

Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle hétérogène

Alain Bachelot, Laurent Bounhoure, Agnès Pujols

Mathématiques Appliquées de Bordeaux, UMR CNRS 5466, Université Bordeaux 1,
351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

Received September 28, 1998 / Revised version received June 2, 2000 /
Published online March 20, 2001 – © Springer-Verlag 2001

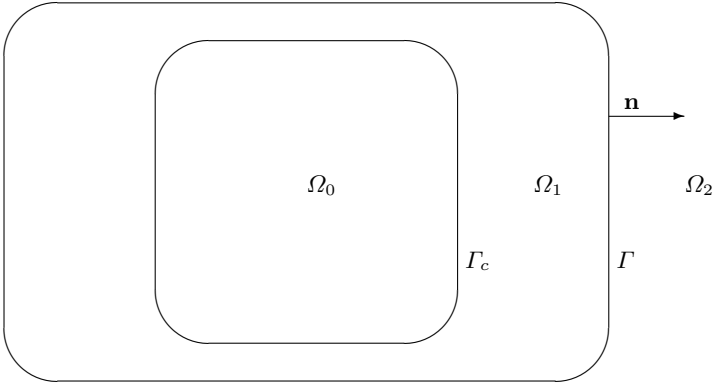
Summary. On s'intéresse au calcul du champ électromagnétique diffracté par un obstacle conducteur recouvert d'un matériau hétérogène. On étudie une méthode numérique consistant à coupler une approximation par éléments finis de volumes avec des potentiels retardés de surface. Plusieurs formulations variationnelles espace-temps sont présentées. On établit des résultats de stabilité et de convergence pour la méthode proposée.

Mathematics Subject Classification (1991): 65N30

1. Introduction

Considérons un obstacle hétérogène tridimensionnel Ω composé d'un conducteur parfait Ω_0 entouré d'une couche de matériau diélectrique Ω_1 , dont les caractéristiques $\varepsilon_1(x)$ et $\mu_1(x)$ sont bornées. On note respectivement Γ_c et Γ les frontières du noyau conducteur et de l'obstacle. Celles-ci sont supposées très régulières.

On s'intéresse à la diffraction par Ω d'une onde électromagnétique transitoire incidente, représentée par le champ $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$. Sachant que dans tout l'espace, le champ total est la somme des champs diffracté et incident, le phénomène est modélisé par le problème de transmission suivant:



$$(1) \quad (P) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{rot} \mathbf{E}_1 + \mu_1 \partial_t \mathbf{H}_1 = \mathbf{0} \\ \text{rot} \mathbf{H}_1 - \varepsilon_1 \partial_t \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega_1 \\ \begin{array}{l} \text{rot} \mathbf{E}_2 + \mu_2 \partial_t \mathbf{H}_2 = \mathbf{0} \\ \text{rot} \mathbf{H}_2 - \varepsilon_2 \partial_t \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \end{array} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega_2 \\ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{H}_2 \wedge \mathbf{n} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{array} \right) \\ \mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega_0 \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \Gamma \\ \mathbf{E}_\nu = \mathbf{H}_\nu = \mathbf{0} \quad \text{pour } t < 0 \end{array} \right.$$

où Ω_2 est l'extérieur vide de l'obstacle, de caractéristiques constantes ε_2 et μ_2 , et \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à Ω_1 .

L'inconnue $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ représente le champ total dans la couche de matériau, et $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ le champ diffracté à l'extérieur de l'obstacle, de sorte que les données (\mathbf{q}, \mathbf{p}) du problème sont les traces tangentielles sur Γ du champ incident $(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1^{inc}, \mathbf{H}_1^{inc} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma)$. Pour la partie mathématique, le couple (\mathbf{q}, \mathbf{p}) sera considéré soit comme une donnée à part entière, soit comme la donnée du champ incident sur la surface Γ , auquel cas le problème (P) modélisera un problème de scattering.

On pourrait montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (P) grâce à la théorie des semi-groupes, mais notre but consiste à calculer numériquement la solution. Nous établirons néanmoins des résultats d'existence et d'unicité. La méthode que nous proposons consiste à associer une approximation par éléments finis de volume dans l'ouvert borné Ω_1 à des équations intégrales espace-temps, qui permettent de réduire la connaissance des champs diffractés $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ dans le domaine extérieur à celle de

leur trace tangentielle sur la frontière Γ de l'obstacle. Il s'agit donc de coupler deux méthodes distinctes pour la diffraction:

- Les éléments finis de volume utilisés dans un domaine contenant l'obstacle et borné par une frontière artificielle sur laquelle on impose des conditions aux limites adéquates, qui traduisent au mieux le comportement de la solution hors de ce domaine. On peut citer, sans que la liste soit exhaustive les travaux de A. Bendali et L. Halpern [13], B. Engquist et A. Majda [21], P. Joly et B. Mercier [27], B. Hanouzet, M. Sesques [25] et H. Barucq [9].
- La méthode des potentiels retardés, qui associe aux problèmes d'évolution hyperboliques des formulations intégrales espace-temps, dont la discrétisation par éléments finis de surface conduit à des schémas stables et convergents. Elle a été introduite par A. Bamberger et T. Ha Duong [7], [8], [23], pour la diffraction d'une onde acoustique, puis développée en électromagnétisme par A. Bachelot et A. Pujols [5], [6], et I. Terrasse [34] pour la diffraction par des obstacles conducteurs, et par V. Lange [2], [28], [3] pour des obstacles dissipatifs, modélisés par une condition d'impédance.

Le couplage permet de cumuler les avantages de ces deux méthodes, et d'éliminer leurs principaux inconvénients. En effet, le maillage volumique prendra en compte les hétérogénéités de l'obstacle, sachant qu'on pourra bénéficier à terme de la richesse des matériaux traités dans les codes industriels utilisant les éléments finis volumiques et les conditions aux limites absorbantes. D'autre part, le domaine tronqué dans lequel se fait le maillage sera réduit au volume même des matériaux de l'obstacle, sur la frontière duquel les équations intégrales joueront le rôle d'une condition aux limites absorbante "exacte", puisqu'elle retranscrira précisément le caractère de l'onde diffractée dans le milieu extérieur. Ce type de méthode n'est pas nouveau, puisque déjà en 1980, C. Johnson et J.C. Nédélec [26] ont réalisé l'étude théorique d'un tel couplage pour le problème du Laplacien en dimension 2. Par la suite, M. Costabel [16] a étudié le cas général d'un opérateur elliptique du second ordre dans \mathbb{R}^n , présentant un couplage spécifique qui conduit à une formulation variationnelle symétrique. Cette façon de procéder a été reprise dans les articles de M. Costabel et E. Stephan [17], [18] pour un problème d'onde élastique, mais aussi par V. Levillain [29] pour le système de Maxwell harmonique (ce dernier s'est aussi intéressé à deux autres formulations variationnelles qui réalisent le couplage). Ces résultats nous seront utiles en vue du lien étroit entre les domaines fréquentiel et temporel. Signalons de plus l'étude menée par M. Filipe, A. Forestier, T. Ha Duong [22], qui a analysé un problème d'interaction fluide-matière en régime transitoire, et celle de V. Lubet [4] sur le couplage de potentiels retardés avec des éléments finis pour la résolution d'un problème de diffraction d'onde.

La seconde partie présente le cadre fonctionnel utilisé, ainsi que l'analyse des potentiels en régimes stationnaire et instationnaire. En effet, nous écrirons des résultats en fréquence et en temps, et les solutions des problèmes de diffraction seront représentées par ces potentiels.

La troisième partie traite de la méthode de couplage d'éléments finis volumiques avec des équations intégrales espace-temps. Nous établissons d'abord quatre formulations variationnelles, qui représentent quatre façons de coupler le système de Maxwell avec les deux équations intégrales issues des formules de représentation du champ électromagnétique diffracté dans le domaine extérieur. En reprenant l'idée de T. Ha Duong [23], une transformée de Fourier-Laplace en temps nous transporte dans le domaine fréquentiel, où nous considérons le problème harmonique équivalent et ses 4 formulations variationnelles. Pour la deuxième formulation, nous écrirons un résultat de coercivité de la forme sesquilineaire associée, ainsi que l'existence et l'unicité d'une solution au problème harmonique. Par le théorème de Paley-Wiener et la formule de Parseval, nous déduisons l'existence et l'unicité d'une solution, et une relation de coercivité dans un cadre fonctionnel adéquat pour une régularité en temps spécifique. Ce dernier résultat sera essentiel pour établir la stabilité et la convergence de la méthode. Nous donnerons de plus des estimations d'erreur, élaborées à partir de celles relatives aux éléments finis utilisés: les éléments finis courbes conformes dans $H(\text{rot}, \Omega_1)$, les éléments finis de Raviart-Thomas conformes dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$, et ceux de type \mathbb{P}_k , $k \in \mathbb{N}$, sur l'axe des temps positifs. Nous écrirons ensuite de manière plus succincte des résultats relatifs aux trois autres formulations variationnelles.

Remerciements. Les auteurs souhaitent remercier les professeurs A. Bendali, T. Ha Duong et J-M. Thomas pour de fructueuses conversations et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

2. Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, on définit les opérateurs qui interviennent dans les équations intégrales, en fréquence et en temps. Les propriétés des opérateurs en temps se déduisent, via les théorèmes de Paley-Wiener et Parseval, de celles écrites dans le domaine fréquentiel. C'est ce raisonnement qui sera utilisé par la suite pour obtenir la régularité en temps des solutions de notre problème, à partir des puissances de $|\omega|$ dans les inégalités d'énergie en fréquence. Avant tout, nous rappelons les espaces fonctionnels qui interviendront dans cette étude et des résultats de trace et de relèvement qui serviront à déterminer les puissances de $|\omega|$ dans les estimations futures.

Dans ce qui suit, Ω représente un ouvert borné, de frontière Γ régulière, et on considère un nombre complexe non nul ω , $|\omega| \geq c_0 > 0$.

2.1. Rappel des espaces fonctionnels et des normes indexées

La convention suivante sera adoptée par la suite: la notation $|\cdot|$ désignera les normes usuelles, tandis que $\|\cdot\|$ fera référence aux normes indexées.

2.1.1. Cadre fonctionnel harmonique. Soit r un réel quelconque. Soit Ω un ouvert borné régulier de frontière Γ . Nous utiliserons les espaces de Sobolev $H^r(\Omega)$ ou $H^r(\Gamma)$ dans l'étude du problème de Helmholtz. Ces espaces seront munis de leur norme naturelle $|\cdot|_{H^r(\Omega)}$ ou $|\cdot|_{H^r(\Gamma)}$.

Pour l'électromagnétisme, nous considérerons le cadre fonctionnel classiquement lié au problème de Maxwell, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\} \\ H(\operatorname{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\} \end{aligned}$$

Cependant, nous utiliserons sur ces espaces des normes dites indexées par un paramètre complexe non nul ω , qui sont équivalentes aux normes usuelles.

Définition 2.1. – Pour tout f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle f^ω la distribution dilatée de f par ω dans \mathbb{C}^* , définie par:

$$\forall y \in |\omega|\Omega, f^\omega(y) = \frac{1}{|\omega|} f\left(\frac{y}{|\omega|}\right)$$

– $\forall \omega \in \mathbb{C}^*, \forall r \in \mathbb{R}$, on définit une norme sur $H^r(\Omega)$ par:

$$\forall f \in H^r(\Omega), \|f\|_{r,\omega,\Omega}^2 = \frac{1}{|\omega|} |f^\omega|_{H^r(|\omega|\Omega)}^2$$

Remarques.

– Pour $r = 0$, pour tout ω dans \mathbb{C}^* , les normes usuelle et indexée coïncident, i.e.:

$$\|\cdot\|_{0,\omega,\Omega} = |\cdot|_{L^2(\Omega)}.$$

– Si $|\omega| = 1$, alors pour tout r réel, les deux normes coïncident.

– Cette définition est encore valable en remplaçant le domaine Ω par la surface Γ .

Les normes indexées sur les espaces $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ sont données par:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{0,\omega,\operatorname{div}\Omega} &= \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\omega,\Omega}^2 + \frac{1}{|\omega|^2} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\omega,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\mathbf{v}\|_{0,\omega,\operatorname{rot}\Omega} &= \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\omega,\Omega}^2 + \frac{1}{|\omega|^2} \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{0,\omega,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Comme elles sont équivalentes aux normes usuelles, elles confèrent aux espaces $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ une structure d'espace de Hilbert.

Les propriétés de trace sur ces espaces nous amènerons à considérer les deux espaces suivants:

$$\begin{aligned}
 H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) &= \left\{ \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\} \\
 H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma) &= \left\{ \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{rot}_\Gamma \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}
 \end{aligned}$$

où div_Γ et rot_Γ sont respectivement la divergence et le rotationnel scalaire surfacique. Ils seront munis de deux types de normes, les normes usuelles:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} &= \left(|\mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + |\text{div}_\Gamma \mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 |\mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)} &= \left(|\mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + |\text{rot}_\Gamma \mathbf{v}|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

et les normes indexées:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma} &= \left(\|\mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma}^2 + \frac{1}{|\omega|^2} \|\text{div}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \|\mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{rot}_\Gamma} &= \left(\|\mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma}^2 + \frac{1}{|\omega|^2} \|\text{rot}_\Gamma \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Nous utiliserons dans l'exposé, les relations de dualité entre ces deux espaces, ainsi que les formules de Green qui leur sont relatives (voir [34] page 106, page 120 et 127 en ce qui concerne les normes indexées).

2.1.2. Cadre fonctionnel en temps. Soit E un espace de Hilbert quelconque, on appelle $\mathcal{D}'_+(E)$ l'espace des distributions causales sur \mathbb{R} (i.e. à support inclus dans \mathbb{R}^+) à valeurs dans E et $\mathcal{S}'_+(E)$ le sous espace de $\mathcal{D}'_+(E)$ formé des distributions tempérées. Pour tout σ dans \mathbb{R} , on définit:

$$LT(\sigma, E) = \{f \in \mathcal{D}'_+(E), e^{-\sigma t} f \in \mathcal{S}'_+(E)\}$$

Définition 2.2. On appelle ensemble de distributions Laplace transformables sur \mathbb{R} à valeurs dans E l'ensemble:

$$LT(E) = \{f \in \mathcal{D}'_+(E), \exists \sigma \in \mathbb{R} / f \in LT(\sigma, E)\}$$

Remarque. Si $f \in LT(\sigma, E)$, alors $\forall \sigma' > \sigma, f \in LT(\sigma', E)$.

Définition 2.3. Pour $f \in LT(E)$, on définit sur le demi-plan complexe $\{\omega \in \mathbb{C}; \Im \omega > 0\}$ la transformée de Fourier-Laplace de f , notée \hat{f} ou $\mathcal{L}(f)$, de la manière suivante:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(e^{-\sigma t} f)(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \text{ si } e^{-\sigma t} f \in L^1(\mathbb{R}^+, E)$$

avec $\omega = \eta + i\sigma$ et \mathcal{F} la transformée de Fourier en temps non normalisée.

Lorsqu'on aura besoin de la transformation inverse, on utilisera le théorème suivant dont la démonstration figure par exemple dans [19] chapitre 16 paragraphe 2.2.

Théorème 2.1 (de Paley-Wiener). $\hat{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction $f \in LT(E)$ si et seulement si il existe des constantes $\sigma_0, \sigma_1 > \sigma_0, C > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que:

$$\begin{aligned} &\hat{f}(\omega) \text{ est holomorphe à valeurs dans } E \text{ sur le demi-plan complexe } \{\omega \in \mathbb{C}; \Im\omega > \sigma_0\} \\ &\|\hat{f}(\omega)\|_E \leq C(1 + |\omega|)^k \text{ sur le demi-plan } \{\omega \in \mathbb{C}; \Im\omega \geq \sigma_1\} \end{aligned}$$

Plus particulièrement, pour les inégalités d'énergie que nous écrivons dans les domaines fréquentiel et temporel, nous utiliserons la relation suivante:

Proposition 2.1 (Formule de Parseval). $\forall f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, E) \cap LT(E), \forall \sigma \geq \max(\sigma(f), \sigma(g)),$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} (\hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega))_E d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} (f(t), g(t))_E dt$$

où $(\cdot, \cdot)_E$ désigne le produit hermitien sur E .

Les espaces $\mathcal{H}^s_\sigma(\mathbb{R}^+, E)$. Soient s et σ deux réels, $\sigma > 0$. Présentons la définition des espaces fonctionnels temps-espaces donnés par T. Ha Duong dans [23]:

$$\mathcal{H}^s_\sigma(\mathbb{R}^+, E) = \{f \in LT(\sigma, E); e^{-\sigma t} \Lambda^s f \in L^2(\mathbb{R}_t, E)\}$$

où $\widehat{\Lambda^s f}(\omega) = (-i\omega)^s \hat{f}(\omega)$.

Remarque. Pour s entier naturel, l'opérateur Λ^s n'est autre que l'opérateur de dérivation en temps d'ordre s .

Ce sont des espaces de Hilbert munis de la norme:

$$(2) \quad |f|_{\sigma,s,E} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} |\Lambda^s f(t)|^2_E dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

La formule de Parseval permet de donner une autre caractérisation de cette norme en fonction d'une intégrale en fréquence:

$$(3) \quad |f|_{\sigma,s,E} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} |\hat{f}(\omega)|^2_E d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette caractérisation induit l'inégalité suivante, avec l'inclusion qui en découle:

$$|f|_{\sigma,s,E} \leq \sigma^{s-s'} |f|_{\sigma,s',E} \text{ avec } s' > s$$

$$\mathcal{H}_\sigma^{s'}(\mathbb{R}^+, E) \subset \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$$

Les espaces $H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, E)$. On peut répéter le même processus que précédemment en considérant cette fois les normes indexées. L'élaboration des espaces obtenus est détaillée dans [34] page 29. Nous nous limiterons ici à de brefs rappels.

La motivation de ces espaces est liée à l'énergie électromagnétique:

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega (\varepsilon_0 |\mathbf{E}(t, x)|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}(t, x)|^2) dx$$

En exhibant l'image par Fourier-Laplace de cette expression, et en utilisant les équations de Maxwell harmoniques dans le domaine Ω , on obtient:

$$\mathcal{E}(\omega) = \varepsilon_0 \int_\Omega \left(|\hat{E}(\omega, x)|^2 + \frac{1}{|\omega|^2} |\mathbf{rot} \hat{E}(\omega, x)|^2 \right) dx$$

Pour alléger les notations, nous avons écrit ω pour le rapport $\frac{\omega}{c}$. Cette intégrale définit une norme que l'on veut contrôler. Il suffit d'appliquer la transformée de Fourier-Laplace inverse pour s'apercevoir que la division par le module de ω impose que $\mathbf{rot} \mathbf{E}$ possède un degré de régularité en temps de moins que \mathbf{E} . En effet:

$$\mathcal{E}(t) = \int_\Omega \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}(t, x)|^2 + \mu_0 \left| \int_0^t \mathbf{rot} \mathbf{E}(s, x) ds \right|^2 \right) dx$$

Aussi ces espaces auront-ils la caractéristique suivante: toute dérivation en espace entraînera la perte d'un ordre de régularité en temps. Nous introduirons ces espaces d'abord pour $E = H^m(\Omega)$, avec m entier naturel, puis nous étendrons cette définition à d'autres espaces de Sobolev.

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on définit de proche en proche les espaces suivants:

$$H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)) = \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$$

$$H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^m(\Omega)) = \{f \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{m-1}(\Omega));$$

$$\quad \nabla f \in H_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{m-1}(\Omega)^3)\}$$

La formule de Parseval permet d'obtenir une caractérisation similaire à (3) .

$$(4) \quad \|f\|_{s,\sigma,H^m(\Omega)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{m,\omega,\Omega}^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\|\hat{f}(\omega)\|_{m,\omega,\Omega}$ est défini de proche en proche par:

$$\|\hat{f}(\omega)\|_{0,\omega,\Omega} = \|\hat{f}(\omega)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(5) \quad \|\hat{f}(\omega)\|_{m,\omega,\Omega}^2 = \|\hat{f}(\omega)\|_{m-1,\omega,\Omega}^2 + \frac{1}{|\omega|^2} \|\nabla \hat{f}(\omega)\|_{m-1,\omega,\Omega}^2$$

On vérifie facilement que cette définition coïncide avec celle donnée en 2.1 pour $r = m$ entier. En effet, lors de chaque dérivation en espace, la dilatation fait apparaître $|\omega|$ en facteur. En utilisant la formule de récurrence (5), on obtient la caractérisation de la norme $\|\cdot\|_{s,\sigma,H^m(\Omega)}$:

$$(6) \quad \|f\|_{s,\sigma,H^m(\Omega)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t} \sum_{p=0}^m C_m^p \|A^{s-p} D^p f(t)\|_{L^2(\Omega)_{3p}}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

où D^p est la dérivée p -ième en espace qui satisfait la relation de récurrence:

$$\begin{aligned} D^0 u &= u \\ D^p u &= \nabla D^{p-1} u, \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Remarque. En comparant avec la formule (2) qui donne la caractérisation de la norme introduite par T. Ha Duong, on voit qu'ici la dérivation en temps et la dérivation en espace sont étroitement liées.

Considérons maintenant le cas où $E = H^r(\Omega)$, r étant un réel. Pour tout s réel, on définit:

$$H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^r(\Omega)) = \left\{ f \in LT(\sigma, H^r(\Omega)), \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\Omega}^2 d\omega < +\infty \right\}$$

Ces espaces sont munis d'une structure hilbertienne pour la norme:

$$(7) \quad \|f\|_{s,\sigma,H^r(\Omega)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\Omega}^2 d\omega$$

Considérons maintenant le cas des espaces définis sur la surface Γ de l'obstacle. On note:

$$H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^r(\Gamma)) = \left\{ f \in LT(\sigma, H^r(\Gamma)), \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\Gamma}^2 d\omega < +\infty \right\}$$

Ces espaces sont munis de la norme:

$$\|f\|_{s,\sigma,H^r(\Gamma)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\Gamma}^2 d\omega$$

Nous présentons enfin le cadre fonctionnel qui nous intéressera plus particulièrement pour le système de Maxwell, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}
 H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^r(\operatorname{div}, \Gamma)) &= \left\{ f \in LT(\sigma, H^r(\operatorname{div}, \Gamma)), \right. \\
 &\quad \left. \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\operatorname{div}\Gamma}^2 d\omega < +\infty \right\} \\
 H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^r(\operatorname{rot}, \Gamma)) &= \left\{ f \in LT(\sigma, H^r(\operatorname{rot}, \Gamma)), \right. \\
 &\quad \left. \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\operatorname{rot}\Gamma}^2 d\omega < +\infty \right\}
 \end{aligned}$$

avec leur norme respective:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{s,\sigma,H^r(\operatorname{div}\Gamma)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\operatorname{div}\Gamma}^2 d\omega \\
 \|f\|_{s,\sigma,H^r(\operatorname{rot}\Gamma)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{f}(\omega)\|_{r,\omega,\operatorname{rot}\Gamma}^2 d\omega
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons:

$$\begin{aligned}
 \forall \hat{f} \in H^r(\operatorname{div}, \Gamma), \|\hat{f}\|_{r,\omega,\operatorname{div}\Gamma} &= |\hat{f}^\omega|_{H^r(\operatorname{div},|\omega|\Gamma)} \\
 \forall \hat{f} \in H^r(\operatorname{rot}, \Gamma), \|\hat{f}\|_{r,\omega,\operatorname{rot}\Gamma} &= |\hat{f}^\omega|_{H^r(\operatorname{rot},|\omega|\Gamma)}
 \end{aligned}$$

Nous terminons ces rappels avec le théorème de dualité en temps et en espace:

Théorème 2.2. *Pour tout s réel,*

$$\begin{aligned}
 \left(H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma)) \right)' &= H_\sigma^{-s} \left(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma) \right) \\
 \left(H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)) \right)' &= H_\sigma^{-s} \left(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma) \right)
 \end{aligned}$$

Preuve. La dualité en espace $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma) - H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)$ est connue, celle en temps est une conséquence directe des définitions précédentes. \square

2.2. Résultats de trace et de relèvement

Pour le problème de Maxwell, nous utiliserons les traces:

$$\begin{aligned}
 \gamma_n : \mathcal{D}(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma) & \gamma_\tau : \mathcal{D}(\Omega)^3 &\longrightarrow T\mathcal{D}(\Gamma)^2 \\
 \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma & \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}|_\Gamma \\
 \gamma_t : \mathcal{D}(\Omega)^3 &\longrightarrow T\mathcal{D}(\Gamma)^2 \\
 \mathbf{u} &\longmapsto \mathbf{n} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})|_\Gamma
 \end{aligned}$$

Leurs majorations de continuité et de surjectivité dans les espaces $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$ munis de leur norme naturelle sont données, par exemple dans [30]. Nous aurons besoin de résultats similaires pour les normes indexées par ω .

Proposition 2.2. *L'application γ_n se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{div}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ munis de leur norme indexée, et on a:*

$$(8) \quad \forall \mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega) \quad \|\gamma_n \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma} \leq C(\Gamma) |\omega|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\text{div}, \omega, \Omega}$$

De plus, $\forall u_n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \exists \mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)/$

$$(9) \quad u_n = \gamma_n \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{\text{div}, \omega, \Omega} \leq C(\Gamma) |\omega|^{-\frac{1}{2}} \|u_n\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \Gamma}$$

Proposition 2.3. *L'application γ_τ se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$ munis de leur norme indexée, et on a:*

$$(10) \quad \forall \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \quad \|\gamma_\tau \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div} \Gamma} \leq C(\Gamma) |\omega|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \omega, \Omega}$$

De plus, $\forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma), \exists \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)/$

$$(11) \quad \varphi = \gamma_\tau \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \omega, \Omega} \leq C(\Gamma) |\omega|^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div} \Gamma}$$

Proposition 2.4. *L'application γ_t se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)$ munis de leur norme indexée, et on a:*

$$(12) \quad \forall \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \quad \|\gamma_t \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{rot} \Gamma} \leq C(\Gamma) |\omega|^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \omega, \Omega}$$

De plus, $\forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma), \exists \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)/$

$$(13) \quad \varphi = \gamma_t \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \omega, \Omega} \leq C(\Gamma) |\omega|^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{rot} \Gamma}$$

Preuve. Les trois résultats précédents sont montrés dans [34] page 120. \square

2.3. Définition et étude des potentiels harmoniques

Définition 2.4. *Pour $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$ ou $(C^\infty(\Gamma))^3$, on définit:*

$$\mathcal{L}_\nu^\omega \varphi(x) = 2 \int_\Gamma G_\nu^\omega(x-y) \varphi(y) d\gamma_y \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$$

avec $G_\nu^\omega(x) = \frac{e^{ik_\nu|x|}}{4\pi|x|}$.

Le paramètre $k_\nu = \frac{\omega}{c_\nu}$ caractérise le milieu.

Ce potentiel de volume est appelé potentiel de simple couche associé à la densité $\varphi(y)$. Il permet de représenter les solutions du problème de Maxwell. Dans le but d'établir des équations intégrales sur les interfaces de l'obstacle nous avons besoin de connaître les traces sur la frontière Γ des potentiels de simple et double couche, ainsi que celles de leurs dérivées.

Définition 2.5. *Les potentiels de surface sont notés :*

$$\begin{aligned}
 S_\nu^\omega \varphi(x) &= 2 \int_\Gamma G_\nu^\omega(x-y)\varphi(y)d\gamma_y \\
 &\quad \forall x \in \Gamma \quad \text{pour } \varphi \in C^\infty(\Gamma) \text{ ou } (C^\infty(\Gamma))^3 \\
 P_\nu^\omega \varphi(x) &= 2 \oint_\Gamma \nabla_x G_\nu^\omega(x-y)\varphi(y)d\gamma_y \\
 &\quad \forall x \in \Gamma \quad \text{pour } \varphi \in C^\infty(\Gamma) \\
 Q_\nu^\omega \varphi(x) &= 2 \oint_\Gamma \nabla_x G_\nu^\omega(x-y) \wedge \varphi(y)d\gamma_y \\
 &\quad \forall x \in \Gamma \quad \text{pour } \varphi \in (C^\infty(\Gamma))^3
 \end{aligned}$$

Remarque. Les expressions $P_\nu^\omega \varphi$ et $Q_\nu^\omega \varphi$ sont définies comme valeurs principales, car leur noyau est en $\frac{1}{|x-y|^2}$. En effet,

$$(14) \quad \nabla_x G_\nu^\omega(x-y) = \frac{ik_\nu|x-y| - 1}{4\pi|x-y|^2} e^{ik_\nu|x-y|} \frac{x-y}{|x-y|}$$

Notation. On définit les opérateurs de traces interieure γ_0^- et exterieure γ_0^+ sur la surface Γ en posant pour $x_0 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0^- f(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} f(x), \\
 \gamma_0^+ f(x_0) &:= \lim_{x \rightarrow x_0, x \notin \Omega} f(x).
 \end{aligned}$$

Lemme 2.1. *Les traces des potentiels de volume \mathcal{L}_ν^ω sont données par :*

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \Gamma \\
 \left. \begin{aligned}
 \gamma_0^- (\mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) &= \gamma_0^+ (\mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) = S_\nu^\omega \varphi(x) \\
 \gamma_0^- (\nabla_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) &= \varphi(x)\mathbf{n}(x) + P_\nu^\omega \varphi(x) \\
 \gamma_0^+ (\nabla_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) &= -\varphi(x)\mathbf{n}(x) + P_\nu^\omega \varphi(x)
 \end{aligned} \right\} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Gamma) \\
 \left. \begin{aligned}
 \gamma_0^- (\mathbf{rot}_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) &= -\varphi(x) \wedge \mathbf{n}(x) + Q_\nu^\omega \varphi(x) \\
 \gamma_0^+ (\mathbf{rot}_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi)(x) &= \varphi(x) \wedge \mathbf{n}(x) + Q_\nu^\omega \varphi(x)
 \end{aligned} \right\} \quad \forall \varphi \in (C^\infty(\Gamma))^3
 \end{aligned}$$

Preuve. Voir par exemple [15] page 224. □

Nous nous intéressons maintenant à la régularité des potentiels de surface.

Théorème 2.3. *Pour tout ω complexe, S_ν^ω , est un des opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 sur Γ et P_ν^ω est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur Γ .*

Preuve. La démonstration est similaire à celle du paragraphe 4.4 page 87 de [15]. \square

Pour représenter la solution des problèmes de Maxwell dans le domaine harmonique, nous avons besoin de Q_ν^ω , et d'un nouvel opérateur R_ν^ω que nous définissons maintenant:

Définition 2.6.

$$\forall \omega \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in C^\infty(\Gamma)^3, \forall x \in \Gamma,$$

$$R_\nu^\omega \varphi(x) = i\omega \mu_\nu S_\nu^\omega \varphi(x) - \frac{1}{i\omega \varepsilon_\nu} P_\nu^\omega(\operatorname{div}_\Gamma \varphi(x))$$

Remarque. Dans les représentations des solutions du système de Maxwell, cet opérateur R_ν^ω apparaîtra plutôt sous la forme $\mathbf{n} \wedge R_\nu^\omega \varphi(x)$ qui s'écrit de la manière suivante: $\forall x \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \wedge R_\nu^\omega \varphi(x) &= \mathbf{n} \wedge \left(i\omega \mu_\nu S_\nu^\omega \varphi(x) - \frac{1}{i\omega \varepsilon_\nu} \nabla_x (\mathcal{L}_\nu^\omega(\operatorname{div}_\Gamma \varphi(x))) \right) \\ &= \mathbf{n} \wedge \left(i\omega \mu_\nu S_\nu^\omega \varphi(x) - \frac{1}{i\omega \varepsilon_\nu} (\mathbf{n} \partial_n (\mathcal{L}_\nu^\omega(\operatorname{div}_\Gamma \varphi(x))) \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\Gamma (\mathcal{L}_\nu^\omega(\operatorname{div}_\Gamma \varphi(x))|_{x \in \Gamma})) \right) \\ &= \mathbf{n} \wedge \left(i\omega \mu_\nu S_\nu^\omega \varphi(x) - \frac{1}{i\omega \varepsilon_\nu} \nabla_\Gamma (S_\nu^\omega(\operatorname{div}_\Gamma \varphi(x))) \right) \end{aligned}$$

Notation. Par la suite, on notera Π_Γ l'opérateur de projection tangentielle sur la surface Γ .

Théorème 2.4. *Pour tout ω complexe, les opérateurs $\Pi_\Gamma R_\nu^\omega$ et $\Pi_\Gamma Q_\nu^\omega$ sont continus de $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma)$.*

Preuve. Pour $\Pi_\Gamma R_\nu^\omega$ voir [34] page 43 et pour $\Pi_\Gamma Q_\nu^\omega$ voir [2] ou [28] page 32. \square

Corollaire 2.1. *Les traces du potentiel de volume \mathcal{L}_ν^ω sont données par:*

$$\begin{aligned} \gamma_0^- (\mathcal{L}_\nu^\omega \varphi) &= \gamma_0^+ (\mathcal{L}_\nu^\omega \varphi) = S_\nu^\omega \varphi \quad \text{dans } H^{s+1}(\Gamma) \text{ ou } (H^{s+1}(\Gamma))^3 \text{ pour} \\ \varphi &\in H^s(\Gamma) \text{ ou } (H^s(\Gamma))^3 \\ \gamma_0^\mp (\nabla_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi) &= \pm \varphi \mathbf{n} + P_\nu^\omega \varphi \quad \text{dans } (H^s(\Gamma))^3 \text{ pour } \varphi \in H^s(\Gamma) \\ \gamma_0^\mp (\mathbf{rot}_x \mathcal{L}_\nu^\omega \varphi) &= \mp \varphi \wedge \mathbf{n} + Q_\nu^\omega \varphi \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma) \text{ pour} \\ \varphi &\in H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma) \end{aligned}$$

Preuve. Pour tout s réel, par densité de $C^\infty(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$ les résultats de trace du lemme 2.1 et la continuité des opérateurs établie dans les théorèmes 2.3 et 2.4 permettent de conclure. \square

Nous avons besoin de résultats plus précis sur ces opérateurs. En particulier, il faut contrôler leur norme par rapport à ω , dans le cas où $\Im\omega > 0$, afin de déduire la régularité en temps des opérateurs associés R_ν et Q_ν : ces opérateurs qui seront introduits plus tard sont obtenus par une transformation de Fourier-Laplace en ω sur les opérateurs en fréquence.

Proposition 2.5. $\forall \omega \in \{\Im\omega \geq \sigma > 0\}, \forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$

$$(15) \quad \|(\mathbf{n} \wedge Q_\nu^\omega + Id)\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma} \leq C(\Gamma, \sigma)|\omega| \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma}$$

Preuve. Voir [2] ou [28] page 49. □

Proposition 2.6. $\forall \omega \in \{\Im\omega \geq \sigma > 0\}, \forall \varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$

$$(16) \quad \|II_\Gamma R_\nu^\omega \varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{rot}_\Gamma} \leq C(\Gamma, \sigma)|\omega| \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma}$$

Preuve. Voir [2] ou [28] page 106. □

2.4. Définition et étude des potentiels retardés

Dans ce paragraphe, nous rappelons la théorie des potentiels dans le domaine temporel. Les potentiels que nous allons introduire se déduisent de ceux en fréquence par la transformation de Fourier-Laplace, en se plaçant dans le cadre fonctionnel présenté au paragraphe 1.1.

Désormais, la valeur absolue indicée par ν désignera le rapport:

$$|x - y|_\nu = \frac{|x - y|}{c_\nu}$$

où c_ν représente la vitesse de propagation relative au milieu. Il en sera de même pour ω indicé par ν .

Définition 2.7. Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x)$ ou $C^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x)^3$ on définit:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{L}_\nu \varphi(t, x) &= 2 \int_\Gamma G_\nu(\cdot, x - y) * \varphi(\cdot, y)(t) d\gamma_y \\ &= 2 \int_\Gamma \frac{\varphi(t - |x - y|_\nu, y)}{4\pi|x - y|} d\gamma_y \end{aligned}$$

où $G_\nu(t, x) = \frac{\delta_0(t - |x|_\nu)}{4\pi|x|}$ est la solution élémentaire de l'équation des ondes associée à c_ν , à support dans le cône futur. $\mathcal{L}_\nu \varphi$ est appelé potentiel retardé de simple et double couche pour la densité φ .

Définition 2.8. Pour (t, x) dans $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$,

$$S_\nu \varphi(t, x) = 2 \int_\Gamma \frac{\varphi(t - |x - y|_\nu, y)}{4\pi|x - y|} d\gamma_y \quad \text{pour}$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x) \text{ ou } (D(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x))^3,$$

$$P_\nu \varphi(t, x) = 2 \int_\Gamma \nabla_x \left(\frac{\varphi(t - |x - y|_\nu, y)}{4\pi|x - y|} \right) d\gamma_y \quad \text{pour}$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x),$$

$$Q_\nu \varphi(t, x) = 2 \int_\Gamma \mathbf{rot}_x \left(\frac{\varphi(t - |x - y|_\nu, y)}{4\pi|x - y|} \right) d\gamma_y \quad \text{pour}$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x)^3.$$

Remarques.

- Les expressions $P_\nu \varphi$ et $Q_\nu \varphi$ sont définies comme valeurs principales. Cependant, l'expression $\Pi_\Gamma Q_\nu \varphi$ a un sens classique si le vecteur φ est tangent à la surface Γ (i.e.: $\varphi \in TD(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma)$); c'est vrai aussi pour le potentiel en fréquence $\Pi_\Gamma Q_\nu^\omega \varphi$ (voir, par exemple [2] ou [28] page 48).
- On peut donner une expression plus explicite de $Q_\nu \varphi(t, x)$, c'est-à-dire:

$$Q_\nu \varphi(t, x) = 2 \int_\Gamma \left(\nabla_x \left(\frac{1}{4\pi|x - y|} \right) \wedge \varphi(t - |x - y|_\nu, y) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi|x - y|} \mathbf{rot}_x \varphi(t - |x - y|_\nu, y) \right) d\gamma_y \\ = 2 \int_\Gamma \left(\nabla_x \left(\frac{1}{4\pi|x - y|} \right) \wedge \varphi(t - |x - y|_\nu, y) \right. \\ \left. - \left(\frac{x - y}{4\pi c_\nu |x - y|} \right) \wedge \partial_t \varphi(t - |x - y|_\nu, y) \right) d\gamma_y$$

Lemme 2.2. Les traces du potentiel \mathcal{L}_ν sont données par:

$$\forall x \in \Gamma \\ \left. \begin{aligned} \gamma_0^- (\mathcal{L}_\nu \varphi)(x) &= \gamma_0^+ (\mathcal{L}_\nu \varphi)(x) = S_\nu \varphi(x) \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Gamma) \text{ ou } (C^\infty(\Gamma))^3 \\ \gamma_0^- (\nabla_x \mathcal{L}_\nu \varphi)(x) &= \varphi(x) \mathbf{n}(x) + P_\nu \varphi(x) \\ \gamma_0^+ (\nabla_x \mathcal{L}_\nu \varphi)(x) &= -\varphi(x) \mathbf{n}(x) + P_\nu \varphi(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Gamma) \\ \left. \begin{aligned} \gamma_0^- (\mathbf{rot}_x \mathcal{L}_\nu \varphi)(x) &= -\varphi(x) \wedge \mathbf{n}(x) + Q_\nu \varphi(x) \\ \gamma_0^+ (\mathbf{rot}_x \mathcal{L}_\nu \varphi)(x) &= \varphi(x) \wedge \mathbf{n}(x) + Q_\nu \varphi(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall \varphi \in (C^\infty(\Gamma))^3$$

Preuve. Elle est similaire à celle du lemme 2.1. □

Définition 2.9. On définit l'analogie en temps de l'opérateur R_ν^ω de la manière suivante:

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x)^3$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma_x$

$$R_\nu \varphi(t, x) = -\mu_\nu S_\nu (\partial_t \varphi(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon_\nu} P_\nu \left(\int_0^t \operatorname{div}_\Gamma \varphi(s, x) ds \right)$$

On peut faire la même remarque que dans le cas fréquentiel, à savoir:

$$\mathbf{n} \wedge R_\nu \varphi(t, x) = \mathbf{n} \wedge \left(-\mu_\nu S_\nu(\partial_t \varphi(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon_\nu} \nabla_{\Gamma_x} \left(S_\nu \left(\int_0^t \operatorname{div}_\Gamma \varphi(s, x) ds \right) \right) \right)$$

Jusqu’à maintenant, les méthodes classiques ne permettant pas d’étudier les potentiels retardés, la transformée de Fourier-Laplace est le seul outil utilisé pour déduire leur régularité dans des espaces de type Sobolev, qui s’adaptent à des approximations numériques. Nous allons donc écrire des estimations de continuité dans les espace fonctionnels munis des normes indexées pour Q_ν et R_ν . L’intérêt de ces normes vis à vis des normes usuelles réside dans le fait qu’elles permettent d’écrire les majorations de continuité des opérateurs fréquentiels surfaciques avec des puissances de $|\omega|$ plus faibles. Ainsi, par transformée de Fourier-Laplace la régularité en temps des opérateurs correspondants sera accrue.

Le lemme suivant est une application directe du théorème de Cauchy.

Lemme 2.3. *Les opérateurs Q_ν^ω et R_ν^ω transforment une fonction holomorphe par rapport à ω dans $\{\mathbb{C}; \Im \omega \geq \sigma > 0\}$ en une fonction holomorphe sur le même ouvert.*

Proposition 2.7. *Pour tout $\omega \in \{\omega \in \mathbb{C}; \Im \omega \geq \sigma > 0\}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l’opérateur $\Pi_\Gamma Q_\nu$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma))$ dans $H_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma))$ et vérifie:*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)), & \|\Pi_\Gamma Q_\nu \varphi\|_{\sigma, s-1, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma)} \\ (17) \quad & \leq C(\sigma, \Gamma) \|\varphi\|_{\sigma, s, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)}, \end{aligned}$$

et l’opérateur $\Pi_\Gamma R_\nu$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma))$ dans $H_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma))$ et vérifie:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)), & \|\Pi_\Gamma R_\nu \varphi\|_{\sigma, s-1, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}, \Gamma)} \\ (18) \quad & \leq C(\sigma, \Gamma) \|\varphi\|_{\sigma, s, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)} \end{aligned}$$

Preuve. Faisons la démonstration pour l’opérateur R_ν .

Soit $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)) \subset LT(\sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma))$. Il faut d’abord vérifier que la transformée de Fourier-Laplace inverse de $R_\nu^\omega \hat{\varphi}$ est bien $R_\nu \varphi$ où φ est la transformée inverse de $\hat{\varphi}$, c’est-à-dire:

$$(19) \quad \mathcal{L}^{-1}(R_\nu^\omega \hat{\varphi}) = R_\nu(\mathcal{L}^{-1}(\hat{\varphi}))$$

Avant d'appliquer la transformation de Fourier-Laplace inverse à l'expression de $R_\nu^\omega \hat{\varphi}$, montrons que cette transformée inverse existe.

$\varphi \in LT(\sigma, H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma))$ donc le sens réciproque du théorème de Paley-Wiener indique que $\hat{\varphi}$ est holomorphe dans $\{\omega \in \mathbb{C}; \Im\omega \geq \sigma > 0\}$ et que pour k fixé dans \mathbb{N}^* on a:

$$\|\hat{\varphi}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, div_\Gamma} \leq C(1 + |\omega|)^k$$

Ainsi, l'estimation (16) de la proposition 2.6 donne:

$$\|R_\nu^\omega \hat{\varphi}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, rot_\Gamma} \leq C(\sigma, \Gamma)|\omega|(1 + |\omega|)^k$$

et le lemme 2.3 donne $R_\nu^\omega \hat{\varphi}$ holomorphe sur $\{\omega \in \mathbb{C}; \Im\omega \geq \sigma > 0\}$. Le sens direct du théorème de Paley-Wiener montre que $S_\nu^\omega \hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier-Laplace d'une fonction Laplace transformable. Par ailleurs, on a:

$$\begin{aligned} S_\nu^\omega \hat{\varphi}(x) &= 2 \int_{\Gamma_y} \frac{e^{i\omega|x-y|_\nu}}{4\pi|x-y|} \hat{\varphi}(\omega, y) d\gamma_y \\ &= 2 \int_{\Gamma_y} \frac{e^{i\omega|x-y|_\nu}}{4\pi|x-y|} \int_{\mathbb{R}_t} e^{i\omega t} \varphi(t, y) dt d\gamma_y \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_T} \int_{\Gamma_y} \frac{e^{i\omega T}}{4\pi|x-y|} \varphi(T - |x-y|_\nu, y) d\gamma_y dT \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_t} e^{i\omega t} \left(\int_{\Gamma_y} \frac{\varphi(t - |x-y|_\nu, y)}{4\pi|x-y|} d\gamma_y \right) dt \end{aligned}$$

On déduit le résultat (19) de la relation entre R_ν^ω et S_ν^ω . Enfin, la proposition 2.6 permet de déduire que $\Pi_\Gamma R_\nu$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $\mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma))$ dans $\mathcal{H}_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(rot, \Gamma))$, avec la majoration: $\forall \varphi \in \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma))$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2(s-1)} \|\Pi_\Gamma R_\nu^\omega \hat{\varphi}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, rot_\Gamma}^2 d\omega \\ &\leq C(\sigma, \Gamma) \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s} \|\hat{\varphi}\|_{-\frac{1}{2}, \omega, div_\Gamma}^2 d\omega < +\infty \end{aligned}$$

La démonstration est similaire pour Q_ν^ω :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{n} \wedge Q_\nu^\omega \varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, div_\Gamma}^2 \\ &\leq \|(\mathbf{n} \wedge Q_\nu^\omega + Id)\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, div_\Gamma}^2 + \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, div_\Gamma}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\sigma, \Gamma) |\omega|^2 \left(1 + \frac{1}{|\omega|^2} \right) \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma}^2 \\
&\leq C(\sigma, \Gamma) |\omega|^2 \|\varphi\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}_\Gamma}^2 \quad \text{car} \quad 1 + \frac{1}{|\omega|^2} \leq 1 + \frac{1}{\sigma^2} \quad \square
\end{aligned}$$

A partir du lemme 2.2 et de la proposition 2.7, nous pouvons écrire un corollaire analogue au corollaire 2.1 dans le domaine temporel.

Corollaire 2.2. *Les traces du potentiel \mathcal{L}_ν sont données par:*

$$\begin{aligned}
\gamma_0^- (\mathcal{L}_\nu \varphi) &= \gamma_0^+ (\mathcal{L}_\nu \varphi) = S_\nu \varphi \\
&\text{dans } \mathcal{H}_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \text{ ou } \mathcal{H}_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3 \\
&\text{pour } \varphi \in \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \text{ ou } \mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))^3 \\
\gamma_0^\mp (\nabla_x \mathcal{L}_\nu \varphi) &= \pm \varphi \mathbf{n} + P_\nu \varphi \\
&\text{dans } H_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3) \\
&\text{pour } \varphi \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\
\gamma_0^\mp (\text{rot}_x \mathcal{L}_\nu \varphi) &= \mp \varphi \wedge \mathbf{n} + Q_\nu \varphi \\
&\text{dans } H_\sigma^{s-1}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma)) \\
&\text{pour } \varphi \in H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))
\end{aligned}$$

3. Couplage éléments finis volumiques-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle hétérogène

Nous reprenons le problème (P) présenté dans l'introduction. Les caractéristiques ε_1 et μ_1 du matériau diélectrique peuvent avoir une dépendance spatiale quelconque. L'application des éléments finis de volume nécessite cependant l'hypothèse suivante:

$$\forall x \in \Omega_1, \exists \varepsilon_m, \varepsilon_M, \mu_m, \mu_M / \varepsilon_m \leq \varepsilon_1(x) \leq \varepsilon_M \text{ et } \mu_m \leq \mu_1(x) \leq \mu_M$$

3.1. Formulations variationnelles

Leur élaboration nécessite de considérer séparément les milieux Ω_1 et Ω_2 , pour ensuite lier les équations issues de ces domaines. Ce lien ne peut se faire qu'avec les conditions de transmission qui traduisent la continuité des traces tangentielles du champ électromagnétique total à travers l'interface Γ . La condition de conducteur parfait sur Γ_c sera prise en compte dans l'équation volumique, et la causalité, comme précédemment sera indispensable pour justifier le produit de convolution en temps à la base des équations intégrales dans Ω_2 .

Nous avons le choix entre deux types de formulations:

- Si nous voulons limiter le nombre d'inconnues dans les schémas à venir, il est possible de combiner les équations de Maxwell entre elles afin d'éliminer le champ magnétique dans le milieu Ω_1 . On obtient alors pour l'inconnue \mathbf{E}_1 une équation volumique d'ordre 2 en temps et espace, et une formule de Green sur le rotationnel fera apparaître un terme de bord qui fera le lien avec les équations intégrales. Les formulations variationnelles construites sur cette idée donnent des schémas qui ont pour inconnues \mathbf{E}_1 dans $\overline{\Omega}_1$, et les courants électriques et magnétiques sur Γ , $\mathbf{j}_1 = \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma}$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1|_{\Gamma}$. En fait, nous verrons que la compatibilité des éléments finis utilisés pour \mathbf{E}_1 et \mathbf{m}_1 induit l'adéquation de leurs degrés de liberté sur la frontière de l'obstacle, ce qui autorise l'élimination de l'inconnue \mathbf{m}_1 . La formule suivante:

$$\mathbf{H}_1(t, x) = -\frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \mathbf{rot} \mathbf{E}_1(s, x) ds$$

- permet alors de recomposer le champ magnétique dans Ω_1 .
- L'autre possibilité consiste à réaliser une formulation variationnelle volumique directement à partir du système de Maxwell, le lien avec les équations intégrales se faisant toujours par le biais d'une formule de Green. Les schémas ainsi obtenus travaillent sur les deux inconnues \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 dans $\overline{\Omega}_1$. Du fait de la prise en compte du champ magnétique dans les schémas numériques, les systèmes à résoudre seront plus lourds que ceux des formulations précédentes. Néanmoins, cette façon de procéder présente un intérêt à terme. Si on désire prendre en compte une dépendance temporelle des caractéristiques ε_1 et μ_1 , les formulations uniquement en champ électrique ne pourront modéliser que des matériaux où seul ε_1 dépendra du temps, alors que la deuxième démarche permettra de considérer le cas plus général d'une dépendance temporelle de ε_1 et μ_1 . Cette dépendance temporelle intervient dans les relations constitutives, où le lien entre \mathbf{D}_1 et \mathbf{E}_1 d'une part, et \mathbf{B}_1 et \mathbf{H}_1 d'autre part se fait par un produit de convolution en temps avec les caractéristiques ε_1 et μ_1 . Cela signifie que l'état présent du matériau dépend de tous ses antécédents ; de tels matériaux sont appelés dispersifs. Bien sûr, les modifications qui seront apportées à terme pour cette étude ne porteront que sur la partie volumique des formulations variationnelles ou des schémas.

3.1.1. Première formulation. Considérons le système de Maxwell dans la couche de matériau Ω_1 :

$$(20) \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_1 + \mu_1(x) \partial_t \mathbf{H}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_1 - \varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \end{cases}$$

On sait que si les champs sont suffisamment réguliers au bord, alors la solution possède la régularité:

$$\mathbf{E}_1(t, \cdot), \mathbf{H}_1(t, \cdot) \in H(\mathbf{rot}, \Omega_1) \cap H(\mathbf{div}, \Omega).$$

Bien sûr, cette régularité est essentielle, puisqu'elle fixe le choix des éléments finis lors de la discrétisation, et nous verrons que les éléments finis conformes dans $H(\text{rot}, \Omega_1)$ sont préférables à ceux dans $H(\text{div}, \Omega_1)$.

Notations.

- Par la suite, les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représenteront la dualité

$$H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma) - H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma).$$

- D'autre part, la mesure $d_{\sigma t}$ dénotera $e^{-2\sigma t} dt$.

Pour le champ électrique \mathbf{E}_1 , nous introduisons l'espace suivant, afin de prendre en compte la condition de conducteur parfait:

$$H_0(\text{rot}, \Omega_1) = \{\mathbf{E} \in H(\text{rot}, \Omega_1) / \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}|_{\Gamma_c} = \mathbf{0}\}$$

La dépendance en temps du cadre fonctionnel se fera comme précédemment, en se fixant un paramètre réel σ strictement positif. s_1 et s_2 étant des réels qu'on déterminera plus tard, une formule de Green sur la deuxième équation du système (20) induit la relation suivante: Pour $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ dans $H_{\sigma}^{s_1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \times H_{\sigma}^{s_1}(\mathbb{R}^+, H(\text{rot}, \Omega_1))$, et pour toute fonction test \mathbf{E}' dans $H_{\sigma}^{s_1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1))$, on a:

$$(21) \quad \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (-\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' + \mathbf{H}_1 \text{rot} \mathbf{E}') dx d\sigma t - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{j}_1, \Pi_{\Gamma} \mathbf{E}' \rangle d\sigma t}_{\text{car } \Pi_{\Gamma_c} \mathbf{E}' = \mathbf{0}} = 0.$$

avec la notation:

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma}.$$

Il faut maintenant coupler cette formulation avec les équations intégrales issues du milieu extérieur. On sait (voir par exemple [1], [10], [14]) que les équations de Maxwell homogènes dans le milieu Ω_2 conduisent à une représentation intégrale du champ électromagnétique diffracté $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$:

$$(22) \quad \begin{cases} 2\mathbf{E}_2(t, x) = -\mu_2 \mathcal{L}_2(\partial_t \mathbf{j}_2)(t, x) \\ \quad + \frac{1}{\varepsilon_2} \nabla \mathcal{L}_2\left(\int_0^t \text{div}_{\Gamma} \mathbf{j}_2(s, x) ds\right) - \text{rot} \mathcal{L}_2(\mathbf{m}_2)(t, x), \\ 2\mathbf{H}_2(t, x) = -\varepsilon_2 \mathcal{L}_2(\partial_t \mathbf{m}_2)(t, x) \\ \quad + \frac{1}{\mu_2} \nabla \mathcal{L}_2\left(\int_0^t \text{div}_{\Gamma} \mathbf{m}_2(s, x) ds\right) + \text{rot} \mathcal{L}_2(\mathbf{j}_2)(t, x), \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{j}_2 = \mathbf{H}_2 \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma}, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2|_{\Gamma}.$$

Les résultats du second paragraphe concernant la trace tangentielle du potentiel de volume de simple couche et de ses dérivées permettent d'établir les équations intégrales sur la surface Γ de l'obstacle:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2 &= \frac{1}{2}(-\mathbf{n} \wedge R_2(\mathbf{j}_2) + \mathbf{n} \wedge Q_2(\mathbf{m}_2) + \mathbf{m}_2) \\ -\mathbf{j}_2 &= \frac{1}{2}(-\mathbf{n} \wedge \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}_2) - \mathbf{n} \wedge Q_2(\mathbf{j}_2) - \mathbf{j}_2) \end{aligned} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \Gamma$$

En utilisant les conditions de transmission, on obtient les deux relations suivantes, s_3 et s_4 étant des réels convenablement choisis:

$$\begin{aligned} \text{pour } \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} &\in H_\sigma^{s_3}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \\ \text{pour } \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{j}_1 \end{pmatrix} &\in H_\sigma^{s_4}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \\ \text{et pour toute fonction test} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} &\in H_\sigma^{s_4}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_1 + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{m}_1) - \Pi_\Gamma R_2(\mathbf{j}_1), \mathbf{j}' \rangle d_\sigma t \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{j}' \rangle d_\sigma t \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} \left\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}_1 + \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}_1) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}_1), \mathbf{m}' \right\rangle d_\sigma t \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{m}' \rangle d_\sigma t \end{aligned}$$

avec les données du problème:

$$(25) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{q} - \mathbf{n} \wedge Q_2(\mathbf{q}) + \mathbf{n} \wedge R_2(\mathbf{p}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} - \mathbf{n} \wedge \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{q}) - \mathbf{n} \wedge Q_2(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

sachant que dans le cas où \mathbf{q} et \mathbf{p} sont les traces tangentielles du champ incident:

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= 2\mathbf{q} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= 2\mathbf{p} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle globale la plus simple consiste à considérer l'équation volumique (21) avec l'équation intégrale (23), le couplage se faisant de manière implicite grâce à la relation:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_{1|\Gamma}.$$

En notant $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ le champ électrique sur Ω_1 , $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1$ et $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1$, nous obtenons la première formulation:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E} \mathbf{E}' + \frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E} ds \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{j}, \Pi_\Gamma \mathbf{E}' \rangle d_\sigma t = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{m}) - \Pi_\Gamma R_2(\mathbf{j}), \mathbf{j}' \rangle d_\sigma t \\ = \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{j}' \rangle d_\sigma t. \end{array} \right.$$

3.1.2. Deuxième formulation. Nous reprenons les équations (21), (23) et (24), afin de les combiner entre elles pour réaliser un couplage plus explicite que précédemment, puisqu'il agira non seulement à travers la relation entre \mathbf{m}_1 et \mathbf{E}_1 sur Γ , mais aussi grâce à l'adéquation entre le terme de bord de la formule de Green et un des termes de l'équation (24). En effet, si nous faisons le choix suivant pour les fonctions tests:

$$\mathbf{m}' = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'|_\Gamma$$

alors nous avons:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{j}_1, \Pi_\Gamma \mathbf{E}' \rangle d_\sigma t = \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}_1, \mathbf{m}' \rangle d_\sigma t$$

C'est pourquoi la combinaison des équations (21) et (24) entraîne:

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' + \frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E}_1 ds \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\ & - \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}_1, \mathbf{m}' \rangle d_\sigma t \\ & + \int_{\mathbb{R}^+} \left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}_1) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}_1), \mathbf{m}' \right\rangle d_\sigma t \\ & = \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{m}' \rangle d_\sigma t \end{aligned}$$

Avec les notations $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1$ et $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1$, la différence de cette équation avec l'équation intégrale non encore utilisée permet d'obtenir la deuxième formulation variationnelle:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E} \mathbf{E}' + \frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E} ds \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\ - \int_{\mathbb{R}^+} \left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}), \mathbf{m}' \right\rangle d_\sigma t \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \langle \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{m}) - \Pi_\Gamma R_2(\mathbf{j}), \mathbf{j}' \rangle d_\sigma t \\ + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{m}, \mathbf{j}' \rangle + \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}, \mathbf{m}' \rangle) d_\sigma t \\ = \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}, \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}, \mathbf{m}' \rangle) d_\sigma t. \end{array} \right.$$

Nous verrons plus tard que cette formulation se prête bien à des développements dans le domaine fréquentiel, desquels nous déduirons des résultats de stabilité et de convergence pour toute discrétisation issue de cette formulation.

3.1.3. Troisième formulation. Nous voulons maintenant écrire des formulations qui agissent sur les champs électrique et magnétique. Pour cela, nous conservons les équations intégrales (23) et (24), mais nous changeons la formulation volumique.

Remarques. Certaines méthodes de résolution du système de Maxwell utilisent les inconnues \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 . Cette dernière représente l'induction magnétique qui vérifie la relation constitutive dans le matériau Ω_1 :

$$\mathbf{B}_1(t, x) = \mu_1(x)\mathbf{H}_1(t, x)$$

Elle a la régularité suivante (idem pour \mathbf{H}_1 si μ_1 est continue): $\mathbf{B}_1(t, \cdot) \in H(\text{div}, \Omega_1)$. On peut alors procéder à une approximation par éléments finis conformes dans $H(\text{div}, \Omega_1)$, tout en conservant l'approximation dans $H_0(\text{rot}, \Omega_1)$ pour \mathbf{E}_1 . Malheureusement, lorsqu'on réalise un tel couplage avec les éléments finis conformes dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$, qui représentent les inconnues \mathbf{m}_1 et \mathbf{j}_1 , on ne peut pas traduire au niveau des degrés de liberté, la relation utile: $\mathbf{j}_1 = \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma}$. Cette non compatibilité des éléments finis dans $H(\text{div}, \Omega_1)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$ entraîne dans les problèmes approchés et les schémas numériques une duplication des inconnues \mathbf{j}_1 et \mathbf{B}_1 pourtant liées sur la frontière Γ . Nous retenons donc qu'il est préférable que l'élaboration d'une méthode de couplage en gardant les champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{B}_1 se fasse avec la régularité $H(\text{rot}, \Omega_1)$, quand cela est possible, c'est-à-dire pour des hypothèses suffisantes sur \mathbf{J}_s . De plus, si μ_1 présente des discontinuités dans le milieu il faut alors remplacer \mathbf{B}_1 par \mathbf{H}_1 .

Les inconnues $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, et les fonctions tests $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ étant dans $H_{\sigma}^{s_1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1) \times H(\text{rot}, \Omega_1))$, nous avons les formulations faibles obtenues à partir du système (20):

$$(29) \quad \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\mu_1(x)\partial_t \mathbf{H}_1 + \text{rot} \mathbf{E}_1) \mathbf{H}' dx d_{\sigma} t = 0$$

et

$$(30) \quad \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x)\partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' - \mathbf{H}_1 \text{rot} \mathbf{E}') dx d_{\sigma} t \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \left\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}_1, \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'|_{\Gamma} \right\rangle d_{\sigma} t = 0.$$

En se fixant la relation: $\mathbf{m}' = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'|_{\Gamma}$, la combinaison de l'équation (24) avec (30) donne:

$$\begin{aligned}
 & -2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' - \mathbf{H}_1 \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\
 & + \int_{\mathbb{R}^+} \left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}_1) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}_1) - \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}_1, \mathbf{m}' \right\rangle d_\sigma t \\
 & = \int_{\mathbb{R}^+} \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}, \mathbf{m}' \rangle d_\sigma t
 \end{aligned}$$

En notant \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{m} , et \mathbf{j} les inconnues dans Ω_1 , cette relation soustraite aux équations (23) et (29) donne alors la troisième formulation couplée:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E} \mathbf{E}' - \mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\
 & + 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\mu_1(x) \partial_t \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{E}) \mathbf{H}' dx d_\sigma t \\
 & + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}, \mathbf{m}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{m}, \mathbf{j}' \rangle) d_\sigma t \\
 & - \int_{\mathbb{R}^+} \left(\left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}), \mathbf{m}' \right\rangle \right) d_\sigma t \\
 & + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{m}) - \Pi_\Gamma R_2(\mathbf{j}), \mathbf{j}' \rangle) d_\sigma t \\
 & = \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}, \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}, \mathbf{m}' \rangle) d_\sigma t.
 \end{aligned} \right.$$

3.1.4. *Quatrième formulation.* Avec la même régularité que précédemment, et en conservant les inconnues \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 , le système (20) donne les formulations suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (-\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' + \mathbf{H}_1 \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\
 & - \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n}, \Pi_\Gamma \mathbf{E}' \rangle) d_\sigma t = 0,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\mu_1(x) \partial_t \mathbf{H}_1 \mathbf{H}' + \mathbf{E}_1 \text{rot} \mathbf{H}') dx d_\sigma t \\
 & - \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{n}, \Pi_\Gamma \mathbf{H}' \rangle) d_\sigma t = 0
 \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le système (20), on obtient:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (-\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E}_1 \mathbf{E}' - \frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E}_1 ds \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\
 & - \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{j}_1, \Pi_\Gamma \mathbf{E}' \rangle) d_\sigma t = 0,
 \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\mu_1(x) \partial_t \mathbf{H}_1 \mathbf{H}' + \frac{1}{\varepsilon_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{H}_1 ds \text{rot} \mathbf{H}') dx d_\sigma t + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{m}_1, \Pi_\Gamma \mathbf{H}' \rangle) d_\sigma t = 0,$$

en rappelant les notations: $\mathbf{j}_1 = \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{n}|_\Gamma$ et $\mathbf{m}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1|_\Gamma$. Le choix suivant sur les fonctions tests:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{H}' \wedge \mathbf{n}|_\Gamma$$

$$\mathbf{m}' = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'|_\Gamma$$

permet de combiner deux par deux les équations (32), (24) et (32), (23) comme précédemment. La différence des deux équations obtenues donne la quatrième formulation couplée:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\mu_1(x) \partial_t \mathbf{H} \mathbf{H}' + \frac{1}{\varepsilon_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{H} ds \text{rot} \mathbf{H}') dx d_\sigma t \\ & + 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} (\varepsilon_1(x) \partial_t \mathbf{E} \mathbf{E}' + \frac{1}{\mu_1(x)} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E} ds \text{rot} \mathbf{E}') dx d_\sigma t \\ & + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}, \mathbf{m}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{m}, \mathbf{j}' \rangle) dx d_\sigma t \\ & + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{m}) - \Pi_\Gamma R_2(\mathbf{j}), \mathbf{j}' \rangle) d_\sigma t \\ & - \int_{\mathbb{R}^+} \left(\left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2(\mathbf{m}) + \Pi_\Gamma Q_2(\mathbf{j}), \mathbf{m}' \right\rangle \right) d_\sigma t \\ & = \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}, \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}, \mathbf{m}' \rangle) d_\sigma t, \end{aligned} \right.$$

avec la convention: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \mathbf{H} = \mathbf{H}_1, \mathbf{j} = \mathbf{j}_1$ et $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1$.

3.2. Résultats en fréquence pour la 2^e formulation

Considérons, en premier lieu, la formulation (28). L'application de la transformée de Fourier-Laplace donnée dans la définition 2.3 permet d'obtenir une formulation analogue dans le demi-plan complexe des fréquences à partie imaginaire strictement positive. Cette formulation peut aussi se déduire à partir du problème:

$$(P_\omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \hat{\mathbf{E}}_1 - i\omega\mu_1(x)\hat{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{0}, \\ \text{rot} \hat{\mathbf{H}}_1 + i\omega\varepsilon_1(x)\hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{0}, \\ \text{rot} \hat{\mathbf{E}}_2 - i\omega\mu_2\hat{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{0}, \\ \text{rot} \hat{\mathbf{H}}_2 + i\omega\varepsilon_2\hat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{0}, \\ \left(\begin{array}{c} \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}}_1 \\ \hat{\mathbf{H}}_1 \wedge \mathbf{n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}}_2 \\ \hat{\mathbf{H}}_2 \wedge \mathbf{n} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{array} \right) \\ \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_0 \\ \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \hat{\mathbf{E}}_2(x) \underset{\infty}{\cong} O\left(\frac{1}{|x|}\right); \hat{\mathbf{H}}_2(x) \underset{\infty}{\cong} O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \varepsilon_2\omega(\boldsymbol{\alpha} \wedge \hat{\mathbf{E}}_2) - k_2\hat{\mathbf{H}}_2 \underset{\infty}{\cong} o\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \mu_2\omega(\boldsymbol{\alpha} \wedge \hat{\mathbf{H}}_2) + k_2\hat{\mathbf{E}}_2 \underset{\infty}{\cong} o\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \text{uniformément pour toute direction} \\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{x}{|x|} \text{ et avec } k_2^2 = \varepsilon_2\mu_2\omega^2 \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma$$

avec $\omega \in \mathbb{C}, \Im\omega \geq \sigma > 0$, par une combinaison d'équations volumiques et surfaciques similaire à celle en temps.

Notation. Nous remplaçons la notation $(\hat{\mathbf{E}}_\nu, \hat{\mathbf{H}}_\nu)$ par (E_ν, H_ν) , ce qui est valable pour tous les autres vecteurs.

Définition 3.1. Appelons b_ω la forme sesquilinéaire suivante:

$$(33) \quad b_\omega \left(\left(\begin{array}{c} E \\ j \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} E' \\ j' \end{array} \right) \right) = -2 \int_{\Omega_1} (i\omega\varepsilon_1(x)E\bar{E}' + \frac{1}{i\omega\mu_1(x)}\text{rot}E\text{rot}\bar{E}')dx \\ - \left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(m) + \Pi_\Gamma Q_2^\omega(j), m' \right\rangle \\ + \left\langle \Pi_\Gamma Q_2^\omega(m) - \Pi_\Gamma R_2^\omega(j), j' \right\rangle \\ + \langle \mathbf{n} \wedge m, j' \rangle + \langle \mathbf{n} \wedge j, m' \rangle$$

Il ne faut pas perdre de vue dans cette définition que m et m' sont des notations représentant $\mathbf{n} \wedge E|_\Gamma$ et $\mathbf{n} \wedge E'|_\Gamma$, ces relations étant données par la transformée de Fourier-Laplace sur ces mêmes relations en temps, tandis que j est une inconnue, et j' une fonction test au même titre que E et E' . D'autre part, rappelons que les crochets de dualité sont à prendre au sens

$$H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}, \Gamma) - H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma).$$

La formulation variationnelle associée au problème (P_ω) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & \text{Pour } \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma), \\
 & \text{trouver } \begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} \in H_0(\text{rot}, \Omega_1) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) / \\
 (34) \quad & \forall \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \in H_0(\text{rot}, \Omega_1) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \\
 & b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) = \langle \mathbf{n} \wedge f(q, p), j' \rangle \\
 & \quad - \langle \mathbf{n} \wedge g(p, q), m' \rangle.
 \end{aligned}$$

Si on note b la forme bilinéaire associée à la formulation espace-temps (28), alors on reconnaît bien dans b_ω l'image par Fourier-Laplace de b , ce qui se traduit par:

$$b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) = \widehat{b} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right)$$

Proposition 3.1. *La formulation (34) est équivalente au problème (P_ω) .*

Preuve. Le problème (P_ω) implique la formulation (34), il reste donc à montrer la réciproque. La formule de Green sur le rotationnel donne:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \text{rot} \bar{E}' dx \\
 & = \int_{\Omega_1} \text{rot} \left(\frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \right) \bar{E}' dx + \left\langle \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}, \mathbf{n} \wedge (E' \wedge \mathbf{n}) \right\rangle
 \end{aligned}$$

De ce fait, une solution $\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}$ du problème (34) vérifie les trois relations suivantes:

$$(35) \quad i\omega\varepsilon_1 E + \text{rot} \left(\frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \right) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left\langle \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}, \Pi_\Gamma E' \right\rangle \\
 (36) \quad & + \left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(m) + \Pi_\Gamma Q_2^\omega(j) - \mathbf{n} \wedge j, m' \right\rangle = \langle \mathbf{n} \wedge g, m' \rangle
 \end{aligned}$$

$$(37) \quad \langle \Pi_\Gamma Q_2^\omega(m) - \Pi_\Gamma R_2^\omega(j) + \mathbf{n} \wedge m, j' \rangle = \langle \mathbf{n} \wedge f, j' \rangle$$

Comme

$$\left\langle \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}, \Pi_\Gamma E' \right\rangle = \left\langle \mathbf{n} \wedge \left(\frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n} \right), m' \right\rangle$$

l'équation (36) donne:

$$2 \left(\frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n} \right) = j + \mathbf{n} \wedge \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(m) + \mathbf{n} \wedge Q_2^\omega(j) + g$$

avec:

$$g(q, p) = p - \mathbf{n} \wedge \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(q) - \mathbf{n} \wedge Q_2^\omega(p).$$

De plus, l'équation (37) s'écrit:

$$2m = m + \mathbf{n} \wedge Q_2^\omega(m) - \mathbf{n} \wedge R_2^\omega(j) + f$$

avec:

$$f(q, p) = q - \mathbf{n} \wedge Q_2^\omega(q) + \mathbf{n} \wedge R_2^\omega(p).$$

On reconnait avec ces deux dernières équations le projecteur de Caldéron extérieur, noté P_2 , relatif aux équations de Maxwell, de sorte que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} - p \right) &= P_2 \begin{pmatrix} m - q \\ j - p \end{pmatrix} = P_2^2 \begin{pmatrix} m - q \\ j - p \end{pmatrix} \\ (38) \qquad \qquad \qquad &= P_2 \begin{pmatrix} m - q \\ \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} - p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, on sait (voir par exemple [1], [14]) que le problème extérieur

$$(39) \quad \begin{cases} \text{rot} E_2 - i\omega\mu_2 H_2 = 0 \\ \text{rot} H_2 + i\omega\varepsilon_2 E_2 = 0 \\ \mathbf{n} \wedge E_2 = m - q \\ H_2 \wedge \mathbf{n} = j - p \\ + \text{Conditions de radiation} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_2 \quad \text{sur } \Gamma$$

admet une unique solution (E_2, H_2) dans $(H_{loc}(\text{rot}, \bar{\Omega}_2))^2$, et que ce problème équivaut à:

$$(40) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{n} \wedge E_{2|\Gamma} \\ H_2 \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - A_2) \begin{pmatrix} \mathbf{n} \wedge E_{2|\Gamma} \\ H_2 \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \wedge E_{2|\Gamma} \\ H_2 \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - q \\ j - p \end{pmatrix},$$

et

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\mathbf{n} \wedge Q_2^\omega & \mathbf{n} \wedge R_2^\omega \\ -\mathbf{n} \wedge \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega & -\mathbf{n} \wedge Q_2^\omega \end{pmatrix}.$$

La différence des équations (38) et (39) donne:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} - p - H_2 \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} \end{pmatrix} \\ &= P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot} E \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} - p - H_2 \wedge \mathbf{n}_{|\Gamma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et d'après les propriétés de P_2 , on en déduit:

$$\frac{1}{i\omega\mu_1} \operatorname{rot} E \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = p + H_2 \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} = j$$

En remplaçant cette égalité dans (38), et en introduisant le champ H défini dans Ω_1 par:

$$H = \frac{1}{i\omega\mu_1} \operatorname{rot} E$$

on déduit la relation (40) qui est équivalente au problème (39). Ainsi, la formulation (34) implique le système:

$$\begin{cases} (35) \\ H = \frac{1}{i\omega\mu_1} \operatorname{rot} E & \text{dans } \Omega_1 \\ j = \frac{1}{i\omega\mu_1} \operatorname{rot} E \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma} \\ m = \mathbf{n} \wedge E|_{\Gamma} \\ (39) \end{cases}$$

qui représente le problème (P_ω) . □

Proposition 3.2. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$, $\Im\omega \geq \sigma > 0$. La forme sesquilinéaire b_ω définie en (33) est continue dans $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_1) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)$ muni de sa norme indexée.*

Preuve. Le terme volumique se majore de la façon suivante:

$$(41) \quad \left| \int_{\Omega_1} \left(i\omega\varepsilon_1(x) E \bar{E}' + \frac{1}{i\omega\mu_1(x)} \operatorname{rot} E \operatorname{rot} \bar{E}' \right) dx \right| \leq \max_{x \in \Omega_1} (\varepsilon_1(x), \mu_1(x)) |\omega| \|E\|_{0,\omega,\operatorname{rot}\Omega_1} \|E'\|_{0,\omega,\operatorname{rot}\Omega_1}$$

et le théorème 2.4 donne la continuité de la partie surfacique. On établit une majoration de continuité en fonction des puissances de $|\omega|$, grâce à l'utilisation des propositions 2.5, 2.6, et 2.3:

$$(42) \quad \left| b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) \right| \leq C \max(1, |\omega|) |\omega|^2 \times \left(\|E\|^2 + \frac{1}{|\omega|} \|j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|E'\|^2 + \frac{1}{|\omega|} \|j'\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où C ne dépend que de σ , Γ , ε_2 , μ_2 , ε_m et μ_M . □

Proposition 3.3. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$, $\Im\omega \geq \sigma > 0$. La forme sesquilinéaire b_ω est coercive sur $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_1) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma)$ muni de sa norme indexée par ω , et on a:*

$$(43) \quad \Re b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} \right) \geq C(\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2, \varepsilon_m, \mu_M) \times \left(\|E\|_{0,\omega,\operatorname{rot}\Omega_1}^2 + \frac{1}{|\omega|} \|j\|_{-\frac{1}{2},\omega,\operatorname{div}\Gamma}^2 \right)$$

Preuve. Si on fixe $\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix}$ alors:

$$\Re \left(\langle \mathbf{n} \wedge m, j' \rangle + \langle \mathbf{n} \wedge j, m' \rangle \right) = 0$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} & \Re b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} \right) \\ &= -2 \int_{\Omega_1} \left(\Re(i\omega\varepsilon_1)|E|^2 + \Re\left(\frac{1}{i\omega\mu_1}\right)|rotE|^2 \right) dx \\ &\quad - \Re \left(\left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(m) + \Pi_\Gamma Q_2^\omega(j), m \right\rangle \right. \\ (44) \quad & \left. + \langle \Pi_\Gamma R_2^\omega(j) - \Pi_\Gamma Q_2^\omega(m), j \rangle \right) \end{aligned}$$

D'une part, comme ε_1 et μ_1 sont des fonctions à valeurs réelles, nous avons:

$$\Re(i\omega\varepsilon_1) = -\Im\omega\varepsilon_1 \text{ et } \Re\left(\frac{1}{i\omega\mu_1}\right) = \frac{-\Im\omega}{|\omega|^2} \frac{1}{\mu_1}$$

D'autre part, nous avons déjà démontré la coercivité de la partie surfacique de la relation (44) dans [1] et [14]. En effet, la forme sesquilinéaire mise en jeu fait intervenir des potentiels de surface relatifs aux milieux intérieur et extérieur caractérisés par ν . Il se trouve que la partie de la forme sesquilinéaire, qui contient l'information issue du milieu extérieur coïncide avec celle qui nous intéresse, c'est est pourquoi nous déduisons directement que:

$$\begin{aligned} & -\Re \left(\left\langle \Pi_\Gamma \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} R_2^\omega(m) + \Pi_\Gamma Q_2^\omega(j), m \right\rangle + \langle \Pi_\Gamma R_2^\omega(j) - \Pi_\Gamma Q_2^\omega(m), j \rangle \right) \\ (45) \quad & \geq C(\Gamma)\Im\omega \left(\frac{\varepsilon_2}{|\omega_2|} \|m\|_{-\frac{1}{2},\omega_2,div_\Gamma}^2 + \frac{\mu_2}{|\omega_2|} \|j\|_{-\frac{1}{2},\omega_2,div_\Gamma}^2 \right) \end{aligned}$$

De plus, comme les normes indéxées par deux paramètres complexes distincts sont équivalentes dans $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$, on établit l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} & \Re b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} \right) \geq 2\Im\omega \min \left(\varepsilon_m, \frac{1}{\mu_M} \right) \|E\|_{0,\omega,rot_{\Omega_1}}^2 \\ & \quad + C(\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2) \frac{1}{|\omega|} \left(\|m\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma}^2 + \|j\|_{-\frac{1}{2},\omega,div_\Gamma}^2 \right) \end{aligned}$$

Sachant que $m = \mathbf{n} \wedge E|_\Gamma$, la propriété de la trace tangentielle γ_τ , établie en (11) permet de conclure. □

Théorème 3.1. *Le problème variationnel (34) admet une unique solution, et on a l'inégalité suivante:*

$$(46) \quad \left(\|E\|_{0,\omega,rot\Omega_1}^2 + \frac{1}{|\omega|} \|j\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C|\omega|^{\frac{3}{2}} \left(\|q\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 + \|p\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans le cas particulier où q et p représentent les traces tangentielles du champ incident, on a:

$$(47) \quad \left(\|E\|_{0,\omega,rot\Omega_1}^2 + \frac{1}{|\omega|} \|j\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C|\omega|^{\frac{1}{2}} \left(\|q\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 + \|p\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où C est une constante qui dépend de σ , Γ , ε_2 , μ_2 , ε_m , et μ_M . Si de plus, $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ est un couple de fonctions analytiques de $\{\omega \in \mathbb{C}, \Im\omega \geq \sigma > 0\}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$ alors la solution $\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}$ est une fonction analytique de $\{\omega \in \mathbb{C}, \Im\omega \geq \sigma > 0\}$ dans $H_0(rot, \Omega_1) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$.

Preuve. L'utilisation des propositions 2.5 et 2.6 permet d'estimer le second membre de la formulation variationnelle (34):

$$\begin{aligned} & |\langle \mathbf{n} \wedge f(q, p), j' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge g(q, p), m' \rangle| \\ & \leq C(\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2) |\omega| \left(\|q\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma} + \|p\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma} \right) \\ & \quad \times \left(\|j'\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma} + \|m'\|_{-\frac{1}{2},\omega,div\Gamma} \right) \end{aligned}$$

En vertu de l'injection $H(rot, \Omega_1) \subset (L^2(\Omega_1))^3$, on récupère la norme usuelle de E' dans $H(rot, \Omega_1)$. On se sert ensuite de la proposition suivante, démontrée dans [34] page 34.

Proposition 3.4. *Pour $\omega \in \mathbb{C}, \Im\omega \geq \sigma > 0$, pour $r \geq 0$, nous avons les relations d'équivalence suivantes entre les normes indexées et les normes usuelles:*

$$\begin{aligned} C(\sigma)^{-r+1} \|f\|_{r,\omega,rot\Omega} & \leq |f|_{H^r(rot,\Omega)} \\ & \leq C(\sigma)^{r+1} |\omega|^{r+1} \|f\|_{r,\omega,rot\Omega} \\ C(\sigma)^{-(r+1)} |\omega|^{-r} \|f\|_{-r,\omega,rot\Omega} & \leq |f|_{H^{-r}(rot,\Omega)} \\ & \leq C(\sigma)^{r+1} |\omega| \|f\|_{-r,\omega,rot\Omega} \end{aligned}$$

avec $C(\sigma) = \sup(\frac{1}{\sigma}, 1)$.

On a exactement les mêmes estimations dans $H^r(\text{div}, \Omega)$.

Elle permet avec la proposition 2.3 d'établir l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} & | \langle \mathbf{n} \wedge f(q, p), j' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge g(q, p), m' \rangle | \\ & \leq C(\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2) |\omega| \left(\|q\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}\Gamma} + \|p\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}\Gamma} \right) \|j'\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}\Gamma} \\ & + C(\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2) |\omega|^{\frac{3}{2}} \left(\|q\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}\Gamma} + \|p\|_{-\frac{1}{2}, \omega, \text{div}\Gamma} \right) \|E'\|_{0, \omega, \text{rot}\Omega_1}, \end{aligned}$$

qui montre la continuité du second membre de (34). Les propositions 3.2 et 3.3 assurent les hypothèses du lemme de Lax-Milgram, d'où l'existence et l'unicité d'une solution au problème (34). L'estimation (46) qui contrôle la solution en fonction des données du problème est directement déduite de (43). Pour finir, on montre l'analyticité de la solution par rapport à ω , en utilisant le théorème de Steinberg et le fait que l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire b_ω est un opérateur de Fredholm d'indice nul. Ce dernier point se démontre en exhibant un isomorphisme et une partie compacte composant cet opérateur. La preuve est similaire à celle de V. Levillain [29] page 57, même si dans son cas, ω est un réel positif et les caractéristiques $\varepsilon_1(x)$ et $\mu_1(x)$ sont complexes. □

3.3. Résultats en temps pour la 2^e formulation

L'étude en fréquence du paragraphe précédent va permettre d'établir des résultats d'existence et d'unicité d'une solution du problème (P), ainsi que la continuité et coercivité de la forme bilinéaire b associée à la formulation (28).

Théorème 3.2. Soient $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{s+\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$. Alors le système (P) admet une unique solution $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$ dans $H_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$.

Preuve. Le raisonnement est standart et suit l'approche de Ha Duong reprise dans [1] et [14]: le résultat du théorème est une conséquence immédiate, via la transformée de Fourier-Laplace, de l'étude du problème harmonique (P_ω) qui est équivalent au problème variationnel (34). La régularité en temps de la solution est directement déduite de l'inégalité (46). □

Remarques.

- Si \mathbf{q} et \mathbf{p} sont les traces tangentielles du champ incident, l’hypothèse:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$$

suffit pour avoir le même résultat.

- Les majorations (46) et (47) mettent en évidence un facteur $\frac{1}{|\omega|}$ devant la norme de \mathbf{j} au carré. C’est pourquoi l’inconnue \mathbf{E} a un demi degré de régularité en temps de plus que \mathbf{j} .

Proposition 3.5. *La forme bilinéaire b est continue dans*

$$\begin{aligned} & \left(H_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \right) \\ & \times \left(H_\sigma^{1-s}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{\frac{1}{2}-s}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \right). \end{aligned}$$

Preuve. En séparant la partie volumique et la partie composée de potentiels retardés, la forme bilinéaire s’écrit de la manière suivante:

$$b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right) = b_1(\mathbf{E}, \mathbf{E}') + b_2 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right)$$

avec

$$b_1(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = 2 \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega_1} \left(\varepsilon_1 \partial_t \mathbf{E} \mathbf{E}' + \frac{1}{\mu_1} \int_0^t \text{rot} \mathbf{E} \text{ds} \text{rot} \mathbf{E}' \right) dx dt$$

Montrons d’abord que pour tout s réel, la forme bilinéaire b_2 est continue dans

$$\begin{aligned} & \left(H_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \right) \\ & \times \left(H_\sigma^{1-s}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{\frac{1}{2}-s}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \right). \end{aligned}$$

La proposition (2.7) donne la majoration:

$$\begin{aligned} & \left| b_2 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right) \right| \\ & \leq C(\sigma, \Gamma) \left(\|\mathbf{m}\|_{s+\frac{1}{2}, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} + \|\mathbf{j}\|_{s+\frac{1}{2}, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} \right) \\ & \quad \times \left(\|\mathbf{m}'\|_{\frac{1}{2}-s, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} + \|\mathbf{j}'\|_{\frac{1}{2}-s, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} \right) \end{aligned}$$

La formule de Parseval appliquée à la proposition (2.3) fournit la majoration voulue pour b_2 avec l’inconnue \mathbf{E} et la fonction test \mathbf{E}' .

Pour la continuité de b_1 , on considère la forme sesquilinéaire b_1^ω définie par:

$$b_1^\omega(E, E') = -2 \int_{\Omega_1} \left(i\omega\varepsilon_1 E\bar{E}' + \frac{1}{i\omega\mu_1} \text{rot}E\text{rot}\bar{E}' \right) dx$$

Elle correspond à l'image par la transformée de Fourier-Laplace de b_1 , de sorte que:

$$b_1(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} b_1^\omega(E, E') d\omega$$

En appliquant la formule de Parseval à la majoration (41), ajoutée à la propriété d'injection suivante:

$$H_\sigma^{s+1}(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \subset H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1))$$

on obtient une relation de continuité sur b_1 :

$$|b_1(\mathbf{E}, \mathbf{E}')| \leq C(\varepsilon_1, \mu_1) \|\mathbf{E}\|_{s+1, \sigma, H_0(\text{rot}, \Omega_1)} \|\mathbf{E}'\|_{1-s, \sigma, H_0(\text{rot}, \Omega_1)}$$

□

Proposition 3.6. *La forme bilinéaire b est coercive sur*

$$H_\sigma^0(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)).$$

Preuve. Comme

$$b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) = b_\omega \left(\begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix} \right) = \overline{b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right)}$$

et

$$b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) d\omega$$

nous avons:

$$b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \Re b_\omega \left(\begin{pmatrix} E \\ j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E' \\ j' \end{pmatrix} \right) d\omega$$

Le résultat se déduit alors de la relation (43). □

Théorème 3.3. *Soient $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+,$*

$H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$). Alors le problème variationnel:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) / \\ \forall \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \\ b \left(\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \right) = + \int_{\mathbb{R}^+} (\langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{f}, \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{n} \wedge \mathbf{g}, \mathbf{m}' \rangle) d_\sigma t \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

L'hypothèse: $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$ suffit dans le cas particulier du problème de scattering.

Preuve. La proposition (3.5) montre que le problème (48) est bien posé, le théorème (3.2) donne l'existence d'une solution et la proposition (3.6) donne l'unicité. \square

4. Approximation par éléments finis pour la seconde formulation

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème de scattering en régime instationnaire. Les données $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ du problème (P) représentent donc les traces tangentielles du champ incident, lequel vérifie le système de Maxwell dans l'espace libre \mathbb{R}^3 .

4.1. Approximation en espace

La formulation (28) fait intervenir les espaces $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$ et $H_0(rot, \Omega_1)$, que nous appelons respectivement V et W . L'approximation par éléments finis de l'espace V suit la même démarche que dans [31]. Dans le but de construire \tilde{V}_h , un sous espace d'approximation de $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$, où Γ est une variété régulière compacte, on procède à une partition de cette surface en m morceaux fermés Γ_i tels que:

- (i) $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$
- (ii) $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ pour $i \neq j$ est soit réduite à l'ensemble vide, soit à une courbe portée par Γ .
- (iii) $\Gamma_i = \Phi_i(D_i)$ où D_i est un domaine polygonal fermé de \mathbb{R}^2 et Φ_i est un difféomorphisme de D_i sur Γ_i .

Pour chaque domaine D_i , on définit une triangulation régulière τ_{hi} en éléments K . On note τ_h la triangulation de Γ : $\tau_h = \bigcup_{i=1}^m \tau_{hi}$. A chaque élément K est associé un élément fini de type Lagrange de classe C^0 , $(K, \mathbb{P}_l, \Sigma_K)$, où \mathbb{P}_l est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à l ($l \geq 1$), et Σ_K l'ensemble des degrés de liberté, c'est à dire (pour ce type d'éléments) l'ensemble des valeurs prises par un élément P de \mathbb{P}_l sur un ensemble N_K^l de $(l+1)(l+2)/2$ noeuds choisis convenablement sur K . On considère alors F_K le \mathbb{P}_l -interpolé de Φ_i , qui permet de définir la surface approchée Γ_h comme $\Gamma_h = \bigcup_{K \in \tau_h} F_K(K)$. Soit K_h l'élément de surface, image de K par F_K . Soit \mathcal{P} la projection orthogonale de Γ sur Γ_h . Pour h assez petit, \mathcal{P} établit une bijection entre Γ_h et Γ , de sorte qu'une fonction φ définie sur Γ_h ait pour image sur Γ : $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \mathcal{P}^{-1}$. Si on note V_h l'espace des fonctions définies sur la surface approchée, alors $\tilde{V}_h = \{\tilde{\varphi} = \varphi \circ \mathcal{P}^{-1} / \varphi \in V_h\}$ est le sous espace d'approximation lorsqu'on garde la surface exacte. C'est celui que nous utilisons par la suite. Nous choisissons ensuite les éléments

finis mixtes de plus bas degré (c'est à dire 1) introduits par Raviart-Thomas dans [33], dont nous rappelons les caractéristiques.

Soit K un élément de τ_h , introduisons un repère orthonormé $(x_K, \mathbf{f}_1^K, \mathbf{f}_2^K)$ dans le plan du triangle K , ce qui définit un système de coordonnées paramétriques $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ du plan de K . Soit $k \in \mathbb{N}^*$ l'ordre d'approximation en espace de la méthode, on se donne l'espace vectoriel suivant:

$$\mathbb{D}_k = \left\{ \mathbf{p}(x) = p_1(\xi)\mathbf{f}_1^K + p_2(\xi)\mathbf{f}_2^K / \exists q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{P}_{k-1}, \right. \\ \left. p_\alpha(\xi) = q_\alpha(\xi) + \xi_\alpha q_0(\xi), \alpha = 1, 2 \right\}$$

On note \tilde{K} le triangle curviligne: $\tilde{K} = \mathcal{P} \circ F_K(K)$. Définissons alors l'espace d'éléments finis sur Γ de dimension NS , qui représente le nombre d'arêtes surfaciques.

$$\tilde{V}_h = \left\{ \mathbf{p} \in C^\infty(\tilde{K}) / R_K \mathbf{p} \equiv \sqrt{g}(p_1(\xi)\mathbf{f}_1^K + p_2(\xi)\mathbf{f}_2^K) \in \mathbb{D}_k, \right. \\ \left. \forall K \in \tau_h \text{ et } R_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_i^K \right. \\ \left. + R_L \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_j^L = 0 \text{ sur toute arête curviligne } \partial \tilde{K} \right\}$$

\sqrt{g} étant défini par $\sqrt{g}d\xi = d\gamma$, et $\partial \tilde{K} = \mathcal{P} \circ F_K(\partial K_i) = \mathcal{P} \circ F_K(\partial L_j)$. Les degrés de liberté associés à cette famille d'éléments finis sont caractérisés par les deux fonctions:

$$\mathcal{L}_j(\mathbf{p}) = \int_{\partial \tilde{K}_j} \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_j^K \omega dl \quad j = 1, 2, 3, \quad \forall \omega \in \mathbb{P}_{k-1}$$

$$\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{p}) = \int_{\tilde{K}} p_\alpha \omega dx \quad j = 1, 2, \quad \forall \omega \in \mathbb{P}_{k-2}, \quad \text{si } k > 1$$

On choisit $k = 1$, ce qui supprime les degrés de liberté de type \mathcal{M}_α . Nous avons donc le triplet $(K, \mathbb{D}_1, \{\mathcal{L}_j\}_{j=1,3})$. L'espace \mathbb{D}_1 peut être défini par trois fonctions de base $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1,3}$ telles que: $\tilde{\varphi}_i \in \mathbb{D}_1$ et $\mathcal{L}_j(\tilde{\varphi}_i) = \delta_{ij}$ pour $j = 1, 3$.

Après ces quelques rappels, nous sommes en mesure d'énoncer les lemmes d'estimations d'erreur démontrés par A.Bendali dans sa thèse.

Lemme 4.1. *Soit $0 \leq s \leq t \leq 1$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , telle que:*

$$(49) \quad |\mathbf{p}|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C h^{s-t} |\mathbf{p}|_{H^{-t}(\Gamma)} \quad \forall \mathbf{p} \in \tilde{V}_h$$

Preuve. Voir [11] ou [10] page 136. □

Lemme 4.2. Si $\mathbf{p} \in H^t(\Gamma)^3$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que:

$$(50) \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_h|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C h^{s+t-\varepsilon-\frac{1}{2}} |\mathbf{p}|_{H^t(\Gamma)}$$

$$(51) \quad |\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{p} - \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{p}_h|_{H^{-s-1}(\Gamma)} \leq C h^{s+t-\varepsilon-\frac{1}{2}} |\mathbf{p}|_{H^t(\Gamma)}$$

$$\text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq k, \quad 0 \leq s \leq k, \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

$$(52) \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_h|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C |\mathbf{p}|_H \quad \text{avec } H = H^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}, \Gamma) \cap L^2(\Gamma)$$

Preuve. Voir [11] ou [10] page 144. □

Remarques.

- Pour $\mathbf{p} \in H^t(\Gamma)^3$, \mathbf{p}_h représente la projection de \mathbf{p} sur l'espace d'approximation V_h .
- Le réel ε qui apparaît dans (50) et (51) provient du fait que l'interpolé de \mathbf{p} est défini si $\mathbf{p} \in H^s(\Gamma)^3$ avec $s > \frac{1}{2}$.

Ensuite, pour approcher l'espace W et établir des estimations d'erreur relatives au champ électrique \mathbf{E} , il est nécessaire de prendre en compte exactement le volume Ω_1 , afin de vérifier les relations de traces sur Γ . C'est pourquoi nous utiliserons pour cette étude les éléments finis courbes conformes dans $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_1)$ qui découpent exactement le domaine. Ces derniers sont construits à partir des éléments finis mixtes de plus bas degré, droits et conformes dans $H(\operatorname{rot}, \Omega_1)$, dont nous rappelons la définition.

Définition 4.1. Soit le triplet (K, R^1, Σ) , avec:

K un tétraèdre

$$\begin{aligned} R^1 &= \mathbb{P}_0^3 \oplus \mathbb{P}_0^3 \wedge \mathbf{x} \\ &= \{ \mathbf{u} \in \mathbb{P}_1^3 / \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{P}_0^3, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \} \\ \Sigma &= \left\{ \sigma_i : \mathbf{u} \rightarrow \sigma_i(\mathbf{u}) = \int_{a_i} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i dl, 1 \leq i \leq \sigma \right\} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\tau}_i$ est le vecteur unitaire tangent à la $i^{\text{ième}}$ arête a_i de K .

Pour les calculs élémentaires et les propriétés utiles relatives à cet élément fini, nous renvoyons à [32]. Signalons simplement qu'il permet à partir d'un maillage tétraédrique de construire un sous espace W_h de $H_0(\operatorname{rot}, \Omega_1)$, de dimension NT , c'est à dire le nombre total d'arêtes. Maintenant, nous introduisons les éléments finis courbes qui sont construits à partir de leurs homologues droits. Leur élaboration est explicitée dans [20] ou [29]. Mais d'abord parlons de la triangulation $\tilde{\tau}_h$. Celle-ci se constitue:

- de tétraèdres courbes, ceux dont l’intersection avec $\partial\Omega_1$ est une arête ou une face
- de tétraèdres droits

et on se fixe les hypothèses suivantes:

- (H1) : Le maillage est assez raffiné pour que la projection orthogonale $P_{\partial\Omega_1}$ sur $\partial\Omega_1$ soit bien définie sur $\tilde{\tau}_h|_{\partial\Omega_1}$, un tétraèdre ne pouvant pas être en contact avec plusieurs composantes de la frontière.
- (H2) : $\exists C > 0, \forall h > 0, \forall K \in \tilde{\tau}_h, h(K) \leq h \leq Ch(K), h(K) \leq C\rho(K)$ avec $h(K)$ le diamètre de K et $\rho(K)$ le rayon de la sphère inscrite dans K .

La première hypothèse permet de définir les arêtes, les faces, et les tétraèdres courbes à partir de la projection orthogonale sur $\partial\Omega_1$, tandis que la deuxième représente la manière dont classiquement le maillage est affiné en fonction d’un paramètre h .

Un tétraèdre courbe K étant défini comme l’image du tétraèdre droit de référence \hat{K} , par un difféomorphisme F de classe C^2 :

$$\begin{aligned} F : \hat{K} &\longrightarrow K \\ \hat{x} &\longrightarrow x \end{aligned}$$

nous présentons l’élément fini courbe conforme dans $H(rot, \Omega_1)$.

Définition 4.2. Pour K un tétraèdre courbe, on note $dF(\hat{x})$ le gradient en \hat{x} de F . On définit alors l’espace vectoriel suivant:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(K) = \left\{ \tilde{\varphi} : K \rightarrow C^3; \exists \varphi \in R_1, \forall \hat{x} \in \hat{K}, \right. \\ \left. \tilde{\varphi}(F(\hat{x})) = ({}^t dF(\hat{x}))^{-1} \cdot \varphi(\hat{x}) \right\} \end{aligned}$$

et l’ensemble des degrés de liberté associés:

$$\Sigma_a(K) = \left\{ \sigma_a(\tilde{\varphi}) = \int_a \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{n} dl \right\}$$

a étant une arête de K qui n’appartient pas à Γ_c .

On appellera \tilde{W}_h le sous espace de dimension NT construit à partir de cet élément fini.

Si on note $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1,NT}$ les fonctions de base dans $H(rot, \Omega_1)$, et $\{\varphi_i\}_{i=1,NS}$ celles dans $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$, alors la discrétisation des inconnues s’écrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, x) &\simeq \tilde{\mathbf{E}}_h(t, x) = \sum_{i=1}^{NT} E_i(t) \mathbf{p}_i(x) \\ \mathbf{j}(t, x) &\simeq \tilde{\mathbf{j}}_h(t, x) = \sum_{i=1}^{NS} j_i(t) \varphi_i(x) \end{aligned}$$

où les E_i et j_i sont les degrés de liberté dépendant du temps.

4.2. Approximation en temps

En reprenant l’analyse mise au point par T.Ha Duong [23], on se donne une partition régulière de l’axe des temps positifs en intervalles de longueur Δt : $t_0 = 0, t_l = l\Delta t, \forall l \geq 0$. Puis on introduit des entiers positifs: m_1, m_2 qui représenteront respectivement l’ordre d’approximation en temps des inconnues \mathbf{E} et \mathbf{j} , et m_3 , celui pour les données \mathbf{q} et \mathbf{p} du problème. Par ailleurs, les fonctions tests auront les mêmes degrés d’approximation que les inconnues du problème.

Dans les formules de décomposition sur les fonctions de base en espace, les degrés de liberté sont des fonctions du temps qui appartiennent à $H_\sigma^{s_1}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ pour le champ électrique \mathbf{E} , et $H_\sigma^{s_2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ pour la densité de courant \mathbf{j} . Pour tout réel, on peut approcher l’espace $H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ par $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$ dont on rappelle la définition:

$$H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R}) = \{f \in H_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) / f|_{[t_{l-1}, t_l]} \in \mathbb{P}_m, \forall l \geq 1\}$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq s$

Remarque. Dans ces espaces, il n’est plus nécessaire de faire la distinction entre normes indexées et normes naturelles, puisqu’elles coïncident. Les espaces $\mathcal{H}_\sigma^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ introduits dans [23], et les espaces $H_\sigma^s(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ construits de la même manière à partir des normes indexées (voir [34]) sont donc identiques. Ainsi, les approximations en temps et espace des inconnues se fait de la manière suivante:

$$\mathbf{E}(t, x) \simeq \tilde{\mathbf{E}}_h^t(t, x) = \sum_{it=1}^\infty \sum_{i=1}^{NT} E_i^{it} \alpha_{it}(t) \mathbf{p}_i(x)$$

$$\mathbf{j}(t, x) \simeq \tilde{\mathbf{j}}_h^t(t, x) = \sum_{it=1}^\infty \sum_{i=1}^{NS} j_i^{it} \beta_{it}(t) \varphi_i(x)$$

où pour chaque indice i et it, E_i^{it} et j_i^{it} sont des scalaires, et α_{it}, β_{it} sont respectivement des fonctions \mathbb{P}_{m_1} et \mathbb{P}_{m_2} sur chaque subdivision $[(it - 1)\Delta t, it\Delta t]$. Quant aux fonctions tests, elles seront choisies comme des fonctions de base $\alpha_{it} \mathbf{p}_i$ et $\beta_{it} \varphi_i$ particulières.

Pour clore ce paragraphe, nous signalons deux lemmes démontrés dans [23], qui nous serviront pour l’étude de la convergence.

Lemme 4.3. Soient $k, m \in \mathbb{N}$, tels que $k > 1$, et $m > 2$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$(53) \quad \forall f \in H_\sigma^k(\Delta t, \mathbb{R}), \quad |f|_{\sigma, k, \mathbb{R}} \leq C \Delta t^{-m} |f|_{\sigma, k-m, \mathbb{R}}$$

Lemme 4.4. Soient $k, m \in \mathbb{N}$, tels que $k < m$ et $r_{\Delta t}$ l’opérateur d’interpolation de $H_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ dans $H_\sigma^m(\Delta t, \mathbb{R})$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$(54) \quad \forall f \in H_\sigma^m(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \quad |f - r_{\Delta t} f|_{\sigma, m, \mathbb{R}} \leq C \Delta t^{k+1-m} |f|_{\sigma, k+1, \mathbb{R}}$$

4.3. Existence et unicité d'une solution approchée

L'approximation par éléments finis que nous avons choisie conduit à un problème approché, issu de la formulation variationnelle (48).

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix} \in H_\sigma^{m_3}(\Delta t, \tilde{V}_h \oplus \tilde{V}_h) \\ \text{trouver } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{j}}_h^t \end{pmatrix} \in H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h) / \\ \forall \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \\ \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h) \\ b \left(\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{j}}_h^t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \\ \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \end{pmatrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\langle 2\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{q}}_h^t, \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \rangle - \langle 2\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{p}}_h^t, \tilde{\mathbf{m}}_h^{t'} \rangle \right) d_\sigma t \\ \text{avec les entiers } m_1, m_2 \geq 1, \text{ et } m_3 \geq 2 \end{array} \right.$$

Ces conditions sur m_1 , m_2 , et m_3 proviennent de la régularité en temps des données et des inconnues du problème (48).

Notations.

- La notation \sim sur les inconnues, les fonctions tests et les données du problème signifie que ces quantités sont issues d'une approximation par éléments finis courbes.
- Par souci de concision, nous nous accommoderons de l'écriture \tilde{U}_h^t pour l'inconnue $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{j}}_h^t \end{pmatrix}$ et $\tilde{U}_h^{t'}$ pour la fonction test.
- D'autre part, nous utiliserons l'espace suivant:

$$H_0^1(\text{rot}, \Omega_1) = H^1(\text{rot}, \Omega_1) \cap W.$$

- Nous rappelons la notation $|\cdot|$ pour les normes usuelles, et $\|\cdot\|$ pour les normes indexées.

Le lemme suivant est essentiel pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème approché.

Lemme 4.5. $\forall \tilde{\mathbf{p}}_h^t \in H_\sigma^m(\Delta t, \tilde{V}_h)$, $m > 0$, on a:

$$(56) \quad \|\tilde{\mathbf{p}}_h^t\|_{\frac{1}{2}, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)} \leq C h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\tilde{\mathbf{p}}_h^t\|_{-\frac{1}{2}, \sigma, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)}$$

Preuve. Voir [2] ou [28] page 68

□

Théorème 4.1. Soit $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \mathbf{p}_h^t \end{pmatrix} \in H_\sigma^{m_3}(\Delta t, \tilde{V}_h \oplus \tilde{V}_h)$, alors le problème approché (55) admet une unique solution \tilde{U}_h^t dans $H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$.

Preuve. La forme bilinéaire b est continue dans $(H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h))^2$, donc il ne reste qu'à montrer la coercivité pour conclure. Nous utilisons pour cela la proposition suivante démontrée dans [34]:

Proposition 4.1. Pour $\omega \in \mathbb{C}$, $\Im\omega \geq \sigma > 0$, pour $r \geq 0$, nous avons les relations d'équivalence suivantes entre les normes indexées et les normes usuelles:

$$\begin{aligned} C(\sigma)^{-r+1} \|f\|_{r,\omega,rot_\Omega} &\leq |f|_{H^r(rot,\Omega)} \\ &\leq C(\sigma)^{r+1} |\omega|^{r+1} \|f\|_{r,\omega,rot_\Omega} \\ C(\sigma)^{-(r+1)} |\omega|^{-r} \|f\|_{-r,\omega,rot_\Omega} &\leq |f|_{H^{-r}(rot,\Omega)} \\ &\leq C(\sigma)^{r+1} |\omega| \|f\|_{-r,\omega,rot_\Omega} \end{aligned}$$

avec $C(\sigma) = \sup(\frac{1}{\sigma}, 1)$.

On a exactement les mêmes estimations dans $H^r(div, \Omega)$.

qui induit grâce à la formule de Parseval:

$$\forall \mathbf{p}_h^t \in H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h), \|\mathbf{p}_h^t\|_{1,\sigma,W} \leq C(\sigma) |\mathbf{p}_h^t|_{1,\sigma,W}$$

et le lemme (4.3), qui permet de varier la régularité en temps des normes dans les majorations:

$$|\mathbf{p}_h^t|_{1,\sigma,W} \leq C\Delta t^{-2} |\mathbf{p}_h^t|_{-1,\sigma,W}$$

Et en utilisant de nouveau la proposition (4.1), nous avons:

$$|\mathbf{p}_h^t|_{-1,\sigma,W} \leq C(\sigma) \|\mathbf{p}_h^t\|_{0,\sigma,W}$$

En combinant ces trois dernières inégalités, on obtient:

$$(57) \quad \forall \mathbf{p}_h^t \in H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h), \|\mathbf{p}_h^t\|_{1,\sigma,W} \leq C(\sigma) \Delta t^{-2} \|\mathbf{p}_h^t\|_{0,\sigma,W}$$

Le lemme (4.5) donne une majoration identique pour l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma)$:

$$(58) \quad \forall \mathbf{p}_h^t \in H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h), \|\mathbf{p}_h^t\|_{\frac{1}{2},\sigma,V} \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\mathbf{p}_h^t\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}$$

On déduit de (57) et (58) la majoration suivante qui donne la coercivité de la forme bilinéaire dans $H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$.

$$(59) \quad \begin{aligned} &\left(\|\tilde{\mathbf{E}}_h^t\|_{1,\sigma,W}^2 + \|\tilde{\mathbf{j}}_h^t\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\sigma) \Delta t^{-2} \left(\|\tilde{\mathbf{E}}_h^t\|_{0,\sigma,W}^2 + h^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{\mathbf{j}}_h^t\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

4.4. Stabilité et convergence de la méthode

Théorème 4.2. Soit $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, V \oplus V)$. Si $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix}$ est une approximation consistante de $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ dans $H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, V \oplus V)$, alors la solution \tilde{U}_h^t du problème discrétisé est stable, i.e.:

$$\left(\|\tilde{\mathbf{E}}_h^t\|_{0,\sigma,W}^2 + \|\tilde{\mathbf{j}}_h^t\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\sigma, \Gamma) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \text{ et } \Delta t \rightarrow 0$$

Preuve. A partir du problème approché, la coercivité de la forme bilinéaire et la continuité du second membre donne la majoration:

$$\begin{aligned} &\forall U_h^t \text{ dans } H_{\sigma}^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_{\sigma}^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h) \\ &\left(\|\tilde{\mathbf{E}}_h^t\|_{0,\sigma,W}^2 + \|\tilde{\mathbf{j}}_h^t\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix} \right\|_{\frac{3}{2},\sigma,V \oplus V} \end{aligned}$$

□

Théorème 4.3. Si la solution $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$ du problème variationnel (48) possède la régularité suivante:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \in H_{\sigma}^{m_1+3}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\text{rot}, \Omega_1)) \\ &\mathbf{j} \in H_{\sigma}^{k_1+2}(\mathbb{R}^+, H^{k_1}(\text{div}, \Gamma)) \cap H_{\sigma}^{m_2+2}(\mathbb{R}^+, H) \\ &\text{avec } k_1 > 1, m_1 > 0, m_2 > 2 \text{ et } H = H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \cap L^2(\Gamma) \end{aligned}$$

Alors pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, on a:

$$\begin{aligned} &\left(\|\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^t\|_{0,\sigma,W}^2 + \|\mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^t\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V \oplus V} + h^{k_1-\varepsilon} \|\mathbf{j}\|_{k_1+1,\sigma,H^{k_1}(\text{div},\Gamma)} \right. \\ &\quad + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\mathbf{E}\|_{3,\sigma,H_0^1(\text{rot},\Omega_1)} + h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{E}\|_{m_1+2,\sigma,W} \\ &\quad + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{E}\|_{m_1+3,\sigma,H_0^1(\text{rot},\Omega_1)} + h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{m_2-2} \|\mathbf{j}\|_{m_1+2,\sigma,H} \\ &\quad \left. + h^{k_1-\varepsilon-\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\mathbf{j}\|_{k_1+2,\sigma,H^{k_1}(\text{div},\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

Preuve. Soit \tilde{U}_h^t dans $H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h) \oplus H_\sigma^{m_2}(\Delta t, \tilde{V}_h)$ la solution du problème approché, et $\tilde{U}_h^{t'}$ une fonction test appartenant au même espace. La coercivité de la forme bilinéaire b donne:

$$(60) \quad C \left(\left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{j}}_h^t - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right) \leq b \left(\tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'}, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right)$$

où C dépend de $\sigma, \Gamma, \varepsilon_2, \mu_2, \varepsilon_m$, et μ_M . Or, nous avons:

$$(61) \quad b \left(\tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'}, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right) = b \left(\tilde{U}_h^t - U, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right) + b \left(U - \tilde{U}_h^{t'}, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right)$$

avec U la solution du problème exact, et la continuité du second membre des problèmes continu et discrétisé fournit une majoration d'un de ces termes.

$$(62) \quad \left| b \left(\tilde{U}_h^t - U, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right) \right| \leq 2 \left(\left\| \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{p}}_h^t - \mathbf{n} \wedge \mathbf{p} \right\|_{1,\sigma,H^{-\frac{1}{2}}(rot,\Gamma)} \left\| \tilde{\mathbf{m}}_h^t - \tilde{\mathbf{m}}_h^{t'} \right\|_{-1,\sigma,V} + \left\| \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{q}}_h^t - \mathbf{n} \wedge \mathbf{q} \right\|_{1,\sigma,H^{-\frac{1}{2}}(rot,\Gamma)} C(\sigma) \left\| \tilde{\mathbf{j}}_h^t - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V} \right)$$

De plus, la continuité de b donne l'inégalité:

$$(63) \quad \left| b \left(U - \tilde{U}_h^{t'}, \tilde{U}_h^t - \tilde{U}_h^{t'} \right) \right| \leq \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{1,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{1,\sigma,W}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{j}}_h^t - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La combinaison des équations (59), ..., (63), ajoutée à la majoration:

$$\left\| \tilde{\mathbf{m}}_h^t - \tilde{\mathbf{m}}_h^{t'} \right\|_{-1,\sigma,V} \leq C(\Gamma) \left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,W}$$

donne l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{j}}_h^t - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\left(\left\| \tilde{\mathbf{p}}_h^t - \mathbf{p} \right\|_{1,\sigma,V}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{q}}_h^t - \mathbf{q} \right\|_{1,\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \max(1, h^{-\frac{1}{2}}) \Delta t^{-2} \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{1,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

et comme:

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^t \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^t \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \left(\left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{j}}_h^t - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

nous avons:

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^t \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^t \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\left\| \tilde{\mathbf{p}}_h^t - \mathbf{p} \right\|_{1,\sigma,V}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{q}}_h^t - \mathbf{q} \right\|_{1,\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \inf_{\tilde{U}_h^{t'} \in H_{\sigma}^{m_1}(\Delta t, W_h) \oplus H_{\sigma}^{m_2}(\Delta t, W_h)} \left\{ \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{-\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ (64) \quad & \left. + h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{1,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Il reste à majorer $(\|\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'}\|_{l,\sigma,W}^2 + \|\mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'}\|_{l',\sigma,V}^2)^{\frac{1}{2}}$ avec $l = 0, 1$ et $l' = \pm \frac{1}{2}$. Pour l'inconnue \mathbf{j} , nous établissons une majoration de $\|\mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'}\|_{l',\sigma,V}^2$, avec $l' = \pm \frac{1}{2}$, de la même manière que dans [1], [14], grâce à l'utilisation concomitante des lemmes (4.2), (4.4), et de l'équivalence des normes indexées et usuelles dans $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)$. Cette majoration s'écrit:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{j} - \tilde{\mathbf{j}}_h^{t'} \right\|_{l',\sigma,V} \\ (65) \quad & \leq C \left(\Delta t^{m_1 + \frac{1}{2} - l'} \|\mathbf{j}\|_{m_1 + 2, \sigma, H} + h^{k_1 - \varepsilon} \|\mathbf{j}\|_{l' + k_1 + \frac{3}{2}, \sigma, H^{k_1}(\text{div}, \Gamma)} \right) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$.

Pour le champ électrique \mathbf{E} , on fait intervenir dans une inégalité triangulaire l'interpolé $r_h \mathbf{E}$ de \mathbf{E} pour l'élément fini courbe conforme dans $H(\text{rot}, \Omega_1)$.

$$(66) \quad \left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{l,\sigma,W} \leq \|\mathbf{E} - r_h \mathbf{E}\|_{l,\sigma,W} + \left\| r_h \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{l,\sigma,W}$$

Pour les éléments finis droits conformes dans $H(\text{rot}, \Omega_1)$, J.C.Nédélec a établi dans [32] une estimation d'erreur entre un élément de $H(\text{rot}, \Omega_1)$ et son interpolé, faisant intervenir la norme dans $H^{k+1}(\Omega_1)^3$, où k est le degré

de l'élément fini. Mais pour les éléments finis courbes construits à partir de ces derniers, nous citons le résultat suivant de Dubois dans [20]:

Théorème 4.4. *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour tout élément φ de $H^1(rot, \Omega_1)$, il existe une unique interpolation $\Pi_h\varphi$ dans \tilde{W}_h , qui vérifie:*

$$\sigma_a(\Pi_h\varphi) = \sigma_a(\varphi) \quad \text{pour toute arête } a \text{ de } \tau_h$$

et

$$(67) \quad |\varphi - \Pi_h\varphi|_{H(rot, \Omega_1)} \leq Ch|\varphi|_{H^1(rot, \Omega_1)}$$

En citant [29], ce résultat peut s'étendre au cas où une partie de la frontière du domaine Ω_1 possède une condition de conducteur parfait, c'est à dire que φ appartient à l'espace $H_0^1(rot, \Omega_1)$. On transcrit l'inégalité (67) en norme espace-temps grâce à la proposition (4.1) et la formule de Parseval:

$$\|\mathbf{E} - r_h\mathbf{E}\|_{l, \sigma, W} \leq C(\sigma)h \|\mathbf{E}\|_{l+2, \sigma, H_0^1(rot, \Omega_1)}$$

Pour le deuxième terme de (66), on choisit de prendre: $\tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} = r_{\Delta t}(r_h\mathbf{E})$. Le lemme d'interpolation en temps (4.4) et la proposition (4.1) donne:

$$\|r_h\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'}\|_{l, \sigma, W} \leq C(\sigma)\Delta t^{m_1+1-l}|r_h\mathbf{E}|_{m_1+1, \sigma, W}$$

Or

$$|r_h\mathbf{E}|_W \leq |\mathbf{E}|_W + \underbrace{|r_h\mathbf{E}|_W}_{\leq Ch|\mathbf{E}|_{H_0^1(rot, \Omega_1)}}$$

On récupère alors l'estimation en norme indexée:

$$\begin{aligned} & \left\| r_h\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{l, \sigma, W} \\ & \leq C(\sigma)\Delta t^{m_1+1-l} \left(\|\mathbf{E}\|_{m_1+2, \sigma, W} + h \|\mathbf{E}\|_{m_1+3, \sigma, H^1(rot, \Omega_1)} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (66) devient:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^{t'} \right\|_{l, \sigma, W} \\ & \leq C(\sigma) \left(h \|\mathbf{E}\|_{l+2, \sigma, H_0^1(rot, \Omega_1)} + \Delta t^{m_1+1-l} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\|\mathbf{E}\|_{m_1+2, \sigma, W} + h \|\mathbf{E}\|_{m_1+3, \sigma, H_0^1(rot, \Omega_1)} \right) \right) \end{aligned}$$

Cette estimation, ajoutée à la formule (65) donne le résultat voulu pour h et Δt proche de 0. □

5. Commentaires sur les autres formulations variationnelles

Nous avons démontré la stabilité et la convergence de la méthode d’approximation issue de la 2^e formulation variationnelle. Le point crucial de ce raisonnement est la détermination d’une relation de coercivité de la forme sesquilinéaire, associée au problème harmonique. Malheureusement pour la 1^{re} et la 3^e formulation, nous ne pouvons pas exhiber une telle relation. En effet, considérons d’abord la forme sesquilinéaire associée à la 1^{re} formulation dans le domaine fréquentiel. Celle-ci ne possède que les termes exprimés grâce aux opérateurs de surface Q_2 et R_2 , issus d’une seule équation intégrale. Or en reprenant la démonstration faite dans [1], [14], au sujet de la coercivité des termes d’équations intégrales, nous voyons bien la nécessité de l’apport complémentaire des 2 équations intégrales harmoniques, qui sont les analogues en fréquence de (23) et (24). Pour la 3^e formulation, la coercivité échoue cette fois-ci à cause de la partie volumique qui n’est pas exploitable. On pourrait néanmoins espérer obtenir encore des résultats de convergence et de stabilité à l’aide de la théorie de Babuska-Brezzi. Nous étudierons cette possibilité dans une publication à venir Quant à la 4^e formulation, le traitement symétrique subi par \mathbf{E} et \mathbf{H} rend possible la coercivité, de sorte que le choix d’une approximation par éléments finis courbes conformes dans $H(rot, \Omega_1)$ pour \mathbf{E} et \mathbf{H} donne un résultat de stabilité et de convergence équivalent à celui des théorèmes (4.2) et (4.3). Nous présentons par la suite, les principaux résultats relatifs à cette formulation, renvoyant à [14] pour le détail des démonstrations.

Théorème 5.1. *Soient $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma))$. Alors le problème variationnel:*

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \text{ dans } H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(rot, \Omega_1) \oplus H(rot, \Omega_1)) \text{ tel que} \\ \text{quel que soit } \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} \text{ dans } H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(rot, \Omega_1) \oplus H(rot, \Omega_1)), \\ \text{la relation (32) soit vérifiée} \end{array} \right.$$

admet une unique solution.

L’hypothèse: $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(div, \Gamma))$ suffit dans le cas particulier du problème de scattering.

En appelant \tilde{X}_h l’espace qui réalise l’approximation de $H(rot, \Omega_1)$ pour l’inconnue \mathbf{H} , nous considérons le problème approché et les 3 théorèmes suivants:

Théorème 5.2. Soit $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix} \in H_\sigma^{m_3}(\Delta t, \tilde{V}_h \oplus \tilde{V}_h)$, alors le problème approché issu de la formulation (32) admet une unique solution dans $H_\sigma^{m_1}(\Delta t, \tilde{W}_h \oplus \tilde{X}_h)$.

Théorème 5.3. Soit $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, V \oplus V)$. Si $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix}$ est une approximation consistante de $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ dans $H_\sigma^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, V \oplus V)$, alors la solution du problème discrétisé est stable, i.e.:

$$\left(\left\| \tilde{\mathbf{E}}_h^t \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \tilde{\mathbf{H}}_h^t \right\|_{0,\sigma,X}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\sigma, \Gamma) \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \text{ et } \Delta t \rightarrow 0$$

Théorème 5.4. Si la solution $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ du problème variationnel (68) possède la régularité suivante:

$$\mathbf{E} \in H_\sigma^{m_1+3}(\mathbb{R}^+, H_0^1(\text{rot}, \Omega_1)) \text{ et } \mathbf{H} \in H_\sigma^{m_1+3}(\mathbb{R}^+, H^1(\text{rot}, \Omega_1))$$

avec $m_1 > 0$. Alors on a:

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}}_h^t \right\|_{0,\sigma,W}^2 + \left\| \mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}_h^t \right\|_{0,\sigma,X}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_h^t \\ \tilde{\mathbf{p}}_h^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \right\|_{\frac{1}{2},\sigma,V \oplus V} + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\mathbf{E}\|_{3,\sigma,H_0^1(\text{rot},\Omega_1)} \\ & \quad + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{-2} \|\mathbf{H}\|_{3,\sigma,H^1(\text{rot},\Omega_1)} + h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{E}\|_{m_1+2,\sigma,W} \\ & \quad + h^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{H}\|_{m_1+2,\sigma,X} + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{E}\|_{m_1+3,\sigma,H_0^1(\text{rot},\Omega_1)} \\ & \quad + h^{\frac{1}{2}} \Delta t^{m_1-2} \|\mathbf{H}\|_{m_1+3,\sigma,H^1(\text{rot},\Omega_1)} \end{aligned}$$

Dans les cas où nous n'avons pas la coercivité, c'est à dire pour les formulations (27) et (31), le seul résultat que nous puissions établir est l'existence et l'unicité d'une solution. Il suffit de montrer l'équivalence entre le problème harmonique (P_ω) et les formulations variationnelles harmoniques, qui sont images par la transformée de Fourier-Laplace des formulations (27) et (31). Dans les deux cas, la démonstration est similaire à celle de la proposition (3.1). Nous en déduisons que les formulations (27), (28), et (31) sont équivalentes (on peut aussi y inclure la formulation (32)). Le théorème (3.3) implique alors le résultat suivant:

Théorème 5.5. Soient $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_\sigma^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$. Alors les problèmes variationnels:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_{\sigma}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) / \\ \forall \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1)) \oplus H_{\sigma}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma)) \\ \text{la relation (27) soit vérifiée} \end{array} \right.$$

et

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1) \oplus H(\text{rot}, \Omega_1)) / \\ \forall \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^1(\mathbb{R}^+, H_0(\text{rot}, \Omega_1) \oplus H(\text{rot}, \Omega_1)) / \\ \text{la relation (31) soit vérifiée} \end{array} \right.$$

admettent une unique solution.

L'hypothèse: $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \in H_{\sigma}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+, H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma) \oplus H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}, \Gamma))$ suffit dans le cas particulier du problème de scattering.

6. Conclusion

Pour le problème de scattering en régime instationnaire, nous avons étudié d'un point de vue mathématique quatre façons de réaliser le couplage entre des éléments finis volumiques à l'intérieur de l'obstacle, et des équations intégrales espace-temps représentant le champ diffracté dans le domaine extérieur. Dans deux des cas, nous avons obtenu la stabilité inconditionnelle de la méthode d'approximation, ainsi que la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, lorsque les paramètres de discrétisation en espace et en temps tendent vers zéro. Néanmoins, les résultats de convergence nécessitent une régularité forte en temps sur les inconnues du problème, pour qu'ils puissent être exploités numériquement. Mais en dérogeant à cette exigence, c'est à dire en fixant une approximation en temps de type \mathbb{P}_0 ou \mathbb{P}_1 sur les inconnues ou les fonctions tests, on peut écrire des schémas constructifs, qui peuvent être soumis à une exploitation numérique. Une prochaine parution en fera l'objet, où nous expliciterons les différents schémas obtenus, ainsi que leur validation sur des cas tests.

References

1. A. Bachelot, L. Bounhoure, A. Pujols. Coupling of finite elements and retarded potentials for an electromagnetic scattering problem by an inhomogeneous obstacle. In Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, Golden, Colorado. SIAM. 1998

2. A. Bachelot, V. Lange. Time dependent integral method for Maxwell's system. In G. Cohen, editor, *Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, 151–159. SIAM-INRIA. 1995
3. A. Bachelot, V. Lange. Time dependent integral method for Maxwell's system with impedance boundary condition. In *10th International Conference on Boundary Element Technology, BETECH95*, 137–144. Computational Mechanics Publications, 1995
4. A. Bachelot, V. Lubet. On the coupling of boundary element and finite element methods for a time problem. In G. Cohen, editor, *Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, 130–139. SIAM-INRIA. 1995
5. A. Bachelot, A. Pujols. Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I.* **314**, 639–644 (1992)
6. A. Bachelot, A. Pujols. Boundary integral equation method in time domain for Maxwell's system. In *10th International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, pages 197–206. Nova Science Publishers, 1992
7. A. Bamberger, T. Ha Duong. Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigid. *Math. Methods Appl. Sci.* **8**(4), 598–608 (1986)
8. A. Bamberger, T. Ha Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique. *Math. Methods Appl. Sci.* **8**(3), 405–443 (1986)
9. H. Barucq, B. Hanouzet. Asymptotic behavior of solutions to Maxwell's system in bounded domains with absorbing Silver-Müller's condition on the exterior boundary. *Asymptot. Anal.* **15**(1), 25–40 (1997)
10. A. Bendali. Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques. Thèse d'état, Université Paris 6, 1984
11. A. Bendali. Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. II. The discrete problem. *Math. Comp.* **43**(167), 47–68 (1984)
12. A. Bendali. Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. I. The continuous problem. *Math. Comp.* **43**(167), 29–46 (1984)
13. A. Bendali, L. Halpern. Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension 3. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **307**, 1011–1013 (1988)
14. L. Bounhoure. Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle hétérogène. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 1998
15. G. Chen, J. Zhou. *Boundary element methods*. Academic Press, 1992
16. M. Costabel. A symmetric method for the coupling of finite elements and boundary elements. In *Math. of Finite Elements and Applications VI*, Academic Press, 281–288, 1988
17. M. Costabel, E. Stephan. Coupling of finite elements and boundary elements for inhomogeneous transmission problem. In *Math. of Finite Elements and Applications VI*, Academic Press, 289–296, 1988
18. M. Costabel, E. Stephan. Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **27**(5) 1212–1226 (1990)
19. R. Dautray, J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*. Masson, 1985
20. F. Dubois. Discrete vector potential representation of a divergence-free vector field in three-dimensional domains : numerical analysis of a model problem. *SIAM J. Numer. Anal.* **27**, 1103–1141 (1990)

21. B. Engquist, A. Majda. Absorbing conditions for the numerical simulation of waves. *Math. of Comp.* **31**(139), 629–651 (1977)
22. M. Filipe, A. Forestier, T. Ha Duong. A time dependent acoustic scattering problem. Mathematical and numerical aspects of wave propagation. In G. Cohen, editor, *Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, 140–150. SIAM-INRIA, 1995
23. T. Ha Duong. Equations intégrales pour la résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans \mathbb{R}^3 . Thèse d'état, Université Paris 6, 1987
24. T. Ha Duong, P. Joly. A principle of images for absorbing boundary conditions. *Numer. Methods Partial Differential Equations* **10**(4), 411–434 (1994)
25. B. Hanouzet, M. Sesques. Influence des termes de courbure dans les conditions aux limites artificielles pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311**(9), 561–564 (1990)
26. C. Johnson, J.C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite elements methods. *Math. of Comp.* **35**(152), 1063–1079 (1980)
27. P. Joly, B. Mercier. Une nouvelle condition absorbante d'ordre 2 pour le système de Maxwell de dimension 3. Rapport INRIA, numéro 1047, 1983
28. V. Lange. Equations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 1995
29. V. Levillain. Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1991
30. J.L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes*. Dunod, Paris, 1968
31. J.C. Nédélec. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surface in \mathbb{R}^3 . *Comp. Meth. Appl. Meth. Eng.* **8**, 61–80 (1976)
32. J.C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.* **35**, 315–341 (1980)
33. P.A. Raviart, J.M. Thomas. A mixed finite element method for the 2nd order elliptic problems. *Lecture Notes in Math 606*, Springer Verlag, Berlin, 1975
34. I. Terrasse. Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1993
35. S. Steinberg. Meromorphic families of compact operators. *Archives for Rational Mechanics and Analysis* **31**, 372–379 (1968)