Math. Ann. (2010) 348:119–125
DOI 10.1007/s00208-009-0468-8

Mathematische Annalen

L'invariant de Bieri–Neumann–Strebel des groupes fondamentaux des variétés kählériennes

Thomas Delzant

Received: 19 September 2006 / Revised: 7 February 2007 / Published online: 22 December 2009

Résumé On étudie l'invariant de Bieri, Neumann, Strebel des groupes de Kähler (groupes fondamentaux des variétés kählériennes). Comme application, on montre que, si un groupe de Kähler est résoluble, il est virtuellement nilpotent.

1 Introduction

L'*invariant de Bieri, Neumann, Strebel* d'un groupe G de type fini, est, par définition, le sous-ensemble de $H^1(G, \mathbb{R}) - \{0\}/\mathbb{R}^{+*}$ dont le complémentaire, appelé ci-après $E^1(G)$,est constitué des classes *exceptionnelles* (voir [5] pour la définition).

Le but de cet article est de décrire cet invariant pour les *groupes de Kähler*, c'est-à-dire les groupes fondamentaux des variétés kählériennes compactes. Les exemples les plus naturels de variétés kählériennes compactes sont les variétés projectives lisses, et c'est une question importante de comprendre la structure de leurs groupes fondamentaux (voir [1] pour une introduction approfondie à ce sujet).

Théorème 1.1 *Soient X une variété kählerienne compacte et $w \in H^1(G)$. Alors $w \in E^1(G)$ si et seulement s'il existe une application holomorphe à fibres connexes $f : X \to S$, où S est une orbi-surface de Riemann hyperbolique de genre $g \geq 1$, et une 1-forme ωfermée et holomorphe sur S telle que $w = [Ref^*\omega]$.*

Rappelons qu'une orbi-surface de Riemann est une surface de Riemann de genre g marqués par n points $p_1, \ldots, p_n$ équipés d'entiers $m_i \geq 2$. Une telle surface est dite *hyperbolique* si sa caractéristique d'Euler $\chi^{orb}(S) = 2 - 2g - \Sigma(1 - \frac{1}{m_i})$ est strictement négative. C'est alors le quotient du disque unité par l'action d'un réseau

T. Delzant (✉)
IRMA, Université de Strasbourg et CNRS, 7 rue Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
e-mail: delzant@unistra.fr

discret co-compact de $PSL(2,\mathbb{R})$ ayant $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ comme groupes d'isotropie aux points se projetant sur les p_i. Une application $X \to S$ est holomorphe si elle se relève en une application holomorphe équivariante du revêtement universel $\tilde{X}$ de X vers le disque unité; c'est le cas si et seulement si elle l'est au sens usuel et si, pour tout i, chaque composante connexe de la fibre $f^{-1}(P_i)$ a une multiplicité divisible par m_i. Toute 1-classe de cohomologie non nulle du groupe fondamental d'une orbi-surfaces de Riemann hyperbolique a un noyau qui n'est pas de type fini et est donc exceptionnelle au sens de [5].

D'où l'idée d'utiliser l'invariant de Bieri, Neumann, Strebel (ou plutôt son complémentaire $E^1(G)$) pour affiner ce que nous connaissons des groupes de Kähler. Pour une introduction géométrique à la théorie de l'invariant BNS, voir [13]; pour une étude approfondie [4], malheureusement non publié. Rappelons en particulier le:

Théorème 1.2 [5] (voir aussi [4] Theorem I.4.2.) *Si $\chi : G \to A$ est un quotient abélien de G,* ker χ *n'est pas de type fini si et seulement si il existe une classe exceptionnelle w telle que* ker $w \supset$ ker χ.

Il est convenu [1] de dire qu'une variété kählérienne X *fibre* s'il existe une application holomorphe surjective à fibres connexes sur une orbi-surface de Riemann hyperbolique. Il est bien connu que le fait qu'une variété fibre ou non ne dépend que de son groupe fondamental. Dans le cas de fibrations sur des surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$,cela résulte, par exemple, du théorème de Castelnuovo de Franchis (voir [1]); dans notre langage une variété kählérienne fibre sur une orbi-surface de Riemann hyperbolique de genre ≥ 1 si et seulement si $E^1(G) \neq \emptyset$.

En mélangeant les théorèmes 1.1 et 1.2, on répond à une question d'A. Beauville [3]:

Corollaire 1.3 *Si G est le groupe fondamental d'une variété kählerienne compacte X, A un groupe abélien et $\chi : G \to A$ un homomorphisme dont le noyau n'est pas de type fini, alors X fibre. Plus précisément il existe une orbi-surface de Riemann hyperbolique S, une application holomorphe à fibres connexes $f : X \to S$, et une 1-forme fermée holomorphe ωsur S telle que le noyau de la classe $w = [Ref^*\omega]$ contienne* ker χ.

Notons que le cas particulier où A est le groupe infini cyclique $\mathbb{Z}$ et w est un élément de $H^1(G,\mathbb{Z})$ avait été compris depuis longtemps par T. Napier et M. Ramachandran [14].

Nous appliquerons ce corollaire à l'étude des groupes de Kähler, plus particulièrement à l'étude de leurs quotients résolubles. En le combinant avec les travaux de J.R. Groves [11] sur la structure des groupes résolubles, nous généraliserons au paragraphe 3 les résultats que D. Arapura, M. Nori [2], F. Campana [8] et A. Brudnyi [6] avaient obtenu pour les groupes résolubles *linéaires* en caracteristique 0.

Théorème 1.4 *Soient G le groupe fondamental d'une variété kählerienne compacte X, et $p : G \to R$ un quotient résoluble de G, non virtuellement nilpotent. Il existe un revêtement fini étale X_1 de X et une application holomorphe $f : X_1 \to S$ de X_1 sur une orbi-surface de Riemann hyperbolique. En particulier un groupe de Kähler résoluble est virtuellement nilpotent.*

2 Démonstration du théorème 1.1

Partant de $w \in H^1(G, \mathbb{R})$, la théorie de Hodge nous dit que w peut être représentée par la partie réelle θ d'une 1-forme holomorphe ω de type $(1, 0)$ sur X.

Pour démontrer notre résultat, nous utiliserons le théorème principal de l'article de C. Simpson [16].

Théorème 2.1 [16]. *Soient X une variété kählérienne compacte et ω une 1-forme holomorphe fermée non nulle de type* $(1, 0)$. *Soit $p : Y \to X$ un revêtement tel que $p^*\omega$ soit exacte. Considérons une primitive $g : Y \to \mathbb{R}$ de* $\operatorname{Re} p^*\omega$. *On a l'alternative suivante*:

1. *il existe une orbi-surface de Riemann hyperbolique S, une 1-forme holomorphe fermée η sur S et une application holomorphe $F : X \to S$ à fibres connexes telle que $\omega = F^*\eta$;*
2. *pour tout $v \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(v)$ est connexe et $\pi_1(g^{-1}(v)) \to \pi_1(Y)$ est surjective.*

Remarque 2.1.1 Dans son article, C. Simpson utilise l'hypothèse *projective*. Or cette hypothèse n'est utilisée dans sa démonstration qu'au lemme 22 de son article quand $\psi(X)$ est de dimension 1 (oùψ désigne une certaine application holomorphe). Mais, dans ce cas, si c désigne un point générique de $\psi(X)$, $\psi^{-1}(c)$ est une feuille compacte du feuilletage défini par ω, et donc toutes les feuilles de ce feuilletage sont compacte à holonomie finie, ce qui suffit à conclure, grâce au théorème de factorisation de Stein (voir [1] pour une étude générale des fibrations des variétés kähleriennes sur les courbes).

D'autre part, nous avons le résultat suivant, central dans l'article de Bieri, Neumann, Strebel (c'est la partie directe du Théorème 5.1 de [5]).

Théorème 2.2 *Soient X une variété compacte et θ une 1-forme fermée. Soient $p : Y \to X$ le revêtement maximal abélien de X et $g : Y \to \mathbb{R}$ une primitive de $p^*\theta$. Soit $Y(v)$ la composante connexe de $g^{-1}\,[v, +\infty[$ sur laquelle g n'est pas bornée. Si la classe de cohomologie de θ est exceptionelle, l'homomorphisme $\pi_1(Y(v)) \to \pi_1(Y)$ n'est pas surjectif.*

2.2.1 Démonstration du théorème 1.1

Pour pouvoir appliquer simultanément ces deux résultats, qui semblent faits l'un pour l'autre, il suffit de remarquer que dans le cas où θ est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe sur X, l'ensemble $g^{-1}\,[v, +\infty[$ est en fait *connexe*. De fait, pour une constante r suffisament grande, $Y(v + r)$ est contenu dans une unique composante de $Y(v)$ [5, lemma 5.2]. Notons que le gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad} g}$ est un champ de vecteurs *complet* car il est l'image réciproque d'un champ sur X. Soit φ_t son flot. En mettant bout à bout un nombre fini d'orbites de φ_t , on peut joindre tout point de $Y(v)$ à un point de $Y(v + r)$. Sinon, ce gradient arrive à un point critique de g qui est un maximum local. C'est impossible d'après le principe du maximum. □

2.3 Autre argument

La démonstration présentée ci-dessus, qui est assez différente de celle que j'avais rédigée, a été proposée par le référé. L'argument de la version initiale, inspiré de [9] est basée sur l'idée suivante: si ω est une classe exceptionnelle, et si $f : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ est la partie réelle d'une primitive de ω au revêtement universel de X, l'interprétation géométrique, dûe à G. Levitt [13] de la condition de Bieri, Neumann, Strebel nous dit qu'il existe un G-arbre réel T, une application surjective $\check{f} : X \to T$ qui est G-équivariante et une application G-équivariante $p : T \to \mathbb{R}$ telle que $f = p \circ \check{f}$. On en déduit que l'ensemble $f \geq 0$ a plusieurs composantes connexes sur lesquelles f est non bornée, ce qui suffit à appliquer les résultats de Simpson. On peut aussi remarquer que f est (pluri)-harmonique, comme partie réelle d'une forme holomorphe. Comme la projection de T sur $\mathbb{R}$ est localement isométrique, $\check{f} : X \to T$ est harmonique au sens de Gromov-Schoen, ce qui permet d'appliquer le corollaire 9.2 de [10].

3 Quotients résolubles des groupes de Kähler

Les résultats de la seconde partie permettent d'affiner ce que nous connaissons sur la structure des groupes de Kähler. Comme nous le notions déjà dans l'introduction, le fait qu'une variété kählérienne fibre ne dépend que de son groupe fondamental.

Lemme 3.1 *Soit G un groupe de Kähler. Supposons que $E^1(G) = \emptyset$. Alors le groupe dérivé G' de G est de type fini. De plus, si G^2 désigne le second groupe dérivé, le métabélianisé G/G^2 de G est virtuellement nilpotent.*

Démonstration. Si $E^1(G) = \emptyset$,le groupe G' est de type fini. Donc son abélianisé G'/G^2 aussi. Mais alors, d'après A. Beauville [3], il existe un nombre fini de caractères $\chi_1, \ldots, \chi_k$ de G dont les images sont des groupes finis cycliques, tels que les valeurs propres de l'action de tout élément g de G sur $V = G'/G^2 \otimes \mathbb{C}$ soient de la forme $\chi_i(g)$. L'action du sous groupe d'indice fini $\cap \ker \chi_i$ de G sur V est donc unipotente. □

Le théorème suivant est une conséquence des résultats de J.R.J. Groves [11], récemment utilisés par E. Breuillard [6] pour étudier la croissance des groupes résolubles; il va nous permettre de nous ramener à montrer le théorème 1.4 pour les groupes métabéliens non virtuellement nilpotents.

Théorème 3.2 ([11, Cor.1], [6, Thm 1.7]) *Soit H est un groupe résoluble de type fini qui n'est pas n'est pas virtuellement nilpotent. Alors H admet un sous-groupe d'indice fini H_1 ayant un quotient K_1 métabélien qui n'est pas virtuellement nilpotent, mais dont tout quotient propre est virtuellement nilpotent.*

Démonstration. Considérons, avec E. Breuillard et J. Groves, un quotient K de H qui est *juste non virtuellement nilpotent,* c'est-à-dire dont tout quotient propre est virtuellement nilpotent. Rappelons qu'un tel quotient existe d'après le lemme de Zorn, car si $N_1 \subset N_2 \subset N_{k\ldots.}$ est une suite strictement croissante de sous-groupes distingués de H tels que les quotients H/N_i soient virtuellement nilpotents, la suite est stationnaire:

en effet $H/\cup N_i$ est virtuellement nilpotent de type fini, donc de présentation finie. Le dernier groupe dérivé non trivial K^nde K est un groupe abélien normal et K/K^n est donc virtuellement nilpotent : K contient un sous-groupe d'indice fini K_1qui est résoluble et métanilpotent (en fait c'est une extension d'un groupe abélien par un groupe nilpotent) mais pas nilpotent, ce qui permet d'appliquer le corollaire 1 de [11] ou le théorème 1.7 de [6]. □

Avant d'établir le théorème 1.4. rappelons un théorème de F. Campana [8] (voir aussi les travaux de A. Brudnyi [7] pour des résultats similaires); dans leurs articles ces auteurs montrent une version plus générale (qui concerne les groupes résolubles *de rang fini* c'est-à-dire linéaires en caratéristique 0 plus généraux que les groupes polycycliques); nous préférons l'énoncer dans ce cas particulier car la démonstration se simplifie considérablement, et apparaît comme conséquence des travaux de A. Beauville [3].

Théorème 3.3 [6,8]. *Si G est le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X et $p : G \to R$ un quotient métabélien de G non virtuellement nilpotent mais polycyclique (ou plus généralement un groupe résoluble de rang fini au sens de Arapura-Nori), il existe un revêtement fini X_1 de X et une application holomorphe $f : X_1 \to S$ de X_1 sur une surface de Riemann hyperbolique.*

On peut alors établir le résultat annoncé dans l'introduction.

Théorème 1.4 *Si G est le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X et $p : G \to R$ un quotient résoluble de G, non virtuellement nilpotent, il existe un revêtement fini X_1 de X et une application holomorphe $f : X_1 \to S$ de X_1 sur une surface de Riemann hyperbolique.*

Démonstration. D'après 3.2, R admet un quotient K virtuellement métabélien mais pas virtuellement nilpotent. Soient $R_1 \subset K$ un sous-groupe d'indice fini qui est métabélien mais pas virtuellement nilpotent, et G_1 le sous-groupe d'indice fini de G qui est l'image réciproque de R_1. Notons $p_1 : G_1 \to R_1$ la projection.

Distinguons deux cas:

1. Si le groupe dérivé R_1' est de type fini, R_1 est polycyclique; le théorème 3.3 s'applique.
2. Si R_1' n'est pas de type fini, le noyau de $\chi : G_1 \to R_1^{ab} = R_1/R_1'$ se surjecte sur R_1' qui est un groupe abélien *qui n'est pas de type fini*. Soit $\eta : R_1 \to \mathbb{R}$ un homomorphisme de rang maximal. Le théorème 1.1 s'applique à l'image réciproque ω de η sur G_1 : si X_1 désigne le revêtement étale fini de X de groupe fondamental G_1, il existe une orbi-surface de Riemann hyperbolique S et une application holomorphe à fibres connexes de $F : X_1 \to S$ telles que $\omega \in F^*H^1(S, \mathbb{R})$; grâce au lemme de Selberg sur les sous-goupes de type fini des groupes linéaires, le groupe fondamental orbifold de S admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion; ainsi quitte à remplacer G_1 par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que S est une surface de Riemann hyperbolique. □

Corollaire 3.4 *Un groupe de Kähler résoluble est virtuellement nilpotent.*

En effet, un sous-groupe d'indice fini d'un groupe résoluble ne peut se surjecter sur le groupe fondamental d'une (orbi)-surface hyperbolique car celui-ci contient un groupe libre. □

Exemples 3.4.1 O. Kharlampovich [12] a construit un groupe résoluble de présentation finie dont le problème du mot n'est pas résoluble ; ce groupe ne peut pas être résiduellement fini, ni *a fortiori* linéaire. D. Robinson et R. Strebel [15] ont construit un groupe résoluble de présentation finie non linéaire dont le groupe dérivé n'est pas de type fini; de tels groupes ne sont pas des groupes fondamentaux de variétés kählériennes. Pour donner un exemple de groupe qui ne peut pas être étudié en restant dans le cadre du rang fini d'Arapura-Nori, Brudnyi et Campana on peut considérer le produit semi-direct de $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right]$, dont le groupe dérivé est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\left[t, t^{-1}\right]$ qui n'est pas de type fini.

Remerciements. Je tiens à remercier Gilbert Levitt et Mihai Damian qui m'ont expliqué les bases de l'invariant de Bieri, Neumann, Strebel, et Jean-Claude Sikorav pour des commentaires très utiles.

Le référé a proposé une autre preuve du théorème 1.1, plus proche des idées originales de Bieri, Neumann, Strebel et Simpson que de leurs interprétations en terme de théorie de Morse-Novikov que j'avais initialement préférée; ses critiques constructives m'ont permis, je crois, d'améliorer la présentation de cet article; qu'il en soit très chaleureusement remercié.

References

1. Amorós, J., Burger, M., Corlette, K., Kotschick, D., Toledo, D.: Fundamental groups of compact Kähler manifolds. Math. Surveys and Monographs, vol. 44. American Mathematical Soceity, Providence (1996)
2. Arapura, D., Nori, M.: Solvable fundamental groups of algebraic varieties and Kähler manifolds. Compositio Math. **116**, 173–188 (1999)
3. Beauville, A.: Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats. Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), vol. 1507, pp. 1–15. Lecture Notes in Mathematics
4. Bieri, R., Strebel, R.: Geometric invariants for discrete groups. cours polycopié
5. Bieri, R., Neumann, W.D., Strebel, R.: A geometric invariant of discrete groups. Invent. Math. **90**(3), 451–477 (1987)
6. Breuillard, E.: On uniform exponential growth for solvable groups, Margulis Volume, Pure Appl. Math. Q., to appear (math.GR/0602076)
7. Brudnyi, A.: Solvable matrix representations of Kähler groups. Differ. Geom. Appl. **19**, 167–191 (2003)
8. Campana, F.: Ensembles de Green–Lazarsfeld et quotients résolubles des groupes de Kähler. J. Algebraic Geom. **10**, 599–622 (2001)
9. Delzant, T., Gromov, M.: Cuts in Kähler groups. In: Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects. Progress Math. Series, vol. 248. Birkhauser, Basel (2005)
10. Gromov, M., Schoen, R.: Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **76**, 165–246 (1992)
11. Groves, J.R.J.: Soluble groups with every proper quotient polycyclic. Illinois J. Math. **22**, 90–95 (1978)
12. Kharlampovic, O.: A finitely presented solvable group with unsolvable word problem. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **45**, 852–873 (1981)
13. Levitt, G.: $\mathbb{R}$-trees and the Bieri–Neumann–Strebel invariant. Publicacions Matemàtiques **38**(1), 195–200 (1994)
14. Napier, T., Ramachandran, M.: Hyperbolic Kähler manifolds and proper holomorphic mappings to Riemann surfaces. Geom. Funct. Anal. **11**, 382–406 (2001)

15. Robinson, D., Strebel, R.: Some finitely presented soluble groups. J. London Math. Soc. (2) **26**, 435–440 (1982)
16. Simpson, C.: Lefschetz theorems for the integral leaves of a holomorphic one-form. Compositio Math. **87**, 99–113 (1993)