

IMMEUBLES HYPERBOLIQUES, DIMENSION CONFORME ET RIGIDITÉ DE MOSTOW

M. BOURDON

Résumé

On adapte à une famille d'immeubles hyperboliques de dimension deux, des arguments de géométrie quasi-conforme qui sont classiques dans le cadre des espaces symétriques de rang un non compacts. En particulier on calcule un invariant numérique de quasi-isométrie de ces immeubles : la dimension conforme de Pansu de leur bord. On montre aussi que leurs réseaux sont Mostow-rigides au sens classique.

Abstract

We adapt to a family of hyperbolic buildings of dimension two, some geometric quasi-conformal arguments which are classical in the case of rank one non compact symmetric spaces. In particular we compute a numeric quasi-isometric invariant : Pansu's conformal dimension of their boundaries. We also prove that their lattices are Mostow-rigid in the classical sense.

1 Introduction

Dans [D], M. Davis munit tout immeuble de Tits d'une métrique à courbure généralisée inférieure ou égale à 0. Ainsi les immeubles viennent enrichir la théorie des espaces et des groupes (semi) hyperboliques de M. Gromov [Gr1]. Nous nous intéressons ici aux plus simples exemples d'immeubles à courbure inférieure ou égale à -1 . Ce sont les analogues en courbure ≤ -1 , du produit de deux arbres homogènes de même valence. Ils sont définis comme suit : pour chaque couple d'entiers (p, q) vérifiant $p \geq 5$, $q \geq 2$, soit I_{pq} l'immeuble de Tits dont les appartements sont des plans hyperboliques à courbure -1 , les chambres des p -gones réguliers hyperboliques d'angles $\pi/2$, et dont le link de chaque sommet est le q -graphe bipartite complet (voir 2.1 et 2.3 pour plus de détails ; le produit de deux arbres de valence q correspondrait à $p = 4$ en prenant pour appartements des plans euclidiens). Dans la théorie de J. Tits et de M. Davis, l'immeuble I_{pq} est le revêtement universel de l'orbifold naturellement associé au groupe de

réflexions généralisées

$$\Gamma_{pq} = \langle s_1, \dots, s_p \mid s_i^q = 1, [s_i, s_{i+1}] = 1 \rangle$$

(les indices sont modulo p). En particulier Γ_{pq} agit par isométries, de manière proprement discontinue sur I_{pq} , et l'espace de ses orbites est une chambre. L'immeuble I_{pq} est un CAT(-1)-espace (voir [B]), autrement dit ses triangles sont plus fins que ceux du plan hyperbolique à courbure -1 . Il possède donc un bord à l'infini noté ∂I_{pq} (voir [Gr1], [GHa]). Pour $q = 2$, I_{pq} est le plan hyperbolique, donc son bord est un cercle ; lorsque $q \geq 3$ un argument de N. Benakli ([Be, p. 66]) montre que ∂I_{pq} est homéomorphe à l'éponge de Menger (voir [A]).

On discute ici la géométrie à grande échelle de I_{pq} et la rigidité de ses réseaux. Nos principaux outils d'investigation sont

- la dimension de Hausdorff du bord d'un CAT(-1)-espace X , notée $\text{Hdim } \partial X$ (voir 3.1.2),
- la dimension conforme de Pansu de ∂X , notée $\text{Cdim } \partial X$ (voir 3.1),
- le birapport combinatoire du bord de I_{pq} (voir 2.4).

Le premier est un invariant géométrique de X , il dépend très fortement de sa métrique. Le second est un invariant numérique de quasi-isométrie de X , toujours minoré par la dimension topologique de ∂X et majoré par $\text{Hdim } \partial X$. Le dernier est original, c'est un invariant combinatoire du 2-complexe I_{pq} , il est aussi intimement lié à la géométrie quasi-conforme de ∂I_{pq} .

Les principaux résultats de cet article sont :

A. Dimension conforme de ∂I_{pq} . On calcule la valeur exacte de la dimension conforme du bord de I_{pq} . A ma connaissance, cet invariant n'était précisément connu que pour les variétés homogènes à courbure < 0 , ces calculs étant dûs à P. Pansu [P2]. Pour certains 2-complexes cellulaires hyperboliques, des estimations ont été réalisées par M. Gromov (voir [Gr2, §7, C₃], voir aussi [Bo2] où elles sont détaillées). En utilisant les idées de Pansu-Gromov, on obtient

Théorème 1.1. *Soit $\tau(p, q)$ le taux de croissance de Γ_{pq} relativement à la métrique des mots de son système de générateurs naturel,*

$$\tau(p, q) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#\{g \in \Gamma_{pq} / |g| \leq n\} ,$$

on a

$$\text{Cdim } \partial I_{pq} = \frac{\tau(p, q)}{\tau(p, 2)} = 1 + \frac{\log(q-1)}{\text{Arg ch } \frac{p-2}{2}}.$$

REMARQUE. Pour $p' = (p-2)^2$ et $q' - 1 = (q-1)^2$, on a $\text{Cdim } \partial I_{pq} = \text{Cdim } \partial I_{p'q'}$. Donc la dimension conforme ne distingue pas tous les I_{pq} à quasi-isométrie près. Je pense pourtant qu'ils sont deux à deux non quasi-isométriques dès que $q \geq 3$.

B. Combinatoire et dimension conforme. Motivons le prochain résultat par un parallèle avec les espaces symétriques non compacts de rang un. Pour ces derniers on a, d'après P. Pansu (voir [P2]),

$$\text{Cdim } \partial \mathbf{H}_K^n = \text{Hdim } \partial \mathbf{H}_K^n = \text{Top dim } \partial \mathbf{H}_K^n + k - 1,$$

où k désigne la dimension réelle du corps K et Top dim la dimension topologique. L'égalité de gauche signifie que la dimension conforme privilégie la métrique symétrique parmi toutes les métriques $\text{CAT}(-1)$ qui sont invariantes par un réseau cocompact de \mathbf{H}_K^n . Le théorème "entropie contre courbure" d'U. Hamenstädt montre qu'elle n'en privilégie aucune autre (voir [Ham], [Bo3]). Pour les immeubles I_{pq} la situation est autre, la dimension conforme reflète la combinatoire de I_{pq} et ne privilégie aucune structure $\text{CAT}(-1)$ sur I_{pq} . Plus précisément nous montrons le

Théorème 1.2. a) Il existe une métrique "combinatoire" δ dans la classe quasi-conforme de ∂I_{pq} telle que $\text{Cdim } \partial I_{pq} = \text{Hdim } \delta$.

b) Soit G un réseau cocompact de I_{pq} avec $q \geq 3$, et soit X un $\text{CAT}(-1)$ -espace sur lequel G agit par isométries, de manière proprement discontinue et cocompacte, on a

$$\text{Cdim } \partial I_{pq} < \text{Hdim } \partial X.$$

C. Rigidité de Mostow. L'immeuble I_{pq} possède un gros groupe d'isométries puisqu'il agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux (chambres, appartements). J'ignore cependant s'il possède de nombreux réseaux à commensurabilité près. En adaptant les idées de Mostow et de Sullivan, nous montrons le

Théorème 1.3. Supposons $q \geq 3$. Soit G et G' deux réseaux cocompacts respectivement de I_{pq} et de $I_{p'q'}$ et soit $\rho : G \rightarrow G'$ un isomorphisme. Alors $(p, q) = (p', q')$ et ρ est la conjugaison par un élément de $\text{Isom}(I_{pq})$.

Terminons par quelques

QUESTIONS ET REMARQUES. a) Une quasi-isométrie de I_{pq} est-elle à distance bornée d'une isométrie ?

b) Il serait intéressant de généraliser nos résultats à des immeubles hyperboliques plus généraux. Les théorèmes 1.1 et 1.2.a) s'étendent facilement aux immeubles X de dimension deux qui possèdent les propriétés suivantes (voir 3.2.2) : les appartements de X sont des plans hyperboliques, le groupe de Weyl est un groupe fuchsien cocompact, les arêtes de X ont toutes même valence, et X contient une chambre dont le fixateur dans $\text{Isom}(X)$, agit transitivement sur l'ensemble des appartements qui la contiennent. Par contre la généralisation des théorèmes 1.2.b) et 1.3 est moins claire, en effet leurs preuves s'appuient sur le birapport combinatoire dont l'existence et les propriétés semblent, a priori, particulières à l'immeuble I_{pq} .

Cet article est organisé comme suit. Au chapitre 2 on définit l'immeuble I_{pq} et on discute ses structures géométriques, en particulier son birapport combinatoire. Au chapitre 3 on démontre les théorèmes 1.1 et 1.2.a) en utilisant un critère de P. Pansu [P1] (lemme 3.1.3). Les théorèmes 1.2.b) et 1.3 sont démontrés au chapitre 4, on se sert d'un argument de D. Sullivan pour réduire leurs preuves à des propriétés géométriques du birapport combinatoire.

Remerciements. Je remercie Sylvain Barré qui m'a indiqué l'existence d'immeubles à courbure ≤ -1 . Je remercie Pierre Pansu qui m'a initié aux espaces hyperboliques et à sa théorie quasi-conforme. Je remercie également chaleureusement Guy Diaz pour ses observations concernant la non-injectivité de $\text{Cdim } \partial I_{pq}$, ainsi que Michael Davis, Thomas Delzant, André Haefliger et François Ledrappier pour leurs réponses patientes à mes questions plus que naïves. Enfin, un grand merci au referee pour ses nombreuses et judicieuses critiques.

2 L'immeuble I_{pq}

Dans ce chapitre nous définissons en 2.1, le complexe I_{pq} et l'action de Γ_{pq} . On montre en 2.2 que la structure locale de I_{pq} le caractérise à isométrie près. Au paragraphe 2.3 nous décrivons les structures de base de I_{pq} que l'on utilisera au chapitre suivant pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2.a). Le paragraphe 2.4 est consacré à la construction du birapport combinatoire. On y donne aussi deux caractérisations des isométries de I_{pq} en termes de leurs actions au bord. Ce paragraphe sera utilisé au dernier chapitre pour montrer la rigidité de Mostow et le théorème 1.2.b). Afin d'alléger les

notations on supposera les nombres p et q fixés une fois pour toutes, et on notera I et Γ l'immeuble I_{pq} et le groupe Γ_{pq} .

2.1 Construction de I . On donne une construction “à la Gromov-Haefliger” de (I, Γ) , (voir [H]). Il s'agit aussi d'un cas particulier d'une construction de J. Meier (voir [M], voir aussi [D]). Soit R un p -gone régulier, hyperbolique, à courbure -1 , d'angles $\pi/2$. On attache à R un complexe de groupes, noté $G(R)$, de la façon suivante. La face de R porte le groupe trivial $G_f = \{e\}$, ses arêtes le groupe $G_a = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, ses sommets le groupe $G_s = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Pour chacune des deux arêtes a, a' issues d'un sommet s de R , choisissons l'un des deux facteurs de G_s , on obtient ainsi des morphismes injectifs naturels de G_a et $G_{a'}$ dans G_s . Le groupe fondamental du complexe $G(R)$ est le groupe Γ défini dans l'introduction (voir [H, § 3]). Le link d'un sommet de la structure d'orbèdre associée à $G(R)$ (voir [H, § 5.6]) est le q -graphe bipartite complet, c'est-à-dire le joint entre deux ensembles à q éléments (voir figure 1). On le notera $K(q)$. Observons que les cycles minimaux de $K(q)$ sont de longueur 4. Aussi par choix de la courbure de R et de ses angles, le complexe de groupes $G(R)$ est CAT(-1) (voir [H, § 6.3]). Donc d'après un théorème d'A. Haefliger ([H, théorème 6.4]), $G(R)$ est développable : il existe un 2-complexe cellulaire simplement connexe I sur lequel le groupe Γ agit par isométries (pour la métrique de longueur induite par les 2-cellules), de manière proprement discontinue, avec

$$\Gamma \backslash I = G(R) .$$

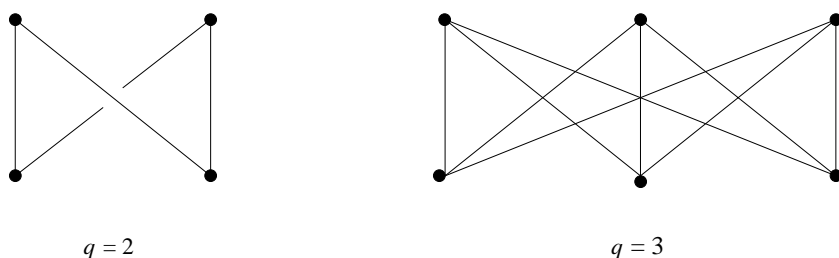


figure 1

En d'autres termes, l'espace des orbites de Γ est R , le stabilisateur d'une face (resp. d'une arête, resp. d'un sommet) est isomorphe à G_f (resp. G_a , resp. G_s). Le 2-complexe I possède donc les propriétés suivantes :

- (i) Ses 2-cellules sont isométriques à R , elles sont attachées par leurs arêtes et sommets, deux 2-cellules ont au plus un sommet ou une arête en commun.

- (ii) Le link de chacun de ses sommets est le graphe $K(q)$; autrement dit, en chaque sommet le 1-squelette est localement homéomorphe au cône construit sur le 0-squelette de $K(q)$, et le 2-squelette est localement homéomorphe au cône construit sur $K(q)$.

La figure 2 tente d'indiquer la structure locale de I en un sommet s pour $q = 3$. Les triangles représentent les 2-cellules attachées à s .

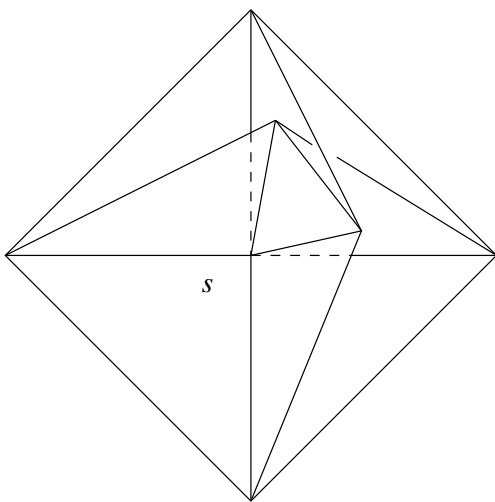


figure 2

2.2 Unicité de I .

PROPOSITION 2.2.1. *A isométrie près, il existe un unique 2-complexe cellulaire simplement connexe qui possède les propriétés (i) et (ii) du paragraphe 2.1.*

Cette proposition a été démontrée par J. Swiatkowski [Sw] pour $q = 3$, il m'a indiqué qu'il connaissait également le cas général. Nous allons en donner une preuve inspirée de [BBr]. Auparavant voici un corollaire immédiat.

COROLLAIRE 2.2.2. *Les réseaux cocompacts sans torsion de I sont, à conjugaison près, en correspondance bi-univoque avec les 2-complexes cellulaires compacts localement isométriques à I .*

Par exemple le réseau Γ possède des sous-groupes sans torsion d'indice fini. En effet il se surjecte dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^p$, son noyau est sans torsion d'indice q^p .

Preuve de 2.2.1. L'existence découle du paragraphe précédent. Soit X un 2-complexe cellulaire simplement connexe qui vérifie (i) et (ii). Soit c une 2-cellule de X . Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $X(n)$ le sous-complexe suivant de X : lorsque $n = 1$, $X(n) = c$; lorsque $n \geq 2$, $X(n)$ est l'étoile de $X(n-1)$ dans X , c'est-à-dire la réunion des 2-cellules de X qui ont au moins un sommet en commun avec $X(n-1)$. On montre par récurrence sur n que $X(n)$ est indépendant de X , la proposition en découlera. Supposons que $X(n)$ possède les propriétés suivantes :

- (1) Le link d'un sommet intérieur à $X(n)$ est $K(q)$.
- (2) Soit x un sommet de $\partial X(n)$. Alors ou bien x est *libre*, en d'autres termes son link dans $X(n)$ est réduit à une arête de $K(q)$; ou bien il est *partiellement libre* : son link dans $X(n)$ est l'étoile d'un sommet de $K(q)$.
- (3) Deux sommets partiellement libres sont toujours séparés dans $\partial X(n)$ par au moins un sommet libre.
- (4) $X(n)$ est indépendant de X à isométrie près.

Soit alors Y un 2-complexe obtenu comme suit. Attachons d'abord à chaque arête de $\partial X(n)$, $q-1$ copies de R . Le link d'un sommet libre de $\partial X(n)$ devient l'étoile d'une arête dans $K(q)$, celui d'un sommet partiellement libre un arbre homogène de valence q et de hauteur deux. Complétons les premiers et fermons les seconds, de manière à ce que le link dans Y d'un sommet de $\partial X(n)$ soit $K(q)$. Le complexe Y vérifie (1) et (2). Puisque $p \geq 5$, il vérifie également (3). On étend à présent l'inclusion i de $X(n)$ dans X , en une surjection j de Y sur $X(n+1)$. On va utiliser la propriété suivante du graphe $K(q)$. Soit a un sommet ou une arête de $K(q)$ et soit $S(a)$ son étoile dans $K(q)$. Alors tout automorphisme de $S(a)$ s'étend en un automorphisme de $K(q)$. Appliquée aux sommets et combinée à la propriété (3) de $X(n)$, elle permet d'abord d'étendre i à la réunion des étoiles des sommets partiellement libres de $\partial X(n)$. En l'appliquant ensuite aux arêtes, on étend i à Y tout entier. L'application j ainsi obtenue est une immersion localement isométrique (au sens fort) de l'espace de longueur Y dans X (car les links décrits en (2) sont totalement géodésiques dans $K(q)$). Puisque X est $\text{CAT}(-1)$, j est un plongement isométrique (totalement géodésique). Ainsi Y est isométrique à $X(n+1)$. Donc ce dernier vérifie (1) à (4). \square

2.3 Structures géométriques de I . On décrit ici les structures de base de I que l'on utilisera au chapitre suivant pour établir les théorèmes

1.1 et 1.2.a). Il s'agit de sa structure d'immeuble hyperbolique de dimension deux, de l'action transitive de $\text{Isom}(I)$ sur l'ensemble des drapeaux (chambres, appartements) et d'une description géométrique de la métrique de Γ . On renvoie à [D], [R] pour un point de vue plus conceptuel des immeubles.

A. Observons que deux arêtes quelconques de $K(q)$ sont toujours contenues dans au moins un cycle de longueur quatre. Donc $K(q)$ est un immeuble sphérique, ses chambres sont ses arêtes, ses appartements les cycles de longueur quatre.

DÉFINITION 2.3.1. a) *Les chambres de I sont ses 2-cellules.*

b) *Les appartements de I sont ses sous-complexes totalement géodésiques isométriques à I_{p2} .*

c) *Un mur de I (resp. d'un appartement A de I) est une géodésique (bi-infinie) contenue dans le 1-squelette de I (resp. de A).*

En utilisant la structure d'immeuble de $K(q)$ et des constructions élémentaires, ou bien grâce à [D], on a

PROPOSITION 2.3.2 (Structure d'immeuble). a) *Deux chambres quelconques de I sont toujours contenues dans un même appartement (non unique).*
 b) *Toute ligne géodésique de I est contenue dans un appartement (non unique).*

B. Soit $\text{Isom}(I)$ le groupe d'isométries de I . Il agit transitivement sur l'ensemble des chambres car Γ agit simplement transitivement sur cet ensemble. Soit c une chambre et $\text{Fix}(c)$ le sous-groupe compact de $\text{Isom}(I)$ qui fixe c point par point. Son action sur l'ensemble des appartements qui contiennent c est transitive. L'argument est semblable à celui de l'unicité de I (voir 2.2) ; étant donné deux appartements contenant c , on montre que l'un est image de l'autre par un élément de $\text{Fix}(c)$ en construisant g sur la famille croissante des sous-complexes $I(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, grâce à l'observation suivante. Soit a un sommet ou une chambre contenu dans un appartement A de $K(q)$. Soit $\text{Fix } S(a)$ le groupe des automorphismes de $K(q)$ qui fixent point par point l'étoile $S(a)$ de a dans $K(q)$. Alors $\text{Fix } S(a)$ agit transitivement sur l'ensemble des appartements A' de $K(q)$ qui satisfont

$$A' \cap S(a) = A \cap S(a).$$

Par suite $\text{Isom}(I)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux (chambres, appartements). En résumé on a obtenu la

PROPOSITION 2.3.3. a) *Le groupe compact $\text{Fix}(c)$ agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant c .*

b) *Le groupe $\text{Isom}(I)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux (chambres, appartements).*

C. Soit maintenant c une chambre contenue dans un appartement A de I . D'après 2.3.3.a, le quotient de I par le groupe $\text{Fix}(c)$ s'identifie à A . La projection $\rho_{c,A} : I \rightarrow A$ s'appelle la *rétraction de centre c* de I sur A (voir [D] pour une définition plus générale). Elle vérifie trivialement la

PROPOSITION 2.3.4. a) *L'application $\rho_{c,A}$ est contractante, plus précisément elle préserve la longueur des courbes.*

b) *En restriction à chaque appartement contenant c , la rétraction $\rho_{c,A}$ est une isométrie.*

D. Donnons à présent une description géométrique de la métrique de Γ . On notera de la même manière le groupe Γ et son graphe de Cayley. Ce dernier est le graphe dual de I , ses sommets sont les centres des chambres, deux sommets sont liés par une arête si les chambres correspondantes ont un mur en commun. Munissons Γ de la métrique de longueur obtenue en donnant à chacune de ses arêtes la longueur un. On la notera $|\cdot|_{\Gamma}$.

Un *appartement de Γ* est par définition la restriction à Γ d'un appartement de I . Dans Γ les données d'un sommet z et d'un appartement A_{Γ} le contenant, définissent la rétraction $\rho_{z,A}$ de centre z de Γ sur A_{Γ} . Elle satisfait encore les propriétés 2.3.4, donc les appartements sont totalement géodésiques dans Γ .

Pour z et z' deux sommets de Γ , soit $c(z)$ et $c(z')$ les chambres correspondantes dans I , A un appartement de I contenant $c(z)$ et $c(z')$, et γ un segment géodésique de I dont les extrémités appartiennent à $\overset{\circ}{c}(z)$ et $\overset{\circ}{c}(z')$. Notons $n(\gamma)$ le nombre de murs de A traversés par γ ; si γ passe par un sommet s de A , on compte les deux murs de A qui contiennent s . Les murs traversés par γ sont exactement les murs qui séparent $c(z)$ de $c(z')$ dans A . Donc $n(\gamma)$ est indépendant du segment γ choisi, c'est le nombre minimal de murs que rencontre tout chemin de A reliant $\overset{\circ}{c}(z)$ à $\overset{\circ}{c}(z')$. Lorsque γ ne rencontre pas le 0-squelette de A (situation générique), $n(\gamma)$ est le nombre de chambres traversées par γ . Par suite puisque les appartements de Γ sont totalement géodésiques, on obtient la

PROPOSITION 2.3.5. a) *On a $n(\gamma) = |z - z'|_{\Gamma}$.*

b) *Soit A_{Γ} un appartement de Γ , z et z' deux sommets de A_{Γ} et γ_{Γ} un segment géodésique de A_{Γ} d'extrémités z et z' . Alors $(\rho_{z,A})^{-1}(\gamma_{\Gamma})$ est*

un arbre homogène dans Γ , il est enraciné en z , a pour valence q et pour hauteur $|z - z'|_\Gamma$, en particulier

$$\sharp(\rho_{z,A})^{-1}(z') = (q-1)^{|z-z'|_\Gamma}.$$

Voici une conséquence immédiate du b).

COROLLAIRE 2.3.6. Avec les notations du théorème 1.1, le taux de croissance de Γ est

$$\tau(p, q) = \tau(p, 2) + \log(q-1).$$

REMARQUES 2.3.7. a) On a $\tau(p, 2) = \text{Argch} \frac{p-2}{2}$. Cette formule est implicite dans [FPI, Ch. 3.3]. On peut aussi l'établir en utilisant une application de Bowen-Series associée à Γ_{p2} , (voir [S]). Par suite, on obtient

$$\frac{\tau(p, q)}{\tau(p, 2)} = 1 + \frac{\log(q-1)}{\text{Argch} \frac{p-2}{2}}.$$

b) Soit X un immeuble de dimension deux, dont les appartements sont des plans hyperboliques, le groupe de Weyl W est un groupe de Coxeter fuchsien cocompact, et la valence de chaque arête est égale à q . Notons Γ_X le graphe dual de X . Alors la proposition 2.3.5 subsiste, en particulier le taux de croissance de Γ_X est

$$\tau(\Gamma_X) = \tau(W) + \log(q-1).$$

On renvoie à [FPI] pour les formules de $\tau(W)$.

2.4 Birapport combinatoire. On utilise ici une structure très particulière de l'immeuble I pour définir les notions combinatoires de distance horosphérique, produit de Gromov et birapport (voir [O], [Bo3] pour leurs analogues riemanniens). Ensuite on donne deux caractérisations des isométries de I en termes de leurs actions au bord. On utilisera ces résultats au dernier chapitre pour montrer la rigidité de Mostow et le théorème 1.2.b). Les notions développées ici me paraissent assez particulières à l'immeuble I , pour l'instant je ne sais pas les généraliser aux autres immeubles décrits en 2.3.7.b).

A. Soit L un immeuble sphérique de dimension un et de diamètre n (voir [R], [Ba]). Deux sommets de L sont dits *diamétralement opposés* s'ils sont à distance n . Dans l'immeuble $K(q)$, "être diamétralement opposés ou confondus" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets (il y a clairement deux classes d'équivalence de sommets, voir figure 1, § 2.1).

Notons que cette propriété est caractéristique de l'immeuble $K(q)$, on le voit en utilisant les propositions 3.1 et 3.3 de [Ba]. Par suite on obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des arêtes de I : deux arêtes sont équivalentes si elles sont contenues dans un même mur. On appellera *arbre-mur* de I une classe d'équivalence de cette relation. Ce sont les arbres homogènes de valence q , totalement géodésiques dans I , et contenus dans son 1-squelette. Ils possèdent les propriétés suivantes :

- (i) Deux arbres-murs distincts d'intersectent en au plus un point (puisque'ils sont totalement géodésiques). De même un arbre-mur qui coupe transversalement une ligne géodésique la rencontre en exactement un point.
- (ii) Un arbre-mur sépare I en q composantes connexes (car une classe d'équivalence de sommets de $K(q)$ le sépare en q composantes connexes).

Cette notion permet tout d'abord une expression plus intrinsèque de la métrique de Γ . En effet pour x et y deux points de I , notons $n[xy]$ le nombre d'arbres-murs qui rencontrent le segment fermé $[xy]$ (à nouveau si $[xy]$ contient un sommet s de I , on compte les deux arbres-murs qui contiennent s). Lorsque z et z' sont deux sommets de Γ et $c(z), c(z')$ les chambres de I qui les contiennent, on a d'après 2.3.6.a),

$$\forall x \in \overset{\circ}{c}(z), \forall y \in \overset{\circ}{c}(z') : n[xy] = |z - z'|_{\Gamma} .$$

B. Considérons à présent pour x, y, z dans I la fonction à valeurs entières

$$N_z(x, y) = n[xz] - n[yz].$$

Elle s'exprime également comme suit. Soit \mathcal{T} l'ensemble des arbres-murs. Pour $T \in \mathcal{T}$ et x, y deux points de $I \cup \partial I$, posons

$$\begin{aligned} \alpha_T(x, y) &= 1 \text{ si } T \cap [xy] \neq \emptyset , \\ &= 0 \text{ sinon .} \end{aligned}$$

Alors d'après (i), on a

$$(2.4.1) \quad N_z(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T(x, z) - \alpha_T(y, z) .$$

Soit $\mathcal{T}(x, y)$ l'ensemble des arbres-murs qui rencontrent le segment $[xy]$. C'est un ensemble fini. D'autre part, la propriété (ii) et un argument de

connexité montrent que les arbres-murs du complémentaire de $\mathcal{T}(x, y)$ ont une contribution nulle à la somme ; donc finalement

$$N_z(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(x, y)} \alpha_T(x, z) - \alpha_T(y, z) .$$

Par suite, pour (x, y) fixé, la fonction $N_z(x, y)$ de la variable z est constante sur chaque composante connexe du complémentaire de la réunion des arbres-murs de $\mathcal{T}(x, y)$. Elle s'étend donc par continuité en une fonction localement constante sur ∂I privé des extrémités des arbres-murs appartenant à $\mathcal{T}(x, y)$. Soit B le G_δ -dense de ∂I , complémentaire des extrémités des arbres-murs de I . Pour chaque couple (x, y) de points de I , on a construit une fonction sur B , notée

$$\xi \mapsto N_\xi(x, y) ,$$

localement constante donc en particulier continue. On l'appellera *distance horosphérique combinatoire* de x à y relativement à ξ . D'après 2.4.1, elle s'écrit

$$(2.4.2) \quad N_\xi(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T(x, \xi) - \alpha_T(y, \xi) ,$$

ce qui permet de la définir artificiellement sur ∂I tout entier. Elle vérifie la relation de cocycle

$$(2.4.3) \quad N_\xi(x, z) = N_\xi(x, y) + N_\xi(y, z) .$$

C. De la même manière, le produit de Gromov basé en x

$$\{y \mid z\}_x = \frac{1}{2} \{n[xy] + n[xz] - n[yz]\} ,$$

s'étend par continuité à B^2 privé de sa diagonale, en une fonction localement constante (donc continue), notée

$$(\xi, \eta) \mapsto \{\xi \mid \eta\}_x .$$

On l'appellera *produit de Gromov combinatoire au bord* basé en x (comparer avec [GHa, chapitre 7, § 2]). Il s'écrit

$$(2.4.4) \quad \begin{aligned} \{\xi \mid \eta\}_x &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T(x, \xi) + \alpha_T(x, \eta) - \alpha_T(\xi, \eta) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(x, \xi, \eta)} \alpha_T(x, \xi) + \alpha_T(x, \eta) - \alpha_T(\xi, \eta) \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}(x, \xi, \eta)$ désigne l'ensemble fini des arbres-murs qui rencontrent les deux rayons $[x\xi]$ et $[x\eta]$. A nouveau cette formule permet de le définir artificiellement sur $\partial^2 I$ privé de sa diagonale. En changeant l'origine x , il se transforme suivant la règle (d'après 2.4.4 et 2.4.2),

$$(2.4.5) \quad \{\xi \mid \eta\}_x = \{\xi \mid \eta\}_y + \frac{1}{2}(N_\xi(x, y) + N_\eta(x, y)) .$$

D. Soit maintenant ξ, ξ', η, η' quatre points deux à deux distincts de ∂I . Leur *birapport combinatoire* est le nombre

$$(2.4.6) \quad \{\xi\xi'\eta\eta'\} = -\{\xi \mid \eta\}_x - \{\xi' \mid \eta'\}_x + \{\xi \mid \eta'\}_x + \{\xi' \mid \eta\}_x .$$

D'après 2.4.5, il est indépendant de l'origine x . Il est localement constant donc continu sur B^4 . Voici son interprétation géométrique. Tout d'abord il s'écrit

$$\{\xi\xi'\eta\eta'\} = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T(\xi, \eta) + \alpha_T(\xi', \eta') - \alpha_T(\xi, \eta') - \alpha_T(\xi', \eta) .$$

Soit $\mathcal{T}(\xi, \xi', \eta, \eta')$ l'ensemble fini des arbres-murs qui rencontrent les deux géodésiques $(\xi\xi')$ et $(\eta\eta')$. Les arbres-murs qui n'appartiennent pas à $\mathcal{T}(\xi, \xi', \eta, \eta')$ ont une contribution nulle dans la somme. En effet, si par exemple T ne coupe pas $(\xi\xi')$, alors

$$\alpha_T(\xi, \eta) - \alpha_T(\xi', \eta) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_T(\xi', \eta') - \alpha_T(\xi, \eta') = 0 .$$

Donc finalement, on a

$$\{\xi\xi'\eta\eta'\} = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\xi, \xi', \eta, \eta')} \alpha_T(\xi, \eta) + \alpha_T(\xi', \eta') - \alpha_T(\xi, \eta') - \alpha_T(\xi', \eta) .$$

E. Les isométries de I préservent évidemment le birapport combinatoire. La proposition suivante montre que ce sont les seules. Soit I et I' deux immeubles correspondant à deux couples (p, q) et (p', q') , et B, B' les G_δ -denses de ∂I et $\partial I'$ définis précédemment.

PROPOSITION 2.4.7. *Soit f un homéomorphisme de ∂I sur $\partial I'$, supposons que sur le G_δ -dense $B \cap f^{-1}(B')$ l'application f préserve le birapport combinatoire à une constante multiplicative près, alors $I = I'$ et f est l'extension à ∂I d'une isométrie de I .*

Nous réduisons cette proposition à une caractérisation plus géométrique des isométries de I (voir 2.4.9). C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 2.4.8 (Avec les hypothèses de 2.4.7). Soit m un mur de I , m_- et m_+ ses extrémités dans ∂I . Alors $f(m_-)$ et $f(m_+)$ sont les extrémités d'un mur de I' . En particulier $f(B) = B'$.

Preuve. Soit $T(m)$ l'arbre-mur attaché à m . Son bord sépare ∂I en q composantes connexes. Choisissons-en deux notées U et V . Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit ξ_n (resp. η_n) un point de $U \cap B \cap f^{-1}(B')$ (resp. $V \cap B \cap f^{-1}(B')$), vérifiant

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \xi_n &= \lim_{n \rightarrow -\infty} \eta_n = m_- \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = m_+ . \end{aligned}$$

Par la description géométrique du birapport, on a

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\xi_n \eta_n \eta_{-n} \xi_{-n}\} = 1 .$$

Notons $\xi'_n, \eta'_n, m'_-, m'_+$ les images par f des points ξ_n, η_n, m_-, m_+ . Puisque f est continue, les points ξ'_n, η'_n (resp. ξ'_{-n}, η'_{-n}) convergent vers m'_+ (resp. m'_-) lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant à nouveau la description géométrique du birapport, l'invariance du birapport – à une constante multiplicative près – et la relation (1), on voit que m'_+ et m'_- appartiennent au bord d'un arbre-mur. Ce sont donc les extrémités d'un même mur. \square

La proposition 2.4.7 se réduit désormais à la

PROPOSITION 2.4.9. Soit f un homéomorphisme de ∂I sur $\partial I'$ qui préserve les murs. Autrement dit, supposons que f et f^{-1} vérifient : quel que soit le mur m de I d'extrémités m_- et m_+ , il existe un mur m' de I' d'extrémités $f(m_-)$ et $f(m_+)$. Alors $I = I'$ et f est l'extension à ∂I d'une isométrie de I .

On divise la preuve en quelques lemmes. L'homéomorphisme f induit un bijection de l'ensemble des murs de I sur l'ensemble des murs de I' . On notera $f(m)$ le mur dont les extrémités sont les images de celles de m .

LEMME 2.4.10. Soit m un mur de I et $T(m)$ l'arbre-mur attaché à m , alors

$$f(\partial T(m)) = \partial T(f(m)) .$$

Preuve. Elle découle de l'observation suivante. Soit m_- et m_+ les extrémités de m . Alors un point ξ de ∂I appartient à $\partial T(m)$ si et seulement si (ξm_-) et (ξm_+) sont des murs. \square

LEMME 2.4.11. Soit m et n deux murs de I qui se rencontrent à angle droit. Alors les murs $f(m)$ et $f(n)$ se rencontrent à angle droit.

Preuve. Soit $m' = f(m)$ et $n' = f(n)$. Chacun des sous-ensembles $T(m)$ et $T(n)$ divisent I en q composantes connexes. Par suite $\partial T(m)$ (resp. $\partial T(n)$) divisent ∂I en q composantes connexes. Les extrémités de n (resp. m) se trouvent dans deux composantes distinctes de $\partial I - \partial T(m)$ (resp. $\partial I - \partial T(n)$). Puisque f est un homéomorphisme et grâce au lemme 2.4.10, cette propriété est également vérifiée par $n', m', \partial T(m'), \partial T(n')$. En particulier m' rencontre $T(n')$ à angle droit et n' rencontre $T(m')$ à angle droit. Puisque deux arbres-murs distincts se rencontrent en au plus un point, m' coupe n' à angle droit. \square

Un argument de connexité similaire au précédent donne

LEMME 2.4.12. *Soit m un mur de I , n_1, n_2, n_3 trois murs de I qui coupent m dans cet ordre à angle droit. Alors $f(n_1), f(n_2), f(n_3)$ coupent $f(m)$ dans cet ordre à angle droit.*

Fin de la preuve de 2.4.9. Le lemme 2.4.12 appliqué à f et f^{-1} montre que f s'étend en une isométrie du 1-squelette de I sur le 1-squelette de I' . Donc $I = I'$, de plus les isométries du 1-squelette de I sont les restrictions des isométries de I . \square

3 Dimension conforme du bord de I_{pq}

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2.a). Le paragraphe 3.2 est consacré à leurs preuves. On y montre aussi un résultat (proposition 3.2.1) qui sera utile au chapitre suivant pour établir la rigidité de Mostow. On commence en 3.1, par rappeler les notions de classe quasi-conforme et de dimension conforme (voir [P2], [GrP], [Bo1,2] pour plus de détails), et on construit une famille de métriques au bord de I dont on verra en 3.2 qu'elles réalisent la dimension conforme.

3.1 Classe quasi-conforme et dimension conforme.

A. Soit (E, d) un espace métrique. Un k -anneau, $k \geq 1$ de (E, d) est un couple (B_1, B_2) de deux boules concentriques dont les rayons satisfont :

$$r_2 = kr_1.$$

Deux métriques d et d' sur E sont *quasi-conformes* si leurs anneaux sont comparables, plus précisément s'il existe des fonctions φ et ψ de $[1, +\infty[$ dans lui-même telles que : pour tout k -anneau (B_1, B_2) de d (resp. d'), il

existe (B'_1, B'_2) un $\varphi(k)$ -anneau de d' , (resp. un $\psi(k)$ -anneau de d) vérifiant

$$B'_1 \subset B_1 \subset B_2 \subset B'_2 .$$

Clairement la relation “ d et d' sont quasi-conformes” est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de E . La *classe quasi-conforme* de (E, d) est la classe d'équivalence de d . On la notera $\mathcal{C}(E, d)$.

B. Soit à présent X un espace hyperbolique au sens de M. Gromov. Pour une origine x dans X , notons $(\cdot)_x$ le produit de Gromov au bord de X , basé en x (voir [GHa, chapitre 7], noter que le produit de Gromov combinatoire construit en 2.4 n'est autre que celui du bord de Γ). Dans [Gr1, § 7.2] (voir aussi [GHa, chapitre 7], [CDePa, chapitre 11]), M. Gromov montre l'existence d'une constante $a_0 > 1$ (qui ne dépend que de l'hyperbolicité de X) telle que pour tout $a \in]1, a_0]$, le bord de X possède une métrique d qui satisfait

$$(3.1.1) \quad \forall \xi, \xi' \in \partial X : C^{-1}a^{-(\xi|\xi')_x} \leq d(\xi, \xi') \leq Ca^{-(\xi|\xi')_x},$$

où C est une constante supérieure ou égale à 1, qui ne dépend que de d et de x . Une métrique qui possède la propriété 3.1.1 est appelée une *métrique visuelle de paramètre a* . La *classe quasi-conforme du bord de X* , notée $\mathcal{C}(\partial X)$, est la classe quasi-conforme d'une métrique visuelle de ∂X . C'est un invariant de quasi-isométrie de X (voir [GrP], [Bo1,2]).

3.1.2 REMARQUE ET NOTATION. Dans la catégorie des CAT(-1)-espaces, la constante a_0 optimale est égale à e (voir [Bo1, 1.5.3.a])). Puisque deux métriques visuelles de même paramètre sont Lipschitz-équivalentes (d'après 3.1.1), elles donnent les mêmes dimensions de Hausdorff aux sous-ensembles de ∂X . On notera $\text{Hdim } \partial X$ la dimension de Hausdorff du bord d'un CAT(-1)-espace X pour une métrique visuelle de paramètre e .

C. Soit à nouveau (E, d) un espace métrique. Sa *dimension conforme de Pansu* est le nombre réel

$$\text{Cdim}(E, d) = \inf \{ \text{Hdim } d' ; d' \in \mathcal{C}(E, d) \} .$$

Elle est minorée par la dimension topologique. Lorsque E est le bord d'un espace hyperbolique X , on la notera simplement $\text{Cdim } \partial X$, c'est un invariant numérique de quasi-isométrie de X .

Le lemme suivant dû à P. Pansu est central dans la théorie (voir [P1, 6.3 et 7.2]). Il indique que si un espace métrique (E, d) possède une structure produit dans un sens très faible, alors d réalise la dimension conforme et sa

mesure de Hausdorff est minimale. Auparavant rappelons qu'une métrique d sur E est dite *Alhfors-régulière* (A -régulière en abrégé) si sa mesure de Hausdorff m satisfait la propriété suivante : il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour toute boule B de rayon r de d , on ait

$$C^{-1}r^{\text{Hdim } d} \leq m(B) \leq Cr^{\text{Hdim } d} .$$

LEMME 3.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique, on suppose que d est A -régulière et que $\text{Hdim } d > 1$. On suppose aussi l'existence d'une famille de courbes \mathcal{F} de E , munie d'une mesure ν qui vérifie : il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour toute boule B de rayon r de d , on ait*

$$C^{-1}r^{\text{Hdim } d-1} \leq \nu\{\gamma \in \mathcal{F}/\gamma \cap B \neq \emptyset\} \leq Cr^{\text{Hdim } d-1} .$$

Alors : a) On a $\text{Hdim } d = \text{Cdim}(E, d)$.

- b) *La mesure de Hausdorff m de d est minimale au sens suivant. Soit d' une métrique A -régulière dans $\mathcal{C}(E, d)$ et m' sa mesure de Hausdorff. Si $\text{Hdim } d' = \text{Cdim}(E, d)$, alors m est absolument continue par rapport à m' .*

D. On appliquera ce lemme à la famille des bords des appartements de I qui contiennent une chambre fixée. Auparavant on exhibe une famille de métriques au bord de I dont on verra en 3.2 qu'elles réalisent la dimension conforme. Reprenons le produit de Gromov $\{|\cdot|\}_x$ défini en 2.4.

LEMME 3.1.4. *Il existe au bord de I une famille de métriques, notées δ_x , $x \in I$, appelées métriques combinatoires, contenues dans $\mathcal{C}(\partial I)$, qui possèdent la propriété suivante :*

$$(1) \quad \forall \xi, \xi' \in \partial I, \quad C^{-1}a^{-\{\xi|\xi'\}_x} \leq \delta_x(\xi, \xi') \leq Ca^{-\{\xi|\xi'\}_x} ,$$

où C est une constante qui ne dépend que de I et où a est égale à $\exp \tau(p, 2)$.

Preuve. Une métrique qui vérifie les inégalités (1) est une métrique visuelle du bord de Γ ; puisque Γ et I sont quasi-isométriques elle appartient à $\mathcal{C}(\partial I)$.

Soit $a = \exp \tau(p, 2)$. Pour $\xi \in \partial I$ et $r > 0$, considérons les sous-ensembles suivants de ∂I :

$$B_x(\xi, r) = \{\eta \in \partial I/a^{-\{\xi|\eta\}_x} \leq r\} .$$

Pour un chemin continu γ dans ∂I , on définit sa "longueur" $\ell_x(\gamma)$ comme la limite croissante

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left\{ \sum_i r_i \right\}$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements finis $\{B_x(\xi_i, r_i)\}$ de γ , avec $\xi_i \in \gamma$ et $r_i \leq r$. Puis on pose, pour $\xi, \xi' \in \partial I$,

$$\delta_x(\xi, \xi') = \inf \{ \ell_x(\gamma), \text{ où } \gamma \text{ est un chemin continu dans } \partial I \text{ reliant } \xi \text{ à } \xi' \} .$$

Vérifions que δ_x satisfait les inégalités (1). Soit ξ et ξ' deux points de ∂I , supposons d'abord qu'ils soient tous les deux contenus dans le bord d'un appartement A qui contient x . Soit ρ la rétraction sur A de centre une chambre contenant x . L'application $\partial\rho$ dilate le produit de Gromov combinatoire basé en x , donc en notant J et J' les deux composantes connexes de $\partial A - \{\xi, \xi'\}$, on a

$$\delta_x(\xi, \xi') = \min \{ \ell_x(J), \ell_x(J') \} .$$

Dans ce cas l'inégalité (1) découle désormais du choix de a , du théorème 7.7 et de la proposition 7.4 de [C] appliqués au groupe Γ_{p2} . Lorsque ξ et ξ' sont deux points quelconques de ∂I , on se ramène au cas précédent comme suit. Soit A un appartement dont le bord contient ξ et ξ' , et soit y la projection de x sur A . Soit aussi γ un chemin continu que relie ξ à ξ' et qui réalise $\delta_x(\xi, \xi')$. Par un non-sens abstrait on peut supposer que γ est contenu dans le voisinage suivant de ∂A :

$$T_x(\partial A) = \bigcup_{\eta \in \partial A} B_x(\eta, d) , \quad \text{où } d = \sup \{ a^{-\{\eta|\eta'\}_x} ; \eta, \eta' \in \partial A \} .$$

Maintenant il existe une constante D qui ne dépend que de I , telle que (avec les notations de 2.4),

$$\forall \eta, \eta' \in T_x(\partial A) , \quad \{ \eta | \eta' \}_y + n[xy] - D \leq \{ \eta | \eta' \}_x \leq \{ \eta | \eta' \}_y + n[xy] + D .$$

Les inégalités (1) en découlent facilement. □

3.2 Preuve des théorèmes 1.1 et 1.2.a). D'après la proposition 7.4 de [C] appliquée à Γ , et le corollaire 2.3.6, les métriques combinatoires δ_x sont A -régulières et de dimension de Hausdorff

$$(1) \quad \text{Hdim } \delta_x = \frac{\tau(p, q)}{\log a} = \frac{\tau(p, q)}{\tau(p, 2)} = 1 + \frac{\log(q - 1)}{\tau(p, 2)} .$$

Pour $q = 2$ le théorème 1.1 est trivialement vrai et le théorème 1.2.a) résulte (par exemple) de (1). Supposons désormais $q > 2$. Soit $x \in I$ et ρ la rétraction sur un appartement A de centre une chambre c contenant x . On vérifie les hypothèses du lemme 3.1.3 avec la métrique δ_x , la famille \mathcal{F} des bords des appartements qui contiennent c , et la probabilité ν sur

\mathcal{F} , obtenue en poussant la probabilité de Haar du groupe compact $\text{Fix}(c)$, grâce à l'action transitive de $\text{Fix}(c)$ sur \mathcal{F} (voir 2.3.3.a). Soit B une boule de δ_x de rayon r , et soit $\xi \in \partial A$ l'image de son centre par $\partial\rho$. Notons T_ξ l'arbre enraciné en x , image inverse par ρ du rayon $[x\xi]$. D'après la construction de δ_x , l'application $\partial\rho$ est contractante et elle est isométrique en restriction à chaque élément γ de \mathcal{F} . Par suite, on a

$$(2) \quad \begin{aligned} & \{\gamma \in \mathcal{F}/\gamma \cap \partial T_\xi \cap B \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \mathcal{F}/\gamma \cap B \neq \emptyset\} \\ & \text{et} \\ & \{\gamma \in \mathcal{F}/\gamma \cap B \neq \emptyset\} \subset \{\gamma \in \mathcal{F}/\gamma \cap \partial T_\xi \cap 2B \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

où $2B$ désigne la boule concentrique à B de rayon double. Soit φ_ξ l'application de \mathcal{F} sur ∂T_ξ , définie par

$$\varphi_\xi(\gamma) = \gamma \cap \partial T_\xi.$$

L'image de ν par φ_ξ est une probabilité $\text{Fix}(c)$ -invariante sur ∂T_ξ . Nous allons voir qu'elle possède la propriété suivante : il existe une constante $C \geq 1$, indépendante de ξ , telle que pour toute boule B de rayon r centrée sur ∂T_ξ , on ait

$$(3) \quad C^{-1}r^\beta \leq \varphi_{\xi*}\nu(B \cap \partial T_\xi) \leq Cr^\beta, \text{ avec } \beta = \text{Hdim}\delta_x - 1.$$

Les deux théorèmes découleront dès lors du lemme 3.1.3.a), des relations (1), (2), (3) et de la remarque 2.3.7. L'argument est le suivant. Notons z le sommet de Γ correspondant à la chambre c . Pour $\xi \in \partial A$, soit r_ξ un rayon géodésique de Γ reliant le sommet z à ξ . Avec les notations de 2.3, notons T_ξ^Γ le sous-ensemble suivant de Γ :

$$T_\xi^\Gamma = \rho_{z,A}^{-1}(r_\xi).$$

D'après 2.3.5.b), c'est un arbre homogène de valence q , enraciné en z , dont les rayons issus de z sont géodésiques dans Γ . De plus on a $\partial T_\xi^\Gamma = \partial T_\xi$. Poussons au bord de T_ξ la probabilité naturelle du bord d'un arbre homogène enraciné de valence q , soit μ_ξ la mesure ainsi obtenue. Les boules de δ_x centrées sur ∂T_ξ sont semblables aux ombres portées depuis z des boules de Γ centrées sur T_ξ^Γ (voir [GrP], [Bo1]). Par suite il existe une constante $C \geq 1$, indépendante de ξ , telle que pour toute boule B de rayon r de δ_x , centrée sur ∂T_ξ , on ait

$$C^{-1}r^\beta \leq \mu_\xi(B \cap T_\xi) \leq Cr^\beta,$$

avec $\beta = \log(q-1)/\log a = \text{Hdim } \delta_x - 1$. Les probabilités μ_ξ et $\varphi_{\xi^*}\nu$ sont toutes deux $\text{Fix}(c)$ -invariantes ; puisque ∂T_ξ est homogène sous $\text{Fix}(c)$, elles sont égales. \square

L'argument précédent et le lemme 3.1.3.b) démontrent également la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2.1. *Pour $q \geq 3$, la mesure de Hausdorff de δ_x est minimale.*

3.2.2 REMARQUE. Soit X un immeuble hyperbolique de dimension deux, comme en 2.3.7.b). Supposons que X possède une chambre c , telle que le groupe $\text{Fix}(c)$ agisse transitivement sur l'ensemble des appartements qui la contiennent. En appliquant les arguments de ce chapitre au produit de Gromov du bord de Γ_X et au groupe de Weyl W de X , on obtient une classe de métriques δ_x , $x \in X$, dont la mesure de Hausdorff est minimale, et qui vérifient

$$\text{Cdim } \partial X = \text{Hdim } \delta_x = \frac{\tau(\Gamma_X)}{\tau(W)} = 1 + \frac{\log(q-1)}{\tau(W)}.$$

4 Rigidité de Mostow

On adapte à notre situation un argument ergodique de D. Sullivan ([Su2, théorème 5]), qui permet de relier la proposition 3.2.1 à la proposition 2.4.7. La rigidité de Mostow en découlera. Une variante de cet argument donnera aussi le théorème 1.2.b). Il repose sur les mesures de Patterson-Sullivan combinatoires. Ce sont les mesures les plus fonctorielles dans la classe des mesures de Hausdorff des métriques combinatoires. Leur construction effectuée à l'origine par Patterson et Sullivan dans le cadre des groupes kleinien [Su1], puis généralisée par Coornaert [C] aux espaces hyperboliques de M. Gromov, est la suivante.

A. Soit z le centre d'une chambre c de I . Notons τ la dimension de Hausdorff des métriques δ_x et a leur paramètre (voir 3.1.4). La série (avec la notation de 2.4)

$$Z(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a^{-sn[z, \gamma z]},$$

est convergente si et seulement si s appartient à $] \tau, +\infty[$ (voir [C]). Par suite la mesure sur $I \cup \partial I$

$$\nu_z^s = \frac{1}{Z(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} a^{-sn[z, \gamma z]} \delta(\gamma z)$$

—où δ désigne la masse de Dirac— est une probabilité pour $s > \tau$. Faisons tendre s vers τ et soit ν_z une limite faible de ν_z^s . Puisque $Z(\tau) = +\infty$, le support de ν_z est contenu dans ∂I . D'après [C], ν_z appartient à la classe des mesures de Hausdorff des métriques δ_x . Donc son support est ∂I et elle ne charge pas le complémentaire de l'ensemble B défini en 2.5 (puisqu'il est réunion dénombrable de sous-ensembles de dimension de Hausdorff strictement inférieure à τ).

Soit maintenant $g \in \text{Isom}(I)$. Le point z étant le centre d'une chambre, son orbite sous Γ est globalement g -invariante. On en déduit

$$g^* \nu_z^s = \varphi_g^s \nu_z^s$$

avec

$$\forall x \in I : \varphi_g(x) = a^{n[z,x]-n[g^{-1}z,x]} .$$

La fonction φ_g s'étend en une fonction constante par morceaux sur $I \cup \partial I$ en posant pour $\xi \in B$ (voir 2.4),

$$\varphi_g(\xi) = a^{N_\xi(z,g^{-1}z)} .$$

Puisque ν_z ne charge pas le complémentaire de B , on obtient à la limite

$$(4.1) \quad g^* \nu_z = a^{\tau N(z,g^{-1}z)} \nu_z .$$

Pour $x \in I$ posons

$$\nu_x = a^{\tau N(z,x)} \nu_z .$$

Puisque $N_\xi(.,.)$ est un cocycle (voir 2.4.3) et par la relation 4.1, on a

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \forall x, y \in I : \nu_y &= a^{\tau N(x,y)} \nu_x \\ \forall g \in \text{Isom}(I) : g^* \nu_x &= a^{\tau N(x,g^{-1}x)} \nu_x = \nu_{g^{-1}x} . \end{aligned}$$

La famille $\{\nu_x, x \in I\}$ s'appelle une mesure de Patterson-Sullivan associée au cocycle N . D'après [Su1], les relations 4.2 déterminent complètement $\{\nu_x, x \in I\}$ à une constante près. On l'appellera *mesure combinatoire*.

B. Soit maintenant $\partial^2 I$ l'ensemble des couples de deux points distincts de ∂I . D'après les relations 4.2 et 2.5.5, la mesure sur $\partial^2 I$,

$$\mu(\xi, \eta) = a^{2\tau\{\xi|\eta\}_x} \nu_x(\xi) \times \nu_x(\eta)$$

est indépendante de x et est invariante par l'action diagonale de $\text{Isom}(I)$ sur $\partial^2 I$. Les deux propriétés suivantes de μ font le lien entre la proposition 3.2.1 et la proposition 2.4.7. La première se démontre comme dans [Su1],

le point essentiel est l'écriture de μ comme produit de deux mesures sur ∂I . La seconde copie les arguments de [Su2, théorème 5]. Ici le point clé est l'expression 2.4.6 du birapport combinatoire et la proposition 2.4.7.

PROPOSITION 4.3. *Soit G un réseau cocompact de I . L'action diagonale de G sur $(\partial^2 I, \mu)$ est ergodique.*

PROPOSITION 4.4. *Pour I et I' deux immeubles correspondants à deux couples (p, q) et (p', q') , notons μ et μ' les mesures respectivement sur $\partial^2 I$ et $\partial^2 I'$. Soit f un homéomorphisme de ∂I sur $\partial I'$. On suppose l'existence d'une constante $C > 0$ telle que*

$$(f \times f)^* \mu' = C\mu.$$

Alors $I = I'$ et f est l'extension au bord d'une isométrie de I .

C. Le théorème 1.3 découle désormais classiquement des propositions 3.2.1, 4.3 et 4.4 (voir [Su2, théorème 5]). Pour montrer le théorème 1.2.b), on prend au bord de I les métriques et le birapport combinatoires, et au bord de X les métriques visuelles de paramètre e (voir 3.1.2) et le birapport d'Otal (voir [O], [Bo3]). Puis on raisonne par l'absurde : si on avait $\text{Cdim } I_{pq} = \text{Hdim } \partial X$, alors la proposition 3.2.1, la proposition 4.3 et son analogue visuelle, la variante naturelle de 4.4 qui mixte mesure combinatoire et mesure visuelle, montreraient l'égalité -à une constante multiplicative près- du birapport combinatoire et du birapport d'Otal. Or le premier est à valeurs discrètes et le second est continu non constant. Puisque ∂I est connexe c'est absurde.

References

- [A] R.D. ANDERSON, A characterization of universal curve and a proof of its homogeneity, *Annals of Math.* 67 (1958), 313–324.
- [B] W. BALLMANN, Singular spaces of non-positive curvature, in “Sur les groupes hyperboliques, d’après Mikhael Gromov” (E. Ghys, P. de la Harpe, eds.), *Progress in Math.* 83, Birkhäuser (1990), 189–202.
- [BBr] W. BALLMANN, M. BRIN, Polygonal complexes and combinatorial group theory, *Geometriae Dedicata* 50 (1994), 165–191.
- [Ba] S. BARRE, Polyèdres finis de dimension 2 à courbure ≤ 0 et de rang 2, *Ann. Inst. Fourier* 45, 4 (1995), 1037–1059.
- [Be] N. BENAKLI, Polyèdres hyperboliques, passage du local au global, Thèse, Université Paris Sud (1992).

- [Bo1] M. BOURDON, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ -espace, *L'Enseignement Mathématique*, t. 41 (1995), 63–102.
- [Bo2] M. BOURDON, Au bord de certains polyèdres hyperboliques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 45, 1 (1995), 119–141.
- [Bo3] M. BOURDON, Sur le birapport au bord des $CAT(-1)$ -espaces, *Publ. Math. I.H.E.S.* 83 (1996), 95–104.
- [C] M. COORNAERT, Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov, *Pacific Journal of Math.* 159 (1993), 241–270.
- [CDePa] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS, Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de M. Gromov, *Lecture Notes in Math.* 1441 (1991).
- [D] M. DAVIS, Buildings are $CAT(0)$, Preprint Ohio State University (1994), to appear in *Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium on Geometry and Cohomology in Group Theory*, *Lecture Notes London Math. Society*.
- [FP1] W.J. FLOYD, S.P. PLOTNICK, Growth functions on Fuchsian groups and Euler characteristic, *Invent. Math.* 88 (1987), 1–29.
- [GHa] E. GHYS, P. DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, *Progress in Math.* 83, Birkhäuser, 1990.
- [Gr1] M. GROMOV, Hyperbolic groups, in “*Essays in group theory*” (S.M. Gersten, ed.), Springer, 1987.
- [Gr2] M. GROMOV, Asymptotic invariants for infinite groups, *London Math. Society, Lecture Note Series* 182 (1993).
- [GrP] M. GROMOV, P. PANSU, Rigidity of lattices: An introduction, in “*Geometric topology : Recent developments*” (P. de Bartolomeis, F. Tricerri, eds.), *Lecture Notes in Math.* 1504 (1991), PAGE NOS.
- [H] A. HAEFLIGER, Complexes of groups and orbiedra, in “*Group theory from geometrical viewpoint*” (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjousky, eds.), World Scientific, Singapore (1991), 504–540.
- [Ham] U. HAMENSTADT, Entropy-rigidity of locally symmetric spaces of negative curvature, *Annals of Mathematics* 131 (1990), 35–51.
- [M] J. MEIER, When is the graph product of hyperbolic groups hyperbolic?, *Geom. Dedicata.* 61 (1996), 29–41.
- [O] J.P. OTAL, Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative, *Revista Matematica Iberoamericana* 8 (1992), 441–456.
- [P1] P. PANSU, Métriques de Carnot-Caratheodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un, *Annals of Math.* 129 (1989), 1–60.
- [P2] P. PANSU, Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica* 14 (1990), 177–212.

- [R] M. RONAN, Lectures on Buildings, Academic Press, San Diego (1988).
- [S] C. SERIES, Geometrical methods of symbolic coding, in “Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces” (T. Bedford, M. Keane, C. Series, eds.), Oxford University Press (1991), 125–151.
- [Su1] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. I.H.E.S. 50 (1979), 171–202.
- [Su2] D. SULLIVAN, Discrete conformal groups and measurable dynamics, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society 6 (1982).
- [Sw] J. SWIATKOWSKI, On regular groups of automorphisms of trivalent polygonal complexes with non-positive curvature, preprint (1996).

Marc Bourdon
Université Henri Poincaré Nancy I
Département Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre Les Nancy Cedex
France

Submitted: December 1995
Revised version: July 1996