

Berechnung der Wärmeleitung in dreidimensional geformten Blechen mit der Finite-Differenzen-Methode während eines Umformprozesses

E. Doege, C. Ropers

Zusammenfassung Die Simulation von Blechumformvorgängen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) beschränkt sich fast ausschließlich auf eine isotherme Betrachtung. Dieses ist vor allem auf numerische Schwierigkeiten einer gekoppelt thermisch-mechanischen Betrachtung von Blechumformprozessen zurückzuführen. Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) wird im allgemeinen bei der Berechnung von Wärmeleitungsproblemen sehr erfolgreich eingesetzt. Gegenüber der FEM hat die Finite-Differenzen-Methode (FDM) den Vorteil einer einfacheren Implementierung und höheren Effektivität. Nachteilig bei der herkömmlichen FDM ist jedoch die Beschränkung auf relativ einfache Geometrien. Im Rahmen dieser Veröffentlichung wird eine neu entwickelte FDM zur Berechnung der Wärmeleitung in nahezu beliebig dreidimensional geformten Blechen vorgestellt. Durch eine geeignete Parametrisierung der Mittelfläche des Bleches ermöglicht die entwickelte FDM die effektive Lösung des Wärmeleitungsproblems. Die Formulierung beruht auf der Modellannahme, daß Bleche eine sehr geringe Dicke im Vergleich zu den sonstigen Abmessungen aufweisen. Die neu entwickelte FDM kann sehr einfach an die herkömmliche FEM gekoppelt werden, um neben der Simulation eines Blechumformprozesses die Wärmeleitung im Blech zu berechnen.

Calculation of the heat transfer in three-dimensional sheets with the Finite-Difference-Method in the course of metal forming process

Abstract Nowadays, the simulation of a sheet metal forming process with the Finite-Element-Method (FEM) is restricted to an isothermal approach. This limitation arises from the difficulty of a coupled thermo-mechanically simulation of sheet metal forming processes. The Finite-Difference-Method (FDM) is successfully applied in the field of heat transfer. In contrast to the Finite-Element-Method (FEM), the FDM has the advantage of a simple implementation and high efficiency. However, the main drawback is the restriction to relatively simple geometries. In this paper a new developed FDM is presented to calculate the heat transfer in almost arbitrary three-dimensional sheets due to the description of the sheet with

parameters. The formulation is based on the assumption, that the sheet thickness is very small compared with the other measures. The new developed FDM can easily be linked to the ordinary FEM in order to calculate the heat transfer in the course of a FE-simulation of a sheet metal forming process.

Formelzeichen

A	mm^2	Fläche
A	-	Transformationsmatrix vom kartesischen in das krummlinige Koordinatensystem
a, b	K/mm^2	Koeffizienten zur Berechnung des Temperaturgradienten
c_d	mm/s	Schallgeschwindigkeit
c_p	$\text{J}/\text{t} \cdot \text{K}$	spezifische Wärmekapazität
D	mm	Blechdicke
e_a	mm	Basis des kartesischen Koordinatensystems mit $\alpha \in \{x, y, z\}$
e_i	mm	Basis des krummlinigen Koordinatensystem mit $i \in \{\xi, \eta, \vartheta\}$
E	MPa	Elastizitätsmodul
E	-	Einheitsmatrix
g	W/mm^3	Wärmeenergieerzeugung
\bar{g}	W/mm^3	mittlere Wärmeenergieerzeugung im Kontrollvolumen
g_{pl}	W/mm^3	Wärmeenergieerzeugung durch plastische Arbeit
\bar{g}_{pl}	W/mm^3	mittlere Wärmeenergieerzeugung durch plastische Arbeit im Kontrollvolumen
g_R	W/mm^3	Wärmeenergieerzeugung durch Wirkflächenreibung
\bar{g}_R	W/mm^3	mittlere Wärmeenergieerzeugung durch Reibung im Kontrollvolumen
g_U	W/mm^3	Wärmeenergieerzeugung durch Wärmeleitung an die Umgebung
\bar{g}_U	W/mm^3	mittlere Wärmeenergieerzeugung durch Wärmeleitung an die Umgebung im Kontrollvolumen
h	mm	Abstand zwischen zwei Knotenpunkten
\vec{j}	W/mm^2	Vektor der Wärmestromdichte
$\bar{\vec{j}}$	W/mm^2	Vektor der bezogenen Wärmestromdichte $\bar{\vec{j}} = \vec{j} \cdot D$
\vec{j}_U	W/mm^2	Vektor der Wärmestromdichte an der Grenzfläche zwischen dem Blech und der Umgebung
k	$\text{W}/\text{mm} \cdot \text{K}$	Wärmeleitfähigkeit

Eingegangen: 9. Juni 1999

E. Doege (✉), C. Ropers
Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen,
Universität Hannover, Welfengarten 1A,
D-30167 Hannover, Germany

Korrespondenz an: E. Doege

k_R	-	Proportionalitätsfaktor zwischen Wärmeenergieeinbringung in das Werkstück und Reibarbeit
k_{pl}	-	Proportionalitätsfaktor zwischen Wärmeenergieeinbringung in das Werkstück und plastischer Arbeit
Δl	mm	Linielement
L	mm	charakteristische Länge eines Finiten Elements
M	-	Transformationsmatrix vom krummlinigen in das kartesische Koordinatensystem
m_{kl}	-	Komponenten der Matrix M
n	-	Normaleneinheitsvektor einer Fläche
Q	J	Wärmeenergie
r_k	mm	Differenzvektoren mit $k \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$
t	s	Zeit
Δt	s	Zeitschritt
T	K	Temperatur
\bar{T}	K	mittlere Temperatur im Kontrollvolumen
T_U	K	Umgebungstemperatur
V	mm ³	Volumen
W_R	J	Reibarbeit
W_{pl}	J	plastische Arbeit
x	mm	Ortsvektor
α	W/mm ² · K	Wärmeübergangskoeffizient
ρ	t/mm ³	Dichte
μ	-	Reibkoeffizient

Indizes oben rechts

x, y, z Komponenten eines Vektors im kartesischen Koordinatensystem

Indizes unten rechts

i, j Größe am Knoten i, j

1**Einleitung**

Bedingt durch die rasante Hardwareentwicklung in den letzten Jahren, ist in der Beschreibung von Blechumformvorgängen der Einsatz von numerischen Methoden ein wichtiges Werkzeug geworden. Zur Lösung der in dieser Problematik auftretenden partiellen Differentialgleichungen werden vor allem die Finite-Differenzen-Methode (FDM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM) eingesetzt.

Mit Hilfe der FEM können die elastisch-plastischen Verzerrungszustände während eines Umformprozesses in nahezu beliebigen Geometrien auch bei großen Verschiebungen und Verzerrungen abgebildet werden. Im allgemeinen wird bei der FEM-Simulation von Blechumformprozessen, einem an sich thermisch-mechanischen Vorgang, jedoch nur eine rein isotherme Betrachtung des Prozesses durchgeführt. Dieses ist neben numerischen Schwierigkeiten einer gekoppelten thermisch-mechanischen Berechnung in Verknüpfung mit dem doppelseitigen Kontakt am Blech auf den Umstand zurückzuführen, daß für die Blechumformung herkömmlicher Materialien, z.B. DC05 oder H340, die Temperaturabhängigkeit der Werk-

stoffeigenschaften im auftretenden Temperaturintervall vernachlässigt werden kann; eine aufwendige thermisch-mechanische Simulation des Umformprozesses ist nicht erforderlich. Die FDM hat gegenüber der FEM den entscheidenden Vorteil der einfacheren Formulierung und erhöhten numerischen Effektivität, d.h. eine verringerte Rechenzeit. Besonders in der Beschreibung von Wärmeleitungsproblemen wird die FDM in vielen Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften erfolgreich eingesetzt. Nachteilig bei der herkömmlichen FDM ist jedoch die Beschränkung dieser Methode auf einfache Geometrien, die das Bilden eines gleichmäßigen Gitters ermöglichen. Mittels der Einführung eines krummlinigen Koordinatensystems kann diese Beschränkung jedoch umgangen werden [1]. Diese Vorgehensweise ermöglicht die geometrische Flexibilität der FEM verbunden mit der einfachen und effektiven Formulierung der herkömmlichen FDM. Für bestimmte Blechwerkstoffe, z.B. metastabilen austenitischen Edelstahl, ist die Temperaturabhängigkeit der Werkstoffeigenschaften nicht zu vernachlässigen.

Während eines Blechumformprozesses wird durch die plastische Arbeit und die Reibung des Werkstückes an den Werkzeugen Energie in das System Blech eingebracht. Des weiteren findet ein Wärmeübergang an die Umgebung statt, der abhängig vom Kontaktzustand (Temperaturdifferenz, Wärmeübergangskoeffizient) ist. Durch die Energieeinbringung entsteht eine örtlich unterschiedliche Temperatur, die folglich eine Wärmeleitung im Blech bewirkt. Bei einer thermisch-mechanischen Simulation eines Blechumformprozesses werden im allgemeinen mechanisch und thermisch entkoppelte Methoden eingesetzt, vgl. [2]. Diese basieren auf einer entkoppelten Berechnung der quasi isothermen mechanischen Umformung und einer nachfolgenden Berechnung des thermischen Vorgangs.

Die grundsätzliche Idee, die hinter der hier vorgestellten Arbeit steht, besteht neben einer numerischen Entkopplung des mechanischen vom thermischen Vorgang ebenfalls in einer „Entkopplung“ der Näherungsverfahren. Hierbei wird die quasi isotherme mechanische Betrachtung des Gesamtproblems wie allgemein üblich mit der FEM durchgeführt, während die thermische Betrachtung mit dem für diese Problematik effektiveren Näherungsverfahren, der FDM, durchgeführt wird. Im Vordergrund dieser Ausarbeitung steht hierbei die Beschreibung einer Methode, die dreidimensionale Wärmeleitung in Blechbauteilen mit der FDM zu berechnen. Am Beispiel des Tiefziehprozesses eines Praxisteils wird die Kopplung beider Näherungsverfahren kurz beschrieben sowie das Potential dieser Vorgehensweise aufgezeigt.

2**Berechnung der Wärmeleitung mit der FDM**

Die Wärmeleitung wird im allgemeinen durch die parabolische Wärmeleitungsdifferentialgleichung

$$-\operatorname{div} \mathbf{J} + g(x, y, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

mit der Wärmestromdichte \mathbf{j} nach dem Grundgesetz von Fourier

$$\mathbf{j} = -k \cdot \text{grad}(T) = -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^T = (j^x, j^y, j^z)^T \quad (2)$$

beschrieben. Hier ist T die Temperatur, t die Zeit, ρ die Dichte, c_p die spezifische Wärmekapazität und k die Wärmeleitfähigkeit. Der Term $g(x, y, z, t)$ beschreibt eine Wärmeenergieerzeugung im Werkstück. Die Wärmestromdichte \mathbf{j} ist definiert durch die über die Fläche ΔA transportierte Wärme ΔQ während der Zeitspanne Δt (der Vektor \mathbf{n} ist die Normale der Fläche ΔA)

$$\mathbf{j} = \mathbf{n} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta A \cdot \Delta t} \quad (3)$$

Die Divergenz der Wärmestromdichte wird im kartesischen Koordinatensystem mit der Basis \mathbf{e}_α und den Indizes $\alpha \in \{x, y, z\}$ über die Gleichung

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial j^x}{\partial x} + \frac{\partial j^y}{\partial y} + \frac{\partial j^z}{\partial z} \quad (4)$$

berechnet [3].

Für den Fall, daß die Wärmeleitungsgleichung analytisch gelöst werden kann, wird die Differentialgleichung in jedem Punkt der gegebenen Region exakt erfüllt. Da jedoch nur für einfache Geometrien und Randbedingungen eine analytische Lösung erzielt werden kann, wird die Differentialgleichung bei den meisten Problemen mit numerischen Methoden gelöst. Bei der FDM wird die Geometrie diskretisiert, d.h., die Temperatur wird nur an N Knotenpunkten und nicht in jedem Punkt der Geometrie betrachtet. Für die N Knotenpunkte werden N Gleichungen durch eine Diskretisierung der Differentialgleichung und Randbedingungen gebildet. Zur Diskretisierung der partiellen Ableitungen in der FDM werden allgemein zwei Ansätze gewählt, die Reihenentwicklung nach Taylor und die Bildung von Kontrollvolumen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz mit Kontrollvolumen gewählt, die einen Knotenpunkt umgeben.

Beim Kontrollvolumenansatz werden Gleichungen für die finiten Differenzen gebildet, indem im Kontrollvolumen die partielle Differentialgleichung unter Erhaltung der Energie gelöst wird [1]. Um die Vorgehensweise kurz zu erläutern, wird Gleichung (1) über ein kleines konstantes Volumen V integriert.

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } \mathbf{j} dV + \int_V g dV \quad (5)$$

Durch Bilden einer geeigneten mittleren Temperatur \bar{T} und Wärmeezeugung \bar{g} im betrachteten Volumen vereinfacht sich Gleichung (5) zu

$$V \rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = - \int_V \text{div } \mathbf{j} dV + V \bar{g} \quad (6)$$

Mit Gleichung (6) wird das Prinzip der Energieerhaltung für das Kontrollvolumen erfaßt.

Bei den hier betrachteten Blechen weist das Blech im allgemeinen eine drei-dimensionale flächige Geometrie mit

einer sehr geringen Dicke im Verhältnis zur Fläche auf. Aufgrund dieser geometrischen Gegebenheit wird vereinfachend eine konstante Temperatur über die Blechdicke angenommen. Daraus folgt, daß die Wärmestromdichte \mathbf{j} jeweils in der Tangentialebene an die Mittelfläche liegt und über die Blechdicke konstant ist.

Unter der Annahme einer konstanten Temperatur über die Blechdicke ist es folglich möglich, eine quasi „2-dimensionale Wärmeleitung“ zu lösen. Das Blech wird hierbei als eine Fläche im dreidimensionalen physikalischen Raum betrachtet, die in der Mitte des Bleches liegt. Die örtlich unterschiedliche Dicke des Bleches D wird in der Formulierung der Wärmestromdichte an jedem Knotenpunkt berücksichtigt.

2.1

Definition eines krummlinigen Koordinatensystems

Eine Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung im physikalischen Raum, d.h. im kartesischen Koordinatensystem, ist sehr umständlich, da im allgemeinen kein gleichmäßig angeordnetes Netz gebildet werden kann. Besonders die Formulierung der Randbedingungen ist hier problematisch. Aus diesem Grund wird die das Blech beschreibende Fläche mit dem krummlinigen Koordinatensystem K beschrieben, das die krummlinigen Koordinatenlinien ξ und η aufweist. Die Parametrisierung wird so gewählt, daß für das Inkrement der Parameter zwischen den Knotenpunkten $\Delta \xi = 1$ und $\Delta \eta = 1$ erfüllt wird.

Für jeden Punkt $P(\xi, \eta)$ können die Vektoren \mathbf{e}_ξ und \mathbf{e}_η der zugehörigen Basis \mathbf{e}_i mit $i \in \{\xi, \eta, \vartheta\}$ aus dem Ortsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z)$ des Punktes P im kartesischen Koordinatensystem über das totale Differential bestimmt werden [4]. Die Basisvektoren \mathbf{e}_i sind stets tangential an die Koordinatenlinien und werden deshalb auch als natürliche Basen bezeichnet. Aufgrund der gekrümmten Koordinatenlinien hängt die natürliche Basis \mathbf{e}_i vom Ort ab. Da die Fläche nur mit den zwei Parametern ξ und η eindeutig parametrisiert wird, kann der dritte Vektor der natürlichen Basis nicht über das totale Differential bestimmt werden. Um Vektoren in beiden Basen ausdrücken zu können, wird gefordert, daß der dritte Vektor der natürlichen Basis senkrecht auf der Tangentialebene im Punkt $P(\xi, \eta)$ steht, die durch die ersten beiden natürlichen Basisvektoren aufgespannt wird

$$\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta \quad (7)$$

Nach der Definition der natürlichen Basis \mathbf{e}_i kann ein Vektor in beiden Basen dargestellt werden, wobei der betrachtete Vektor durch die Invarianzforderung bezüglich einer Koordinatentransformation nicht verändert wird. Die Transformation eines Vektors \mathbf{u} vom kartesischen Koordinatensystem O (Basis \mathbf{e}_α) in die natürliche Basis K (Basis \mathbf{e}_i) lautet in der kompakten Formulierung der Matrixschreibweise

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{O} \mathbf{u} \quad (8)$$

Die Transformationsmatrix einer Rücktransformation \mathbf{M} kann über die Eigenschaft $\mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{E}$ (Einheitsmatrix \mathbf{E}) berechnet werden.

2.2 Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung

Um die Wärmeleitung mit der FDM zu berechnen, wird die partielle Differentialgleichung in den N Knotenpunkten diskretisiert. Das skalare Temperaturfeld $T(x, y, z)$ auf der Fläche im physikalischen Raum läßt sich in das krummlinige Koordinatensystem mittels

$$T(\zeta, \eta) = T(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z(\zeta, \eta)) \quad (9)$$

transformieren. Da wie bereits beschrieben das Blech durch seine Mittelfläche angenähert wird, das Blech jedoch eine örtlich unterschiedliche Dicke aufweisen kann, wird zunächst die Berücksichtigung der Blechdicke D in der Formulierung beschrieben. Nach Gleichung (3) ist die Wärmestromdichte \mathbf{j} definiert durch die über die Fläche ΔA transportierte Wärme ΔQ während der Zeitspanne Δt . In der Beschreibung des Bleches durch eine Fläche geht quasi „eine Dimension verloren“. In Bild 1 ist ein aus dem realen Blech herausgeschnittenes Flächenelement ΔA und aus der das Blech darstellenden Fläche ein entsprechend herausgeschnittenes Linienelement Δl dargestellt. Wird gefordert, daß eine vorhandene Wärmestromdichte sowohl in der realen Struktur als auch im Modell die gleiche transportierte Wärme ΔQ hervorruft, so läßt sich eine auf eine Länge Δl bezogene Wärmestromdichte $\bar{\mathbf{j}}$ ableiten

$$\Delta Q \cdot \mathbf{n} = \mathbf{j} \cdot \Delta A \cdot \Delta t = \mathbf{j} \cdot D \cdot \Delta l \cdot \Delta t$$

$$= \bar{\mathbf{j}} \cdot \Delta l \cdot \Delta t \text{ mit } \bar{\mathbf{j}} = \mathbf{j} \cdot D \quad (10)$$

Die bezogene Wärmestromdichte $\bar{\mathbf{j}} = -D \cdot \mathbf{k} \cdot \text{grad}(T)$ wird im krummlinigen Koordinatensystem numerische gebildet und mittels der Transformationsmatrix M in das kartesische Koordinatensystem transformiert.

Um die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung mittels Kontrollvolumen bzw. Kontrollflächen anschaulich zu erläutern, sind in Bild 3 Kontrollflächen in der sogenannten „computational plane“ dargestellt.

Die Integration von Gleichung (1) über die Kontrollfläche eines inneren Knotenpunktes $P_{i,j}$ mit $\Delta \zeta = 1$ und $\Delta \eta = 1$ liefert

$$\rho c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = - \int_{\zeta-1/2}^{\zeta+1/2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}^x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j}^y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{j}^z \right) \times d\eta |d\zeta|^i + \bar{g} \quad (11)$$

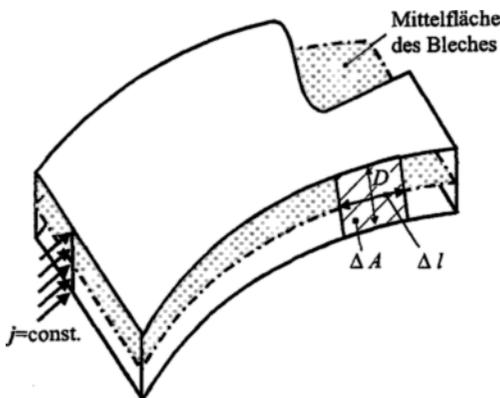


Bild 1. Herausgeschnittenes Blechsegment

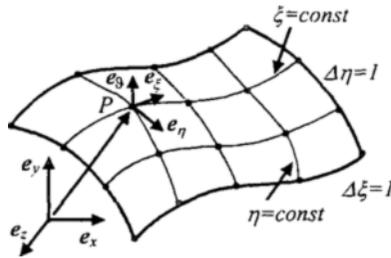


Bild 2. Parametrisierung der Fläche

Die Terme $\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}^x$, $\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}^y$ und $\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}^z$ werden mit den Koeffizienten m_{mn} der Transformationsmatrix M über die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{j}^x = m_{11} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^x + m_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{j}^x \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{j}^y = m_{21} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^y + m_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{j}^y \quad (13)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{j}^z = m_{31} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^z + m_{32} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{j}^z \quad (14)$$

gebildet. Werden diese in Gleichung (11) eingesetzt und die Näherung zugelassen, daß die Transformationsmatrix M im gesamten Kontrollvolumen der im Knotenpunkt $P_{i,j}$ entspricht, so sind Integrale der Form

$$\int_{\zeta-1/2}^{\zeta+1/2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^x d\eta |d\zeta|^i \quad (15)$$

zu lösen. Über die Werte für die Wärmestromdichte in den „Zentralen Knoten“ nw, ne, sw und se (Bild 3) wird das oben dargestellte Integral mittels

$$\int_{\zeta-1/2}^{\zeta+1/2} \int_{\eta-1/2}^{\eta+1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^x d\eta |d\zeta|^i$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\zeta-1/2}^{\zeta+1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^x d\zeta |d\zeta|^i \right)_{\eta^i=\eta+1/2} + \left(\int_{\zeta-1/2}^{\zeta+1/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \bar{j}^x d\zeta |d\zeta|^i \right)_{\eta^i=\eta-1/2} \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} (nw \bar{j}^x - ne \bar{j}^x) + \frac{1}{2} (sw \bar{j}^x - se \bar{j}^x)$$

angenähert. Im Gegensatz zu der sonst üblichen Methode, die Wärmestromdichte bzw. die Temperaturgradienten in den Zentralen Knoten aus dem arithmetischen Mittel der Temperaturgradienten der vier umgebenden Knotenpunkte zu berechnen, siehe z.B. [1], wird in dieser Arbeit der Temperaturgradient direkt in den Zentralen Knoten approximiert. Exemplarisch für den Zentralen Knoten nw wird die Bestimmung des Temperaturgradienten dargestellt. Wie bereits beschrieben, liegt die Wärmestromdichte bzw. der Temperaturgradient in der Tangentialebene, die durch die Vektoren \mathbf{r}_α und \mathbf{r}_β (s. Bild 3) angenähert wird, an diesen Punkt. Diese Annahme ist natürlich nur bei nicht zu stark gekrümmter Struktur zulässig; andernfalls ist die Diskretisierung feiner zu wählen. Der

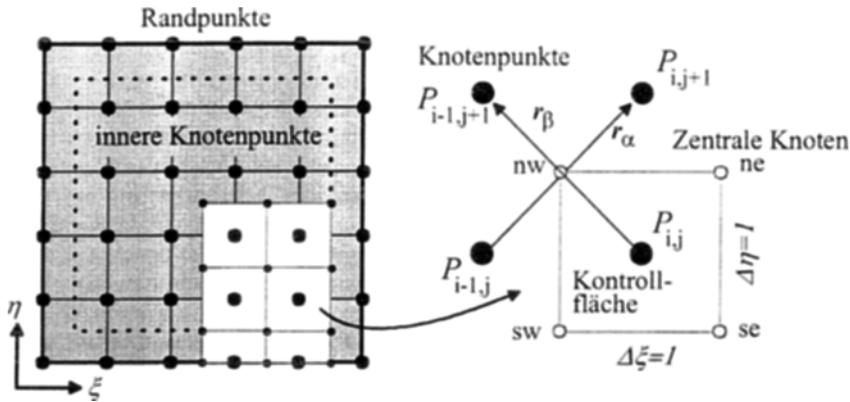


Bild 3. Bilden der Kontrollflächen in der „computational plane“

Temperaturgradient läßt sich folglich als eine Linearkombination der Vektoren r_x und r_β gemäß

$$\text{grad}T = a \cdot r_x + b \cdot r_\beta \quad (17)$$

darstellen. Des weiteren können die Richtungsableitungen der Temperatur T in Richtung der Vektoren r_x und r_β durch die zentralen Differenzen

$$\frac{\partial T}{\partial r_x} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i-1,j}}{|r_x|} = \frac{r_x}{|r_x|} \cdot \text{grad} T \quad (18)$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial r_\beta} = \frac{T_{i-1,j-1} - T_{i,j}}{|r_\beta|} = \frac{r_\beta}{|r_\beta|} \cdot \text{grad} T \quad (19)$$

angenähert werden. Zusammen mit Gleichung (17) ergibt sich somit das lineare Gleichungssystem

$$T_{i,j+1} - T_{i-1,j} = a \cdot r_x^2 + b \cdot r_x r_\beta \quad (20)$$

$$T_{i-1,j-1} - T_{i,j} = a \cdot r_x r_\beta + b \cdot r_\beta^2 \quad (21)$$

über das die Koeffizienten a und b , sowie folglich auch der Temperaturgradient am Zentralen Knoten nw berechnet werden.

2.3 Randbedingungen

Es wird angenommen, daß auf Grund der relativ geringen Blechdicke an den Rändern der betrachteten Struktur kein Wärmefluß über die Kanten in die Umgebung auftritt, was mit der Annahme

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad} T \cdot n = 0 \quad (22)$$

gleichbedeutend ist.

In der Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung mit einem Kontrollvolumenansatz ist die Bedingung (22) einfach zu formulieren. Zum Beispiel ist im Zentralen Knoten sw (Bild 4) auf dem Rand der Struktur der Temperaturgradient parallel zum Vektor r_γ , der sich aus den Ortsvektoren der Knotenpunkte $P_{i,j}$ und $P_{i-1,j}$ berechnet.

An der Wirkfläche zwischen dem Blech und seiner Umgebung sind maßgeblich zwei Effekte für eine Energieänderung im Blech ursächlich. Erstens bewirkt eine Temperaturdifferenz an der Grenzfläche zwischen dem Blech und seiner Umgebung (Werkzeug, umgebende Luft) einen Wärmestrom zwischen der Kontaktpaarung. Zweitens wird durch die Wirkflächenreibung zwischen dem Blech und den Werkzeugen Energie erzeugt, die ebenfalls eine Energieänderung im Blech verursacht. Des weiteren wird durch die verrichtete plastische Arbeit Energie eingebracht. Da in der entwickelten FDM-Formulierung eine in das System Blech eingebrachte Wärmeenergie über den Term $g(x, y, z, t)$ berücksichtigt wird, setzt sich dieser additiv aus drei Bestandteilen zusammen. Die Wärmeenergieerzeugung durch die Wärmeleitung an die Umgebung g_U , die Wirkflächenreibung g_R und die plastische Arbeit im Blech g_p .

Die Wärmestromdichte j_U (Bild 4) an der Grenzfläche zwischen dem Blech mit der Temperatur T und der Umgebung mit der Temperatur T_U ist allgemein gegeben durch die Temperaturdifferenz und den Übergangskoeffizienten α über die Beziehung

$$j_U = n \cdot \alpha \cdot (T - T_U) \quad (23)$$

Der Vektor n ist der Normalenvektor auf der Grenzfläche. Die Kombination von Gleichung (23) mit Gleichung (3) liefert

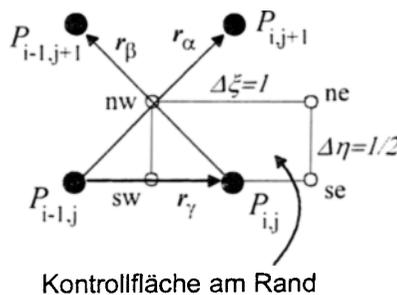
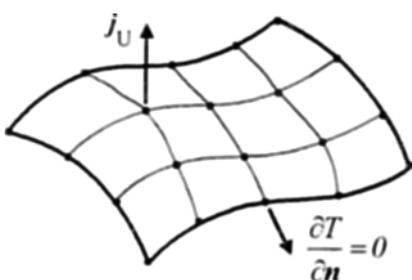


Bild 4. Randbedingungen am Blech

$$\alpha \cdot (T - T_U) = \frac{\Delta Q}{\Delta A \cdot \Delta t} \quad (24)$$

Der Term $g(x, y, z, t)$, der eine Wärmeenergieerzeugung in der Struktur beschreibt, kann über

$$\bar{g} = \frac{\Delta Q}{\Delta V \cdot \Delta t} \quad (25)$$

ausgedrückt werden. Wenn ein Volumenelement $\Delta V = \Delta A \cdot D$ um einen Knotenpunkt nach Bild 5 herausgeschnitten wird, dann ergibt sich eine dem Wärmetransport vom Blech in die Umgebung über die Blechoberfläche adäquate Wärmeenergieerzeugung von

$$\bar{g}_U = -\frac{1}{D} \cdot \alpha(T - T_U) \quad (26)$$

Die Wärmeenergieerzeugung durch die an der Fläche ΔA des Volumens ΔV während des Zeitinkrementes Δt geleistete Reibarbeit ΔW_R berechnet sich über

$$\bar{g}_R = k_R \cdot \frac{\Delta W_R}{\Delta V \cdot \Delta t} \quad (27)$$

Mittles des eingeführten Faktors k_R wird berücksichtigt, daß nur ein bestimmter Anteil der Reibarbeit in der Wirkfläche eine Energieeinbringung in das Blech bewirkt.

Da eine konstante Temperatur über die Blechdicke angenommen wird, ist für die Bestimmung von g_U und g_R die Betrachtung nur eines Volumenelementes über die Blechdicke D zulässig.

Bei einer plastischen Verformung von metallischen Werkstoffen wird in allgemeinen angenommen, daß die plastische Arbeit ΔW_{pl} zu ca. 90% irreversibel ist und in Wärme umgewandelt wird

$$\bar{g}_{pl} = k_{pl} \cdot \frac{\Delta W_{pl}}{\Delta V \cdot \Delta t} \quad \text{mit } k_{pl} = 0,9 \quad (28)$$

Die Größen g_R und g_{pl} können z.B. aus einer FEM-Berechnung des Blechumformprozesses gewonnen werden.

2.4 Zeitliche Integration der Wärmeleitung

Bei der FDM erfolgt die Berechnung der Temperaturänderungen auf Basis von Zeitinkrementen. Da die Temperatur am Anfang eines Zeitinkrementes als Lösung des vorausgegangenen Schrittes bekannt ist, handelt es sich um ein Anfangswertproblem. Das erfordert die Integration der über Gleichung (11) zu berechnenden Ableitung der Temperatur nach der Zeit $(\partial T / \partial t)_{ij}$ über das Zeitinkrement Δt

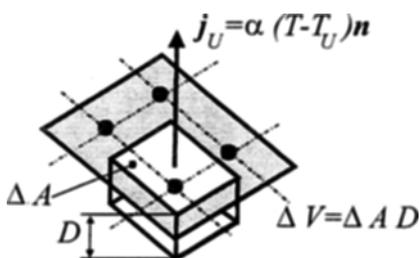


Bild 5. Volumenelement um einen Knotenpunkt

$${}^{t+\Delta t}T_{ij} = {}^tT_{ij} + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{ij} dt \quad (29)$$

Zur Integration derartiger Beziehungen sind verschiedene numerische Verfahren bekannt. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine explizite Euler-Vorwärtsintegration durchgeführt. Hierbei wird der zeitliche Temperaturgradient zu Beginn des Inkrementes berechnet und über das Zeitinkrement als konstant angenommen. Es ist anschaulich, daß diese numerische Integrationsmethode nur dann stabil ist, wenn das Zeitinkrement einen bestimmten Wert nicht überschreitet. Für die hier vorliegende Diskretisierung wurde eine stabile Zeitschrittweite von

$$\Delta t \leq \frac{\rho \cdot c_p \cdot h^2}{k} \quad (30)$$

mit dem Abstand zwischen zwei Knotenpunkten h ermittelt, vgl. [5].

2.5 Verifikation der entwickelten FDM

Anhand analytisch zu lösender Problemstellungen wurde die entwickelte FDM zur Berechnung der Wärmeleitung in dreidimensional geformten Blechen getestet. Exemplarisch für eine Verifizierung des zeitlichen Verhaltens sowie der Formulierung der Blechdicke in der FDM wird das Vorgehen kurz skizziert. Zur Verifizierung des zeitlichen Verhaltens wurde in einem ebenen Blech mit der in Bild 6 dargestellten Anfangstemperaturverteilung der Temperaturengleich berechnet. Das Blech mit einer konstanten Dicke von 1 mm wurde durch 15 Stützstellen diskretisiert. Der Vergleich der mit der FDM berechneten transienten Temperaturverteilung mit der analytischen Berechnung ergibt einen maximalen Fehler von nur 0,01 °C.

Die Verifizierung der korrekten Formulierung einer variablen Blechdicke in der FDM wurde anhand des in Bild 7 dargestellten Problems durchgeführt. Die Berechnung

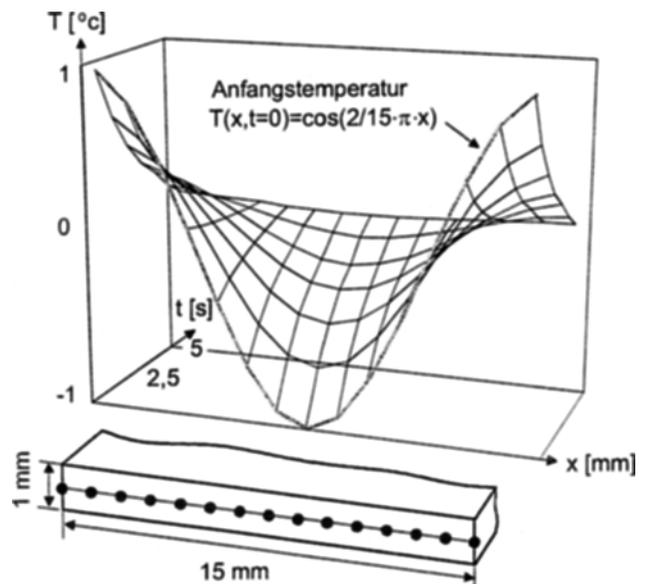


Bild 6. Berechneter Temperaturengleich in einem Blech

der stationären Wärmeleitung durch ein Blech mit variabler Blechdicke zeigt eine nahezu exakte Übereinstimmung mit der analytisch berechneten Temperaturverteilung.

3 Kombinierte FEM/FDM-Simulation eines Blechumformprozesses

Bei der FEM-Simulation von Blechumformprozessen werden im allgemeinen Programme eingesetzt, die entweder auf einem statisch-impliziten oder auf einem dynamisch-expliziten Ansatz basieren. Eine Diskussion beider Ansätze wird in [6] durchgeführt, wobei sich zur Zeit eine klare Tendenz hin zur dynamisch-expliziten Methode erkennen läßt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode ist z.B. in [7] gegeben. Ein wichtiger Gesichtspunkt bei der dynamisch-expliziten Methode ist die bedingte Stabilität, die einen Zeitschritt von

$$\Delta t \leq \frac{L}{c_d} \approx \frac{L}{\sqrt{E/\rho}} \quad (31)$$

mit der Dichte des Werkstoffes ρ , dem E-Modul E sowie einer charakteristischen Länge des Elementes L erfordert. Für übliche Blechwerkstoffe kann gezeigt werden, daß im allgemeinen die stabile Zeitschrittweite der dynamisch-expliziten Methode mehrere Größenordnungen geringer als die zur Berechnung der Wärmeleitung mit der FDM ist.

Da im allgemeinen die maximale Zeitschrittweite in Verbindung mit der realen Stempelgeschwindigkeit zu einer inakzeptabel hohen Anzahl an Recheinkrementen führt, wird bei der expliziten FEM-Simulation eines Blechumformprozesses entweder die Stempelgeschwindigkeit oder die Dichte künstlich erhöht [8]. Durch letztere Maßnahme folgt automatisch eine Erhöhung der stabilen Zeitschrittweite. Die durch diese Maßnahmen zusätzlich eingebrachten Massenkräfte werden aufgrund des großen Verhältnisses von Oberfläche zu Volumen bei Blechen von den Werkzeugen aufgenommen, die im allgemeinen als „starre“ Körper modelliert werden.

Die beschriebene künstliche Anhebung der Stempelgeschwindigkeit hat jedoch eine Auswirkung auf die Be-

rechnung der Wärmeleitung, da diese im Gegensatz zur allgemeinen elastisch-plastischen Beschreibung von Blechwerkstoffen abhängig von der Zeit ist. Aufgrund dessen wird die Dichte künstlich angehoben, um die Zeitschrittweite zu erhöhen und folglich die Rechenzeit zu verkürzen. Die Entkopplung der Näherungsverfahren ermöglicht hierbei die Verwendung der realen Dichte bei der Berechnung der Wärmeleitung mit der FDM. Trotz dieser Maßnahme ist eine Subinkrementierung zur Integration von Gleichung (27) mit der expliziten Euler-Vorwärtsintegration nicht erforderlich.

Bei Schalenelementen, die im allgemeinen zur Diskretisierung von Bauteilen aus Blech im Rahmen einer FEM-Simulation eingesetzt werden, liegen die das Element beschreibenden Knoten in der Mittelebene des Blechs. Eine erste, naheliegende Möglichkeit ist es, die Knotenpunkte der FDM-Diskretisierung mit diesen Knoten zusammenfallen zu lassen. Da aus verschiedenen Gründen bei der Blechumformsimulation reduziert integrierte Schalenelemente mit nur einem Integrationspunkte in der Mittelebene des Elementes eingesetzt werden, vgl. [6], müssen die Temperaturen in den Knoten auf diese Integrationspunkte interpoliert werden. Demzufolge können die Knotenpunkte der FDM auch direkt auf die Integrationspunkte in der Mittelebene der Schalenelemente gelegt werden. Durch diese Vorgehensweise wird die geometrische Lage der Knotenpunkte auf dem Blech mittels der FEM vorgegeben. Aufgrund dieser eindeutigen Zuordnung kann die thermisch-mechanische Berechnung sehr effektiv durchgeführt werden.

3.1 Thermisch-mechanische Berechnung eines Streifenziehversuchs

Anhand des in Bild 8 dargestellten Problems kann die erfolgreiche Kopplung der beiden Näherungsverfahren gezeigt werden. Hierbei wird ein Blechstreifen durch zwei Backen gezogen. Für die FEM-Simulation des mechanischen Prozesses, zunächst ein rein elastischer Problemfall, wurde das Programmsystem ABAQUS/Explicit eingesetzt, das auf einem dynamisch-expliziten Ansatz basiert. Die Flächenpressung und der Reibkoeffizient entsprechen den Zuständen im Flansch eines realen Tiefziehvorgangs. Dem mit Schalenelementen diskretisierten Blech wurden die mechanischen und thermischen Eigenschaften eines rostfreien Stahls zugewiesen. Es wurde angenommen, daß der Wärmeübergang vom Blech zu den Werkzeugen $2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ und zur umgebenden Luft $25 \text{ W/m}^2\text{K}$ beträgt. Den Werkzeugen sowie der umgebenden Luft wurde eine

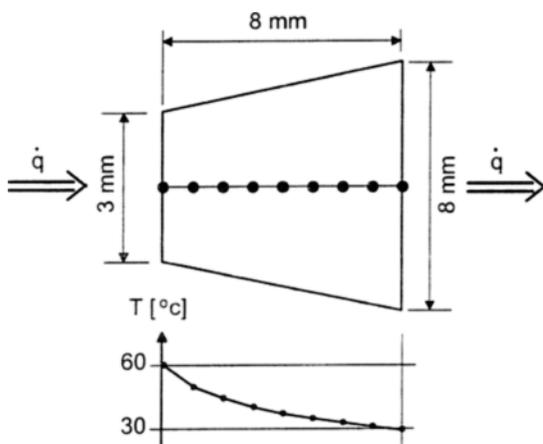


Bild 7. Stationäre Wärmeleitung in einem Blech mit örtlich unterschiedlicher Dicke

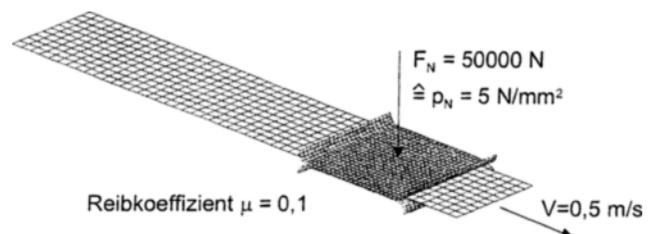


Bild 8. Gekoppelte FDM/FEM-Berechnung eines Streifenziehversuchs

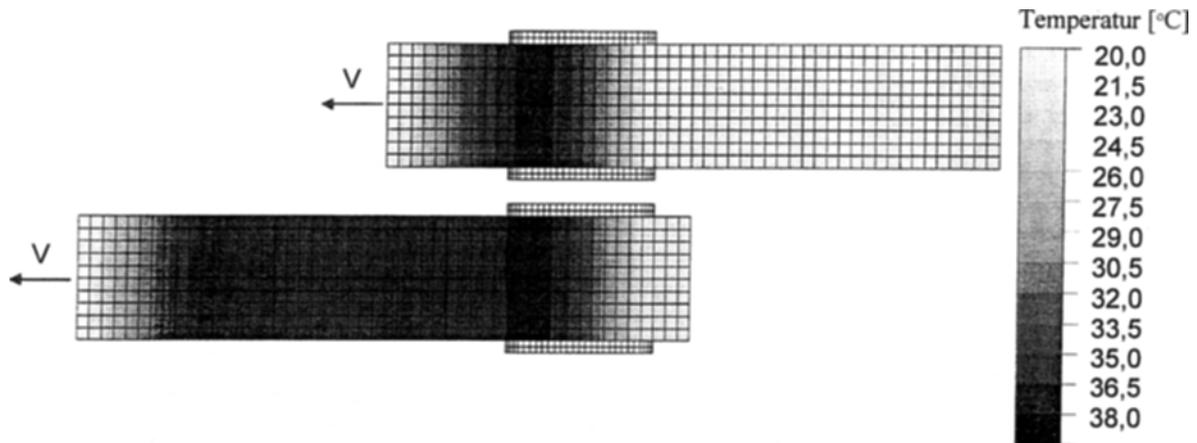


Bild 9. Berechnete Temperaturverteilung im Blechstreifen

konstante Temperatur von 20 °C zugewiesen. Die Anfangstemperatur im Blech beträgt ebenfalls 20 °C.

Da eine Plastifizierung des Blechwerkzeuges nicht stattfindet, ist die Temperaturänderung auf die durch die Reibung eingebrachte Energie zurückzuführen. Zum einen zeigt die berechnete, bezüglich der Längsachse symmetrische Temperaturverteilung die plausible Berücksichtigung der Reibarbeit in der FDM-Formulierung sowie die richtige Kopplung beider Näherungsverfahren. Zum anderen verdeutlicht das Ergebnis, daß die Wirkflächenreibung in einem Blechumformprozeß eine keinesfalls zu vernachlässigende Temperaturerhöhung im Werkstück bewirkt.

3.2 Thermisch-mechanische Berechnung des Tiefziehprozesses einer Katalysatorwanne

Am Beispiel des Tiefziehprozesses einer Katalysatorwanne (Bild 10) wird im folgenden das Potential der entwickelten

Methode aufgezeigt. Hinsichtlich der Modellierung der Kinematik wurde angenommen, daß das Bauteil auf einer üblichen Kurbelpresse gefertigt wird. Die Dauer des eigentlichen Umformprozesses beträgt 0,5 Sekunden. Aufgrund der Symmetrie wurde nur eine Hälfte des Gesamtproblems modelliert. Das Werkstück wurde mit insgesamt 2088 Schalenelementen diskretisiert, denen in der FEM-Simulation des Umformprozesses mit dem Programmsystem ABAQUA/Explicit das elastisch-plastische Materialverhalten eines rostfreien Stahls zugewiesen wurde. Die weiteren Randbedingungen wurden identisch denen im Streifenziehversuch gewählt.

In Bild 10 ist die berechnete Temperaturverteilung im Bauteil am Ende des Umformprozesses dargestellt. Die Umformbereiche im Bauteil sind aufgrund der plastischen Arbeit durch erhöhte Temperaturen gekennzeichnet. Im Bereich der Aushalsung wurde eine Temperaturerhöhung von ca. 40 °C berechnet. Aufgrund der Wärmeleitung ist auch in Bereichen, in denen kaum plastische Arbeit sowie Reibarbeit verrichtet wird, z.B. im Boden, eine Temperaturerhöhung feststellbar.

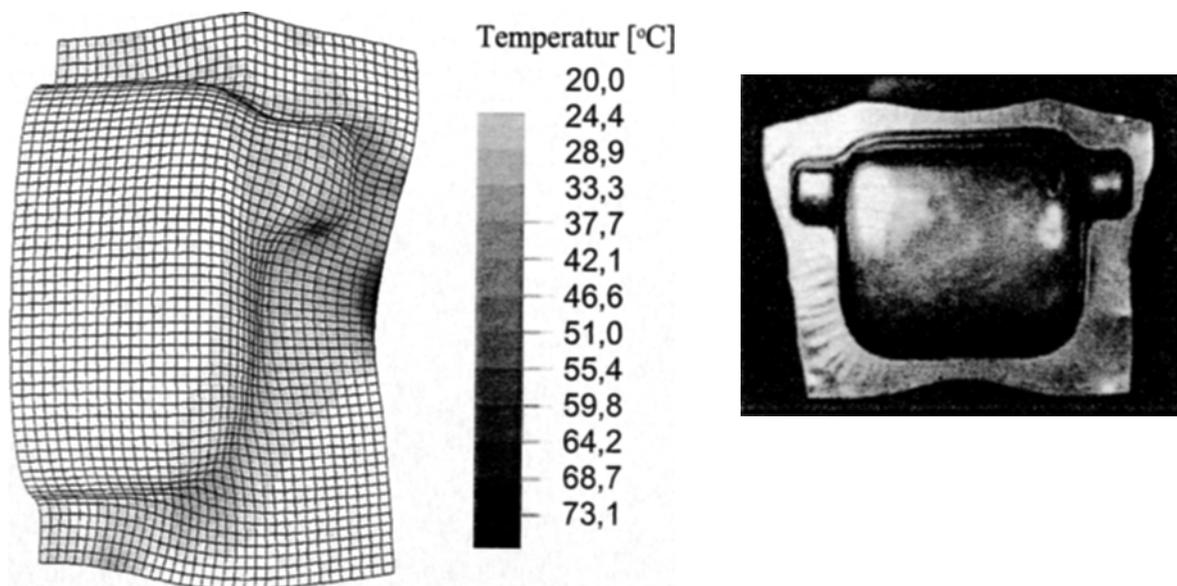


Bild 10. Berechnete Temperaturverteilung in einer Katalysatorwanne am Ende der Umformung

Bei Materialien, die im berechneten Temperaturintervall temperaturabhängige Stoffeigenschaften aufweisen, können sich signifikante Unterschiede des Simulationsergebnisses zur Realität ergeben, wenn eine rein isotherme Betrachtung des Umformprozesses durchgeführt wird. Mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode kann die Berechnung der Temperaturverteilung relativ einfach und effektiv durchgeführt werden. Die Berechnungsdauer auf einer Workstation mittlerer Leistungsklasse erhöhte sich durch die zusätzliche Berechnung der Wärmeleitung mittels der FDM um nur 9%.

Literatur

1. **Özisik MN** (1994) Finite Difference Methods in Heat Transfer. CRC Press, Boca Raton Ann Arbor London Tokyo
2. **Hänsel HC, Berg HJ, Hora P, Reissner J** (1996) Simulation and failure prediction of deep drawing processes with metastable austenitic steels. Proceedings of the 3rd international conference, NUMISHEET'96, Dearborn, Michigan, 367-371
3. **Bronstein IN, Semendjajew KA** (1989) Taschenbuch der Mathematik. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig
4. **Riemer M, Wauer J, Wedig W** (1993) Mathematische Methoden der technischen Mechanik. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
5. **Schwetlick H, Kretzschmar H** (1991) Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig
6. **Tekkaya E** (1998) Stand der Simulation in der Blechumformung. Blech Rohre Profile 11, 62-68
7. **Bathe KJ** (1990) Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
8. **Wang SP, Choudhry S, Wertheimer TB** (1998) Comparison between the static implicit and dynamik explicit methods for FEM simulation of sheet forming processes. Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications, Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Process, Numiform'98, Balkema, Rotterdam, 245-250