes de base introduits par Rost :

Soit X, Y des S -schémas, et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de dimension relative constant d :

1. Si f est plat, on définit $f^* : X \bullet \rightarrow Y$ de bidegré $(0, 0)$ tel que :

$$(f^*)_y^x = \begin{cases} \text{lg}(\mathcal{O}_{f^{-1}(Z), y}) \cdot r_{\kappa(y)/\kappa(x)} & \text{si } x = f(y), Z = \overline{\{x\}}_{red} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Si f est propre, on définit $f_* : Y \bullet \rightarrow X$ de bidegré $(d, 0)$ tel que :

$$(f_*)_y^x = \begin{cases} c_{\kappa(x)/\kappa(y)} & \text{si } f(x) = y, \text{ et } \kappa(x)/\kappa(y) \text{ est finie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soient $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{G}_m(X)$. On définit $\{a_1, \dots, a_r\} : X \bullet \rightarrow X$ de bidegré $(0, r)$ en posant

$$\{a_1, \dots, a_r\}_y^x(\sigma) = \begin{cases} \{a_1(x), \dots, a_r(x)\} \cdot \sigma & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $a_i(x)$ désigne la fibre de a_i au point x , et $\{a_1(x), \dots, a_r(x)\}$ est vu comme un élément de $K_r^M(\kappa(x))$.

4. Si Z est un fermé de X , posant $U = X - Z$, on définit un morphisme, $\partial_Z^U : U \bullet \rightarrow Z$ de bidegré $(1, -1)$ par la formule :

$$\partial_Z^U)_y^x = \partial_y^x$$

pour $x \in Z, y \in U$, les morphismes $\partial_x^y : M(y) \rightarrow M(x)$ désignant les morphismes des différentielles du complexe X .

D'après [7], 4.6, ces quatre morphismes commutent ou anti-commutent aux différentielles des complexes de cycles à coefficients. Par ailleurs, le pullback et le pushout sont fonctoriels (cf [7], 4.1).

Remarque 1.8. Le fait que ces quatre morphismes commutent effectivement aux différentielles des complexes en jeu n'est pas une conséquence immédiate des axiomes, et c'est même, à notre avis, un des points délicats sur lesquels repose la théorie de M. Rost. Ainsi, dans le cas de f_* , il utilise la propriété (RC) que vérifient les modules de cycles (cf dem. de 4.6). Cette dernière découle des axiomes (FD) et (H) des modules de cycles (cf *loc.cit.*, étape 3 de la démonstration de (2.2) et (2.3) pour cette dernière affirmation). Rappelons que la propriété (RC) est un analogue de la loi de réciprocité de Weil.

Les deux premiers types de morphismes sont l'analogie de la functorialité bien connue des groupes de Chow (et la généralise effectivement d'après l'exemple 1.6). On obtient de même une formule de projection :

Proposition 1.9 (Rost, 4.1). Soit
$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$
 un carré cartésien tel que p est plat, et f est propre. Alors, $p^* f_* = g_* q^*$.

2. Spécialisation au cône normal

Dans les trois parties qui suivent, nous fixons un module de cycles M sur S et adoptons la convention de 1.3 en ce qui concerne le symbole $\bullet \longrightarrow$.

Comme première application du formalisme des modules de cycles introduits par Rost, nous rappelons ici sa définition du morphisme de spécialisation. Nous démontrons par ailleurs une propriété élémentaire de cette spécialisation qui ne se trouve pas dans [7]. Le lecteur trouvera dans celle-ci un premier exemple de l'utilisation du formalisme des modules de cycles.

Rappelons tout d'abord qu'à toute immersion fermée, $i : Y \rightarrow X$, Rost associe un espace de déformation (qui est une variante de l'espace de déformation de Fulton dans [2], chap. 5) noté $D_Y X$. C'est un espace muni d'un morphisme plat $D_Y X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ dont la fibre au-dessus de 1 est X et la fibre au-dessus de 0 est $C_Y X$. Par ailleurs $D_Y X \times_{\mathbb{A}_k^1} \mathbb{A}_k^1 - \{0\} \simeq \mathbb{G}_m \times X$. Dans la suite, on écrira donc par abus $D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X$, considérant $C_Y X$ comme un fermé et $\mathbb{G}_m \times X$ comme l'ouvert complémentaire.

Définition 2.1. Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion fermée. On appelle morphisme de spécialisation au cône normal, noté $J(X, Y)$, le morphisme composé

$$X \bullet \xrightarrow{\pi^*} X \times \mathbb{G}_m \bullet \xrightarrow{\{t\}} X \times \mathbb{G}_m \bullet \xrightarrow{\partial} C_Y X$$

où $\pi : X \times \mathbb{G}_m \rightarrow X$ est la projection, t est la fonction coordonnée canonique sur \mathbb{G}_m , et ∂ est le morphisme bord pour la réunion $D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X$. C'est un morphisme de degré 0.

On notera souvent, comme dans [2], $\sigma_Y X$ ce morphisme de spécialisation.

La proposition suivante est le lemme 11.3 de [7] :

Proposition 2.2. *Considérons un carré cartésien $Y' \xrightarrow{j} X'$ tel que i est une immersion fermée et f un morphisme plat.*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

immersion fermée et f un morphisme plat.

On note $Cf : C_{Y'} X' \rightarrow C_Y X$ le morphisme de cônes attaché à ce carré.

Alors Cf est plat et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & C_Y X \\ f^* \downarrow & & \downarrow (Cf)^* \\ X' & \xrightarrow{\sigma_{Y'} X'} & C_{Y'} X' \end{array}$$

Par contre, la fonctorialité par rapport au morphisme image directe n'est pas énoncée ; on le fait maintenant :

Proposition 2.3. *Considérons un carré cartésien $Y' \xrightarrow{j} X'$ tel que i est une immersion fermée et f est propre.*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

immersion fermée et f est propre.

On note $Cf : C_{Y'} X' \rightarrow C_Y X$ le morphisme de cône attaché à ce carré.

Alors Cf est propre et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sigma_{Y'} X'} & C_{Y'} X' \\ f_* \downarrow & & \downarrow (Cf)_* \\ X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & C_Y X. \end{array}$$

Preuve. Rappelons la fonctorialité du cône normal :

$$\begin{array}{ccccc} C_{Y'} X' & \xrightarrow{h} & g^*(C_Y X) & \xrightarrow{g'} & C_Y X \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y & \xrightarrow{g} & X. \end{array}$$

Puisque $Y' = Y \times_X X'$, h est une immersion fermée et g , donc g' sont propres. En particulier, $Cf = g' \circ h$ est propre.

On doit montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{\pi'^*} & \mathbb{G}_m \times X' & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X' & \xrightarrow{\partial'} & C_{Y'} X' \\ \downarrow f_* & & & & & & \searrow h_* \\ X & \xrightarrow{\pi^*} & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\partial} & C_Y X \\ & & & & & & \swarrow g'_* \\ & & & & & & g^*(C_Y X), \end{array}$$

dans lequel on a noté ∂ (resp. ∂') le morphisme bord pour $D_Y X = C_Y X \sqcup \mathbb{G}_m \times X$ (resp. $D_{Y'} X = C_{Y'} X \sqcup \mathbb{G}_m \times X'$).

Or, on a aussi une functorialité de l'espace de déformation :

$$\begin{array}{ccccc}
 D_{Y'}X' & \xrightarrow{\tilde{h}} & D_Y X \times_X X' & \xrightarrow{\tilde{f}} & D_Y X \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbb{A}_{X'}^1 & \xrightarrow{1 \times f} & \mathbb{A}_X^1
 \end{array}$$

où le morphisme \tilde{h} est une immersion fermée, et le morphisme \tilde{f} est propre. Cette functorialité est compatible avec la functorialité du cône normal, ce que l'on résume par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G}_m \times X' & \xlongequal{\quad} & \mathbb{G}_m \times X' & \xrightarrow{1 \times f} & \mathbb{G}_m \times X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D_{Y'}X' & \xrightarrow{\tilde{h}} & D_Y X \times_X X' & \xrightarrow{\tilde{f}} & D_Y X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 C_{Y'}X' & \xrightarrow{h} & g^*(C_Y X) & \xrightarrow{g'} & C_Y X,
 \end{array}$$

formé de carrés cartésiens.

On peut donc appliquer la proposition 4.4 de [7] au morphisme propre $\tilde{f} \circ \tilde{h}$; on en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{G}_m \times X' \bullet & \xrightarrow{\partial'} & C_{Y'}X' \\
 (1 \times f)_* \downarrow \bullet & & \downarrow (g' \circ h)_* \bullet \\
 \mathbb{G}_m \times X \bullet & \xrightarrow{\partial} & C_Y X.
 \end{array}$$

Il suffit maintenant pour conclure d'appliquer la functorialité du pushout et la formule de projection (prop. 1.8). □

3. Morphismes de Gysin

3.1. Immersion fermée régulière

Dans cette sous-section, on suit le traitement de [2] de la théorie de l'intersection, en rappelant la définition du morphisme de Gysin qui intervient implicitement dans l'article [7]. On s'appuie encore ici pour une large part sur les résultats de *loc.cit.* Rappelons ainsi le corollaire de la proposition 8.6 de *loc.cit.* :

Proposition 3.1 (Rost). *Soient E/X un fibré vectoriel sur X , et $p : E \rightarrow X$ la projection canonique.*

Alors, le morphisme $p^ : X \bullet \rightarrow E$ est un isomorphisme.*

Remarque 3.2. C'est l'unique endroit où nous utiliserons le fait que les morphismes de complexes sont vus à homotopie près. En effet, Rost montre plus précisément que p^* est une équivalence d'homotopie et construit à l'aide de choix canoniques appelés «coordinations» un inverse homotopique explicite (cf [7], §9). Si l'on tient à travailler avec des morphismes de complexes et non des classes d'équivalences pour la relation d'homotopie, on peut toujours remplacer le symbole conventionnel $(p^*)^{-1}$ qui apparaît ici par un tel inverse.

Compte tenu de la convention qu'on a adopté, ce corollaire nous suffit pour définir le morphisme suivant :

Définition 3.3. Si $i : Y \rightarrow X$ est une immersion régulière, on définit le morphisme de Gysin de i , noté i^* , de degré 0, comme la composée :

$$X \bullet \xrightarrow{\sigma_Y X} N_Y X \bullet \xrightarrow{(p^*)^{-1}} Y$$

où $p : N_Y X \rightarrow Y$ est le morphisme de projection canonique.

Remarque 3.4. Intuitivement, ce morphisme de Gysin correspond à l'intersection avec le cycle de X induit par le sous-schéma fermé Y d'un cycle quelconque de X (voir aussi [2], 8.1.1 pour une affirmation plus précise).

Proposition 3.5. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse, et $i : Y \rightarrow X$ une section de f . Alors, i est une immersion régulière, et on a

$$i^* \circ f^* = 1.$$

Preuve. Le fait que i est régulière est classique. Par ailleurs, le morphisme induit par f sur les espaces de déformation au cône normal

$$D_Y X \xrightarrow{Df} D_Y Y$$

est alors plat, puisque f est lisse.

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m \times X & \longrightarrow & D_Y X & \longleftarrow & N_Y X \\ \downarrow 1 \times f & & \downarrow Df & & \downarrow Nf \\ \mathbb{G}_m \times Y & \longrightarrow & D_Y Y & \longleftarrow & N_Y Y \end{array}$$

et on peut lui appliquer la proposition 4.4 de [7]. Donc, dans le diagramme suivant, le carré (1) est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \sigma_Y Y & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ Y & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \times Y & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times Y & \xrightarrow{\partial} & N_Y Y \\ \downarrow f^* & & \downarrow 1 \times f^* & & \downarrow 1 \times f^* & & \downarrow (Nf)^* \\ X & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\{t\}} & \mathbb{G}_m \times X & \xrightarrow{\partial} & N_Y X \\ & & & \sigma_Y X & & & \end{array}$$

Par ailleurs, les deux premiers carrés sont commutatifs (cf *loc.cit.* (4.1) pour le premier, et (4.3) pour le deuxième).

Dès lors, considérant $p : N_Y X \rightarrow Y$ et $q : N_Y Y \rightarrow Y$ les projection canoniques, on peut encore transformer le diagramme précédent en le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\sigma_Y Y} & N_Y Y & & \\
 \downarrow f^* & & \downarrow (Nf)^* & \xrightarrow{(q^*)^{-1}} & Y \\
 X & \xrightarrow{\sigma_Y X} & N_Y X & \xrightarrow{(p^*)^{-1}} & Y
 \end{array}
 \quad (2)$$

où le triangle (2) est commutatif puisque le pullback par un morphisme plat est naturel .

Finalement, on s'est réduit au cas trivial du morphisme identité de Y . Or, l'axiome R3d des pré-modules de cycles permet de montrer facilement que le morphisme de Gysin $(1_Y)^*$ est l'identité sur les complexes de cycles, ce qui conclut. \square

Corollaire 3.6. Soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré vectoriel.

Alors, si $s : X \rightarrow E$ est une section quelconque de ce fibré, $s^* = (p^*)^{-1}$.

Remarque 3.7. Ceci nous permet d'interpréter l'opération de pullback définie à travers la déformation au cône normal. La recette est la suivante : pour intersecter un cycle de X avec un sous-schéma fermé Z immergé régulièrement dans X , on déforme d'abord l'immersion fermée de Z en la section nulle du fibré normal de Z dans X , et pour cette dernière section l'opération d'intersection est triviale puisqu'il s'agit de la réciproque du pullback par la projection canonique.

On introduit maintenant une série de propositions qui se trouveront généralisées par la suite, mais qui nous servent de lemmes pour parvenir aux constructions finales. Le lecteur constatera que les preuves s'appuient encore ici sur [7] :

Lemme 3.8. Soit un carré cartésien
$$\begin{array}{ccc}
 Y' \hookrightarrow X' & \xrightarrow{j} & X' \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 Y \hookrightarrow X & \xrightarrow{i} & X
 \end{array}$$
 tel que i est une immersion fermée

régulière, et f un morphisme plat.

Alors, j est une immersion fermée régulière et $j^* f^* = g^* i^*$.

Preuve. Pour la première affirmation, on se réfère à [3], 19.1.5(ii).

On conclut dès lors par application de la proposition 2.2 (et par naturalité du pullback plat pour les morphismes de projection des fibrés normaux de i et j). \square

Les lemmes suivants sont des cas particuliers de la functorialité générale de 3.22. Ce premier lemme est celui de [2], prop. 6.5(a) (dans le cas particulier des immersions régulières) :

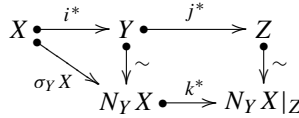
Lemme 3.9. Soient $Z \xrightarrow{i} Y$ une immersion fermée régulière de codimension d , et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme plat de dimension relative n .

Si le morphisme composé pi est plat de dimension relative $n - d$, alors $(pi)^* = i^* p^*$.

Preuve. En effet, les hypothèses impliquent que l'on se trouve dans le cas du lemme 11.4 de [7]. On en déduit donc $\sigma_Z Y \circ p^* = q^*(pi)^*$ où $q : N_Z Y \rightarrow Z$ est la projection canonique. Ceci conclut. \square

Lemme 3.10. Soient $Z \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{i} X$ des immersions fermées régulières. Alors, ij est une immersion fermée régulière, et $(ij)^* = j^*i^*$.

Preuve. D’après le lemme 3.8, on peut tout d’abord déformer l’immersion j en l’immersion $k : N_Y X|_Z \rightarrow N_Y X$



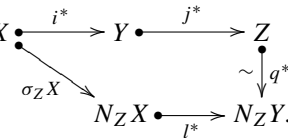
où les morphismes verticaux sont induits par les projections canoniques de fibrés.

Or, M. Rost a déjà fait le pas essentiel pour nous dans la démonstration du théorème 13.1 de [7] puisqu’il a prouvé

$$J(N_Y X, N_Y X|_Z) \circ J(X, Y) = J(N_Z X, N_Z Y) \circ J(X, Z),$$

grâce à l’existence de l’espace de déformation double (cf §10), et par application des lemmes 11.6 et 11.7 de *loc.cit.*

Précisons que l’on a identifié $N(N_Y X, N_Y X|_Z)$ et $N(N_Z X, N_Z Y)$ par l’isomorphisme canonique. Dès lors, si l’on note $l : N_Z Y \rightarrow N_Z X$ l’immersion fermée induite par i , $q : N_Z Y \rightarrow Z$ la projection canonique, le diagramme suivant est commutatif :



On s’est donc réduit au lemme 3.9. En effet, si l’on note encore $p : N_Z X \rightarrow Z$ la projection canonique, on peut appliquer ce lemme à p et l . On en déduit $q^* = l^*p^*$, c’est-à-dire $p^* = (q^*)^{-1}l^*$, ce qui conclut. □

Il nous reste un dernier cas pour compléter cette série de lemmes préliminaires. Il se trouve à nouveau dans [2], prop. 6.5(b), comme proposition préliminaire :

Lemme 3.11. Soient $i : Z \rightarrow Y$ une immersion fermée régulière, et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse.

Si pi est une immersion fermée régulière, alors $(pi)^* = i^*p^*$.

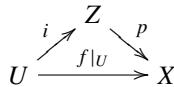
Preuve. A nouveau, il nous suffit d’appliquer le lemme 11.5 de [7] (et la naturalité du morphisme pullback par un morphisme plat). □

3.2. Morphismes localement d’intersection complète

On rappelle la définition VIII.1.1 de [6] :

Définition 3.12. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme.

On dit que f est localement d’intersection complète si et seulement si pour tout point y de Y , il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $f|_U$ admette une factorisation



et p est un morphisme lisse.

On introduit ci-dessous une notion très faible qui nous permet de globaliser cette propriété locale des morphismes localement d'intersection complète pour la rapprocher de la définition de [2], B.7.6.

Définition 3.13. Soit X un S -schéma. On dira que X est lissifiable sur S (ou simplement «lissifiable») si et seulement si il existe un S -schéma \bar{X} lisse et une S -immersion fermée $X \rightarrow \bar{X}$.

Remarque 3.14. La condition précédente impose que X est localement de type fini. Si on le souhaite toutefois, on pourra considérer que X est lissifiable sur S si et seulement si on peut le plonger dans un schéma essentiellement lisse sur S , ce qui permet de travailler dans le cadre général fixé dans l'introduction.

Dès lors, on obtient la proposition suivante

Proposition 3.15. Soit $f : Y \rightarrow X$ un S -morphisme, où Y est lissifiable sur S .

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est localement d'intersection complète.
2. Il existe une factorisation de f

$$\begin{array}{ccc}
 & i \nearrow & P & \searrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & & X
 \end{array}$$

où i est une immersion fermée régulière, et p un morphisme lisse.

Preuve. Le sens 2 \Rightarrow 1 est tautologique. Pour l'autre implication, on considère \bar{Y} un S -schéma lisse muni d'une immersion fermée $\iota : Y \rightarrow \bar{Y}$. On en déduit alors la factorisation suivante de f

$$\begin{array}{ccc}
 & i \nearrow & X \times_S \bar{Y} & \searrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & & X
 \end{array}$$

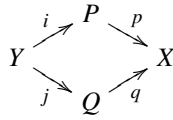
où l'on a posé $i = f \times_S \iota$, et où p est le morphisme de projection. Par définition, p est lisse. De plus, i est une immersion fermée car le morphisme de projection canonique $q : X \times_S \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$ est séparé.

Il nous suffit dès lors de nous référer à la proposition 1.2 de [6], VIII, pour conclure que i est régulière du fait que f est localement d'intersection complète. \square

Remarque 3.16. La caractérisation précédente est la définition que prend W.Fulton des morphismes localement d'intersection complète (cf [2], B.7.6). Mais par ailleurs, on aura besoin plus loin d'un résultat un peu plus fin qui nécessitera à nouveau l'hypothèse «lissifiable», c'est pourquoi nous avons choisi de la dégager explicitement.

A tout morphisme d'intersection complète, nous allons associer un morphisme de Gysin qui généralise le cas d'une immersion fermée régulière. Pour cela, il nous suffit du lemme suivant :

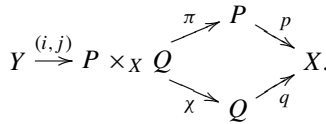
Lemme 3.17. *Considérons un diagramme commutatif*



dans lequel i, j sont des immersions fermées régulières, et p, q des morphismes lisses.

Alors, $i^* p^* = j^* q^*$.

Preuve. On fait la construction suivante :



Alors, puisque π, χ, p et q sont lisses, on a $\pi^* p^* = \chi^* q^*$.

Il ne reste plus maintenant qu'à appliquer le lemme 3.11 à l'immersion régulière (i, j) et au morphisme lisse π (resp. χ), puisque $\pi \circ (i, j) = i$ (resp. $\chi \circ (i, j) = j$) est une immersion régulière. □

La définition suivante est donc indépendante du choix d'une factorisation :

Définition 3.18. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme localement d'intersection complète tel que Y est lissifiable.*

On définit un morphisme de Gysin pour f , noté f^ , en considérant une factorisation arbitraire $f = pi$ où i est une immersion fermée régulière et p un morphisme lisse (grâce à 3.15), et en posant $f^* = i^* p^*$.*

On fait les calculs suivants, qui montrent que notre notation n'introduit pas d'ambiguïté :

Proposition 3.19. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme, tel que Y est lissifiable.*

1. *Si f est une immersion fermée régulière, alors f est localement d'intersection complète, et les morphismes respectifs associés à f en tant qu'immersion et morphisme localement d'intersection complète coïncident.*
2. *Si f est plat et localement d'intersection complète (autrement dit plat et d'intersection complète au sens de [3], 19.3.6), le morphisme de Gysin associé à f coïncide avec le pullback par le morphisme plat (cf [7], 3.5).*
3. *Si X et Y sont lisses sur S , alors f est localement d'intersection complète et f^* coïncide avec le morphisme f^\bullet de [7], §12.*

Remarque 3.20. Pour nous, l'intérêt des morphismes localement d'intersection complète est qu'ils permettent d'unifier ces trois types de morphismes.

Preuve. 1. Tautologique.

2. C'est le lemme 3.9.

3. On peut alors factoriser f en l'immersion fermée régulière correspondant à son graphe (car Y est lisse sur S), suivie de la projection de $X \times_S Y$ sur Y , qui est lisse puisque X est lisse sur S). Cela montre que f est localement d'intersection complète ; de plus, c'est justement cette factorisation qui permet à M. Rost de définir le morphisme f^\bullet , en utilisant le morphisme de Gysin de l'immersion fermée régulière que l'on a définie, et le pullback par le morphisme de projection, qui est plat. Il en résulte tautologiquement que le pullback défini par M. Rost coïncide avec notre définition dans ce cas.

□

Remarque 3.21. Pour définir le morphisme f^\bullet , M. Rost n'a besoin de supposer que X soit lisse sur S et Y soit plat sur S , en imposant la factorisation du morphisme f .

On arrive finalement à la formule d'associativité générale.

Proposition 3.22. Soient $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ deux morphismes localement d'intersection complète tels que Z et Y soient lissifiables.

Alors, fg est localement d'intersection complète, et $(fg)^* = g^* f^*$.

Remarque 3.23. D'après [6], VIII.1.5., fg est localement d'intersection complète sans hypothèse sur Z et Y .

Preuve. Tout d'abord, d'après la proposition 3.15, il existe une factorisation de f en une immersion régulière $i : Y \rightarrow P$ suivie d'un morphisme lisse p .

Considérons maintenant M un S -schéma lisse et $\iota : Z \rightarrow M$ une immersion fermée (au-dessus de S). Revenons à la preuve de la proposition citée précédemment, et posons $Q = Y \times_S M$. Alors, $j = (g, \iota) : Z \rightarrow Q$ est une immersion fermée régulière (toujours d'après [6], VII.2.1). On note $q : Q \rightarrow Y$ la projection canonique sur Y .

Dès lors, si l'on pose $R = P \times_S M$, et si l'on note $l : R \rightarrow P$ la projection canonique, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{j} & Q & \xrightarrow{k} & R \\
 & \searrow g & \downarrow q & \text{(1)} & \downarrow l \\
 & & Y & \xrightarrow{i} & P \\
 & & & \searrow f & \downarrow p \\
 & & & & X,
 \end{array}$$

dans lequel le carré (1) est cartésien.

Puisque (kj, pl) forme une factorisation du morphisme fg , celui-ci est bien localement d'intersection complète. Il nous suffit enfin d'appliquer le lemme 3.8 au carré cartésien (1) et le lemme 3.10 au composé kj pour conclure l'égalité attendue.

□

4. Morphismes de Gysin raffinés

4.1. Définition

On continue à suivre [2], et on définit donc un morphisme de Gysin raffiné :

Définition 4.1. *Considérons un carré cartésien*
$$\begin{array}{ccc}
 Y' \hookrightarrow^j X' & & \\
 g \downarrow \Delta \downarrow f & & \\
 Y \hookrightarrow_i X & &
 \end{array}$$
 où i *est une immersion*

fermée régulière.

On peut alors définir le morphisme de Gysin du carré Δ , noté Δ^ , comme la composée des morphismes*

$$X' \xrightarrow{\sigma'} C_{Y'} X' \xrightarrow{h_*} g^* N_Y X \xrightarrow{(p^*)^{-1}} Y'$$

où σ' est le morphisme de spécialisation associé à l'immersion fermée j , $h : C_{Y'} X' \rightarrow g^ N_Y X$ est l'immersion fermée induite par Δ et $p : g^* N_Y X \rightarrow Y'$ est la projection canonique du fibré considéré.*

Remarque 4.2. Dans [2], 2, on considère plutôt ce morphisme comme le morphisme de Gysin de i (sous-entendu raffiné par j), et on le note $i^!$. Notre notation est plus lourde mais a l'avantage d'être plus précise.

Lemme 4.3. *Considérons un carré cartésien*
$$\begin{array}{ccc}
 Y' \hookrightarrow^j X' & & \\
 g \downarrow \Delta \downarrow f & & \\
 Y \hookrightarrow_i X & &
 \end{array}$$

On suppose que i et j sont toutes deux des immersions fermées régulières partout de même codimension. Alors, $\Delta^ = j^*$.*

Preuve. On considère $h : N_{Y'} X' \rightarrow g^* N_Y X$ le morphisme canonique induit par le carré cartésien de l'énoncé. Soit \mathcal{I} (resp. \mathcal{J}) l'idéal de i (resp. j). Alors, h est le spectre du morphisme d'algèbres symétriques engendré par l'épimorphisme canonique $g^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. Par ailleurs, puisque ces deux fibrés sont localement libres de même rang en tous points, cet épimorphisme est un isomorphisme. Le morphisme h est donc un isomorphisme, ce qui entraîne la relation $h_* = (h^*)^{-1}$.

Dès lors, par functorialité du morphisme pullback par rapport aux morphismes plats, le triangle du diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X' \xrightarrow{\sigma} N_{Y'} X' & \xrightarrow{(h^*)^{-1}} & g^*(N_Y X) \\
 & \searrow^{(p^*)^{-1}} & \swarrow_{(q^*)^{-1}} \\
 & & Y'
 \end{array}$$

dans lequel les flèches p et q désignent les projections canoniques. Ceci conclut en revenant à la définition. □

Corollaire 4.4. *Considérons un carré cartésien*
$$\begin{array}{ccc}
 Y' \hookrightarrow^j X' & & \\
 g \downarrow \Delta \downarrow f & & \\
 Y \hookrightarrow_i X & &
 \end{array}$$
 tel que i *est une immersion fermée régulière, et* f *un morphisme plat.*

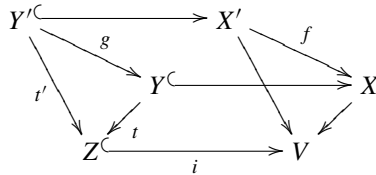
Alors, j est une immersion régulière et $\Delta^ = j^*$.*

Preuve. En effet, il suffit d'appliquer [2], B.7.4, qui affirme que dans notre cas non seulement j est une immersion régulière mais aussi le morphisme canonique $N_{Y'} X' \rightarrow g^*(N_X Y)$ est un isomorphisme ce qui conclut par application du lemme ci-dessus. \square

4.2. Formule de projection

Pour nous, la raison d'être du morphisme de Gysin raffiné d'un carré cartésien est le fait qu'il permet de donner une formule de projection générale, bien que l'une des immersions fermées du carré ne soit pas nécessairement régulière :

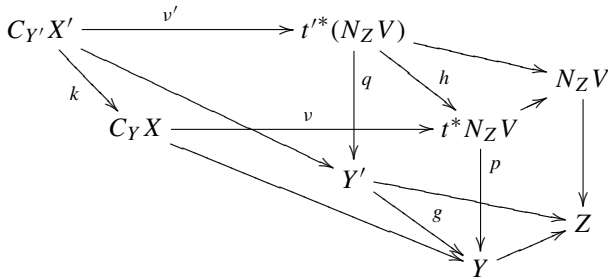
Proposition 4.5. *Considérons un diagramme*



où chaque carré est cartésien, i est une immersion fermée régulière et f un morphisme propre. On appelle Δ (resp. Θ) le carré de devant (resp. de derrière) ayant pour arête i .

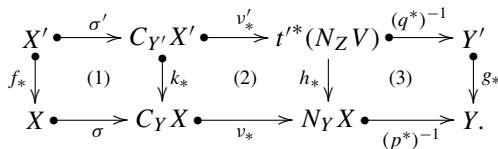
Alors, $\Delta^* \circ f_* = g_* \circ \Theta^*$.

Preuve. On commence par introduire les morphismes canoniques qui correspondent à la functorialité du cône normal définis par le diagramme suivant



où p, p' sont les projections canoniques, et v, v' des immersions fermées.

Dès lors, la proposition est équivalente à la commutativité du diagramme ci-dessous :



Or, le carré (1) est commutatif d'après la proposition 2.3 (σ et σ' sont les morphismes de spécialisation au cône normal respectifs), le carré (2) d'après la

fonctorialité du pushout par un morphisme propre, et le carré (3), par application de la formule de projection dans le cas d'un morphisme plat (cf [7], 4.1(3)). \square

On note le corollaire immédiat suivant dont la formulation est plus simple que la proposition précédente :

Corollaire 4.6. *Soit un carré cartésien $Y' \xrightarrow{j} X'$ un carré cartésien tel que i est*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ g \downarrow & \Delta & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

une immersion fermée régulière, et f un morphisme propre.

Alors, $i^ f_* = g_* \Delta^*$.*

Remarque 4.7. Nous n’aurons pas besoin d’autres propriétés que cette formule de projection vis-à-vis du morphisme de Gysin raffiné. On note toutefois que l’on doit pouvoir encore continuer le travail de transposition de [2] aux modules de cycles, et montrer ainsi que le morphisme de Gysin raffiné d’une immersion fermée est fonctoriel (6.5 de *loc.cit.*), commutatif (6.4 de *loc.cit.*) et vérifie une formule du type «excess intersection formula» (6.3 de *loc.cit.*). Ceci permettrait de définir le morphisme de Gysin raffiné d’un morphisme localement d’intersection complète, et achèverait la transposition du chapitre 6 de *loc.cit.* au cas des modules de cycles.

5. Produit d’intersection

Dans cette sous-section, on suppose que S est algébrique lisse.

Par ailleurs, tous les schémas sont supposés être algébriques.

Autrement dit, le mot «schéma» désigne toujours un S -schéma, mais qui est supposé de plus être de type fini. Un tel schéma porte une unique structure de k -schéma, à laquelle on se référera sans plus de précisions.

5.1. Définition ; produit croisé

On revient dans ce qui suit à la méthode suivie par M. Rost pour définir le produit d’intersection, et plus précisément au paragraphe 14 de [7].

On introduit tout d’abord une terminologie qui nous est propre :

Définition 5.1. *Soit N un module de cycles sur S . On dit que N est absolu si et seulement si il existe un module de cycles \bar{N} sur k tel que N est la restriction de \bar{N} à S .*

Exemple 5.2. La K -théorie de Milnor est l’exemple le plus important de module de cycles absolu.

On rappelle que M. Rost a introduit la notion de «pairing» de deux modules de cycles dans [7], def. 1.2. On introduit la définition complémentaire suivante :

Définition 5.3. *Soit N et M des modules de cycles sur S .*

On dit qu’on s’est donné un accouplement de modules de cycles sur S

$$\mu : N \times M \rightarrow M,$$

si μ est un «pairing» au sens de M. Rost et que, de plus, N est absolu.
 Lorsqu'on s'est donné un accouplement sur S

$$\pi : N \times N \rightarrow N,$$

on dira encore que N est muni d'une structure d'anneau sur S .

Remarque 5.4. Ainsi, un module de cycles muni d'une structure d'anneau est, d'après notre définition, toujours absolu. Par contre, on ne requiert pas que l'accouplement soit donné sur k .

Exemple 5.5. Si M est un module de cycles quelconque sur k , il est par définition (donnée D3) muni d'un accouplement canonique sur k

$$K_*^M \times M \rightarrow M.$$

Le cas où M est lui-même le module de cycles formé par la K-théorie de Milnor sera étudié dans le prochain paragraphe.

5.6. Soit $\mu : N \times M \rightarrow M$ un accouplement. M. Rost a défini un produit croisé (cf [7], par. 14.1), pour tous schémas Y et Z ,

$$\times_\mu : C_p(Y; N)_r \otimes_{\mathbb{Z}} C_q(Z; M)_s \rightarrow C_{p+q}(Y \times_k Z; M)_{r+s},$$

où $Y \times_k Z$ est vu comme un S -schéma à travers la projection de Z sur S . D'après *loc.cit.*, 14.4, ce produit sur les complexes induit un produit sur les groupes de cohomologie.

Suivant M. Rost, on en déduit le produit d'intersection suivant :

Définition 5.7. Soit $N \times M \xrightarrow{\mu} M$ un accouplement de modules de cycles sur S , et X un schéma lisse sur S .

On définit alors un produit

$$\begin{aligned} A^p(X; N, n) \otimes A^q(X; M, m) &\rightarrow A^{p+q}(X; M, n+m) \\ x \otimes y &\mapsto (\delta_X)^*(x \times_\mu y) = x \cdot_\mu y. \end{aligned}$$

On précise que $\delta_X : X \rightarrow X \times_k X$ est l'immersion fermée diagonale de X sur k , vue comme S -morphisme pour la structure de S -schéma sur $X \times_k X$ par la projection du deuxième facteur sur S . Comme X est lisse sur k , δ_X est donc une S -immersion fermée régulière et δ_X^* désigne le morphisme de Gysin associé (cf 3.3).

Remarque 5.8. Pour ne pas alourdir les notations, la référence à l'accouplement μ sera parfois omise suivant la notation de [7].

Ce produit d'intersection dispose alors des formules classiques suivantes :

Proposition 5.9. Fixons $\mu : N \times M \rightarrow M$ un accouplement de modules de cycles sur S .

Soient X et Y des schémas lisses sur S , et $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Alors f est localement d'intersection complète ; on considère f^* le morphisme de Gysin associé à f dans la définition 3.18.

1. (Associativité) On suppose que $S = \text{Spec}(k)$, et que N est de plus muni d'une structure d'anneau sur k . Alors pour tout triplet $(x, y, z) \in A^*(X; N) \times A^*(X; N) \times A^*(X; M)$, on a

$$(x \cdot y) \cdot_{\mu} z = x \cdot_{\mu} (y \cdot_{\mu} z).$$

2. (Fonctorialité) Pour tout couple $(x, y) \in A^*(X; N) \times A^*(X; M)$, on a :

$$(f^*x) \cdot_{\mu} (f^*y) = f^*(x \cdot_{\mu} y).$$

3. (Projection) Si f est propre, pour tout couple $(x, y) \in A^*(X; N) \times A^*(Y; M)$, on a :

$$f_*(x \cdot_{\mu} f^*y) = (f_*x) \cdot_{\mu} y.$$

Remarque 5.10. Dans cette proposition, on démontre les affirmations de [7], (14.6) avec les deux premières égalités, en utilisant notamment les résultats de *loc.cit.* sur les produits croisés. Par contre, la dernière formule n'était pas mentionnée et nous avons introduit les morphismes de Gysin raffinés notamment pour l'obtenir.

Preuve. Le morphisme f est bien localement d'intersection complète puisqu'il admet la factorisation suivante

$$X \xrightarrow{\gamma_f} X \times_k Y \xrightarrow{p_{X \times_k Y}^Y} Y$$

où γ_f est le graphe de f , immersion fermée régulière puisque Y est lisse, et $p_{X \times_k Y}^Y$ la projection canonique qui est lisse puisque X est lisse sur k .

1. Utilisant le carré cartésien de k -schémas lisses

$$\begin{CD} X @>\delta_X>> X \times_k X \\ @V\delta_XVV @VV\delta_X \times_k 1_XV \\ X \times_k X @>1_X \times_k \delta_X>> X \times_k X \times_k X \end{CD}$$

on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot_{\mu} z &= \delta_X^*(\delta_X^*(x \times y) \times_{\mu} z) = \delta_X^*(\delta_X \times_k 1_X)^*((x \times y) \times_{\mu} z) \\ &\stackrel{(1)}{=} \delta_X^*(\delta_X \times_k 1_X)^*(x \times_{\mu} (y \times_{\mu} z)) \\ &\stackrel{(2)}{=} \delta_X^*(1_X \times_k \delta_X)^*(x \times_{\mu} (y \times_{\mu} z)) = x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

où (1) résulte de la formule d'associativité du produit croisé (par. 14.2 de [7]), et (2) résulte du lemme 3.10.

Dans la suite de cette démonstration, dès qu'on considère un produit sur k de deux S -schémas, on le munit de sa structure de S -schéma grâce à la projection du deuxième facteur sur S .

2. On considère le carré cartésien de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\delta_Y} & Y \times_k Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \times_k f \\ X & \xrightarrow{\delta_X} & X \times_k X. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f^*(x.y) &= f^* \delta_X^*(x \times_\mu y) \stackrel{(1)}{=} \delta_Y^*(f \times_k f)^*(x \times_\mu y) \\ &\stackrel{(2)}{=} \delta_Y^*(f^*x \times_\mu f^*y) = (f^*x).(f^*y) \end{aligned}$$

où (1) résulte de 3.22 et (2) résulte de la propriété 14.5 de *loc.cit.*.

3. Considérons le carré cartésien de \mathcal{L}_S

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma_f} & X \times_k Y \\ f \downarrow & \Delta & \downarrow f \times_k 1_Y \\ Y & \xrightarrow{\delta_Y} & Y \times_k Y. \end{array}$$

On peut alors faire le calcul

$$(f_*x).y = \delta_X^*(f \times_k 1_Y)_*(x \times_\mu y) \stackrel{(1)}{=} f_* \Delta^*(x \times_\mu y) \stackrel{(2)}{=} f_* \gamma_f^*(x \times_\mu y)$$

où l'égalité (1) résulte de 4.6 appliqué au carré cartésien précédent, et l'égalité (2) du lemme 4.3, car, puisque Y/k est lisse, $N_X(X \times_k Y) \simeq f^*(TY)$, où TY désigne le fibré tangent de Y/k .

Mais par ailleurs, pour le deuxième membre de l'équation, on a

$$f_*(x.f^*y) = f_* \delta_X^*(1_X \times_k f)^*(x \times_\mu y) \stackrel{(3)}{=} f_* \gamma_f^*(x \times_\mu y)$$

où l'égalité (3) résulte de ce que $\gamma_f = (1_X \times_k f) \circ \delta_X$, et de la proposition 3.22.

□

5.2. K -théorie de Milnor et groupe de Chow

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où $M = K_*^M$ est la K -théorie de Milnor, que l'on considère muni de sa structure d'anneau canonique au sens de la définition 5.3.

D'après la remarque (5.1) de [7], $A^n(X; K_*^M)_0 = CH^n(X)$. Pour plus de clareté, si x est la classe d'un cycle dans $CH^n(X)$, on le note $\{x\}$ lorsqu'on le considère comme élément de $A^n(X; K_*^M)_0$.

Pour clôturer ce paragraphe sur l'intersection, on va commencer par démontrer que le morphisme de spécialisation construit par M. Rost coïncide avec celui de W.Fulton, suivant une indication de M. Rost au début du paragraphe 11 de [7] :

Lemme 5.11. *Soit X un schéma, et Z un sous-schéma fermé de X . Alors, pour le module de cycles K_*^M , $J(X, Z) = \sigma_Z X$, où $J(X, Z)$ désigne la construction de M. Rost (cf définition 2.1), et $\sigma_Z X$ est le morphisme de spécialisation de W.Fulton (cf [2], 5.2).*

Preuve. Commençons par rappeler que le sous-schéma fermé $C_Z X$ de $D_Z X$ est un diviseur de Cartier, paramétré par le paramètre t de la déformation, $t : D_Z X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Dès lors, d'après [2], chap. 2, def. 2.3, si l'on note $i : C_Z X \rightarrow D_Z X$, on peut définir de manière élémentaire le morphisme de Gysin $i^* : CH^*(D_Z X) \rightarrow CH^*(C_Z X)$.

Par ailleurs, si l'on regarde la fin de la suite exacte de localisation pour le groupe de Chow, on en déduit le diagramme commutatif suivant identique à celui de la démonstration de *loc.cit.*, prop. 5.2 où l'on a remplacé l'espace de déformation $M_Z^\circ X$ (fibré sur \mathbb{P}_k^1) par $D_Z X$ (qui en est un ouvert) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & CH^n(X) & & \\
 & & & & \downarrow \pi^* & & \\
 CH^{n-1}(C_Z X) & \xrightarrow{i_*} & CH^n(D_Z X) & \xrightarrow{j^*} & CH^n(\mathbb{G}_m \times X) & \rightarrow & 0 \\
 & & \searrow i^* & & \downarrow \iota & & \swarrow \sigma_{ZX} \\
 & & & & CH^n(C_Z X) & &
 \end{array}$$

où $j : \mathbb{G}_m \times X \rightarrow D_Z X$ désigne l'immersion ouverte canonique ; le morphisme ι existe car $i^*i_* = 0$ d'après *loc.cit.* prop. 2.6(c). Le fait que $\sigma_{ZX} = \iota\pi^*$ est le contenu de la démonstration de la prop. 5.2.

Revenant à la définition 2.1, et puisque le pullback par un morphisme plat coïncide sur les deux groupes de Chow, il s'agit donc de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A^n(\mathbb{G}_m \times X; K_*^M)_0 & \xleftarrow{j^*} & A^n(D_Z X; K_*^M)_0 \\
 \{t\} \cdot \downarrow & \searrow \iota & \downarrow i^* \\
 A^n(\mathbb{G}_m \times X; K_*^M)_1 & \xrightarrow{\partial} & A^n(C_Z X; K_*^M)_0
 \end{array}$$

où ∂ est le morphisme bord pour la décomposition $D_Z X = \mathbb{G}_m \times X \sqcup C_Z X$. On considère donc un élément α de $A^n(D_Z X; K_*^M)_0$. Par linéarité, on peut se restreindre au cas où α est la classe d'un point sous-schéma fermé intègre de $D_Z X$, que l'on confond avec son point générique x .

Si x appartient à $C_Z X$, on a déjà vu que $i^*x = 0$, et la commutativité en découle puisque $j^*x = 0$.

Sinon, par définition

$$\partial \circ \{t\} \cdot j^*(x) = \sum_{y \in (W \cap C_Z X)^{(1)}} \partial_y^x(t(x)) \cdot y$$

où W désigne l'adhérence réduite de x dans $D_Z X$.

Or, par ailleurs, par définition (cf *loc. cit.* def. 2.3), puisque t paramètre le diviseur de Cartier $C_Z X$, on a d'un autre côté

$$i^*(x) = \sum_{y \in (W \cap C_Z X)^{(1)}} \text{ord}_y(t) \cdot y$$

où ord_y désigne la fonction ordre défini en *loc. cit.*, §1.2.

Il suffit donc de démontrer que pour tout point y , les entiers $\partial_y^x(t(x))$ et $\text{ord}_y(t)$ sont égaux. Mais pour celà, il suffit de revenir à la définition de ∂_y^x (cf [7], §2) et d'appliquer l'exemple 1.2.3 de [2], en remarquant que l'assertion est triviale si $W \cap C_Z X$ est normal. \square

Dès lors, la proposition suivante est presque immédiate :

Proposition 5.12. *Soit X un schéma algébrique lisse. Pour tout x (resp. y) dans $CH^n(X)$ (resp. $CH^m(X)$), on a l'égalité*

$$\{x\} \cdot \{y\} = \{x \cdot y\}$$

où les points désignent respectivement le produit dans $A^*(X; K_*^M)$ défini en 5.7 et le produit dans $CH^*(X)$ défini dans [2], chap. 8.

Preuve. On rappelle la définition 8.1.1 de [2] : si x et y sont des classes de cycles dans $CH^*(X)$, alors $x \cdot y = \delta^*(x \times y)$ (on considère ici le cas où $f = 1_X$), avec $\delta : X \rightarrow X \times_k X$ le morphisme diagonal de X , et δ^* est le morphisme de Gysin associé à l'immersion régulière δ , et $x \times y$ est le produit extérieur de x et y défini en 10.1.

Or, par définition, $\delta^* = (p^*)^{-1} \circ \sigma_X(X \times_k X)$, où $p : TX \rightarrow X$ est la projection canonique du fibré tangent, et $\sigma_X(X \times_k X)$ est le morphisme de spécialisation au cône normal associé à l'immersion diagonale (définition dans le §5.2).

Dès lors, compte tenu du lemme précédent, il suffit de démontrer que le produit croisé défini par M. Rost coïncide avec le produit extérieur de cycles défini par W.Fulton (cf [2], 1.10). Considérons à cet effet $x \in CH^n(X)$ et $y \in CH^m(Y)$, où X et Y sont des k -schémas. On peut se réduire par bilinéarité au cas où x (resp. y) est la classe de V (resp. W), sous-schéma fermé de X (resp. Y). Dès lors, par définition, $x \times y = [V \times_k W]$ est le cycle associé au sous-schéma fermé $V \times_k W$ de $X \times_k Y$. Or, si l'on considère la projection $\pi : V \times_k X \rightarrow X$, on a par définition : $x \times y = i_* \pi^*(y)$, où $i : V \times_k X \rightarrow X \times_k X$ est l'immersion fermée canonique. Si x désigne encore le point de V , on peut tout aussi bien considérer la projection $\pi_x : \text{Spec}(\kappa(x)) \times_k X \rightarrow X$, et $i_x : \text{Spec}(\kappa(x)) \times_k X \rightarrow X \times_k X$, on a encore (puisque les cycles en question ne dépendent que des points génériques) : $x \times y = (i_x)_*(\pi_x)^*(y)$. Or, on reconnaît là la définition 14.1 de [7], et donc, comme le pullback par un morphisme plat (resp. le pushout par un morphisme propre) coïncident sur le groupe de Chow à coefficients et le groupe de Chow classique, par définition : $\{x \times y\} = \{(i_x)_*(\pi_x)^*(y)\} = (i_x)_*(\pi_x)^*\{y\} = \{x\} \times \{y\}$. \square

Remarque 5.13. On obtient une démonstration plus conceptuelle de cette proposition en appliquant l'exemple 6.1.9 de [2]. En effet, la première propriété que doit vérifier le produit d'intersection («normalisation») résulte de la proposition 3.6, et la deuxième propriété résulte de la compatibilité de la suite spectrale de M. Rost par rapport au produit de composition des modules de cycles.

6. Transferts

Dans cette section, on se place dans le cas $S = \text{Spec}(k)$. Tous les schémas sont supposés être de type fini sur k . On fixe un module de cycles M sur k , et on considère l'accouplement canonique $\mu : K_*^M \times M \rightarrow M$.

On adopte par ailleurs les conventions suivantes destinées à alléger les notations :

Pour tous schémas X et Y , on pose $XY = X \times_k Y$. Si U est un sous-schéma de XY , on note p_U^X et p_U^Y les projections respectives de U sur X et de U sur Y .

On va définir sur le groupe de Chow à coefficients dans M une structure de préfaisceau avec transferts sur k au sens de [1], chap. 5, déf. 3.1.1.

6.1. Rappelons que si X et Y sont des schémas lisses, le groupe des correspondances finies de X vers Y est le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de XY qui sont finis et équidimensionnels sur X (i.e. finis et surjectifs sur une composante connexe de X) suivant la projection canonique. On note ce groupe $c(X, Y)$ suivant [1].

Soit $\alpha \in c(X, Y)$. On note U le support de α dans XY , i l'immersion canonique de U dans XY et p_U^X la projection de U sur X , qui est finie équidimensionnelle.

Soit $\gamma_i : U \rightarrow UXY$ le graphe de i . Alors, puisque XY est lisse sur k , γ_i est une immersion fermée régulière. On peut donc définir :

Définition 6.2. Avec les notations qui précèdent, on note $\{\alpha\}_U$ la classe du cycle α dans $A^0(U; K_*^M)$.

Pour tout $\rho \in A^*(Y; M)$, on pose

$$\alpha^*(\rho) = (p_U^X)_* \gamma_i^* \left(\{\alpha\}_U \times_{\mu} p_{XY}^Y{}^*(\rho) \right).$$

Pour conclure que cette action des correspondances finies sur le préfaisceau $A^*(.; M)$ le munit d'une structure de préfaisceau avec transferts, il s'agit de montrer que cette action est linéaire et compatible au produit de composition par rapport aux correspondances finies.

Le lemme suivant nous permet de montrer la linéarité :

Lemme 6.3. Soit X et Y deux schémas lisses.

Soit $\alpha \in c(X, Y)$ une correspondance finie, et U son support. Soit V un sous-schéma fermé intègre de XY qui est fini équidimensionnel sur X , et qui contient U .

On note par ailleurs $j : V \rightarrow XY$ l'immersion fermée canonique, γ_j son graphe et p_V^X la projection de V sur X . Enfin, on note $\{\alpha\}_V$ la classe du cycle α dans $A^0(V; K_*^M)$. Alors, pour tout $\rho \in A^*(Y; M)$,

$$\alpha^*(\rho) = (p_V^X)_* \gamma_j^* \left(\{\alpha\}_V \times_{\mu} p_{XY}^Y{}^*(\rho) \right).$$

Preuve. On peut supposer que X et Y sont connexes. Notons encore i l'immersion de U dans XY et p_U^X la projection de U sur X .

Par définition, si $\{\alpha\}_U$ désigne la classe du cycle α dans $A^0(U; K_*^M)$, on a l'égalité $\{\alpha\}_V = l_*(\{\alpha\}_U)$, où $l : U \rightarrow V$ désigne l'immersion fermée canonique.

Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\gamma_i} & UXY \\ l \downarrow & \Delta & \downarrow l \times_k 1_{XY} \\ V & \xrightarrow{\gamma_j} & VXY \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (p_V^X)_* \gamma_j^* (\{\alpha\}_V \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\rho)) &= (p_V^X)_* \gamma_j^* (l \times_k 1_{XY})_* (\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\rho)) \\ &\stackrel{(1)}{=} (p_V^X)_* l_* \Delta^* (\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\rho)) \\ &\stackrel{(2)}{=} (p_U^X)_* \gamma_i^* (\{\alpha\}_U \times_\mu p_{XY}^Y{}^*(\rho)) \end{aligned}$$

Pour l'égalité (1), on applique le corollaire 4.6 au carré Δ , et pour l'égalité (2), on applique le lemme 4.3 puisque γ_i et γ_j sont deux immersions fermées régulières de même codimension pure égale à la dimension de Y . \square

Muni de ce lemme, la linéarité devient évidente :

Lemme 6.4. *Soit α et β deux correspondances finies dans $c(X, Y)$, et $\rho \in A^*(Y; M)$.*

$$\text{Alors, } (\alpha + \beta)^*(\rho) = \alpha^*(\rho) + \beta^*(\rho).$$

Preuve. Soit U et V les supports de α et β . On pose $W = U \cup V$. On note i, j, l les immersions respectives de U, V, W dans XY .

Alors, $\alpha + \beta$ a pour support W et on obtient

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^* \rho &= (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\alpha + \beta\}_W \times_\mu \rho) \\ &= (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\alpha\}_W \times_\mu \rho) + (p_W^X)_* \gamma_l^* (\{\beta\}_W \times_\mu \rho) \\ &= \alpha^*(\rho) + \beta^*(\rho), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du lemme précédent. \square

On vérifie enfin que cette action est bien compatible au produit de composition des correspondances finies :

Proposition 6.5. *Soient X, Y et Z des schémas lisses. Alors, pour tout $\alpha \in c(X, Y)$, $\beta \in c(Y, Z)$ et $\rho \in A^*(Z; M)$, on a :*

$$\alpha^* \beta^*(\rho) = (\beta \circ \alpha)^*(\rho)$$

Preuve. Par linéarité, on se ramène tout d'abord au cas où X, Y et Z sont connexes. Soit U le support de α et V le support de β .

On pose $\tilde{U} = U \times_Y V$. C'est un sous-schéma fermé de XYZ , qui est fini surjectif sur X . On note W sa projection sur XZ , qui est donc un sous-schéma fermé de XZ , fini surjectif sur X .

On note $i : U \rightarrow XY, j : V \rightarrow YZ$ et $l : W \rightarrow XZ$, les immersions évidentes.

On note simplement $\{\alpha\}$ la classe de α dans $A^0(U; K_*^M)$ et $\{\beta\}$ la classe de β dans $A^0(V; K_*^M)$. On considère pour notre premier calcul le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{i_1} & UXV \\ p_{\tilde{U}}^U \downarrow & \Delta_1 & \downarrow 1_U \times p_{XV}^{XY} \\ U & \xrightarrow{\gamma_i} & UXY. \end{array}$$

On peut dès lors calculer le premier membre de la relation à prouver :

$$\begin{aligned}
 \alpha^* \beta^*(\rho) &= p_{U*}^X \gamma_i^* \left(\{\alpha\} \times_{\mu} (p_{XY}^Y)^* p_{V*}^Y \gamma_j^* (\{\beta\} \times_{\mu} (p_{YZ}^Z)^*(\rho)) \right) \\
 &= p_{U*}^X \gamma_i^* \left(\{\alpha\} \times_{\mu} p_{XV*}^{XY} (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_{\mu} (p_{YZ}^Z)^*(\rho)) \right) \\
 &= p_{U*}^X \gamma_i^* (1_U \times_k p_{XV}^{XY})_* \left(\{\alpha\} \times_{\mu} (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_{\mu} (p_{YZ}^Z)^*(\rho)) \right) \\
 &\stackrel{(1)}{=} p_{U*}^X p_{\tilde{U}*}^U i_1^* \left(\{\alpha\} \times_{\mu} (p_{XV}^V)^* \gamma_j^* (\{\beta\} \times_{\mu} (p_{YZ}^Z)^*(\rho)) \right) \\
 &\stackrel{(2)}{=} p_{\tilde{U}*}^X (p_1 \times_k p_2 \times_k p_3)^* (\{\alpha\} \times_{\mu} (\{\beta\} \times_{\mu} \rho)).
 \end{aligned}$$

On donne les justifications suivantes pour ce calcul :

(1) Cette égalité résulte du fait que i_1 est une immersion régulière (car l'intersection de U et V est propre), et du fait que i_1 et γ_i ont même codimension pure égale à $\dim(X) + \dim(Y)$; en effet, cela implique, d'après le lemme 4.3, $\Delta_1^* = i_1^*$, et il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 4.6.

(2) On a posé pour cette égalité $p_1 : \tilde{U} \rightarrow U$, $p_2 : \tilde{U} \rightarrow V$ et $p_3 : \tilde{U} \rightarrow Z$ les projections canoniques (on rappelle que $\tilde{U} = U \times_Y V$).

Elle résulte de la fonctorialité du morphisme pushout par un morphisme propre et de la fonctorialité du morphisme de Gysin d'un morphisme localement d'intersection complète (cf 3.22).

Intéressons-nous par ailleurs à l'autre membre. Le support de $\beta \circ \alpha$ est par définition inclus dans W . De plus,

$$\beta \circ \alpha = p_{XVZ*}^{XZ} (p_{XVZ}^{XY} \alpha \cdot p_{XVZ}^{YZ} \beta),$$

Or, $p_{XVZ}^{XY} \alpha \cdot p_{XVZ}^{YZ} \beta$ est à support dans \tilde{U} . On peut par ailleurs calculer la classe de cycle correspondante grâce au carré cartésien,

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{i_2} & UZ XV \\
 \downarrow & \Delta_2 & \downarrow i' \times j' \\
 XYZ & \xrightarrow{\delta_{XYZ}} & (XYZ)^2.
 \end{array}$$

Notons tout d'abord que d'après [7], 14.5,

$$p_{XVZ}^{XY} \alpha \times p_{XVZ}^{YZ} \beta = (i' \times j')_* (p_{UZ}^U \alpha \times p_{XV}^V \beta).$$

Par ailleurs, puisque l'intersection de U et V est propre, i_2 est régulière et de même codimension que δ_{XYZ} , donc $\Delta_2^* = i_2^*$ d'après le lemme 4.3. On obtient donc par application de la proposition 4.5 et d'après la proposition 5.12

$$\{p_{XVZ}^{XY} \alpha \cdot p_{XVZ}^{YZ} \beta\}_{\tilde{U}} = i_2^* (p_{UZ}^U \alpha \times p_{XV}^V \beta).$$

Enfin, par définition, ce n'est pas tout à fait p_{XYZ}^{XZ} que l'on considère, mais plutôt la projection de \tilde{U} sur son image dans XZ , notée $p_{\tilde{U}}^W$, qui est un morphisme propre. Ainsi,

$$\{\beta \circ \alpha\}_W = (p_{\tilde{U}}^W)_* i_2^* (p_{UZ}^U \{ \alpha \} \times p_{XV}^V \{ \beta \}).$$

On peut donc faire le calcul du deuxième membre, en prenant soin d'introduire tout d'abord le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{i_3} & \tilde{U}XZ \\ p_{\tilde{U}}^W \downarrow & \Delta_3 & \downarrow p_{\tilde{U}}^W \times 1_{XZ} \\ W & \xrightarrow{\gamma} & WXZ. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)^*(\rho) &= p_{W*}^X \gamma_!^* \left((p_{\tilde{U}}^W)_* i_2^* (p_{UZ}^U \{ \alpha \} \times p_{XV}^V \{ \beta \}) \times_{\mu} (p_{XZ}^Z)^*(\rho) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} p_{W*}^X (p_{\tilde{U}}^W)_* i_3^* \left(i_2^* (p_{UZ}^U \{ \alpha \} \times p_{XV}^V \{ \beta \}) \times_{\mu} (p_{XZ}^Z)^*(\rho) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} p_{\tilde{U}*}^X (p_1 \times_k p_2 \times_k p_3)^* (\{ \alpha \} \times \{ \beta \}) \times_{\mu} \rho. \end{aligned}$$

On donne les justifications suivantes pour ce calcul :

- (1) De nouveau, cette égalité résulte de 4.6 appliqué au carré Δ_3 . En effet, i_3 est une immersion fermée régulière puisque c 'est le graphe du morphisme $\tilde{U} \rightarrow XZ$ et que XZ est lisse. Par ailleurs, i_3 et γ ont même codimension pure égale à $\dim X + \dim Z$. Donc, le lemme 4.3 permet de conclure $\Delta_3^* = i_3^*$.
- (2) Cette égalité résulte à nouveau de la fonctorialité du pushout propre et du morphisme de Gysin.

Ainsi, la relation attendue résulte finalement de la formule d'associativité (14.2) de [7]. □

Par ailleurs, on peut exprimer ces transferts à l'aide du pullback par un morphisme (non nécessairement localement d'intersection complète) à but lisse défini par M.Rost (cf [7], §12) :

Proposition 6.6. *Soient X et Y des schémas lisses et $\alpha \in c(X, Y)$ une correspondance finie.*

*On suppose que α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de XY .
Considérons les morphismes suivants :*

$$X \xleftarrow{q} Z \xrightarrow{\gamma} ZXY \xrightarrow{p} Y$$

où p et q désignent les projections canoniques et γ le graphe de l'immersion fermée $Z \rightarrow XY$.

Alors, pour tout $\rho \in A^n(Y; M)$,

$$\alpha^*(\rho) = p_* \gamma^* q^*(\rho)$$

où γ^* désigne le morphisme de Gysin de l'immersion fermée régulière γ , q^* le pullback pour un morphisme plat et p_* le pushout pour un morphisme fini.

Preuve. D’après la définition 6.2, $\alpha^*(\rho) = p_*\gamma^*({Z} \times_{\mu} (p_{XY}^Y)^*\rho)$.

Il suffit alors de noter que la classe ${Z} \times_{\mu} (p_{XY}^Y)^*\rho$ dans $A^*(ZXY; M)$ est égale à $(p_{ZXY}^Y)^*(\rho)$. □

Remarque 6.7. Lorsque dans la proposition précédente Z est de plus lisse, l’immersion $i : Z \rightarrow XY$ est régulière ; on obtient alors l’égalité suivante :

$$\alpha^*(\rho) = p_*i^*(p_{XY}^Y)^*(\rho).$$

Exemple 6.8. Ainsi, dans le cas où $M = K_*^M$, la définition 6.2 munit le groupe $A^n(\cdot; K_*^M)$ d’une structure de préfaisceau gradué avec transferts. Dès lors, on en déduit un structure de préfaisceau avec transferts sur

$$A^n(\cdot; K_*^M)_0 = CH^n(\cdot).$$

Soient X, Y des schémas lisses, et Z un sous-schéma fermé intègre de XY , fini équidimensionnel sur X . On note $q : Z \rightarrow X$ la projection de Z sur X , et $\gamma : Z \rightarrow ZXY$ le graphe de l’immersion fermée de Z dans XY .

Alors, le morphisme défini par Z vu comme correspondance finie est égal à la composée

$$CH^n(Y) \xrightarrow{(p_{ZXY}^Y)^*} CH^n(ZXY) \xrightarrow{\gamma^*} CH^n(Z) \xrightarrow{q_*} CH^n(X)$$

où le morphisme γ^* est le morphisme de Gysin associé à l’immersion régulière γ et défini dans [2]. Cela résulte en effet de la proposition précédente, et de 5.11 pour l’identification du morphisme γ^* .

On obtient finalement le résultat suivant :

Proposition 6.9. *Pour tout module de cycles M sur k , pour tout entier positif n , la définition 6.2 munit le préfaisceau $A^n(\cdot; M)$ sur \mathcal{L}_k d’une structure de préfaisceau avec transferts.*

De plus, munit de cette structure, $A^0(\cdot; M)$ est un faisceau Nisnevich invariant par homotopie avec transferts au sens de [1], déf. 3.1.1 et 3.1.10. Sa cohomologie est aussi invariante par homotopie.

Preuve. D’après ce qui précède, $A^n(\cdot; M)$ est un préfaisceau avec transferts sur \mathcal{L}_k . Précisons par ailleurs que d’après le corollaire précédent, pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de schémas lisses, pour tout $\sigma \in A^n(Y; M)$, $[\Gamma_f]^*(\sigma) = f^*(\sigma)$, où f^* est le morphisme de Gysin du morphisme localement d’intersection complète f défini en 3.18. Le morphisme f^* coïncide de plus avec le morphisme f^\bullet construit par Rost ([7], §12).

Le fait que ce préfaisceau est invariant par homotopie résulte de [7], (8.6). □

Pour conclure, il nous suffit d’appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.10. *Soit S un schéma et S_{Nis} le petit site Nisnevich associé à S . Soit M un module de cycles sur S .*

Alors, $A^0(\cdot; M)$ est naturellement muni d’une structure de préfaisceau sur S_{Nis} , qui en fait un faisceau.

Preuve. Comme dans le site S_{Nis} , tous les morphismes sont étales, la structure de préfaisceau sur $A^0(\cdot; M)$ est donnée par le pullback suivant un morphisme plat. Par ailleurs, le complexe $C_*(\cdot; M)$ des cycles à coefficients dans M est lui-même un préfaisceau sur S_{Nis} , puisque le pullback par un morphisme plat est bien défini sur ce complexe.

On montre tout d'abord que $C_*(\cdot; M)$ est un faisceau sur S_{Nis} . Pour cela, on utilise la caractérisation de [5] par les carrés distingués élémentaires (cf *loc.cit.* § 3.1, déf. 1.3 pour la définition et prop. 1.4 pour la caractérisation).

Considérons donc un carré distingué élémentaire de S -schémas étales

$$\begin{array}{ccc} U_V & \xrightarrow{j} & V \\ \downarrow & & \downarrow^p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

et posons $Z = (X - U)_{\text{red}}$.

On doit montrer que, pour tout entier naturel n , l'image de ce carré par $C_*(\cdot; M)$ est un carré cocartésien. Or, par définition, $C_n(X; M) = C_n(U; M) \oplus C_n(Z; M)$ et $C_n(V; M) = C_n(U_V; M) \oplus C_n(Z_V; M)$. Par ailleurs, le morphisme pullback $C_n(Z_V; M) \rightarrow C_n(Z; M)$ est un isomorphisme. On en déduit donc la propriété attendue.

Ainsi, $C^*(\cdot; M)$ est un faisceau sur S_{Nis} . Comme $A^0(\cdot; M)$ est le noyau du morphisme $C^0(\cdot; M) \rightarrow C^1(\cdot; M)$, on en déduit que $A^0(\cdot; M)$ est aussi un faisceau Nisnevich. \square

Acknowledgements. I thank F.Morel for his help and advice during the preparation of this work and the referee for his careful reading and numerous remarks which help clarify and correct substantially the final text.

Références

1. Friedlander E.M., Suslin, A., Voevodsky, V. : Cycles transfers and motivic homology theories. volume 143 of Annals of Mathematics Studies. Princeton Univ. Press, 2000
2. Fulton, W. : Intersection theory, second edition. Springer, 1998,
3. Grothendieck, A., Dieudonné, J. : Eléments de géométrie algébrique IV. volume 20, 24, 28, 32. Publ. Math. de l'IHES, 1966
4. Kazuya, K. : Milnor K -theory and the Chow group of zero cycles. In : Applications of algebraic K -theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder Colo. 1983), volume 55 of Contemp. Math. pp 241–253 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986
5. Morel, F., Voevodsky, V. : A^1 -homotopy theory of schemes. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **90**, 45–143 (2001), 1999
6. Berthelot, P., Grothendieck, A., Illusie, L. : Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6) Lecture Notes in Mathematics Vol. 225
7. Rost, M. : Chow groups with coefficients. Doc. Math. J. 319–393 (1996)