Arch. Math. 73 (1999) 273–275
0003-889X/99/040273-03 $ 2.10/0

Archiv der Mathematik

Ein Beweis der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion

Von

Wolfgang Schuster

Abstract. On the basis of a summation formula for holomorphic functions and using complex integration technique we present a new and rather short proof of the functional equation of the Riemann Zeta-function.

Aufgrund einer Summenformel vom Typus der Planaschen Summenformel (Plana 1820, [1], [2]) findet man eine in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gültige Darstellung der Riemannschen Zetafunktion. Diese erlaubt einen recht kurzen Beweis ihrer Funktionalgleichung. Den in dem Buch von Titchmarsh [3] über die Riemannsche Zetafunktion zusammengestellten Beweisen dieser Funktionalgleichung wird damit eine weitere Variante hinzugefügt.

Ist $f(z)$ in einem Gebiet holomorph, das den Streifen $m - \frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} z \leqq n + \frac{1}{2}$ enthält, und ist (salopp formuliert) das Wachstumsverhalten von $f(z)$ dort so beschaffen, daß die nachstehenden uneigentlichen Integrale existieren, dann gilt die Summenformel:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{n} f(j) = \int\limits_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt + i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(n+\frac{1}{2}+it) - f(n+\frac{1}{2}-it)}{e^{2\pi t}+1}\,dt \\ - i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(m-\frac{1}{2}+it) - f(m-\frac{1}{2}-it)}{e^{2\pi t}+1}\,dt.\end{aligned} \tag{1}$$

In der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$ ist die Riemannsche Zetafunktion durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} \tag{2}$$

definiert. Die Funktion $f(z) = z^{-s}$ erfüllt in der Halbebene $\operatorname{Re} z \geqq 1$ die Voraussetzungen für die Anwendung der Summenformel (1). Mit $m = 1$ erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^s} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} t^{-s}\,dt + i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(n+\frac{1}{2}+it)^{-s} - (n+\frac{1}{2}-it)^{-s}}{e^{2\pi t}+1}\,dt \\ - i \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+it)^{-s} - (\frac{1}{2}-it)^{-s}}{e^{2\pi t}+1}\,dt.\end{aligned} \tag{3}$$

Mathematics Subject Classification (1991): 11M06.

Für $n \to \infty$ strebt das erste Integral gegen $2^{s-1}/(s-1)$, und das zweite geht gegen null. Damit erhält man für die Riemannsche Zetafunktion die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - i \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+it\right)^{-s} - \left(\frac{1}{2}-it\right)^{-s}}{e^{2\pi t}+1}\, dt\,, \tag{4}$$

die in ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gültig ist.

Setzt man $\left(\frac{1}{2}+it\right)^s = \left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{\frac{s}{2}} e^{is \arctan 2t}$, $\left(\frac{1}{2}-it\right)^s = \left(\frac{1}{4}+t^2\right)^{\frac{s}{2}} e^{-is \arctan 2t}$ und transformiert mit $2t = \tau$, dann geht (4) über in die Formel von Jensen ([4], S. 279):

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2^s \int_0^{\infty} (1+t^2)^{-\frac{s}{2}} \sin(s \arctan t) \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,. \tag{5}$$

Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion lautet:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi}{2} s \cdot \Gamma(s) \zeta(s). \tag{6}$$

Mit (4) erhält man die Beziehung

$$\zeta(1-s) = \frac{-1}{s2^s} - i \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+it\right)^{s-1} - \left(\frac{1}{2}-it\right)^{s-1}}{e^{2\pi t}+1}\, dt\,,$$

und mit den Transformationen $\frac{1}{2}+it = iz$ bzw. $\frac{1}{2}-it = -iz$ ergibt sich

$$\zeta(1-s) = \frac{-1}{s2^s} + i \int_{-\frac{i}{2}}^{-\frac{i}{2}+\infty} \frac{(iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1} - i \int_{\frac{i}{2}}^{\frac{i}{2}+\infty} \frac{(-iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1}\,.$$

Da das Integral über die Strecken $\pm \dfrac{i}{2} + r \longrightarrow r$, $r > 0$, für $r \to \infty$ verschwindet, kann man den Weg von $\dfrac{-i}{2}$ nach $\dfrac{-i}{2} + \infty$ parallel zur reellen Achse durch einen Weg $\dfrac{-i}{2} \longrightarrow -i\varepsilon \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow \infty$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, ersetzen, der die Singularität des Integranden bei $z = 0$ in einem Viertelkreis mit Radius ε umgeht. Entsprechend ersetzt man den Weg $\dfrac{i}{2} \longrightarrow \dfrac{i}{2} + \infty$ durch den Weg $\dfrac{i}{2} \longrightarrow i\varepsilon \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow \infty$. Dabei werde $\operatorname{Re} s > 1$ vorausgesetzt. Für $\varepsilon \to 0$ verschwinden die beiden Integrale über die Viertelkreise, und man erhält daher:

$$\begin{aligned} \zeta(1-s) = \frac{-1}{s2^s} &+ i \left(\int_{-\frac{i}{2}}^{0} \frac{(iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1} + \int_0^{\infty} \frac{(iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1} \right) \\ &- i \left(\int_{\frac{i}{2}}^{0} \frac{(-iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1} + \int_0^{\infty} \frac{(-iz)^{s-1}\, dz}{e^{2\pi z}-1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{s2^s} + \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{-2\pi i t}-1} + \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{2\pi i t}-1} + (i^s + (-i)^s) \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$= \frac{-1}{s2^s} + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{s-1}\,dt + 2\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}s \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Wegen das bekannten Zusammenhanges

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\zeta(s) \tag{7}$$

ist damit die Funktionalgleichung (6) bewiesen. Die beweistechnisch erforderliche Voraussetzung Re $s > 1$ kann nun wieder vergessen werden, da das Prinzip von der Permanenz der Funktionalgleichung die Gültigkeit von (6) in ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sichert.

Herrn Carsten Kühn (Tübingen) danke ich für die Herstellung des Manuskriptes.

Literatur

[1] R. Remmert, Funktionentheorie 2.2. Aufl. Berlin 1995.
[2] W. Schuster, Eine Summenformel, die Riemannsche Zetafunktion und weitere Anwendungen. In Vorbereitung.
[3] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zetafunction. Oxford 1951.
[4] E. T. Whittaker and G. N. Watson, Modern Analysis. Fourth Printing, Cambridge 1927, Vol. 2, 1934.

Eingegangen am 22. 6. 1998*)

Anschrift des Autors:

Wolfgang Schuster
Deutsches Institut für Fernstudienforschung
an der Universität Tübingen (DIFF)
Konrad-Adenauer-Str. 40
D-72072 Tübingen

*) Eine Neufassung ging am 31. 8. 1998 ein.