GAFA, Geom. funct. anal.
Vol. 7 (1997) 496 – 534
1016-443X/97/030496-39 $ 1.50+0.20/0

GAFA Geometric And Functional Analysis

PROBLÈMES DE MONGE-AMPÈRE, COURBES HOLOMORPHES ET LAMINATIONS

F. Labourie

Abstract

Riemann's Uniformization theorem is a classical tool for the study of elliptic problems on surfaces. Usually, the use of this theorem reflects the fact that the situation can be translated in a pseudo-holomorphic language: the solutions of the problem appearing as holomorphic curves for a suitable almost complex structure in a jet space. Often, the lack of compactness of the space of solutions of bounded energy is remarkably described by Gromov's compactness theorem on holomorphic curves. On the other hand for other problems, usually related to Monge-Ampère equations, a different type of lack of compactness appears; solutions with bounded energy converge and, furthermore, it is possible to describe what happens when the energy goes to infinity: the solutions tend to degenerate along holomorphic curves described by solutions of ODE. The goal of this article is to describe the "*Monge-Ampère* geometry" of the jet-space that corresponds to this phenonemon. We prove compactness results for the solutions of these problems, and show examples and applications of our technique. Furthermore, a moduli space of pointed solutions is exhibited with its structure of a riemaniann lamination.

Introduction

Il est classique d'utiliser le théorème d'uniformisation de Riemann, à un moment ou à un autre de l'étude d'un problème elliptique en dimension 2. Géométriquement, cela se traduit bien souvent par une interprétation en termes de géométrie presque complexe (pour des exemples voir [L2]). Le théorème de compacité à bulles près de Gromov pour les courbes holomorphes, donne alors une interprétation générale des phénomènes comparables pour les surfaces minimales ou les applications harmoniques de surfaces, par exemple.

Cependant, ce théorème n'épuise pas les possibilités de la technique pseudo-holomorphe pour l'étude des problèmes elliptiques. Ainsi, nous avons montré que certains problèmes — où apparaissent en général des équations de Monge-Ampère — présentent une forme de perte de compacité le long des courbes (réelles) [L1], [S] et 2.2. De plus, ce phénomène se produit sans que l'on ait à borner l'aire de nos courbes holomorphes. Des bornes plus restrictives — sur l'aire en particulier — aboutissent en général à une véritable convergence. Il s'agit à première vue d'un phénomène différent du théorème de compacité de Gromov montrant qu'à aire bornée, une suite de courbes holomorphes converge à apparition de bulles près [G1]; la description de la limite d'une suite quelconque de courbes holomorphes paraissant hors de portée. Ces résultats ont pourtant en commun l'outil de base qu'est le lemme de Schwarz de Gromov.

L'un des buts de cet article est de comprendre pourquoi ces problèmes (équations de Monge-Ampère, immersions isométriques elliptiques ...) possèdent ce type de dégénérescence et d'en donner une interprétation générale susceptible d'autres applications. La réponse va être donnée par l'existence d'une structure géométrique sur un espace de jets (que nous appellerons de Monge-Ampère) comprenant en particulier une structure presque complexe et une distribution verticale. Les solutions s'interprètent alors comme une sous-classe de courbes holomorphes, pouvant dégénérer sur des courbes d'un type spécial, décrites en général par une équation différentielle ordinaire et qui se projettent dans un bon nombre d'exemple sur des courbes réelles.

Après avoir défini cette géométrie, qui rend compte de nombreux autres exemples que ceux que nous avons déjà étudiés, nous énoncerons deux théorèmes généraux de compacité, l'un pour les problèmes à bord libre, l'autre pour les problèmes à bord convexe que nous n'avions jamais étudiés jusque là, et qui ont parmi leurs corollaires les résultats cités.

A notre avis, l'un des aspects les plus intéressants de cette géométrie de Monge-Ampère est la possibilité de construire à l'aide de ces théorèmes un "espace de solutions pointées" compact ayant une structure de lamination. L'existence d'un espace de phases compact pour les solutions d'un problème elliptique est un phénomène bien particulier à ces problèmes de Monge-Ampère. En quelque sorte, l'existence de cet espace de solutions suggèrent que les problèmes de Monge-Ampère ont un comportement proche de celui des équations différentielles ordinaires. Dans un prochain article [L4], nous comptons faire une étude dynamique de cet espace de phases dans le cas particulier des surfaces à courbure prescrite dans les variétés à courbure négative, cas où cet espace de phases est une extension surprenante du flot geéodésique.

Nous allons dans la prochaine section décrire plus précisément le contenu de l'article.

S. Semmes et J. Jost ont tous les deux attiré mon attention sur l'analogie entre le théorème 2.3 et les résultats globaux de A. Nadel sur l'équation de Monge-Ampère complexes [N]. Il serait intéressant de savoir si cette analogie est purement formelle ou non, bien que les résultats ne semblent être que cousins.

Je remercie S. Hildebrant de m'avoir signalé le livre de F. Schulz. Enfin cet article doit beaucoup au travail [S] de Schlenker ainsi qu'à de nombreuses conversations avec lui.

1 Définitions, résultats principaux

1.1 Problème à bord libre. Nous allons donner dans cette section la définition de la géométrie des variétés de *Monge-Ampère* contenant des surfaces particulières dites *solutions de Monge-Ampère*. Le cas le plus "intégrable" de cette géométrie est $\mathbb{C}^2$ muni d'un feuilletage par des plans totalement réels parallèles, les solutions de Monge-Ampère étant alors les courbes holomorphes transverses à ce feuilletage.

Dans le cas général, une structure de Monge-Ampère sur une variété sans bord M, est un triplet (W, J, V), où W une distribution de dimension 4 de TM dite *d'holonomie*, J une structure complexe sur W, V une sous-distribution de W de dimension 2, dite *verticale*, telle que $W = V \oplus JV$, et qui vérifie la condition d'intégrabilité suivante :

(i) au voisinage de chaque point de M, nous pouvons trouver une distribution intégrable L telle que $L \cap W = V$.

Une surface Σ de M est une *courbe holomorphe* si $T\Sigma$ est incluse dans W et stable par J. On demande enfin au quadruplet (M, W, J, V) de vérifier la condition suivante :

(ii) pour tout vecteur tangent u à V, il existe un germe de courbe holomorphe Σ, u étant tangent à Σ, telle que $\dim(T\Sigma \cap V)$ vaille constamment 1. De telles surfaces, qui vont jouer un rôle important par la suite, sont appelées *surfaces rideaux*.

Nous verrons par la suite de nombreux exemples de cette géométrie. Revenons un instant cependant au cas le "plus intégrable", évoqué au début de ce paragraphe, pour remarquer que les surfaces rideaux sont les droites complexes passant par un vecteur u donné.

Nous allons nous intéresser dans cet article à des courbes holomorphes d'un type particulier, que nous appelerons *solutions de Monge-Ampère* :

ce sont les courbes holomorphes dont l'espace tangent est en tout point transverse à V.

Soyons plus précis dans notre définition de surfaces rideaux ou de solutions de Monge-Ampère. Nous considérons en effet des surfaces immergées qui sont des objets délicats à manipuler.

Tout d'abord, nous demanderons qu'une telle courbe holomorphe — surface rideau ou solution de Monge-Ampère – soit l'image d'une surface par une immersion et que, M étant supposée munie d'une métrique riemannienne complète, la métrique induite sur la surface soit complète.

Il nous faut être plus précis encore pour définir les points d'une solution ou d'une surface rideau en tenant compte du problème des revêtements multiples. Remarquons tout d'abord que du fait du prolongement analytique, il existe un couple (f_1, Σ_1) où f_1 est une immersion de la surface Σ_1 dans M, $f_1(\Sigma_1) = \Sigma$, telle que si (f_2, Σ_2) vérifie $f_2(\Sigma_2) = \Sigma$ il existe un revêtement π de Σ_2 sur Σ_1 tel que $f_2 = f_1 \circ \pi$. Un tel couple est bien sûr unique à difféomorphisme près. Par définition, les *points* de Σ sont les points de Σ_1, la paire (f_1, Σ_1) est le *représentant* de Σ. Par la suite, nous utiliserons par abus de langage, le terme surface rideau ou solution pour désigner aussi bien le représentant d'une courbe que son image.

Nous allons maintenant décrire une topologie sur l'espace constitué des paires (x, Σ) où x est un point d'une solution de Monge-Ampère, ou d'une surface rideau, Σ de représentant Σ_1. La topologie que nous allons considérer sur l'espace des paires (x, Σ) est donnée par une base d'ouverts $\sigma(\Sigma, U, \varepsilon, k)$, où ε est un réel strictement positif, k un entier , et où U est un ouvert de Σ_1 dont l'adhérence est homéomorphe au disque fermé, (f_1, Σ_1) étant le représentant de Σ.

Cette base d'ouverts est définie par $\sigma(\Sigma, U, \varepsilon, k) = \{(\overline{x}, \overline{\Sigma})$, tel qu'il existe un voisinage $\overline{U}$ de $\overline{x}$ dans $\overline{\Sigma}_1$ tel que $\overline{f_1}(\overline{U})$ est ε proche dans la topologie C^k de $f_1(U)$ — où $(\overline{f_1}, \overline{\Sigma_1})$ est le représentant de $\bar{\Sigma}\}$.

Dans cette topologie $(x_n, \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers (x_0, Σ_0) sans que les Σ_n soient difféomorphes à Σ_0. A cause du prolongement analytique, cette topologie est séparée. Notre résultat central est le suivant:

Théorème 1.2. *Soit M une variété de Monge-Ampère, $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions, $(x_n \in \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans M. Après extraction d'une sous-suite, la suite $(x_n, \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers (x_0, Σ_0), tel que Σ_0 est, soit une solution de Monge-Ampère, soit une surface rideau.*

Il est intéressant à ce stade de souligner que nous n'avons imposé aucune condition sur l'aire de nos solutions de Monge-Ampère, cette aire pouvant bien sûr être infinie.

1.3 Problème à bord convexe. Ce problème a une version à bord que nous allons décrire maintenant. Nous nous donnons une variété à bord M que par souci de simplifications nous supposons plongée dans une variété de Monge-Ampère sans bord N. Notons la distribution d'holonomie W, l'espace vertical V, et la structure complexe J. Une *condition au bord convexe* sur M de bord ∂M, est la donnée d'une sous-variété plongée D de dimension 2 de ∂M, vérifiant les conditions suivantes :

(iii) $TD + V$ est de rang 3,

(iv) l'unique droite complexe F incluse dans $TD+V$ est différente de TD et contient $TD\cap V$, autrement dit TD est réel et si $v \in TD\cap V$, alors $Jv \in TD + V$.

Enfin, nous demandons que ∂M soit convexe dans un sens que nous allons préciser. Pour donner une définition géométrique, nous supposons toujours que M est un ouvert à bord dans une variété de Monge Ampère sans bord N, et qu'il existe une fonction λ ayant 0 comme valeur régulière telle que $M{=}\lambda^{-1}[0, +\infty[$. Notre condition supplémentaire de convexité est:

(v) si Σ est une courbe rideau passant par $T_xD\cap V$ pour $x \in D$, alors $\lambda|_\Sigma$ atteint un maximum en x et sa hessienne en ce point est non nulle. En particulier la surface rideau reste à l'extérieur de M.

Les *solutions du problèmes de Monge-Ampère à bord convexe* sont alors les images par une immersion f d'une surface à bord S telle que la métrique induite soit complète, vérifiant comme précédement que leur espace tangent est inclus dans W, complexe et transverse à V et que $f(\partial S) \subset D$ ainsi que

(vi) il existe une orientation de $TD/(TD\cap V)$ qui coïncide le long de ∂S avec l'orientation de ∂S.

Cette condition (vi) est automatiquement vérifiée si $T\partial M\cap W = TD{+}V$.

Remarquons que le bord de M est totalement donné par la fonction λ. Nous parlerons donc quelquefois par la suite d'une condition à bord donnée par le couple (D, λ).

Dans le cas le plus intégrable, donnons un exemple de problème à bord : soit $H = JV$, où V est le plan totalement réel définissant la distribution verticale. Soit p la projection sur H parallèlement à V, prenons $M = p^{-1}(O)$, où O est un ouvert convexe lisse de H. Pour tout $x \in \partial O$, notons $u(x)$ la normale unitaire au bord de O. Une condition au bord convexe est $D = \{(x, \lambda u(x)),\ x \in \partial O,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 1.4. *Soit M une variété de Monge-Ampère avec une condition au bord convexe D. Tout point $x_0 \in D$ possède alors un voisinage U dans M, tel que si $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de solutions du problème à bord, $(x_n \in \partial\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points convergeant vers x_0, et si $\bar{\Sigma}_n$ est la composante connexe de x_n dans $U \cap \Sigma_n$, après extraction d'une sous-suite, $(\bar{\Sigma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tant que sous-variété plongée vers une solution du problème à bord convexe dans U.*

Avec la définition donnée, il n'est pas possible de définir une topologie séparée sur l'espace des solutions de Monge-Ampère à bord. En effet, il n'existe plus de bonnes notions de représentant dans le cas général. C'est pourquoi, l'énoncé du résultat pour le problème à bord n'est pas aussi lisse que celui du problème sans bord car nous avons voulu lui garder une certaine généralité pour les applications que nous avons en vue.

Nous verrons cependant par la suite diverses situations pour lesquelles on peut définir une topologie et obtenir un résultat de compacité isomorphe à celui du problème sans bord (théorème 6.5).

Remark 1.5. Pour simplifier l'énoncé des résultats et les démonstrations, nous avons supposé la structure de Monge-Ampère fixe. Dans les applications, il est souvent au contraire important de faire varier cette structure. Nos résultats cependant s'appliquent aussi bien à ce cas. Le cadre général de nos résultats est le suivant : nous avons une suite de structure de Monge-Ampère $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant C^∞ vers une structure de Monge-Ampère M_0, et une suite de solutions $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chaque M_n.

1.6 Laminations. Bien sûr ces théorèmes se traduisent par la compacité d'un certain espace, que nous construirons en section 8, et qui admet une structure d'espace laminé par des surfaces de Riemann dans l'esprit de [Su] et [G2]. Comme nous l'avons déjà dit en introduction, la dynamique de cet espace nous parait intéressante.

1.7 Structure de l'article. Nous allons tout d'abord décrire de nombreux exemples de cette géométrie de Monge-Ampère en section 2, certains nouveaux, d'autres anciens. Nous donnerons aussi des applications et en particulier les théorèmes 2.2, 2.3 et 2.7. Cette section est bien sûr celle qui justifie l'intérêt que nous avons porté à cette notion.

Nous commençons ensuite la preuve, en étudiant tout d'abord les courbes holomorphes à bord libre dont l'espace tangent est vertical en un point intérieur en section 3, puis en un point du bord pour les problèmes à bord convexe en section 4. Les résultats obtenus vont nous servir à montrer par la suite qu'une limite de solutions est soit une solution, soit une courbe rideau.

Puis, nous étudions localement les solutions de Monge-Ampère et montrons en particulier que tout point possède un voisinage canonique homéomorphe au disque, d'aire bornée et suffisamment grand en section 5. C'est un phénomène typique et crucial de cette géométrie. Il nous permet de raisonner localement dans M et d'appliquer le lemme de Schwarz, il interdit les bulles et nous permet d'éliminer l'hypothèse d'aire bornée, cruciale pour les courbes holomorphes ; c'est lui aussi qui nous donne la structure de produit local de l'espace des solutions pointées

Nous démontrons les résultats principaux en section 6.

Nous examinons le cas particulier des graphes en section 7 où le théorème principal se précise en théorèmes 7.1, 7.2 et 7.5.

Enfin en conclusion section 8, nous expliquerons comment construire à l'aide de ces résultats de nouveaux exemples de laminations par des surfaces de Riemann, et utilisons cet espace pour démontrer le théorème 2.7.

2 Exemples et applications

Nous allons donner une série d'exemples dont nous espérons qu'il vont justifier notre définition de géométrie Monge-Ampère. Pour les deux premiers (équations de Monge-Ampère elliptiques et problème à courbure de Gauss prescrite) notre méthode nous permet d'obtenir des résultats nouveaux de compacité (théorèmes 2.2, 2.3 et 2.7.). Les exemples qui suivent (immersions isométriques elliptiques dans les variétés riemaniennes et lorentziennes) sont à l'origine de ce travail et les résultats de compacité déjà obtenus dans ces cas particuliers sont des avatars de notre résultat général. Enfin, nous montrons comment des problèmes classiques en géométrie affine s'interprètent dans notre langage géométrique, nous espérons pouvoir revenir sur ces problèmes ultérieurement.

Dans notre série d'exemples, l'existence des surfaces rideaux sera facile à obtenir. Le premier de ceux-ci justifie la terminologie choisie.

2.1 Équations de Monge-Ampère elliptiques. On se donne une connexion sans torsion ∇ sur une surface Σ, une section A du fibré $S^2(T\Sigma)\times\mathbb{R} \to \Sigma \times \mathbb{R}$ dont la fibre au dessus du point (s, r) est constituée des deux formes symétriques, et enfin une fonction B strictement positive sur $J^1(\Sigma) = T^*\Sigma \times \mathbb{R}$.

L'équation de Monge-Ampère elliptique portant sur une fonction f est alors

$$(*) \qquad \det\big(\nabla df + A(j^0(f))\big) = B\big(j^1(f)\big)$$

où le déterminant est mesuré par rapport à une forme volume ω de référence.

Comme application de notre technique, nous allons démontrer deux théorèmes nouveaux sur les équations de Monge-Ampère elliptiques

Théorème 2.2. *Soit S une surface — pas nécessairement compacte — à bord strictement convexe pour la connexion ∇, g une fonction définie sur le bord de S. Alors toute suite de solutions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation de Monge-Ampère $(*)$, C^1 bornée et vérifiant la condition de Dirichlet $f_n|_{\partial S} = g$, possède une sous-suite convergeant C^∞ sur tout compact.*

Ce résultat, que l'on peut aussi considérer comme une estimée *a priori*, est un corollaire du théorème 9.4.1 de [Sc] dans le cas où le bord de S est vide. En présence du bord, c'est un résultat nouveau.

Notre approche géométrique et *via* un résultat général de compacité est sensiblement différente de celle de [Sc]. Néanmoins, il est clair que l'interprétation pseudo-holomorphe est une version géométrique de la théorie caractéristique de Heinz-Lewy développée dans cet ouvrage. Ceci n'est d'ailleurs pas une surprise, cette théorie étant par l'intermédiaire de Vekua et Pogorelov l'une des sources de la théorie pseudo-holomorphe à la Gromov.

Avant d'énoncer notre deuxième résultat, introduisons quelques définitions. Soit toujours S une surface à bord strictement convexe

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de solutions de $(*)$, et vérifiant la condition de Dirichlet $f_n|_{\partial S} = g$, on dira qu'un point x de Σ est *semi-singulier* si

(i) aucune sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge C^∞ au voisinage de x,
(ii) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x telle que $(j^1 f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ reste borné.

Notre deuxième résultat précise la structure des points semi-singuliers :

Théorème 2.3. *Soit S une surface sans bord, après extraction d'une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points semi-singuliers est une réunion de géodésiques pour ∇, disjointes n'intersectant pas ∂S et complètes.*

Une courbe étant dite *complète* si, S étant supposée munie d'une métrique complète, la métrique induite sur la courbe est complète.

Nous démontrerons ces résultats plus loin en 7.7. Pour le moment, nous allons nous contenter de traduire ces problèmes dans notre langage géométrique.

Nous avons alors

PROPOSITION 2.4. *Il existe une structure de Monge-Ampère sur $J^1(\Sigma)$ telle que f est solution de $(*)$ si et seulement si $j^1f(\Sigma)$ est une solution de Monge-Ampère. Pour cette géométrie, les surfaces rideaux ne sont pas bornées et se projettent sur les géodésiques de Σ.*

Preuve. Utilisons ω pour identifier $T^*\Sigma$ et $T\Sigma$, et remarquons que si $C(f)$ est l'endomorphisme de $T\Sigma$ associé par cette dualité à la forme $\nabla df + A(j^0(f))$, vérifier $(*)$ équivaut à dire $(C(f))^2 = -B(j^1(f))$.

Grâce à la connexion, nous pouvons écrire $T(J^1(\Sigma)) = T^*\Sigma \oplus T\Sigma \oplus T\mathbb{R}$, le premier $T^*\Sigma$ étant l'espace tangent à la fibre de la projection sur $\Sigma \times \mathbb{R}$, le facteur $T\Sigma$ provenant de l'horizontal de la connexion.

A partir de maintenant, nous utiliserons l'identification de $T^*\Sigma$ avec $T\Sigma$ grâce à ω. Prenons comme distribution d'holonomie W la distribution de contact définie par, si $\alpha \in T^*\Sigma$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} W \subset TJ^1(\Sigma) \\ W_{(\alpha,\lambda)} = \big\{(v, u, \alpha(u)), v, u \in T\Sigma\big\} \ . \end{cases}$$

Si f est une fonction de Σ dans $\mathbb{R}$, l'espace tangent à $j^1(f)(\Sigma)$ est inclus dans W, et on a

$$T\big(j^1f(\Sigma)\big) = \big\{(\nabla_u df, u, df(u)), u \in T\Sigma\big\} \ .$$

Identifions maintenant W avec $T\Sigma \oplus T\Sigma$ par l'application Ψ

$$\begin{cases} W_{(\alpha,\lambda)} \longrightarrow T\Sigma \oplus T\Sigma \\ \big(v, u, df(u)\big) \longmapsto \big(B^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\lambda)(v - A(\lambda)(u)), u\big) \end{cases}$$

et munissons W de la structure complexe induite de celle de $T\Sigma \times T\Sigma$ donnée par $(u, v) \mapsto (-v, u)$.

Prenons maintenant comme distribution verticale V, l'intersection de W avec le noyau de la différentielle de la projection sur Σ

$$V = \big\{(v, 0, 0), v \in T\Sigma\big\} \ .$$

V est alors totalement réel, et vérifie (i). Il nous reste a construire les surfaces rideaux, nous en donnons une paramétrisation et laissons le lecteur vérifier qu'elles ont bien les bonnes propriétés.

Soit $\gamma(s)$ une géodésique pour ∇, paramétrée de telle sorte que la 1-forme $\omega(\dot\gamma(s), .)$ soit parallèle le long de la courbe ; on se donne enfin une paire $(w(s), f(s))$ où $w(s)$ est un champ de 1-forme le long de $\gamma(s)$, $f(s)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} w(s) = -A_{(\gamma(s), f(s))}\big(\dot\gamma(s)\big) \\ \dot f(s) = \big\langle w(s) | \dot\gamma(s)\big\rangle \ . \end{cases}$$

Ces données déterminent les surfaces rideaux qui sont données par la paramétrisation :

$$\begin{cases} (t,s) \longmapsto \big(t\dot\gamma(s) + w(s), \gamma(s), f(s)\big) \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow J^1(\Sigma) = T^*\Sigma \times \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

□

Nous allons décrire maintenant le problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère elliptique comme un exemple de problème à bord convexe.

Proposition 2.5. *Soit Σ une surface à bord strictement convexe pour la connexion ∇, soit g une fonction définie sur le bord de Σ. Considérons la condition au bord $D \subset \partial J^1(\Sigma)$ définie par*

$$D = \big\{(\omega, x, g(x));\ x \in \partial\Sigma, \omega|_{\partial\Sigma} = dg\big\}\ .$$

Le problème au bord donnée par D est une condition au bord convexe.

Il est clair qu'exiger $\partial j^1 f(\Sigma) \subset D$ équivaut à demander $f|_{\partial S} = g$.

Preuve. Le bord de Σ étant strictement convexe, la condition (v) de le définition est vérifiée. Il est ensuite clair que $TD \subset W$ et que l'on a $TD + V = T\partial M \cap W$. Ainsi, les conditions (iii) et (vi) sont vérifiées. Ensuite les vecteurs de $T_{(\alpha,x,\lambda)}D\cap V$ sont proportionnels au vecteur $(v,0,0)$ où $v(u) = 0$, u étant un vecteur tangent au bord de Σ en x. La formule explicite pour la structure complexe nous donne, en identifiant $T^*\Sigma$ et $T\Sigma$ à l'aide de ω

$$J(v,0,0) = \big(A(\lambda)B^{-\frac{1}{2}}v, B^{-\frac{1}{2}}v\big) \in T(\partial M)\ .$$

Ainsi, la droite complexe engendrée par $TD \cap V$ est incluse dans $TD + V$ ce qui nous donne la condition (iv). □

2.6 Surfaces à courbure de Gauss prescrites Nous avions décrit le problème à bord libre en [L2].

Le problème est le suivant : on se donne une variété M_0 de dimension 3, riemannienne, et une fonction h définie sur le fibré unitaire $U(M_0)$, strictement supérieure à la courbure sectionnelle k du plan orthogonal au vecteur considéré. On cherche alors une surface orientée dont la courbure en tout point vaille $h(n)$, n étant la normale orientée en ce point.

Ce problème contient bien sûr l'équation classique de Monge-Ampère, le problème de Minkowski etc...

Nous allons démontrer un théorème de compacité pour ce problème qui va nous être utile pour la solution du problème de Plateau pour les surfaces à courbure constante dans les variétés à courbure négative [L4].

Théorème 2.7. *Soit M_0 une variété riemanienne complète de dimension 3 à bord strictement convexe. Soit c une réunion finie de courbes incluses dans ∂M_0. Soit g une fonction définie sur le fibré unitaire $U(M_0)$, strictement supérieure à la courbure sectionnelle de M_0. Toute suite de surfaces complètes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions du problème à courbure de Gauss prescrite par g, vérifiant $\partial S_n = c$, possède alors une sous-suite qui converge C^∞ en tant que sous-variété vers une solution lisse du problème à courbure prescrite si l'une des deux conditions suivantes est vérifiées :*

(i) *l'intégrale de la courbure moyenne des surfaces S_n est majorée indépendamment de n, et aucune composante connexe des S_n n'est un tore.*
(ii) *l'aire des surfaces S_n est majorée indépendamment de n, et M_0 ne contient pas de géodésiques paramétrées par $\mathbb{R}$ tout entier (propriété de Liouville).*

Nous repoussons la démonstration jusqu'en 8.4. Pour le moment, comme précédemment, traduisons le problème dans notre langage.

Une conséquence de la construction décrite en [L2] est la proposition suivante dont nous allons rappeler la démonstration.

PROPOSITION 2.8. *Il existe une structure de Monge-Ampère sur $U(M_0)$, telle que Σ est une solution du problème à courbure de Gauss prescrite si et seulement si $n(\Sigma)$ est une solution de Monge-Ampère. Dans cette structure, le feuilletage est donné par les fibres de la projection sur M_0, la distribution d'holonomie W est la distribution de contact et les surfaces rideaux sont les surfaces constituées des vecteurs normaux à une géodésique de M_0 donnée. Enfin, l'aire de la solution de Monge-Ampère est exactement l'intégrale de la courbure moyenne.*

Preuve. $U(M_0)$ est un fibré sur M_0 muni d'une connexion qui se déduit de la connexion de Levi-Civita sur M_0. Grâce à cette connexion, le fibré tangent à $U(M_0)$ en un point n se décompose en

$$T_nU(M_0) = P \oplus TM_0 \ ,$$

où P est le plan orthogonal à n. Remarquons que P étant orienté, il est muni naturellement d'une structure complexe J_0. Le sous-fibré W est alors, en tout point n de $U(M_0)$, donné à l'aide de cette décomposition par

$$W(n) = P \oplus P \ .$$

Le fibré vertical V est donné par $V = P \oplus \{0\}$.

Il est facile de vérifier qu'une surface tangente à W dont la projection sur M_0 est de rang maximale, est un champ de vecteurs normaux $n(S)$ à une surface S de M_0.

Dans cette décomposition, l'espace tangent à une telle surface $n(S)$ est constitué des vecteurs de la forme $(u, A(u))$, où A est l'opérateur deuxième forme fondamentale. Soit maintenant ν la fonction telle que

$$\nu^2 = h - k \ ,$$

k étant la courbure sectionnelle du plan orthogonal au vecteur considéré. On munit alors W de la structure complexe J, définie par

$$J(u,v) = (\nu^{-1} J_0 v, \nu J_0 u) \ .$$

On vérifie maintenant aisément que dire que $n(S)$ est une courbe pseudo-holomorphe entraîne

$$\det(A) = \nu^2 \ ,$$

c'est à dire que S est solution du problème à courbure prescrite par h.

Enfin, les surfaces rideaux sont données par l'ensemble des vecteurs normaux à une géodésique. □

En ce qui concerne le problème à bord, considérons si c est une courbe plongée orientée dans ∂M_0 de vecteur directeur u, la sous-variété D de $U(M_0)$ définie par

$$D = \left\{(n, x), x \in \partial M_0,\ g(n, u(x)) = 0\right\} \ .$$

Montrons alors

Proposition 2.9. *La condition au bord définie par D est convexe ; les solutions de Monge-Ampère à bord étant les surfaces à courbure prescrite dont le bord (orienté) est c.*

Preuve. Le bord de M_0 étant strictement convexe la condition (v) est vérifiée. En reprenant la décomposition de $TU(M_0)$ donnée dans la preuve précédente,

$$TD + V = P \oplus Tc \ .$$

Les conditions (iii) et (iv) sont alors aisément vérifiées. □

2.10 Immersions isométriques elliptiques. Cet exemple est décrit en [L1], où j'ai montré un résultat de dégénérescence qui s'avère être un cas particulier du résultat principal.

Le problème considéré est celui des immersions isométriques d'une surface à courbure plus grande que k_0 dans une variété de dimension 3 à courbure plus petite que k_0. Sous-jacente à la description de [L1] est une structure de Monge-Ampère sur l'espace $J^1_{iso}(\Sigma, M)$ des 1-jets d'immersions isométriques de Σ dans M. Les surfaces rideaux, que j'avais alors appelées surfaces de pli, sont déterminées par deux géodésiques paramétrées $\gamma(t)$ et $\Gamma(t)$, la première dans Σ, la deuxième dans M. La surface rideau étant formée des isométries de $T_{\gamma(t)}\Sigma$ dans $T_{\Gamma(t)}M$ envoyant $\dot\gamma(t)$ sur $\dot\Gamma(t)$.

2.11 Immersions isométriques dans des variétés Lorentziennes. Il s'agit du problème étudié par Jean-Marc Schlenker [S] dans sa preuve de la version lisse du théorème d'Andreev. Pour démontrer ce résultat, il utilise entre autres choses une structure de Monge-Ampère pour décrire les immersions isométriques d'une surface à courbure plus petite que k_0, dans une variété Lorentzienne de dimension 3 à courbure plus grande que k_0.

2.12 Surfaces en géométrie affine. Soit N une variété de dimension 3, muni d'une connexion sans torsion ∇, préservant une forme volume ω. Une *surface convexe* S incluse dans N vérifie par définition que pour toute courbe c tracée sur la surface, $\nabla_{\dot c}\dot c \neq 0$. On peut alors associer à une telle surface son *relevé de Blashke*, $g(S)$, dans le fibré $S^2(TN)$ des métriques de TN de déterminant 1. Ce relevé est caractérisé par les conditions suivantes : notons n le champ de vecteur normal à TS par la métrique $g(s)$,

(i) $\nabla_u n \in TS$, si $u \in TS$,

(ii) pour tout champ de vecteur u et v tangent à S en s:

$$g(s)(\nabla_u v, n) = g(s)(u, v) \ .$$

Le vecteur n s'appelle la normale affine. L'*invariant de Pick* de la surface est le 3-tenseur défini sur TS par

$$P(u, v, w) = (\nabla_u g)(v, w) \ .$$

Une λ-*sphère affine* est une surface telle que $\nabla_u n = \lambda u$ où n est la normale affine.

Nous avons alors

PROPOSITION 2.13. *Il existe une structure de Monge-Ampère sur la variété M, espace total du fibré $M \xrightarrow{\pi} N$ dont la fibre au dessus de chaque point n est constituée des paires (P, u) où P est un 2-plan de T_nN et u un vecteur de T_nN n'appartenant pas à P. Cette structure est telle que*

(i) *S est une λ-sphère affine si et seulement si la surface Σ décrite par les paires (T_sS, n_s) — n_s normale affine de S en s — est une solution de Monge-Ampère.*

(ii) *les surfaces rideaux se projettent sur des géodésiques de N.*

Preuve. Grâce à la connexion, on peut décrire l'espace tangent à M,

$$T_{(P,n)}M = TN \oplus (P^* \otimes TN/P) \oplus TN \ .$$

Grâce à n, on peut identifier TN/P avec $\mathbb{R}$, et enfin par la dualité dûe à la deux forme $i_n\omega$, on peut identifier P^* avec P.

Avec ces identifications, on pose

$$W_{(P,n)} = \big\{(u,v,\lambda u); u,v \in P)\big\} \ ,$$

et on considère la structure complexe

$$J \begin{cases} W \to W \\ (u,v,\lambda u) \longmapsto (-v,u,-\lambda v) \ . \end{cases}$$

La distribution V est donnée par $V = W \cap Ker(T\pi)$.

Les surfaces rideaux se caractérisent de la manière suivante : soit $\gamma(s)$ une géodésique pour $\nabla, (v(s), n(s))$ un champ de repère spécial-parallèle le long de $\gamma(s)$ complétant $\dot\gamma(s)$. On note $P(t,s)$ le 2-plan engendré par $\dot\gamma(s)$ et $v(s) + tn(s)$. On obtient une surface rideau par la paramétrisation

$$(t,s) \longmapsto \big(\gamma(s), P(t,s), n(s) + \lambda s\dot\gamma(s)\big) \ .$$

A partir de ces données, la proposition se démontre à l'aide de calculs faciles. □

D'autres problèmes s'interprètent en ces termes, comme celui des surfaces à courbure affines et invariant de Pick prescrits mais nous préférons arrêter là notre liste d'exemples.

3 Surfaces rideaux

Pour le moment nous nous plaçons dans le cas d'un problème à bord libre. Nous allons dans cette section prouver une conséquence importante de la condition d'intégrabilité (ii) de la définition d'une structure de Monge-Ampère. Ce que nous allons faire maintenant est local et nous pouvons supposer $JV = H$ orienté, complétons également nos notations sur les droites complexes incluses dans W en disant qu'elles sont *positives*, *nulles* ou *négatives* suivant que le déterminant de la projection sur H est positif, nul ou négatif. Une surface rideau est donc une courbe holomorphe dont tous les plans tangents sont nuls. Notre but est de montrer le

LEMME 3.1. *Soit M une variété de Monge-Ampère, et soit Σ une courbe holomorphe connexe dont tous les plans tangents sont positifs ou nuls, s'il existe un point de Σ dont le plan tangent est nul, alors Σ est rideau.*

Nous allons pour démontrer cette proposition introduire quelques outils auxiliaires. Raisonnons localement, et choisissons ∇ une connexion plate sur le fibré H, unitaire, préservant une forme volume ω_0, et une structure complexe J_0, associée à une métrique g_0. Choisissons une métrique sur M telle que, si p est une projection de TM sur H étendant la projection de W sur H parallèlement à V, on ait

$$\forall w \in W \ ; \qquad g(w,w) = g_0\big(p(w),p(w)\big) + g_0\big(p(Jw),p(Jw)\big) \ .$$

Soit $\overline{\nabla}$ sa connexion de Levi-Civita.

Si Σ est une courbe holomorphe et s un point de Σ, notons $f(s)$ le déterminant de la projection de $T_s\Sigma$ sur H_s. La proposition cruciale de cette section est la suivante :

Proposition 3.2. *La fonction f vérifie une équation de la forme*

$$\Delta f = f.g_1 + g_0(\overline{\nabla} f, g_2) + F(T\Sigma)$$

où g_1 et g_2 ne dépendent du germe de Σ, et F est une fonction définie sur $\mathbb{CP}(W)$.

3.3 Montrons que la proposition 3.2 entraîne le lemme 3.1. Si P est une droite nulle, par hypothèse, il existe un germe de surface rideau passant par P, sur ce germe f est constamment nulle et donc $F(P)$ est également nulle. F est donc nulle sur les droites nulles selon l'hypothèse d'intégrabilité. Par ailleurs, la fonction f peut se voir comme une fonction bien définie sur $\mathbb{CP}(W)$ dont l'ensemble des zéros est exactement l'ensemble des droites nulles. De plus, comme df est non nulle sur les droites nulles, nous en déduisons qu'il existe une fonction G définie sur $\mathbb{CP}(W)$ telle que

$$F = f.G \ .$$

Ainsi, si Σ est une courbe holomorphe, il existe un opérateur elliptique sans terme constant L que la restriction de f sur Σ vérifie

$$L(f) = 0 \ .$$

Si f est positive ou nulle, et s'annule en un point, le principe du maximum entraîne que f est constamment nulle. Ceci est exactement la traduction de l'énoncé du lemme.

3.4 Première étape de la démonstration de la proposition 3.2. Introduisons quelques nouvelles notations. Si

$$P \in \mathbb{CP}(W), \ \text{et si}\ f(P) \neq \pm\tfrac{1}{2} \ ,$$

il existe un unique repère $(e_1, e_2 = Je_1)$ de P tel que :

$$p(e_1) = \lambda_1 u_1$$
$$p(e_2) = \lambda_2 u_2 = \lambda_2 J_0 u_1$$

avec $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ et (u_1, u_2) orthonormé direct. Nous avons alors

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \big\|p(e_1)\big\|^2 + \big\|p(Je_1)\big\|^2 = \|e_1\|^2 = 1$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = f \ .$$

Si Σ est une courbe holomorphe, nous en déduisons l'existence d'un champ de repère (e_1, e_2) sur $\Sigma \setminus f^{-1}\big(\pm \frac{1}{2}\big)$, associé à (u_1, u_2) sur H le long de Σ et à des fonctions λ_1, λ_2.

Proposition 3.5. *Il existe une 1 forme α ne dépendant que du germe de Σ, un tenseur B élément de $W^* \otimes H^* \otimes H^*$, tels que*

$$\begin{aligned} df(Ju) = {} & f\alpha(u) + B\big(u, p(e_1), p(e_1)\big) \\ & + B\big(u, p(e_2), p(e_2)\big) + \tfrac{1}{2}\big(\sqrt{1-4f^2}\big)\Omega(u) \end{aligned}$$

où $\Omega(u)$ est la forme de connexion du champ de repère (u_1, u_2).

Preuve. Si v et w sont des champs de vecteurs tangents à W, l'expression

$$\begin{aligned} A(w,v) &= (d^\nabla p)(Jw, v) + (d^\nabla pJ)(v, w) \\ &= \nabla_{Jw}\big(p(v)\big) - \nabla_w\big(p \circ J(v)\big) \\ &\quad - p[Jw, v] - p \circ J[v, w] \end{aligned}$$

est un tenseur en w, v.

Si $\widetilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de Σ, et si $(\widetilde{\nabla}_u p)(v) = \nabla_u(pv) - p(\widetilde{\nabla}_u v)$ nous avons également:

$$A(w,v) = (\widetilde{\nabla}_{Jw} p)(v) - (\widetilde{\nabla}_w p)(Jv) \ .$$

Ces préliminaires étant faits, dérivons l'égalité

$$f = \omega_0\big(p(e_1), p(e_2)\big) \ .$$

On a alors

$$\begin{aligned} df(Ju) &= \omega_0\big(\nabla_{Ju}(p(e_1)), p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1), \nabla_{Ju}(p(e_2))\big) \\ &= \omega_0\big(p(\widetilde{\nabla}_{Ju} e_1), p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1), p(\widetilde{\nabla}_{Ju} e_2)\big) \\ &\quad + \omega_0\big((\widetilde{\nabla}_{Ju} p)(e_1), p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1), (\widetilde{\nabla}_{Ju} p)(e_2)\big) \end{aligned}$$

or $\widetilde{\nabla}_u e_i = \alpha_1(u) Je_i$ où α_1 est la 1 forme de connexion du repère (e_1, e_2), et donc

$$\begin{aligned} df(Ju) = {} & \omega_0\big(A(u, e_1), p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1), A(u, e_2)\big) \\ & + \omega_0\big((\widetilde{\nabla}_u p)(e_2), p(e_2)\big) + \omega_0\big((\widetilde{\nabla}_u p)(e_1), p(e_1)\big) \ . \end{aligned}$$

Examinons tout d'abord le premier terme, nous savons que pour tout v dans W on a $v = p(v) - Jp(Jv)$. Ce premier terme peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}&\omega_0\big(A(u,e_1),p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1),A(u,e_2)\big)\\&\quad = \omega_0\big(A(u,p(e_1)),p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1),A(u,p(e_2))\big)\\&\qquad - \omega_0\big(A(u,Jp(e_2)),p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1),A(u,Jp(e_1))\big)\ .\end{aligned}$$

Autrement dit, en posant

$$B(u,h,h') = \omega_0\big(h,A(u,Jh')\big)$$

et, en remarquant que

$$\omega_0\big(A(u,p(e_1)),p(e_2)\big) + \omega_0\big(p(e_1),A(u,p(e_2))\big) = f\alpha_2(u)$$

où

$$\alpha_2(u) = \omega_0\big(A(u,u_1),u_2\big) - \omega_0\big(A(u,u_2)u_1\big)$$

nous obtenons que ce premier terme se réécrit

$$(1) = B\big(u,p(e_1),p(e_1)\big) + B\big(u,p(e_2),p(e_2)\big) + f\alpha_2(u)$$

où $B \in W^* \otimes H^* \otimes H^*$, et α_2 ne dépend que de $T\Sigma$.

Examinons le deuxième terme;

$$\begin{aligned}&\omega_0\big((\widetilde{\nabla}_u p)(e_2),p(e_2)\big) + \omega_0\big((\widetilde{\nabla}_u p)(e_1),p(e_1)\big)\\&\quad = \omega_0\big(\nabla_u(p(e_2)),p(e_2)\big) + \omega_0\big(\nabla_u(p(e_1)),p(e_1)\big)\\&\qquad + 2\alpha_1(u)\omega_0\big(p(e_1),p(e_2)\big)\\&\quad = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\Omega(u) + 2f\alpha_1(u)\ .\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4f^2}$$

et de poser $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2$ pour obtenir l'énoncé de la proposition. □

3.6 Deuxième et dernière étape. Pour obtenir le laplacien, il nous faut prendre la différentielle extérieure de cier la forme $df \circ J$. Le seul terme délicat a dériver est l'expression

$$\beta(u) = B\big(u,p(e_1),p(e_1)\big) + B\big(u,p(e_2),p(e_2)\big)\ .$$

Nous avons, en voyant B comme appartenant à $\wedge^1(W) \otimes H^* \otimes H^*$

$$\begin{aligned}d\beta(u,v) = \sum_i \big[&d^\nabla B(u,v)(p(e_i),p(e_i))\\&+ B(v,\nabla_u p(e_i),p(e_i)) + B(v,p(e_i),\nabla_u p(e_i))\\&\quad - B(u,\nabla_v p(e_i),p(e_i)) - B(u,p(e_i),\nabla_v p(e_i))\big]\ .\end{aligned}$$

Or

$$\nabla_u\big(p(e_i)\big) = d\lambda_i(u)u_i + \Omega(u)J_0p(e_i)$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} d\beta(u,v) = \sum_i &\big[d^\nabla B(u,v)(p(e_i),p(e_i)) + (\lambda_i d\lambda_i \wedge B_i)(u,v)\big] \\ &+ (\Omega \wedge C)(u,v) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C(v) &= \sum_i B\big(v, J_0p(e_i), p(e_i)\big) + B\big(v, p(e_i), J_0p(e_i)\big) \\ B_i(v) &= B(v, u_i, u_i)\ . \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente

$$\Omega(u) = \frac{2}{\sqrt{1-4f^2}}\Big(df(Ju) - f\alpha(u) - \sum_i B\big(u, p(e_i), p(e_i)\big)\Big)$$

par ailleurs

$$\lambda_1 d\lambda_1 = \frac{2f\,df}{\sqrt{1-4f^2}} = -\lambda_2 d\lambda_2\ .$$

En regroupant les termes suivant leurs affinités, nous obtenons que:

$$\begin{aligned} d\beta(u,v) = f\alpha_3(u,v) &+ (df \wedge \alpha_4)(u,v) \\ &+ F(T\Sigma)g(u,Jv) \end{aligned}$$

où α_3 et α_4 ne dépendent que du germe de Σ, et F de $T\Sigma$. L'expression explicite de $F(P)$ utilise B, $d^\nabla B$ et le repère (e_1,e_2).

Ici nous supposons implicitement que $T\Sigma$ est toujours différent de H, de façon à ce que $f \neq \frac{1}{2}$.

Enfin $d\Omega$ étant nulle, nous avons

$$d\big(f\alpha + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4f^2}\,\Omega\big) = f\alpha_5 + df \wedge \alpha_6$$

où α_5 et α_6 ne dépendent que du germe de Σ.

Nous obtenons donc bien une formule du type de celle annoncée dans la proposition. □

4 Convexité du bord

Nous allons démontrer une conséquence importante des conditions de convexité au bord de notre définition, formant le pendant du lemme 3.1 pour les points du bord, dans le cas du problème à bord convexe. Ce que nous allons faire maintenant est à nouveau local.

Supposons donc que M est un ouvert à bord dans une variété de Monge-Ampère sans bord N, et qu'il existe une fonction λ ayant 0 comme valeur régulière telle que $M = \lambda^{-1}[0, +\infty[$.

Rappelons qu'alors la condition (v) est :

(v) si Σ est une courbe rideau passant par $T_xD \cap V$ pour $x \in D$, alors $\lambda|_\Sigma$ atteint un maximum en x et sa hessienne en ce point est non nulle. En particulier la surface rideau reste à l'extérieur de M.

LEMME 4.1. *Soit S une courbe holomorphe connexe dans N, dont tous les plans tangents sont positifs ou nuls et qui vérifie*

(a) $\emptyset \neq \partial S \subset D$,
(b) $\lambda|_S$ *est positive ou nulle au voisinage de* ∂S.

Alors l'espace tangent à S est partout positif.

Preuve. D'après le lemme 3.1, si un point de l'intérieur de S avait un plan tangent nul, la surface serait rideau. Ainsi, il suffit de montrer que les plans tangents le long du bord de S ne sont jamais nuls.

Soit donc x un point de ∂S en lequel TS est nulle. Soit u un vecteur non nul de $T_xS \cap T_xD$, montrons tout d'abord que ce vecteur est vertical. S'il ne l'était pas, T_xS contiendrait un vecteur vertical v indépendant au sens réel de u. La droite complexe TS, engendrée en tant qu'espace vectoriel réel par u et v serait donc incluse dans $TD + V$. Par la condition (iv) de la définition, cette droite contient $TD \cap V$. Or, TD étant réel, $TS \cap TD$ est de dimension 1. Ainsi $TS \cap TD \subset V$ et donc u serait inclus dans V.

Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc de montrer que le vecteur tangent au bord de S ne peut être vertical.

Raisonnons par l'absurde et soit v un vecteur non nul appartenant à $T_x\partial S \cap V$. Soit Σ la surface rideau passant par v. D'après l'hypothèse (v), la fonction $\lambda|_\Sigma$ a un maximum en x de hessienne H_Σ non nul.

Étendons J en un endomorphisme quelconque de TM, endomorphisme que nous appellerons également J, et considérons la 1-forme $\omega = d\lambda \circ J$. Nous avons alors que $d\omega|_{T_x\Sigma} = -trace(H_\Sigma)$ est strictement négative sur $T_x\Sigma$. N'oublions pas que $T_x\Sigma = T_xS$ et raisonnons maintenant sur S. La fonction $\lambda|_S$ a un point critique en x, est nulle sur le bord de S et positive ou nulle sur S au voisinage de x d'après l'hypothèse (b). Son laplacien en x est donc positif ou nul, et dès lors le signe de $d\omega|_{T_x\Sigma}$ est positif ou nul ce qui nous donne la contradiction recherchée. □

5 Bons voisinages; bons disques

Notre but est désormais de construire de bons voisinages, c'est-à-dire pour tout point x_0 de notre espace M, un voisinage U de x_0 telle que si Σ est une surface fermée (en tant que sous-ensemble) de M, $U \cap \Sigma$ soit homéomorphe à un disque et d'aire bornée. Ces bons voisinages nous permettrons plus tard d'appliquer le lemme de Schwarz.

Précisons une notation : nous désignons par $Fr(A) = \bar{A} \setminus A$, la frontière d'un ensemble A, c'est-à-dire la différence ensembliste entre cet ensemble et son adhérence. Il ne faut pas confondre cette frontière avec le bord en tant que bord d'une sous-variété immergée que nous notons par ∂A.

Nous allons donc montrer :

Lemme 5.1. *Soit M une variété de Monge-Ampère, il existe alors pour tout x_0 de M un ouvert U contenant un voisinage compact K de x_0, une constante C_0, tels que si Σ est solution de Monge-Ampère, fermée en tant que sous-ensemble de M et intersectant K alors toute composante connexe Σ_0 de $\Sigma \cap U$ intersectant K vérifie*

(i) *Σ_0 est homéomorphe au disque,*
(ii) *$Fr(\Sigma_0) \subset Fr(U)$,*
(iii) *Aire $(\Sigma_0) \leq C_0$.*

Un tel voisinage U sera appelé un *bon voisinage*, si de plus il est calibré, c'est-à-dire compact, et tel qu'il existe une 1-forme β telle que pour tout vecteur v dans $W_{|U}$ on a $d\beta(v, Jv) > 0$. Un disque holomorphe Σ_0 vérifiant les conclusions du lemme sera appelé un *bon disque* pour Σ.

Nous allons avoir besoin d'une proposition analogue pour les points du bord :

Lemme 5.2. *Soit M une variété de Monge-Ampère de condition à bord convexe (D, λ), il existe alors pour tout x_0 de D un ouvert U contenant un voisinage compact K de x_0 dans ∂M, une constante C_0, tels que si Σ est une solution de Monge-Ampère à bord, fermée en tant que sous-ensemble de M et intersectant K alors toute composante connexe Σ_0 de $\Sigma \cap U$ dont le bord intersecte K vérifie*

(i) *Σ_0 est homéomorphe au disque*
(ii) *$\partial\Sigma_0$ est homéomorphe à un intervalle,*
(iii) *$Fr(\Sigma_0) \subset Fr(U)$,*
(iv) *Aire $(\Sigma_0) \leq C_0$.*

Nous adopterons les mêmes définitions, c'est à dire qu'un tel voisinage U sera appelé un *bon voisinage*, si de plus il est calibré (*cf.* appendice). Dans l'appendice, nous verrons que on peut toujours choisir un voisinage, éventuellement plus petit qui soit calibré. Un disque holomorphe Σ_0 vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) du lemme pour un bon voisinage U sera appelé un *bon disque* pour Σ

5.3 Choix de coordonnées locales. Fixons un voisinage $\mathcal{O}$ de x_0 de telle sorte que $\mathcal{O}$ soit difféomorphe à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$, x_0 étant envoyé sur $(0,0)$, le facteur $\mathbb{R}^p$ correspondant au feuilletage $\mathcal{L}$, associé à la distribution L telle que $L \cap W = V$. Soit W la distribution d'holonomie, munie d'une structure complexe J, on peut donc écrire

$$\forall\, x \in \mathcal{O}\ , \quad W_x = V_x \oplus H_x\ , \quad V_x = W_x \cap T_x\mathcal{L}\ , \quad H_x = JV_x\ .$$

Choisissons une projection linéaire p de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ sur H_0 contenant $\mathbb{R}^p$ dans son noyau, et restreignons au besoin $\mathcal{O}$, de façon à ce que $Ker(p|_{W_x}) = V_x$. Ainsi p est une bijection de H_x dans H_0 et on montre aisément qu'il existe des sections A, B de $H_0^* \otimes W_x$ tel que pour tout X de W_x, on ait

$$X = A_x p(X) + B_x p(JX)\ .$$

Ceci suffit si x n'appartient pas à D. Si maintenant x est un point du bord, nos coordonnées locales doivent tenir compte de la présence du bord de la manière suivante.

Comme $dim(TD \cap L) = dim(TD \cap V) = 1$ car $TD \subset W$, en restreignant au besoin $\mathcal{O}$, on peut choisir ces coordonnées locales de telle sorte que D soit un sous espace affine. Ainsi $TD \cap L$ est parallèle le long de D. Enfin, nous pouvons encore choisir ces coordonnées de façon à ce que $J(TD \cap L)$ soit parallèle le long de D.

En ce qui concerne la projection p, nos choix impliquent $dim(p(D)) = 1$ car

$$dim\big(Ker(p) \cap TD\big) = dim(V \cap TD) = 1\ .$$

Une fois ces coordonnées locales construites, choisissons une métrique sur H_0, d'élément d'aire ω et de structure complexe J_0. Construisons maintenant une métrique riemannienne sur $\mathcal{O}$ telle que si $u \in W_x$

$$\|u\|^2 = \big\|p(u)\big\|^2 + \big\|p(J_x u)\big\|^2\ .$$

Remarquons maintenant que l'ensemble des droites complexes de W_x transverses à V_x a deux composantes connexes que l'on peut caractériser de la manière suivante : notons q la forme quadratique de W_x définie par

$$\begin{aligned} q(u) &= \omega\big(p(u), p(Ju)\big) \\ &= \big\langle p(u), J_0 p(Ju)\big\rangle \ . \end{aligned}$$

On a $q(Ju) = q(u)$, et nous distinguerons nos deux composantes connexes en parlant des droites complexes (et des solutions de Monge-Ampère) positives si q est positive sur cette droite complexe négative sinon. Ceci est bien sûr en accord avec 3.1.

5.4 Contrôle de l'aire. Nous allons tout d'abord démontrer un lemme préliminaire crucial pour contrôler l'aire et la topologie locale de nos courbes holomorphes.

Désignons par $B(\varepsilon)$ la boule de centre 0 de rayon ε. Rappelons que nous avons étendu de manière arbitraire J_x en une application de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ dans W_x

LEMME 5.5. *Il existe ε_0, strictement positif, tel que pour toute solution de Monge-Ampère positive, S, incluse dans $B(\varepsilon_0)$, l'application ψ_t définie de $B(\varepsilon_0)$ dans H_0 par*

$$\psi_t(x) = p(x) + tJ_0 p(J_x x)$$

vérifie, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\forall\, u \in TS\ ; \quad \big\|T\psi_t(u)\big\|^2 \geq \tfrac{1}{2}\big(\|p(u)\|^2 + t^2\|p(Ju)\|^2\big)\ .$$

En particulier, pour tout $t \in [0,1]$, $T\psi_t|_{TS}$ est inversible, et, de plus, si l'on pose $\psi = \psi_1$, nous avons

$$(*) \qquad \forall\, u \in TS\ ; \quad \big\|T\psi(u)\big\| \geq \tfrac{1}{2}\|u\|\ .$$

Preuve. Soit $u \in TS$, et considérons le vecteur $M_t(u) = p(u) + tJ_0 p(Ju)$. Nous avons

$$\big\|M_t(u)\big\| \leq \big\|p(u)\big\| + t\big\|p(Ju)\big\|\ .$$

Par ailleurs puisque S est positive

$$\big\|M_t(u)\big\|^2 \geq \big\|p(u)\big\|^2 + t^2\big\|p(Ju)\big\|^2\ .$$

Ensuite

$$\begin{aligned} T\psi_t(u) &= M_t(u) + tN(u)\ ,\ \text{où} \\ N(u) &= J_0 p\big((DJ)(u)\cdot x\big)\ . \end{aligned}$$

Remarquons qu'il existe μ_1 telle que $\|N(u)\| \leq \mu_1\|u\|.\|x\|$. Rappelons ensuite que par construction $\|u\| \leq \|p(u)\| + \|p(Ju)\|$. Si nous choisissons ε de façon à ce que $\mu_1\varepsilon \leq 1/8$, nous obtenons

$$\big\|N(u)\big\| \leq \tfrac{1}{8}\big(\|p(u)\| + \|p(Ju)\|\big)\ .$$

Par ailleurs, rappelons que, pour tous nombres a, b

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 \ ,$$

et donc pour tout $t \in [0,1]$ et tous nombres c et d positifs

$$\frac{t}{4}(c+td)(c+d) \leq \frac{1}{4}(c+td)^2 \leq \frac{1}{2}(c^2 + d^2t^2) \ .$$

Nous pouvons terminer nos calculs

$$\begin{aligned} \big\|T\psi_t(u)\big\|^2 &\geq \big\|M_t(u)\big\|^2 - 2t\big\|M_t(u)\big\| \cdot \big\|N(u)\big\| + t^2\big\|N(u)\big\|^2 \\ &\geq \|p(u)\|^2 + t^2 \|p(Ju)\|^2 \\ &\qquad - \frac{t}{4}(\|p(u)\| + t\,\|p(Ju)\|)(\|p(u)\| + \|p(Ju)\|) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|p(u)\|^2 + t^2\,\|p(Ju)\|^2) \end{aligned}$$ □

Ceci vaut pour les surfaces positives, pour les surfaces négatives, il faut changer J_0 en $-J_0$.

5.6 Preuve du lemme 5.1. Ce lemme est plus simple à démontrer que le lemme “à bord”. Choisissons $\varepsilon \leq \varepsilon_0/10$, pour le ε_0 du lemme 5.5, et un voisinage compact K de x tels que la distance de K au bord de $\mathcal{O}$ soit strictement supérieur à 100ε. Soit alors $U = \mathcal{O} \cap \psi^{-1}(B(\varepsilon))$ et restreignons au besoin K de manière à ce que $K \subset U$. Soit maintenant Σ une solution positive de Monge-Ampère dans $\mathcal{O}$, et Σ_0 une composante connexe de $\Sigma \cap U$ intersectant K.

L'inégalité $(*)$ entraîne que ψ est un homéomorphisme de Σ_0 sur $B(\varepsilon)$, et qu'il existe μ_2 ne dépendant que de ε tel que

$$\text{Aire } (\Sigma_{x_0}) \leq \mu_2 \ .$$

Le fait que ψ est un homéomorphisme vient de ce que chaque point de $B(\varepsilon)$ peut être joint à $\psi(x)$ par une courbe de longueur plus petite que 2ε. L'image inverse d'une telle courbe partant de x sur Σ_0 a donc une longueur plus petite que 4ε par $(*)$. Comme $d(x, \partial\mathcal{O}) > 10\varepsilon$ et que Σ est fermée en tant que sous-ensemble de $\mathcal{O}$, on peut relever cette courbe jusqu'au bout. On en déduit que ψ est une application propre et surjective de Σ_0 sur $B(\varepsilon)$. □

5.7 Position du bord. Avant d'entamer la démonstration du lemme à bord, nous avons besoin de quelques précisions préliminaires.

Choisissons comme précédemment $\varepsilon \leq \varepsilon_0/10$, et un voisinage compact K de x tels que la distance de K au bord de $\mathcal{O}$ soit strictement supérieur à 100ε. Soit alors $U = \mathcal{O} \cap \psi^{-1}(B(\varepsilon))$ et choisissons K de manière à ce que $K \subset U$. Soit maintenant Σ une solution positive de Monge-Ampère dans $\mathcal{O}$, et Σ_0 une composante connexe de $\Sigma \cap U$ dont le bord intersecte K.

La proposition suivante va nous préciser ce que nous pouvons dire de $\psi(\partial\Sigma)$. Rappelons tout d'abord que $p(D)$ est de dimension 1, un supplémentaire étant donné par la direction D_1 parallèle à $J_0J(D \cap V)$. D'après la condition (vi) de la définition des solutions de Monge-Ampère $p(D)$ a une orientation et D_1 aussi.

Ces orientations nous permettent d'introduire la définition suivante. Choisissons des coordonnées (x, y) sur H_0 de telle sorte que $p(D)$ soit l'axe des abscisses Ox et D_1, l'axe des ordonnées Oy. Si F est une immersion d'une surface S dans H_0, telle que, pour toute composante connexe, b de ∂S, $F(b)$ est le graphe d'une fonction f_b, nous dirons que $F(S)$ est *localement au-dessus* de $F(\partial S)$, si tout point de ∂S possède un voisinage U tel que

$$F(U) \subset \left\{(x, y)/y \geq f_b(x)\right\} ,$$

où b est la composante connexe de ∂S contenant x.

La proposition importante de ce paragraphe est la suivante :

PROPOSITION 5.8. *$\psi(\partial\Sigma_0)$ est transverse à tout segment parallèle à D_1 ; en particulier, chaque composante connexe de $\psi(\partial\Sigma_0)$ est un graphe au dessus de $p(D)$. De plus, $\psi(\Sigma_0)$ est localement au dessus de $\psi(\partial\Sigma_0)$.*

Preuve. Par définition, le long du bord de Σ_0, le plan tangent à Σ_0 n'est pas vertical.

Par choix de nos coordonnées locales, $\partial\Sigma_0$ est une réunion finie d'arcs de courbes tracés dans le plan D et transverse au feuilletage donné par la famille de droites verticales $D \cap V$.

Examinons maintenant l'image de $\partial\Sigma_0$ par ψ_t. Puisque $J(TD \cap V)$ est parallèle le long de D, il s'ensuit que $\psi_t(\partial\Sigma_0)$ est une réunion d'arcs de courbes graphes dans H_0 au dessus de $p(D)$ transversalement à D_1, pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, chaque composante connexe de $\psi(\partial\Sigma_0)$ est une courbe plongée.

De plus, $\psi_t|_{\Sigma_0}$ est un difféomorphisme local pour tout $t \in [0, 1]$. Comme pour $t = 0$, $\psi_0 = p$, il nous suffit par continuité de démontrer la proposition 5.9, pour montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\psi_t(\Sigma_0)$ est localement au dessus de $\psi_t(\partial\Sigma_0)$. □

PROPOSITION 5.9. *Σ_0 est une solution de Monge-Ampère à bord, $p(\Sigma_0)$ est localement au-dessus de son bord $p(D)$.*

Preuve. Rappelons que nous avons une orientation sur $p(D)$ qui coïncide avec l'orientation de $p(\partial\Sigma_0)$ d'après la condition (vi) de la définition des courbes de Monge-Ampère à bord. Enfin, la surface Σ_0 étant une courbe positive, p préserve l'orientation, et donc $p(\Sigma_0)$ est au dessus de son bord $p(\partial\Sigma_0)$. $\square$

5.10 Preuve du lemme 5.2. L'inégalité $(*)$ entraîne que ψ est un homéomorphisme local de Σ_0 sur $B(\varepsilon)$. Il nous reste à montrer que ψ est un homéomorphisme sur une portion de disque délimitée par une composante connexe de $\psi(\partial\Sigma_0)$ et une partie du bord de $B(\varepsilon)$. Nous aurons alors immédiatement d'après $(*)$ qu'il existe C_0 ne dépendant que de ε tel que

$$\mathrm{Aire}(\Sigma_{x_0}) \leq C_0 \ .$$

Notons pour tout $t \in B(\varepsilon)$, c_t le segment de droite parallèle à la direction $D_1 = J_0J(D \cap V)$ orienté positivement, partant de t et allant jusqu'au bord de $B(\varepsilon)$, et démontrons la

Proposition 5.11. *Soit $z \in \Sigma_0$ tel que $d(z, Fr(\mathcal{O})) \geq 10\varepsilon$. Alors en posant $c = c_{\psi(z)}$ on peut trouver une courbe $\bar{c}$ partant de z tracée sur Σ_0 telle que $\psi \circ \bar{c} = c$.*

Preuve. Lorsque l'on cherche à relever c par l'homéomorphisme local ψ, seules deux obstructions pourraient apparaître.

La première serait que, avant que c n'atteigne le bord de $B(\varepsilon)$, le relevé $\bar{c}$ rencontre $Fr(\mathcal{O})$. Mais ceci est impossible, la longueur de tout relevé est, à cause de l'inégalité $(*)$, plus petite que deux fois la longueur de c et donc que 4ε. En particulier, on en déduirait que $d(z, Fr(\mathcal{O})) \leq 4\varepsilon$ ce qui contredit notre hypothèse sur z.

La deuxième serait que, toujours avant que c n'atteigne le bord de $B(\varepsilon)$, le relevé aboutisse en un point de $\partial\Sigma_0$. Mais ceci est également impossible. D'après 5.8, nous aurions alors que c arrive par en dessus de $\partial\Sigma_0$, ce qui est contradictoire avec l'orientation suivie sur c. $\square$

Modifions éventuellement un petit peu ε de telle sorte que $\partial B(\varepsilon)$ soit transverse à $\psi(\partial\Sigma_0)$.

Fixons un point $y \in K \cap \partial\Sigma_0$. Soit donc γ la composante connexe de $\psi(\partial\Sigma_0)$ passant par $\psi(y)$.

Nous avons maintenant tout en main pour montrer que γ est un arc de courbe plongée - cela nous le savons déjà - dans $B(\varepsilon)$ dont les extrémités sont dans $\partial B(\varepsilon)$, et que ψ est un homéomorphisme de Σ_0 dans la composante connexe de $B(\varepsilon) \setminus \gamma$ située au dessus de γ.

Notons pour chaque t de γ, u_t, l'arc de courbe formé de la réunion des segments de droites c_t, $c_{\psi(y)}$ et de la plus courte portion de $B(\varepsilon')$ joignant les extrémités de ces segments.

Soit E, l'ensemble des points $t \in \gamma$ tels que la courbe u_t puisse être relevée toute entière par ψ dans Σ_0 en partant de y, en une courbe située - hormis ces extrémités - dans l'intérieur de Σ.

Grâce à la proposition 5.11, E est non vide car il contient $\psi(y)$.

Pour chaque $t \in E$, notons $\bar{\gamma}(t)$ l'extrémité du relevé $\bar{u}_t$ de u_t partant de y. Remarquons que la longueur de u_t est pus petite que 10ε, celle de $\bar{u}_t$ est donc plus petite que 20ε. Ainsi $d(\bar{\gamma}(t), Fr(\mathcal{O})) \geq 10\varepsilon$, puisque $d(y, Fr(\mathcal{O}) \geq 100\varepsilon$.

L'ensemble E est bien un ouvert de γ, ψ étant un homéomorphisme local. Montrons que E est fermé. Soit donc $t_n \in E$ convergeant vers t, les relevés $\bar{u}_n$ des courbes u_{t_n} sont de longueur plus petite que 20ε. Après extraction d'une sous-suite, les courbes $\bar{u}_n$ converge dans Σ vers une courbe $\bar{u}$ joignant y à un point $z \in \partial\Sigma_0$ tel que $d(z, Fr(\mathcal{O})) \geq 10\varepsilon$. La courbe $\bar{u}$ est dans l'intérieur de Σ. En effet, sinon elle serait quelque part tangente à $\partial\Sigma$. Mais ceci est impossible : sa projection est formée de portions de $\partial B(\varepsilon)$ - transverse à $\psi(\partial\Sigma_0)$ par hypothèse - et de segments parallèles à $D_1 = J_0 J(TD \cap V)$ dont nous avons vu au début de ce paragraphe en 5.11 qu'ils étaient également transverses à $\psi(\partial\Sigma_0)$.

Nous venons de montrer que $E = \gamma$. Un relevé de γ est maintenant donné par la courbe $\bar{\gamma}$. Nous avons vu que cette courbe vérifie $d(\bar{\gamma}, Fr(\mathcal{O})) \geq 10\varepsilon$. Ceci nous permet d'affirmer tout d'abord que les extrémités de γ sont dans $\partial B(\varepsilon)$. La proposition 5.11 nous permet enfin d'affirmer que ψ est surjective et propre de Σ_0 dans la portion de disque délimitée par γ et la portion de $\partial B(\varepsilon)$ joignant les extrémités de γ située au dessus de γ.

6 Démonstration des résultats principaux

6.1 Démonstration du théorème 1.2. Ce théorème découle de 6.2.

On se donne à partir de maintenant un bon voisinage U de x_0 dans M, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points convergeant vers x_0, $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de bons disques holomorphes passant par x_n. Nous noterons alors f_n, la représentation conforme de Σ_n envoyant le centre du disque de Poincaré Δ sur x_n. Nous allons alors montrer

Proposition 6.2. *Après extraction d'une sous-suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact vers une immersion f_0 telle que $f_0(\Delta) \cap U$ est fermée dans U, de plus nous avons l'alternative suivante*

(i) *soit $f_0(\Delta)$ est une solution de Monge-Ampère,*
(ii) *soit $f_0(\Delta)$ est une surface rideau.*

Preuve. Nous allons montrer ceci en plusieurs étapes, en suivant la stratégie de [L1], [S] expliquée dans l'appendice de [L2]. Tout d'abord d'après le lemme de Schwarz, puisque U est calibré par une 1-forme, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge —modulo une sous-suite— vers une application pseudo-holomorphe f_0. D'après le lemme A4.1 de [L2] , $f_0(Fr\Delta) \subset FrU$ et en particulier f_0 n'est pas constante. Nous pouvons supposer que tous les disques Σ_n sont positifs au sens de 5.1. Or l'ensemble des droites complexes positives de $\mathbb{CP}(W_x)$, est inclus dans un compact d'une carte projective de $\mathbb{CP}(W_x)$.

En particulier, si nous notons $\bar{f}_n$ le relevé par l'application de Gauss de f_n dans $\mathbb{CP}(W_x)$ nous en déduisons par le lemme A1.2, que la suite $(\bar{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge —modulo une sous-suite—. Enfin, le lemme A3.1 assure que f_0 est une immersion. Il ne nous reste plus qu'à montrer l'alternative. $f_0(\Delta)$ est une solution de Monge-Ampère, où $f_0(\Delta)$ est une surface rideau. Mais ceci est bien sûr un corollaire de 3.1. □

6.3 Démonstration du théorème 1.4. Nous nous donnons maintenant $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de Monge Ampère à bord et $(x_n \in \partial\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de ces solutions, telle que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x_0 de D

Considérons alors U le bon voisinage de x_0, et le voisinage compact K de x_0 qui lui est associé. On considére alors $\bar{\Sigma}_n$ la composante connexe de Σ_n contenant x_n.

A partir d'un certain rang $\partial\bar{\Sigma}_n$ intersecte K en un point y_n. D'après le lemme 5.1, $\bar{\Sigma}_n$ est donc un bon voisinage, c'est-à-dire que nous avons

(i) $\bar{\Sigma}_n$ est homéomorphe au disque
(ii) $\partial\bar{\Sigma}_n$ est connexe et inclus dans la variété totalement réelle D,
(iii) $\emptyset \neq Fr(\bar{\Sigma}_n) \subset Fr(U)$,
(iv) Aire $(\bar{\Sigma}_n) \leq C_0$.

Nous pouvons utiliser alors la représentation f_n conforme de $\bar{\Sigma}_n$ par un demi disque envoyant 0 sur y_n. Le lemme de Schwarz-Gromov à bord (*cf.* appendice 9.1) assure alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, après extraction éventuelle d'une sous-suite, converge C^∞ sur tout compact vers une application holomorphe f_0. A cause de (iii) — qui garantit que le diamètre extrinsèque de $\bar{\Sigma}_n$ est minorée uniformément — de (iv) et du lemme A4.1 de [L2], f_0 n'est pas constante. Le lemme A3.1 de [L2] garantit maintenant que f_0 est une immersion. Enfin le lemme 3.1, nous assure que Σ_0 est bien une solution de Monge-Ampère puisque les droites complexes tangentes ne peuvent être nulles.

6.4 Un raffinement du théorème 1.4. Nous avions promis un énoncé plus lisse dans un cas particulier. Considérons la condition renforcée
(iii-a) $TD + V = T\partial M \cap W$.

Nous avons déjà remarqué que la condition (vi) est automatique. Une autre conséquence de cette condition est qu'aucune solution de Monge-Ampère ne peut-être tangente à ∂M le long de D. En effet, les seules droites complexes de $T\partial M$ sont nulles. Rappelons par ailleurs que la condition (v) exclut qu'une surface rideau puisse être tangente à ∂M.

En particulier, en procédant comme pour les courbes sans bord nous pouvons définir sans ambiguïté le représentant d'une solution de Monge-Ampère à bord, les points d'une solutions et une toplogie séparée sur l'espace des paires (x, Σ), où x est un point de Σ.

Nous avons alors le

Théorème 6.5. *Soit M une variété de Monge-Ampère vérifiant la condition* (iii-a), $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de solutions,* $(x_n \in \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points telle que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans M après extraction d'une sous-suite, la suite* $(x_n, \Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors vers* (x_0, Σ_0)*, tel que Σ_0 est, soit une solution de Monge-Ampère, soit une surface rideau. Si de plus $x_0 \in D$, Σ_0 est une solution de Monge-Ampère.*

Preuve. Procédons comme précédemment et considérons alors U le bon voisinage de x_0, et le voisinage compact K de x_0 qui lui est associé. On considére alors $\bar{\Sigma}_n$ la composante connexe de Σ_n contenant x_n.

Par rapport au théorème précédent, la seule chose à démontrer est qu'à partir d'un certain rang $\partial\bar{\Sigma}_n$ intersecte K.

Supposons le contraire. Construisons une métrique riemanienne complète sur $G = int(K) \cup (U \setminus \partial M)$ où $int(K)$ est l'intérieur de K. Nous obtenons dans ce cas que $(\bar{\Sigma}_n^0 = \bar{\Sigma}_n \setminus \partial\bar{\Sigma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de solutions sans bord du problème de Monge-Ampère restreint à G. Notre résultat principal pour le problème à bord libre nous assure alors que modulo une sous-suite , la suite $(\bar{\Sigma}_n^0, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de Monge Ampère ou une surface rideau Σ_0 passant par x_0. De plus, l'espace tangent à Σ_0 en x_0 est nécessairement tangent à ∂M. Or une telle droite complexe est nécessairement verticale (*cf.* (i) de la définition). La surface Σ_0 est donc rideau. Ceci est impossible, puisque il ne peut y avoir de surfaces rideaux tangentes intérieurement à ∂M.

7 Le cas des graphes

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à un cas particulier : nous supposerons qu'il existe une submersion propre $M \xrightarrow{\pi} S$, où S est une surface à bord ; telle que

(i) $V \subset \ker(T\pi)$
(ii) $T\pi$ est une bijection de H sur TS.
(iii) la condition au bord D est incluse dans $\pi^{-1}(\partial S)$.

En particulier, nous nous intéresserons aux solutions de Monge-Ampère qui sont des sections du fibré $\pi : M \to S$. Remarquons maintenant qu'une surface rideau se projette sur une courbe de S, remarquons également que la condition renforcée (iii-a) de 6.4 est vérifiée. Dans cette situation nous avons :

Théorème 7.1. *Si l'aire de la suite des $(\sigma_n(S))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée indépendamment de n, la suite de sections $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞sur tout compact vers une section σ_0, solution de Monge-Ampère, après éventuellement extraction d'une sous-suite.*

Plus généralement, nous dirons qu'un point $x \in S$ est *régulier*, si la suite de sections converge C^∞ sur un voisinage de x, et *singulier* dans le cas contraire. Notre but est de décrire la structure de l'ensemble des points singuliers. Introduisons la définition suivante qui généralise celle d'ensemble laminé en autorisant que des feuilles puissent se toucher : un ensemble fermé E d'une surface S est *laminé-collé* par une famille $\mathcal{C}$ de courbes C^∞ si

(i) E est la réunion des courbes c de $\mathcal{C}$,
(ii) tout point de E admet un voisinage ouvert U tel que pour toute courbe c de $\mathcal{C}$, chaque composante connexe de $c \cap U$ est plongée dans U,
(iii) pour tout ouvert U de S tel que $\bar{U}$ est homéomorphe au disque, et tout arc γ d'une courbe c de $\mathcal{C}$, inclus dans U et dont les extrémités appartiennent à ∂U, deux points appartenant à deux composantes disjointes de $\partial U \setminus \partial\gamma$ ne peuvent être joints par un arc de courbe de $\mathcal{C}$ inclus dans U.

Cette dernière condition dit essentiellement que si deux courbes de $\mathcal{C}$ peuvent s'intersecter, après les avoir bougées un peu elles ne se touchent plus.

On dit également que $\mathcal{C}$ est une *lamination-collante* de E.

Le résultat suivant précise la structure des points singuliers.

Théorème 7.2. *Après extraction d'une sous-suite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des points singuliers est laminé collé par les projections des surfaces rideaux et est disjoint de ∂S.*

Nous allons démontrer ces deux résultats, et en conclusion de ce paragraphe, énoncer ce qui reste vrai dans le cas où π n'est pas propre : corollaire 7.5.

7.3 Préliminaires, extraction d'une sous-suite. En utilisant notre résultat principal, nous pouvons extraire une sous-suite telle que pour tout compact K de M, tout bon voisinage inclus dans K, et toute suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bons disques pour Σ_n passant par K; $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact soit vers une surface rideau, soit vers une courbe holomorphe qui, puisque $T\pi$ est un isomorphisme entre H et TS, est localement un graphe au-dessus de S. Nous avons en particulier pour cette sous-suite, l'équivalence des propriétés suivantes

a) x est singulier ;
b) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x tel que $(\sigma_n(S), \sigma_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface rideau ;
c) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers x, la suite $(\sigma_n(S), \sigma_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une surface rideau si $(\sigma_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La projection étant propre, la famille de courbes $\mathcal{C}$ constituée des projections des surfaces rideaux obtenues à la limite, ne contient que des courbes immergées dont on montre aisément qu'elle vérifie (i) et (ii) de la définition d'une lamination collante de l'ensemble E des points singuliers.

7.4 Démonstration du théorème 7.2. Il reste à vérifier la condition (iii) de la définition d'une lamination collante. Supposons donc que deux arcs de courbes γ_1 et γ_2, projections de surfaces rideaux S_1 et S_2 s'intersectent véritablement, c'est-à-dire qu'il existe un disque D :

(i) $(\gamma_i) \subset \operatorname{int}(D)$
(ii) $\partial\gamma_i \subset \partial D$
(iii) les deux extrémités de γ_1 sont dans deux composantes disjointes de $\partial D \setminus \partial\gamma_2$.

Nous pouvons par ailleurs trouver deux suites d'ouverts connexes U_n^1 et U_n^2 de S tel que $(\sigma_n(U_n^i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers U^i, des ouverts vérifiant $\pi(U^i) = \gamma^i$. En particulier, $(\pi(U_n^i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge de façon Hausdorff vers γ^i.

Les deux arcs de courbes s'intersectant véritablement, nous en déduisons qu'à partir d'un certain n, U_n^1 et U_n^2 s'intersectent. Ceci entraîne que $\sigma_n(U_n^1)$

et $\sigma_n(U_n^2)$ coïncident sur un ouvert et donc que S^1 et S^2 ont en un point le même jet d'ordre ∞ et par prolongement analytique sont confondues. □

Nous avons donc terminé la démonstration du théorème. Nous avons également prouvé par le même argument et sans utiliser la propreté de π le

Corollaire 7.5. *Si M est une variété de Monge-Ampère fibrant sur une surface S, si $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sections solutions de Monge-Ampère, alors après extraction d'une sous-suite, la limite de Hausdorff de $(\sigma_n(S))_{n\in\mathbb{N}}$ est une lamination.*

7.6 Démonstration du théorème 7.1. Soit $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de $\pi : M \to S$, telles que l'aire des $(\sigma_n(S))$ est uniformément bornée, nous verrons en 8.3 que dans ce cas $(\sigma_n(S))_{n\in\mathbb{N}}$ converge après extraction de sous-suite vers une unique courbe holomorphe Σ_0, en ce sens que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\sigma_n(S))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y_o ; $(\sigma_n(S), y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (Σ_0, y_0). En particulier, π de Σ_0 sur S est surjective, ce qui entraîne que Σ_0 n'est pas une surface rideau. La surface Σ_0 est donc le graphe d'une section σ_0 vers laquelle $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞.

7.7 Conclusions. Dans beaucoup de cas géométriques, par exemple celui des équations de Monge-Ampère, la projection d'une surface rideau est une géodésique. Remarquons maintenant que la démonstration du théorème 7.2. utilise la propreté uniquement pour démontrer (ii) de la définition d'une lamination-collante, cette propriété étant immédiate lorsque les courbes sont des géodésiques. Par ailleurs, un ensemble E laminé-collé par des géodésiques est nécessairement simplement laminé.

Définissons donc un point semi-singulier pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions d'une équation de Monge-Ampère, comme étant un point non régulier, vers lequel converge une suite de points $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(j^1 f_n(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ reste borné. Nous obtenons alors

Théorème 7.8. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions d'une équation de Monge-Ampère. Après extraction d'une sous-suite, l'ensemble des points semi-singuliers est une réunion de géodésiques distinctes disjointe du bord.*

Toujours pour les équations de Monge-Ampère, signalons le corollaire suivant de nos résultats

Théorème 7.9. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions d'une équation de Monge-Ampère défini sur une surface à bord convexe pour la connexion et C^1-bornée, alors après extraction d'une sous-suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact vers une solution.*

Preuve. Il suffit de remarquer qu'une surface rideau pour une équation de Monge-Ampère est automatiquement non bornée d'après 2.1. □

La définition de points semi-singuliers peut paraître peu naturelle et il est clair qu'il serait intéressant de connaître la structure de tous les points singuliers. Dans le cas où la géométrie asymptotique de M est connue, la structure de cet ensemble est accessible par nos méthodes. Supposons que nous soyons toujours dans le cas d'un graphe $M \xrightarrow{\pi} S$, avec les mêmes conditions qu'au début de cette section, sans exiger toutefois que π soit propre. Nous dirons que M est à *géométrie bornée* s'il existe une métrique riemanienne sur M telle que pour toute suite de points $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M telle que $(\pi(m_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans S, la géométrie définie par la géométrie de Monge-Ampère et π sur les boules $(B_n = B(x_n, 1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tant que géométrie pointée après extraction d'une sous-suite.

On peut alors montrer que l'ensemble des points singuliers est après extraction d'une sous-suite une lamination collante. Nous ne voulons pas entrer dans ces détails et donnons seulement une esquisse de preuve.

Un fait général et folklorique nous dit qu'une variété à géométrie bornée est toujours une feuille dans une lamination d'un espace compact, dont chaque feuille est munie d'une géométrie dépendant continûment du point.

Dans notre cas, nous construisons ainsi un espace $\bar{M}$ fibrant proprement sur S, telle que chaque feuille est une variété de Monge-Ampère fibrant sur S, et que l'une de ces feuilles est M. Maintenant il nous suffit de raisonner sur $\bar{M}$ et de voir que nos raisonnements précédents s'étendent au cas feuilleté.

Malheureusement, nous n'avons pas pris le temps de voir ce que signifie être à géométrie bornée pour des équations de Monge-Ampère. Il s'agit bien sûr d'un certain type de comportement asymptotique des coefficients.

8 Une structure de lamination

8.1 L'espace des solutions pointées. Nous avons étudié la topologie de l'espace des paires (x, Σ) où x est un point sur une surface Σ représentant une solution de Monge-Ampère. De la même manière qu'il est difficile de parler de la convergence d'une suite de géodésiques, il est difficile de parler de la convergence d'une suite de solutions. Nous allons poursuivre l'analogie avec le flot géodésique en montrant que de même que le fibré unitaire est feuilleté par les orbites du flot géodésique, il faut considérer chaque solution de Monge-Ampère comme une feuille dans un espace laminé par des surfaces de Riemann et se projetant proprement sur M. Nous nous placerons dans cette section dans le cas de problèmes de Monge-Ampère à bord libre, ou bien de problème à bord convexe vérifiant la condition renforcée 6.4.

Pour cela, construisons l'espace $\mathcal{M}$ constitué des paires (x, Σ) ou $x \in \Sigma$, et Σ est un représentant d'une solution de Monge-Ampère ou une surface rideau. Notre théorème central affirme que la projection naturelle de cet espace sur M est propre. De plus $\mathcal{M}$ a une partition naturelle :

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_\Sigma$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des surfaces positives ou nulles et où

$$\mathcal{F}_\Sigma = \left\{(x, \Sigma)/x \in \Sigma\right\} .$$

Bien sûr, chaque plaque $\mathcal{F}_\Sigma$ est homéomorphe à Σ par l'application naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\Sigma &\to \Sigma \\ (x, \Sigma) &\mapsto x \ . \end{aligned}$$

Nous avons en fait une structure plus riche :

Théorème 8.2. *La partition $\mathcal{F}_\Sigma$ définit une structure de lamination sur l'espace $\mathcal{M}$.*

Preuve. Par définition d'une lamination, il suffit de construire pour tout point (x_0, Σ_0) de $\mathcal{M}$ un voisinage $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}$ est homéomorphe à $D \times P$, où D est un disque, de telle sorte que la partition de $\mathcal{O}$ par les composantes connexes de $\mathcal{F}_\Sigma \cap \mathcal{O}$ soit envoyée sur la partition de $D \times P$ donnée par $D \times P = \cup_{p \in P} D \times \{p\}$. Il suffit de construire une application propre Ψ de $\mathcal{O}$ sur D telle que chaque composante connexe de $\mathcal{F}_\Sigma \cap \mathcal{O}$ soit envoyée sur D.

Ceci va découler de la construction des bons voisinages faite en 5.1. Nous avons en effet montré que x_0 possède un voisinage U dans M, contenant un voisinage compact K tels que si Σ est une courbe holomorphe positive ou nulle, toute composante connexe de $\Sigma \cap U$ intersectant K est homéomorphe au disque. Cet homéomorphisme étant réalisé par l'application ψ du lemme 5.5 définie de U dans une boule $B(\varepsilon')$.

Nous considérons alors $\mathcal{O} = \{(x, \Sigma)/$ la composante de $\Sigma \cap U$ contenant x intersecte $K\}$. L'application $\Psi : \mathcal{O} \to B(\varepsilon')$ définie par $\Psi(x, \Sigma) = \psi(x)$ vérifie bien les conditions requises. $\square$

Nous pouvons remarquer que chaque feuille est équipée canoniquement d'une structure de surface de Riemann, transversalement continue. Si l'on a pris le soin de choisir une métrique sur M, on obtient une métrique sur chaque feuille, cette métrique étant à nouveau transversalement continue.

COROLLAIRE 8.3. *Supposons que M est compact sans bord, soit $\{\Sigma_n\}$ une suite de solutions de Monge-Ampère d'aire bornée, alors après extraction d'une sous suite $\{\Sigma_n\}$ converge dans la topologie des sous-variétés vers une surface rideau ou une solution de Monge-Ampère. De plus, si M est compacte sans bord et si les Σ_n ne sont pas des tores, la limite est une solution.*

Preuve. En effet dans une lamination une suite de feuilles d'aire bornée converge vers une feuille sur tout compact. La deuxième partie du corollaire s'obtient en remarquant qu'une surface rideau compacte est nécessairement un tore : elle est orientée et possède un champ de vecteur sans zéros. □

8.4 Exemple d'application. Nous allons montrer à titre d'illustration comment démontrer le théorème 2.7. Nous pourrions bien sûr nous passer de l'existence de l'espace laminé construit dans les paragraphes précédents, mais il nous semble que cet espace rend la démonstration plus confortable.

Malheureusement, nous ne sommes pas dans le cas où cette technique s'applique de façon optimale. Le problème de Monge-Ampère à bord convexe ne vérifie pas la condition renforcée 6.4. Il est néanmoins possible de contourner cette difficulté, en "découpant" notre problème. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant. Pour l'instant, nous nous plaçons dans le cadre général d'un problème à bord convexe.

Nous allons supposer que notre variété de Monge-Ampère à bord M est un ouvert à bord d'une variété de Monge-Ampère sans bord N. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de Monge-Ampère. D'après notre résultat principal 1.4, il existe un voisinage U de D dans N, tel que si V_n est la composante connexe du bord de S_n dans $U \cap S_n$, la suite de courbes holomorphes $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de Monge-Ampère. Choisissons de plus un voisinage ouvert U_1 de D tel que $\bar{U}_1 \subset U$. Remarquons que nous pouvons choisir U_1 suffisamment petit pour que

(a) aucune surface rideau de U incluse dans M n'intersecte U_1.

En effet, dans le cas contraire en faisant tendre U_1 vers D, nous aurions une surface rideau intérieure à M et passant par D, ce qui est impossible par la condition (v) de notre définition.

Désignons de la même manière par V_n^1 la composante connexe du bord de S_n dans $S_n \cap U_1$. Nous pouvons maintenant décrire chaque solution de

Monge-Ampère S_n sous la forme

$$S_n = V_n \cup S_n^1 \cup S_n^2$$

où $S_n^1 = S_n \setminus D \cap S_n$ est une solution du problème de Monge-Ampère à bord libre dans $N \setminus D$, $S_n^2 = (S_n \cap U_1) \setminus V_n^1$ est une solution du problème à bord libre dans U_1.

Nous sommes ainsi amené à considérer plusieurs espaces laminés associés à ces problèmes à bord libre. L'espace laminé $\mathcal{M}^1$, associé à notre problème à bord libre dans $N \setminus D$, l'espace laminé $\mathcal{M}^2$ associé au problème à bord libre dans U_1, et enfin $\mathcal{M}^3$, l'espace laminé associé au problème à bord libre dans U. Remarquons que nous avons une application naturelle de $\mathcal{M}^3$ dans $\mathcal{M}^2$ et que, grâce à notre construction, chaque S_n^2 est dans l'image de cette application.

Notons enfin π la projection de $\mathcal{M}^1$ dans $N \setminus D$.

Commençons par extraire une sous-suite telle que la limite de Haussdorff de $\{S_n^i\}$, $i \in \{1,2\}$ est une lamination que nous noterons $\mathcal{S}_0^i$.

Nous allons démontrer un lemme général qui peut être utile dans d'autres situations.

LEMME 8.5. *Le support de $\mathcal{S}_0^2$ ne contient pas de surfaces rideaux ; toute surface rideau incluse dans le support de $\mathcal{S}_0^1$ est incluse dans $\pi^{-1}(M \setminus U_1)$.*

Preuve. en effet, la lamination $\mathcal{S}_0^2$ est dans l'image de l'application de $\mathcal{M}^3$ dans $\mathcal{M}^2$. Ainsi, toute surface rideau incluse dans le support de $\mathcal{S}_0^2$, s'étend à U. Or U_1 ne contient pas de telles surfaces rideaux par (a). Nous venons de démontrer la première partie de notre proposition.

La deuxième partie de la proposition provient de ce que U_n converge vers une solution de Monge-Ampère. □

Revenons à notre problème à courbure prescrite, décrit en 2.6. Notre suite de surfaces $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à courbure prescrite dans M_0, donne naissance par la proposition 2.9 à une suite de solutions de Monge-Ampère, que nous noterons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $M = UM_0$.

Extrayons comme précédemment des sous-suites telles que les laminations $(S_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Introduisons une terminologie : nous dirons qu'un point x d'une lamination est *récurrent*, si il existe un voisinage U de x dans lequel la lamination a une structure de produit $U = D \times L$, le facteur D correspondant aux feuilles, et tel que, si nous notons p la projection de U dans "l'espace des feuilles" L, $p(x)$ soit un point d'adhérence de L. En utilisant ce langage, démontrer le théorème revient exactement à démontrer que les laminations limites $\mathcal{S}_0^i$ n'ont pas de points récurrents, et que leur support ne contient pas de surfaces rideaux.

Le lemme 8.5 se traduit par le fait qu'une surface rideau incluse dans le support de $\mathcal{S}_0^1$ est associée à une géodésique complète de N incluse dans M.

Remarquons que d'après la proposition 2.8, l'aire des feuilles de notre lamination est exactement l'intégrale de la courbure moyenne. La première partie de l'hypothèse (i) entraîne alors immédiatement que les lamination limites $\mathcal{S}_0^i$ n'ont pas de point récurrents. Par ailleurs, une surface rideau incluse dans le support de $\mathcal{S}_0^0$ est d'aire finie et est donc associée à une géodésique fermée. En particulier, c'est un tore. Ceci est exclus par la deuxième partie de l'hypothèse (i).

Plaçons nous maintenant dans le cadre de l'hypothèse (ii). Le lemme 8.5 et la deuxième partie de l'hypothèse entraîne que le support de $\mathcal{S}_0^1$ ne contient pas de surface rideau. Au voisinage de tout x dans le support de $\mathcal{S}_0^1$, la fonction courbure moyenne est alors majorée. Restreignons la lamination dans ce voisinage. La première partie de l'hypothèse (ii) entraîne que l'aire des courbes holomorphes associées aux $\{S_n\}$ est bornée, ce qui entraîne que x ne peut-être récurrent.

8.6 Quelques questions. Nous espérons avoir convaincu les lecteurs indulgents de l'utilité de raisonner dans l'espace de solutions laminé, au cours de la démonstration du paragraphe précédent. Nous allons essayer maintenant de les convaincre que la dynamique de cet espace est intéressante en elle-même.

Revenons sur l'espace produit par l'exemple 2.6 : l'espace laminé $\mathcal{M}_{M,g}$ associé au problème des surfaces à courbure constante $-\frac{1}{2}$ dans une variété compacte (M,g) de dimension 3 et à courbure plus petite que -1. Dans des articles précédents [L3], nous nous sommes intéressés aux feuilles compactes lorsque M est à courbure -1. Il résulte en particulier de ces travaux qu'à chaque groupe libre F à k générateurs inclus dans le $\pi_1(M)$ correspond une infinité de feuilles compactes de cette lamination, homéomorphes à une surface S de genre k et dont l'image du groupe fondamental dans le $\pi_1(M)$ est F.

Par ailleurs le sous ensemble $\mathcal{M'}_{M,g}$ de $\mathcal{M}_{M,g}$ constitué des feuilles rideaux est naturellement homéomorphe au fibré en cercles au dessus de UM dont la fibre au dessus de chaque point u est constituée des vecteurs normés orthogonaux à u, avec sa structure de lamination relevant celle du flot géodésique sur M. En un sens, $\mathcal{M}_{M,g}$ est une “extension” du flot géodésique.

A l'aide des résultats contenus dans le présent article, et sous réserve que la démonstration que nous avons imaginée s'avère correcte après rédaction, nous avons montré que $\mathcal{M}_{M,g}$ conserve certaines des propriétés hyperboliques du flot géodésique [L4]:

(i) les feuilles compactes sont denses,
(ii) une feuille générique est dense,
(iii) $\mathcal{M}_{M,g}$ est stable : si l'on perturbe g en g' il existe un homéomorphisme de $\mathcal{M}_{M,g}$ sur $\mathcal{M}_{M,g'}$ envoyant lamination sur lamination.

En particulier, il semble intéressant d'essayer de comprendre la statistique des feuilles compactes dans cette lamination.

9 Appendice : lemme de Schwarz-Gromov à bord

Nous allons démontrer un résultat très certainement connu, mais dont nous n'avons pas réussi à trouver de traces précises dans la littérature. Les notations sont totalement indépendantes de celles qui précèdent.

Soit M une variété muni d'une structure presque complexe J et d'une métrique g. Soit W une sous-variété totalement réelle plongée de M. Nous dirons que le triplet (M, W, J) est *calibré* si

(a) W est simplement connexe.
(b) il existe une 1-forme bornée β dont la restriction à W est nulle, telle que
$$\forall\, u \in TM \ , \qquad d\beta(u, Ju) \geq g(u, u) \ .$$

Remarquons que si W est une sous-variété totalement réelle d'une variété presque complexe M, tout point de W admet un voisinage qui soit calibré. Le lemme dont nous avons besoin est le suivant.

Lemme de Schwarz-Gromov à bord 9.1. *Soit H un demi-plan du plan hyperbolique et f une application holomorphe de H dans M, envoyant ∂H dans W, alors les dérivées de f sont a-priori bornées en tous point de H.*

Par rapport au lemme de Schwarz "sans bord", il nous faut obtenir des estimées le long du bord de H. La preuve est bien sûr inspirée de celle du lemme de Schwarz dans [M].

9.2 Inégalités isopérimétriques. Choisissons une métrique pseudo-hermitienne sur M telle que W soit totalement géodésique. Soit x un point du bord de H, notons $D(r)$ le demi-disque de rayon r autour de x, et $c(r) = \partial D(r) \setminus \partial H$. Si f est une application holomorphe de H dans M, telle que

$f(\partial H) \in W$, posons $a(r) = 2\ aire(f(D(r)))$ et $l(r) = 2\ longueur(f(c(r)))$. Nous voulons montrer :

PROPOSITION 9.3. *Il existe des constantes C et K indépendantes de f telles que les fonctions a et l vérifient les inégalités isopérimétriques $l^2 \geq 4\pi a - Ka^2$ et $l \geq Ca$.*

Preuve. La métrique sur M étant pseudo-hermitienne, la courbure de la métrique induite sur H est majorée par une constante K, *cf.* [M, 3.2].

Par ailleurs W étant totalement géodésique et $f(S)$ presque complexe, nous en déduisons que ∂H est totalement géodésique pour la métrique induite. Si nous considérons le double de H obtenu en recollant H avec lui même le long de son bord, la métrique obtenue en recollant est également à courbure bornée par la même constante K.

La première inégalité suit donc de l'inégalité de Bol *cf.* [M, 3.3.1] appliqué au double du demi-disque $D(r)$.

Pour obtenir la deuxième inégalité, nous procédons comme en *cf.* [M, 3.3.2] :

$$a(r) \leq \int_{D(r)} f^* d\beta = \int_{\partial D(r)} f^* \beta = \int_{c(r)} f^* \beta \leq l \|\beta\|_\infty \ .$$

Dans cette chaîne d'inégalités, nous avons utilisé que β était nulle par restriction à W. □

9.4 PREUVE DU LEMME DE SCHWARZ À BORD. Grâce à nos inégalités isopérimétriques, nous pouvons procéder exactement comme dans la preuve de [M, 4.1.1] pour obtenir une borne *a priori* sur la première dérivée de f. Pour obtenir les bornes pour les dérivées d'ordre supérieure, nous avons deux stratégies : soit nous utilisons le lemme de Schwarz à l'ordre 1 dans un espace de jets, soit plus paresseusement, nous utilisons le théorème 2.2.1 (ii) de [Si].

References

[G1] M. GROMOV, Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifold, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[G2] M. GROMOV, Foliated plateau problem, part I, GAFA 1 (1991), 14–79.

[L1] F. LABOURIE, Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudoholomorphes, J. Diff. Geom. 30 (1989), 395–424.

[L2] F. LABOURIE, Exemples de courbes pseudo-holomorphes en géométrie riemannienne, in "Pseudo-holomorphic Curves in Symplectic Geometry (M. Audin, J. Lafontaine, ed.), Birkhäuser, Progress in Maths 117 (1994), 251–258.

[L3] F. Labourie, Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques, Bull. Soc. Math. Fr. 119 (1991), 307–325.

[L4] F. Labourie, Un lemme de Morse pour les surfaces convexes, en préparation.

[M] M.-P. Muller, Gromov's Schwarz lemma as an estimate of the gradient for holomorphic curves, in "Pseudo-holomorphic Curves in Symplectic Geometry" (M. Audin, J. Lafontaine, eds.), Birkhäuser, Progress in Maths. 177 (1994), 217–230.

[N] A. Nadel, Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, Ann. of Maths. 132 (1990), 549–596.

[S] J.-M. Schlenker, Surfaces convexes dans des espaces Lorentziens à courbure constante, Comm. in Analysis and Geometry 4:2 (1996), 285–331.

[Sc] F. Schulz, Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge-Ampère Equations in Two Dimensions, Springer Lecture Notes in Math. 1445, 1990.

[Si] J.-C. Sikorav, Holomorphic curves, in "Pseudo-holomorphic Curves in Symplectic Geometry" (M. Audin, J. Lafontaine, ed.) Birkhäuser, Progress in Maths 117 (1994), 165–189.

[Su] D. Sullivan, Linking the universalities of Milnor, Feigenbaum and Ahlfors-Bers, in "Topological Methods in Modern Mathematics" (Stony-Brook 1991), Publish or Perish (1993), 543-564.

François Labourie
Equipe de Topologie et Dynamique
URA 1169 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
France
e-mail: `labourie@topo.matups.fr`

Submitted: December 1995
Revised version: September 1996
Final version: March 1997