

## Écoulements cellulaires de Stokes dans un canal plan obstrué par une file de cylindres

Françoise Moreau, Mustapha Hellou et Mohamed El Yazidi

**Abstract.** In this paper, we analyse the structure of two-dimensional Stokes flow generated by a pressure gradient in a channel. This channel contains a row of identical cylindrical obstacles. We show the existence of a limiting value for the separation distance between the cylinders for which regions of recirculations are found. When the width of the channel is reduced, the limiting distance between the obstacles is also reduced. We observe the process by which the cells are formed and how they increase in number on reducing the separation distance between the cylinders.

**Résumé.** Nous analysons la structure des écoulements de Stokes engendrés par un gradient de pression dans un canal plan, obstrué par une file de cylindres identiques. Nous montrons qu'il existe une valeur de la distance entre les cylindres, seuil d'apparition des cellules de recirculation, distance d'autant plus petite que la largeur du canal est plus petite. Cette distance diminuant, nous observons alors le processus de formation et de multiplication des cellules.

**Keywords.** Écoulement de Stokes (Stokes flow), file de cylindres (row of cylinders), cellules de recirculation (Stokes eddies).

### 1. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à l'écoulement de Stokes engendré par un gradient de pression dans un canal plan à parois parallèles, obstrué par une file de cylindres identiques, placés dans l'axe du canal et perpendiculairement à celui-ci. Nous mettons en évidence l'existence de cellules de recirculation pour certaines valeurs des paramètres géométriques.

Nous avons analysé, dans des études précédentes (Bourot et Moreau (1987) [1], Hellou et Coutanceau (1992) [2], Moreau et Bourot (1993) [3]) l'évolution de la structure cellulaire des écoulements de Stokes engendrés par la translation ou la rotation d'un ou de deux cylindres, dans un canal rectangulaire plan, illimité ou limité par des parois transversales. Une synthèse bibliographique sur les travaux réalisés dans le domaine des écoulements cellulaires est présentée dans les deux derniers articles.

Les écoulements de Stokes entre deux obstacles identiques fixes sont connus notamment par les travaux de Davis et al. (1976) [4] et de Taneda (1979) [6], lorsque

la direction de l'écoulement externe est axiale et par les travaux de Dorrepaal et O'Neill (1979) [5], lorsque cette direction est transversale. Pour deux sphères identiques, Davis et al. ont montré que les phénomènes de séparation apparaissent quand la distance entre les centres des deux obstacles est inférieure à 3,57 fois le rayon des sphères. Ils ont analysé en détail la formation de cellules lorsque l'écart entre les sphères diminue. Observant expérimentalement l'écoulement axial autour de deux sphères et de deux cylindres identiques, Taneda a mis en évidence l'existence des cellules pour certains écarts entre ces obstacles. Pour les sphères, ses résultats sont en accord avec ceux de Davis et al.

Le cas plus complexe d'assemblages périodiques de cylindres a retenu également l'intérêt des chercheurs du fait de son aptitude à représenter des situations pratiques. Ainsi, Sangani et Acrivos (1982) [7] ont étudié numériquement l'écoulement de Stokes autour d'assemblages d'une infinité de cylindres en mailles carrée ou hexagonale, dans le but de déterminer la résistance subie par chacun des cylindres en fonction de la concentration en obstacles dans le milieu. Larson et Higdon (1987) [8] ont montré que ce type d'écoulement présente une structure cellulaire pour certaines valeurs des paramètres géométriques. Maâlouf (1987) [9] a complété ces études en prenant diverses géométries d'assemblages périodiques et en particulier un assemblage en quinconce. Barrère et al. (1987) [10] ont observé des recirculations entre les cylindres d'un treillis d'obstacles disposés selon un motif rectangulaire et ont montré que l'existence des cellules était liée aux facteurs de forme de la maille.

En ce qui concerne le problème qui nous intéresse plus particulièrement ici, à savoir l'écoulement autour d'une file de cylindres dans l'espace confiné par deux parois parallèles, il semble qu'il n'ait été abordé que par Maâlouf. Mais à la différence de notre étude, le mouvement est engendré par des parois animées d'un mouvement de translation; il a observé l'existence de cellules pour certaines distances entre les cylindres et une position de paroi donnée. Toutefois, il n'a considéré que des cas où le rapport de la largeur du canal au diamètre du cylindre est grand (supérieur ou égal à 2).

Plus récemment, Georgiou et al. (1991) [11] ont disposé des cylindres le long de deux files décalées l'une par rapport à l'autre, les parois étant fixes, le fluide Newtonien ou non Newtonien. Ils se sont intéressés au calcul du gradient de pression en fonction du débit, pour différents fluides et ont visualisé et tracé la structure de l'écoulement pour différents nombres de Reynolds allant jusqu'à 40. La géométrie étudiée ne fait pas apparaître de cellules en régime de Stokes.

Les écoulements de Stokes autour d'assemblages d'obstacles sont intéressants à connaître, car les phénomènes de séparation et la formation des cellules de recirculation pour les faibles nombres de Reynolds sont des processus qui peuvent apparaître dans de multiples applications: transfert de chaleur et de masse, chromatographie en phase liquide, lubrification hydrodynamique, biomécanique, filtration ...

Signalons en outre que ces dernières années, des chercheurs simulent les écoule-

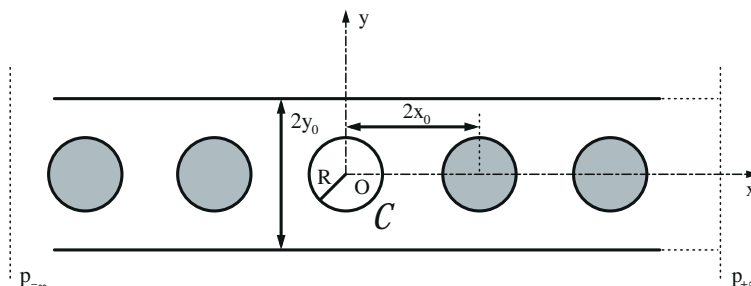


Figure 1.  
Schéma du domaine d'écoulement

ments dans les milieux poreux par les écoulements lents autour d'assemblages de billes, de cylindres, pour la mise au point de techniques de mesure du champ des vitesses (Saleh et al. 1992) [12], pour étudier l'infiltration de polluants (Hellou et El Yazidi 1993) [13] ou pour analyser les processus de transport chimique (Rashidi et Milanovitch 1994) [14].

Dans notre étude, on calcule la différence de pression qui engendre un écoulement de Stokes dans un canal obstrué par une file de cylindres pour différentes valeurs de la distance entre les cylindres et différentes largeurs du canal. Nous donnons les courbes de la différence de pression établies respectivement en fonction de la distance entre les centres des cylindres pour une largeur de canal donnée et en fonction de la largeur du canal pour une distance donnée entre les centres des cylindres. Nous observons l'évolution de la structure cellulaire en fonction de la variation des deux paramètres précédemment cités. Nous montrons qu'il existe une distance entre les cylindres au-delà de laquelle les cellules disparaissent et que cette distance dépend de la position des parois du canal.

Dans la plupart des cas, nous obtenons des résultats numériques précis, grâce à la méthode des moindres carrés, facile à mettre en oeuvre, dont les auteurs [1], [2], [3] et [9] ont montré la fiabilité et les grandes possibilités dans des géométries également complexes.

## 2. Présentation du modèle et formulation mathématique

Une file de cylindres identiques, de section circulaire, de longueur infinie, régulièrement espacés, obstrue l'espace entre deux plans parallèles illimités; les cylindres sont à égale distance des plans parallèles (Fig. 1).

Le mouvement du fluide est créé par la différence de pression  $p_{-\infty} - p_{+\infty}$ . Deux grandeurs essentielles permettent de caractériser la géométrie étudiée:

- la distance  $2x_0$  entre les centres de deux cylindres successifs;
- la largeur du canal  $2y_0$ .

Soit  $\Psi(x, y)$  la fonction de courant; l'écoulement étant antisymétrique en  $x$

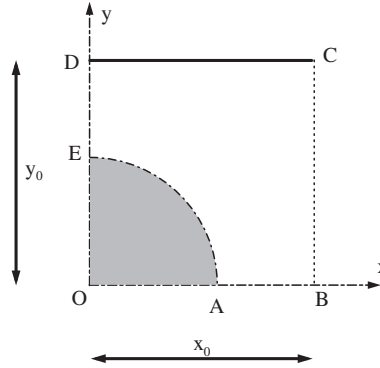


Figure 2.  
Domaine d'étude

( $\Psi(x, y) = \Psi(-x, y)$ ) et symétrique en  $y$  ( $\Psi(x, y) = -\Psi(x, -y)$ ), on sélectionne un domaine d'étude, défini sur la Fig. 2, circonscrit par les segments  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  et l'arc de cercle  $EA$ . Désignons par  $C$  le cylindre de référence, de rayon  $R$ , et par  $V_0$  la vitesse moyenne sur le segment  $BC$ .

Nous considérons  $R$  et  $V_0$  comme respectivement longueur et vitesse de référence, ce qui nous conduit à écrire les paramètres de forme de la maille d'étude :

$$X_0 = x_0/R \text{ et } Y_0 = y_0/R.$$

Introduisons  $p_0$  la pression sur le segment  $DE$  et  $p_1$  celle sur le segment  $BC$ . La fonction de courant des écoulements envisagés, satisfait l'équation biharmonique de Stokes:

$$\Delta\Delta\Psi = 0.$$

En tenant compte des conditions de symétrie et des conditions d'adhérence au cylindre de référence, la résolution de l'équation de Stokes, par la méthode de séparation des variables, conduit à l'expression adimensionnelle suivante de  $\Psi$  en coordonnées polaires:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta) = & [A_1(\frac{1}{2r} + r \ln(r) - \frac{r}{2}) + B_1(r^{-1} - 2r + r^3)] \sin \theta + \\ & \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} [A_n(\frac{1-n}{n}r^{-n} + r^{2-n} - \frac{1}{n}r^n) + B_n(\frac{1}{n}r^{-n} + r^{n+2} - \frac{n+1}{n}r^n)] \sin n\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  sont réels.

Dans la pratique, la fonction de courant est tronquée à un certain nombre de termes  $NP$ , choisi en fonction de la précision.

### 3. Présentation des conditions de frontière et de la technique de résolution

Décrivons les conditions de frontière relatives au domaine d'étude, Fig. 2.

Soient  $u$  et  $v$  les composantes de la vitesse parallèle et normale à l'axe du canal,  $p$  et  $\zeta$  la pression et la vorticité en un point. Le mouvement est engendré par la différence de pression  $\Delta p = p_0 - p_1$ .

Pour déterminer les  $2NP$  coefficients de la série (1), nous écrivons les conditions d'adhérence aux parois solides et les conditions de raccordement sur les lignes fluides de la frontière  $ABCDE$  de la Fig. 2, tenant compte de la symétrie de l'écoulement.

Raccordement et symétrie de l'écoulement:	Adhérence aux parois:		
sur AB	$\Psi = \zeta = 0$	sur CD	$u = 0$
			$v = 0$
sur BC	$v = 0$	sur EA	$u = 0$
	$p = p_1$		$v = 0$
sur DE	$v = 0$		
	$p = p_0$		

Ces conditions se réduisent à:

$$\begin{array}{ll}
 \text{sur BC} & v = 0 \\
 & p = p_1 \\
 \text{sur CD} & u = 0 \\
 & v = 0
 \end{array} \quad (2)$$

Les autres conditions sont vérifiées analytiquement par la série (1). Dans nos calculs, on considère la pression  $p_0$  nulle. La pression  $p_1$  est recherch e de manière à satisfaire  $\Psi = Y_0$  sur le segment  $CD$ .

Nous minimisons, par la technique des moindres carrés, en un nombre suffisant de points de la frontière, la somme des écarts quadratiques entre les valeurs de la vitesse et de la pression déduites de la série (1) et les valeurs données par (2). Le nombre de points choisi est de l'ordre de  $2.5 ND$ , où  $ND = 2NP$ .

Pour des valeurs de  $Y_0$  sélectionnées entre 1.05 et 2., nous avons fait croître  $X_0$  à partir de 1.05 ; nous avons ainsi étudié la variation de  $\Delta p$  pour  $Y_0$  fixé et  $X_0$  évoluant de 1.05 jusqu'à la valeur de  $X_0$  correspondant à la disparition des cellules et pour  $X_0$  fixé et  $Y_0$  variant entre 1.05 et 2. Nous avons alors choisi les trois valeurs de  $Y_0$  égales à 1.30, 1.60 et 1.80, permettant de rendre compte de l'évolution de la structure cellulaire dans les meilleures conditions de précision possibles.

La précision obtenue se révèle meilleure que  $10^{-4}$  dans la plupart des cas étudiés en prenant  $NP = 30$  et en travaillant en double précision. Pour une large gamme

de valeurs de  $X_0$ , entre 1.20 et 1.60,  $Y_0$  étant supérieur à 1.10, elle est même comprise entre  $10^{-7}$  et  $10^{-10}$ .

Pour tracer en détail les cellules, une grande précision est nécessaire, les fonctions de courant dans les cellules successives pouvant atteindre des valeurs de  $10^{-6}$  pour les petites valeurs de  $X_0$ . La précision se révèle donc insuffisante quand les cylindres sont très rapprochés ( $X_0 = 1.05$ ) et nous ne pouvons tracer que la première cellule de ce cas qui en comporte trois.

#### 4. Résultats et commentaires

Les résultats concernent principalement l'étude de l'évolution de la différence de pression  $\Delta p = p_0 - p_1$  en fonction d'un paramètre de forme, l'autre étant fixé, l'analyse de la structure cellulaire des écoulements en fonction de  $X_0$  pour une valeur de  $Y_0$  donnée et la comparaison des structures cellulaires pour 3 valeurs de  $Y_0$  données, ce qui nous amène à discuter de l'influence de la largeur du canal et de la distance entre les cylindres sur l'existence des cellules.

##### 4.1 Détermination de la différence de pression génératrice du mouvement

Nous avons évalué avec précision la différence de pression  $\Delta p$  en fonction de  $X_0$  pour trois demi-largeurs du canal, à savoir  $Y_0 = 1.30, 1.60$  et  $1.80$ ,  $X_0$  variant entre 1.05 et 1.60. La Fig. 3 et le Tableau 1. mettent en évidence le domaine de valeurs prises par  $\Delta p$ . Ce tableau illustre bien la faible croissance de  $\Delta p$  quand  $X_0$  croît et l'influence importante de la largeur du canal.

$x_0/R$	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.40	1.45	1.50	1.60
$y_0/R = 1.30$	273.623	275.227	276.584	277.734	278.711	279.545	280.867	281.386	281.824	282.499
$y_0/R = 1.60$	57.7980	58.6804	59.4679	60.1704	60.7970	61.3562	62.3014	62.6987	63.0514	63.6367
$y_0/R = 1.80$	30.6057	31.2348	31.8091	32.3331	32.8107	33.2459	34.0036	34.3322	34.6303	35.1423

Tableau 1. Valeurs de  $\frac{\Delta p}{\mu V_0/R}$  en fonction de la demi-distance entre les cylindres, pour trois demi-largeurs du canal.

Par ailleurs, sur la Fig. 4, nous avons tracé l'évolution de  $\Delta p/X_0$  en fonction de  $Y_0$  pour deux valeurs de la distance entre les cylindres, soit  $X_0 = 1.10$  et  $1.40$ . La précision est bonne pour une large gamme de valeurs de  $Y_0$  (à partir de 1.10). La différence de pression augmente très rapidement, lorsque  $Y_0$  décroît. La variation de la perte de pression est similaire à celle d'un écoulement plan de Poiseuille dans un canal à parois parallèles de la largeur de l'intervalle laissé libre entre le cylindre et la paroi du canal. On constate que l'écart entre notre courbe et celle de Poiseuille est très important pour les petites valeurs de  $Y_0$  et que cet écart augmente avec  $X_0$ . Le Tableau 2. donne les valeurs de  $\Delta p$  pour quelques demi-largeurs du canal,  $X_0$  étant fixé à 1.10 et à 1.40.

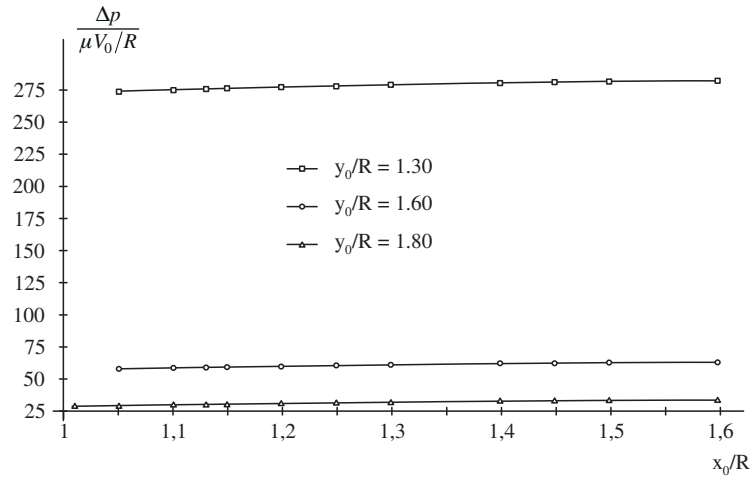


Figure 3  
Différence de pression en fonction de la demi-distance entre les cylindres, pour trois demi-largeurs du canal.

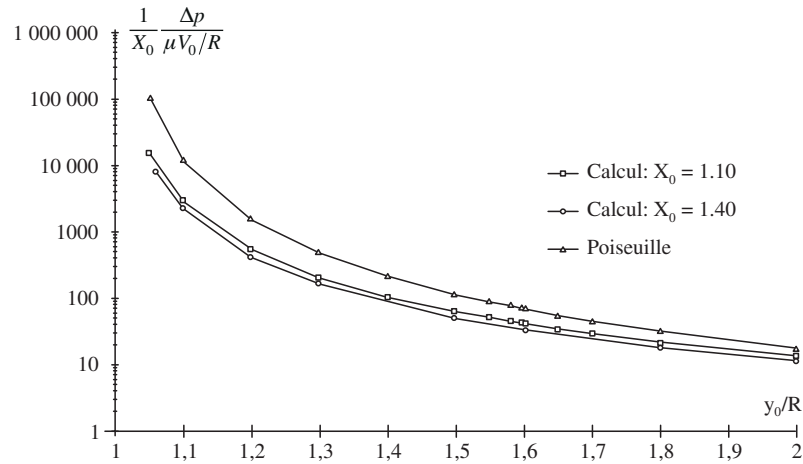
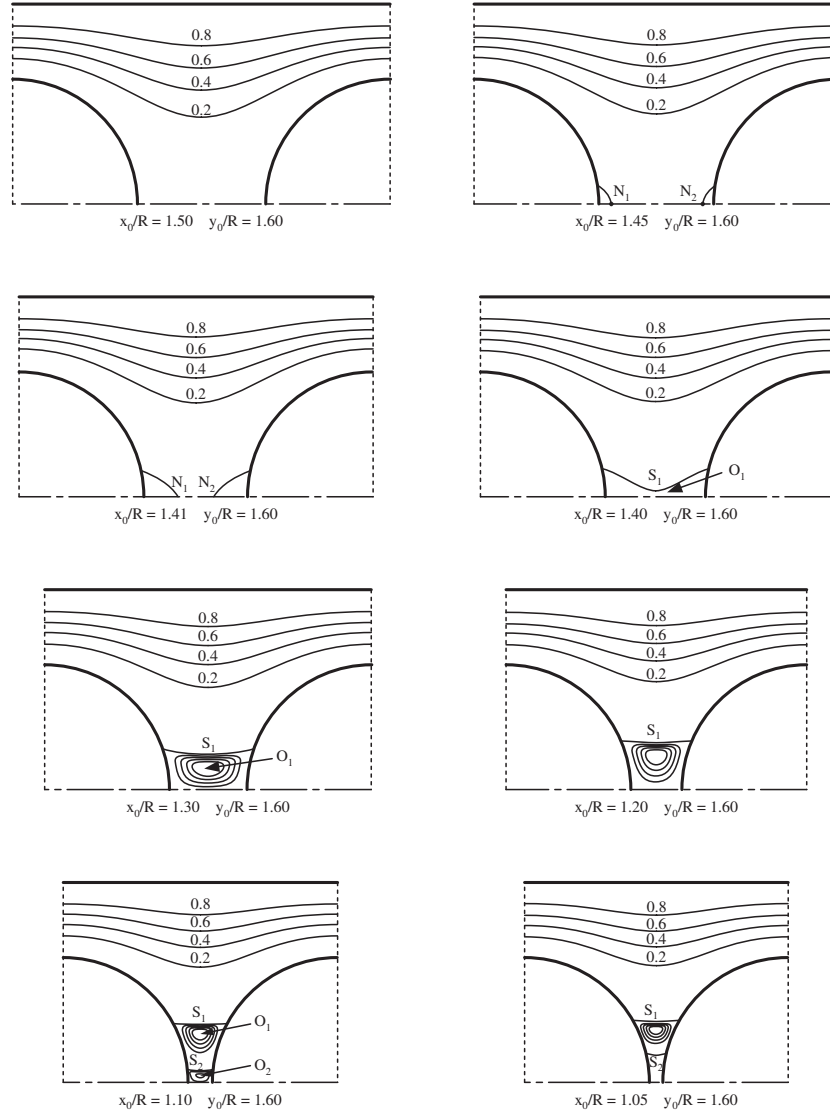


Figure 4  
Différence de pression en fonction de la demi-largeur du canal pour  $x_0/R = 1.10$  et  $x_0/R = 1.40$ . Comparaison avec l'écoulement plan de Poiseuille.



$y_0/R$	1.10	1.20	1.30	1.50	1.60	1.80	2.00
$x_0/R = 1.10$	3562.47	696.674	275.227	87.7360	58.6804	31.2348	19.1924
$x_0/R = 1.40$	3570.29	703.280	280.867	91.9106	62.3014	34.0036	21.3538

Tableau 2. Valeurs de  $\frac{\Delta p}{\mu V_0/R}$  en fonction de la demi-largeur du canal, pour deux valeurs de la demi-distance entre les cylindres.



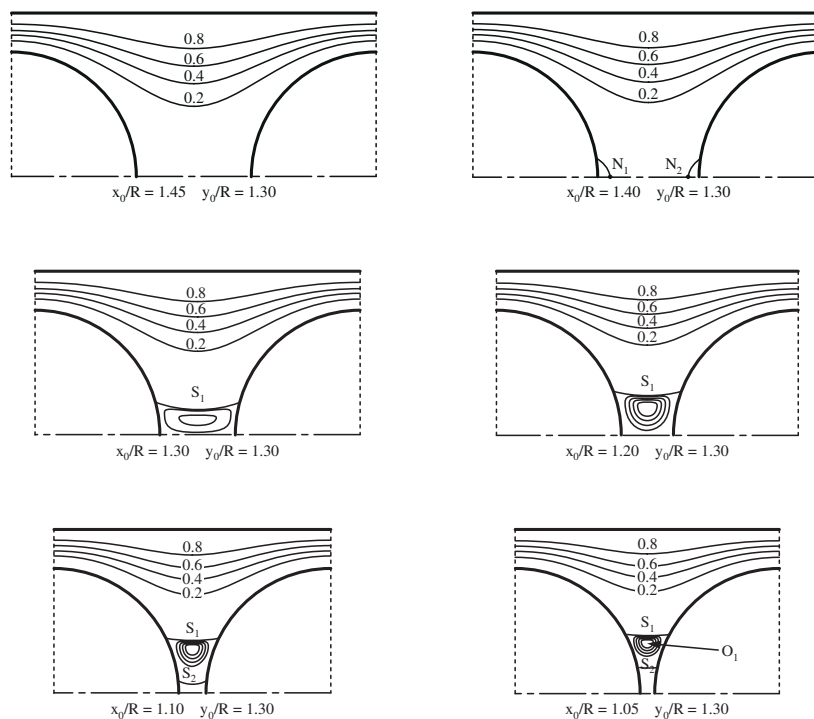


Figure 5

Réseaux des lignes de courant pour une file de cylindres.

$y_0/R = 1.60$  (a, b, c, d, e, f, g, h)

$y_0/R = 1.30$  (i, j, k, l, m, n)

Dans l'écoulement principal, les valeurs des lignes de courant sont divisées par la valeur de la fonction de courant à la paroi; dans les cellules, les valeurs des lignes de courant sont divisées par la fonction de courant au point de vitesse nulle de la cellule concernée.

(b)  $x_{N_1}/R = 1.083$ ;

(c)  $x_{N_1}/R = 1.260$ ;

(d)  $y_{S_1}/R = 0.038$ ,  $y_{O_1}/R = 0.022$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.12 \cdot 10^{-4}$ ;

(e)  $y_{S_1}/R = 0.275$ ,  $y_{O_1}/R = 0.168$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0023$ ;

(f)  $y_{S_1}/R = 0.372$ ,  $y_{O_1}/R = 0.271$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0019$ ;

(g)  $y_{S_1}/R = 0.458$ ,  $y_{O_1}/R = 0.387$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0010$ ,  $y_{S_2}/R = 0.088$ ,  $y_{O_2}/R = 0.054$ ,  $\Psi(O_2)/V_0R = 0.19 \cdot 10^{-5}$ ;

(h)  $y_{S_1}/R = 0.499$ ,  $y_{O_1}/R = 0.440$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.74 \cdot 10^{-3}$ ,  $y_{S_2}/R = 0.247$ ,  $y_{O_2}/R = 0.212$ ,  $\Psi(O_2)/V_0R = 0.11 \cdot 10^{-4}$ ;

(j)  $x_{N_1}/R = 1.039$ ;

(k)  $y_{S_1}/R = 0.189$ ,  $y_{O_1}/R = 0.112$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0014$ ;

(l)  $y_{S_1}/R = 0.314$ ,  $y_{O_1}/R = 0.219$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0021$ ;

(m)  $y_{S_1}/R = 0.412$ ,  $y_{O_1}/R = 0.347$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0011$ ,  $y_{S_2}/R = 0.063$ ,  $y_{O_2}/R = 0.038$ ,  $\Psi(O_2)/V_0R = 0.14 \cdot 10^{-5}$ ;

(n)  $y_{S_1}/R = 0.459$ ,  $y_{O_1}/R = 0.406$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.81 \cdot 10^{-3}$ ,  $y_{S_2}/R = 0.210$ ,  $y_{O_2}/R = 0.176$ ,  $\Psi(O_2)/V_0R = 0.66 \cdot 10^{-5}$ .

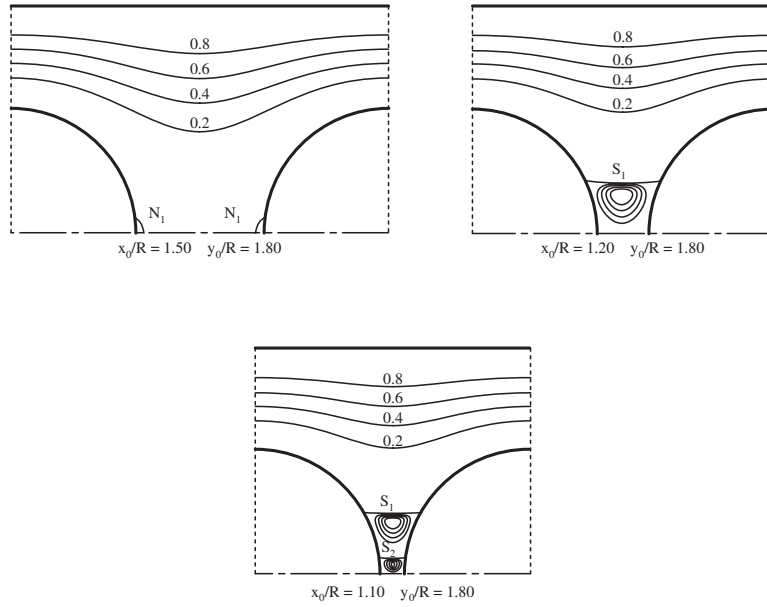


Figure 6

Réseaux des lignes de courant pour une file de cylindres :  $y_0/R = 1.80$  (a)  $x_{N_1}/R = 1.057$ ;  
 (b)  $y_{S_1}/R = 0.402$ ,  $y_{O_1}/R = 0.299$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.0018$ ;  
 (c)  $y_{S_1}/R = 0.482$ ,  $y_{O_1}/R = 0.408$ ,  $\Psi(O_1)/V_0R = -0.97 \cdot 10^{-3}$ ,  $y_{S_2}/R = 0.129$ ,  $y_{O_2}/R = 0.077$ ,  
 $\Psi(O_2)/V_0R = 0.89 \cdot 10^{-5}$ .

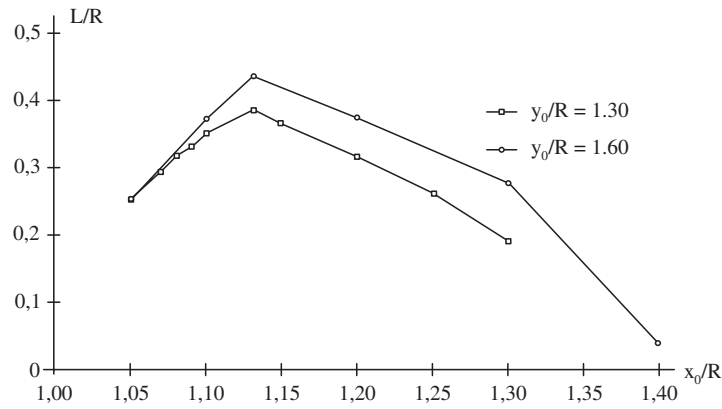


Figure 7

Dimension de la première cellule en fonction de  $x_0/R$  pour  $y_0/R = 1.30$  et  $y_0/R = 1.60$ .

#### 4.2. Structure de l'écoulement

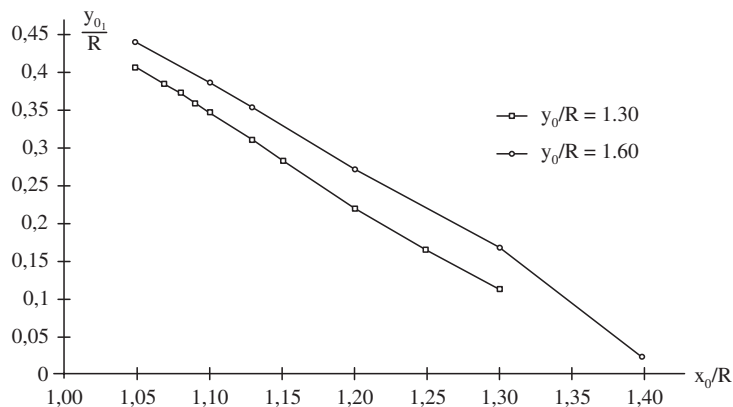


Figure 8  
Position du point de vitesse nulle de la première cellule en fonction de  $x_0/R$  pour  $y_0/R = 1.30$  et  $y_0/R = 1.60$ .

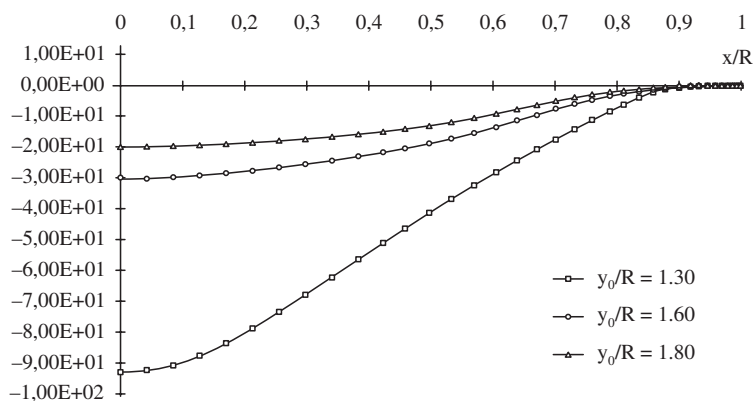


Figure 9  
Comparaison de l'évolution de la vorticité sur le cylindre pour les trois valeurs de la demi-largeur du canal,  $x_0/R$  étant fixé à 1.10.

Les réseaux des lignes de courant (Figures 5 et 6) concernent les valeurs  $Y_0 = 1.30$ , 1.60 et 1.80 pour des valeurs de  $X_0$  décroissantes choisies pour illustrer la variation de la structure de l'écoulement en fonction de la distance entre les cylindres.

Cette structure comporte, en général, deux domaines:

- dans le premier domaine, les lignes de courant suivent la direction moyenne de l'écoulement; cet écoulement est noté écoulement principal.
- dans le deuxième domaine, dit cellulaire, les lignes de courant sont fermées.

Les lignes de courant de l'écoulement principal, dont les valeurs sont divisées par la valeur de la fonction de courant à la paroi, sont tracées à intervalles en  $\Psi$

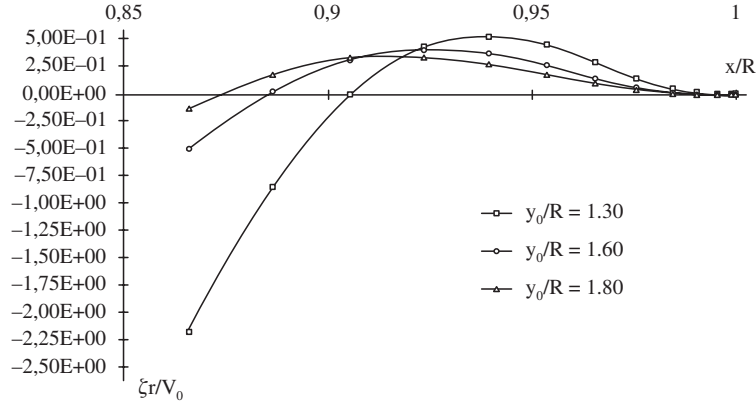


Figure 10  
Agrandissement d'une partie de la courbe de vorticité sur le cylindre

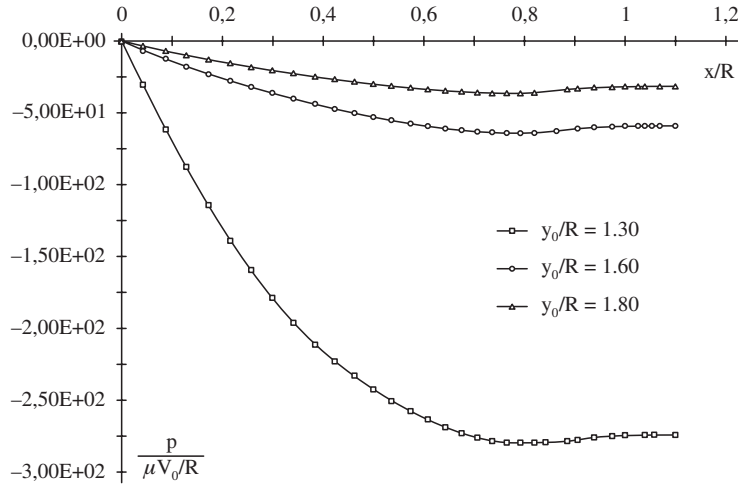


Figure 11  
Pression sur le cylindre et sur l'axe du canal pour les trois valeurs de la demi-largeur du canal,  $x_0/R$  étant fixé à 1.10.

constants, ce qui permet de se rendre compte de la nature du champ de vitesse.

La structure globale de l'écoulement principal n'est pas perturbée par la variation de  $X_0$  ou de  $Y_0$ . En revanche, on observe une évolution notable dans le domaine cellulaire.

Ainsi,    $Y_0$  constant, la diminution de  $X_0$  change la structure de l'écoulement. Par exemple, pour  $Y_0 = 1.60$  et  $X_0 = 1.50$  (Fig. 5a), l'écoulement ne présente pas de cellules. Au fur et à mesure que  $X_0$  diminue, il y a apparition de cellules.

Les dessins de la Fig. 5(b,c,d,e,f) illustrent les étapes successives qui conduisent à la formation d'une cellule centrée sur la ligne  $x/R = X_0$ , par fusion des points de vitesse nulle  $N_1$  et  $N_2$  en un point  $O_1$  ; puis, il y a création de deux cellules dont les centres sont situés sur la ligne  $x/R = X_0$  (Fig. 5g) et de trois (Fig. 5h). Ces étapes successives s'effectuent selon un processus similaire à celui décrit par Hellou et Coutanceau [2].

Pour  $Y_0 = 1.30$ , l'évolution est la même, mais se fait à des  $X_0$  plus petits. Autrement dit, si on compare des dessins de même  $X_0$ , mais de  $Y_0$  différent, on s'aperçoit que la taille de la cellule ou du domaine cellulaire croît avec  $Y_0$ ; par exemple, pour  $X_0 = 1.20$ , cette évolution de la taille est illustrée par les Fig. 5f, 5l et 6b.

Globalement, pour chacune des valeurs de  $Y_0$  étudiées, il existe une valeur de  $X_0$  en deçà de laquelle il y a apparition de cellules. Cette valeur est d'autant plus grande que  $Y_0$  est plus élevé. Ainsi, pour  $X_0 = 1.45$ , les phénomènes de recirculation n'existent pas pour  $Y_0 = 1.30$  (Fig. 5i), alors qu'ils sont observables pour  $Y_0 = 1.60$  (Fig. 5b) et  $Y_0 = 1.80$ . Pour  $X_0 = 1.50$ , il n'y a pas de cellules dans le cas  $Y_0 = 1.60$  (Fig. 5a), mais on remarque des cellules de coin quand  $Y_0 = 1.80$  (Fig. 6a). Cependant, des études complémentaires ont montré la présence de cellules pour toute valeur de  $X_0$  en dessous de 1.30, quelle que soit la largeur du canal.

Lorsque la paroi est rejetée à l'infini, Taneda [6], a montré expérimentalement qu'il n'y a aucun phénomène de séparation pour  $X_0 = 2.50$ , que des cellules de coin apparaissent pour  $X_0 = 2$ . Ces dernières se transforment en une cellule unique, centrée sur la ligne  $x/R = X_0$  pour  $X_0 = 1.50$ .

Maâlouf [9] a également visualisé numériquement et expérimentalement des cellules de recirculation dans le cas d'une file de cylindres en milieu confiné par des parois mobiles, notant que l'apparition des cellules est liée à la distance entre les cylindres et à la largeur du canal. Il n'a cependant pas donné de seuil d'existence des cellules. Les deux dessins présentés dans son mémoire sont réalisés pour  $X_0 = 1.11$ ,  $Y_0 = 2$ . et  $X_0 = 1.55$ ,  $Y_0 = 4$ .; il trouve respectivement 2 et 1 cellules.

### 4.3 Autres résultats

La Fig. 7 montre l'évolution de la taille  $L$  de la première cellule, mesurée sur le segment  $BC$ , en fonction de  $X_0$ , pour deux positions de la paroi du canal. La dimension maximale de la première cellule est limitée à  $0.45R$  dans le cas  $Y_0 = 1.60$  et à  $0.40R$  dans le cas  $Y_0 = 1.30$ . Globalement, la première cellule est plus petite dans le cas 1.30 que dans le cas 1.60. Le maximum de  $L$  correspond à l'existence d'une cellule unique centrée sur  $x/R = X_0$ .

Pour compléter l'étude des caractéristiques des cellules, nous avons tracé sur la Fig. 8 le lieu du point de vitesse nulle de la première cellule.

Sur la surface du cylindre, la vorticit e repr esente  egalement la contrainte de cisaillement sur cette surface (Fig. 9). Le changement de signe de  $\zeta$  (lieu visible

sur l'agrandissement Fig. 10) correspond au passage du domaine de l'écoulement principal au domaine cellulaire. Les points où  $\zeta = 0$  correspondent aux points de raccordement des lignes de séparation au cylindre. Sur ces figures, on constate que le maximum de vorticité (dans chaque domaine) est d'autant plus élevé que  $Y_0$  est faible.

Les courbes de variation de la pression sur le cylindre et l'axe du canal (Fig. 11) montrent que la perte de pression se fait principalement sur le cylindre.

## 5. Conclusion

Nous avons analysé, dans les conditions de Stokes, la structure de l'écoulement engendré par une différence de pression dans un canal plan, obstrué par une file de cylindres identiques. En considérant trois valeurs de la demi-largeur du canal,  $Y_0 = 1.30, 1.60$  et  $1.80$ , nous avons montré qu'il existe une valeur de la demi-distance  $X_0$  entre les cylindres à partir de laquelle des phénomènes de recirculation affectent la fraction de domaine entre les cylindres. Ce seuil d'existence des cellules dépend de la largeur du canal: pour les trois valeurs de  $Y_0$ , les cellules apparaissent respectivement pour  $X_0$  de l'ordre de  $1.41, 1.47$  et  $1.51$ . Elles apparaissent alors à  $X_0$  d'autant plus petit que  $Y_0$  est plus petit.

Nous avons étudié le processus de formation des cellules, observant que les cellules de coin coalescent pour donner une cellule unique, centrée sur la ligne  $x/R = X_0$  – pour  $X_0 = 1.20$ , il y a une cellule unique centrée –, puis il y a formation de deux cellules vers  $X_0 = 1.10$  et de trois vers  $X_0 = 1.05$ . Les résultats présentés montrent que le domaine cellulaire est d'autant plus grand que la distance entre les cylindres est petite pour une largeur de canal donnée.

Nous insistons sur la très bonne précision des résultats obtenus notamment pour  $X_0$  supérieur à  $1.05$ . Nous avons ainsi donné les valeurs précises de la différence de pression  $p_0 - p_1$  qui permet d'engendré un tel écoulement en régime de Stokes. Ces valeurs pourraient servir de référence ou pourraient constituer des valeurs initiales pour des calculs numériques plus sophistiqués.

## Bibliographie

- [1] J. M. Bourot et F. Moreau, Sur l'utilisation de la série cellulaire pour le calcul d'écoulements plans de Stokes en canal indéfini : application au cas d'un cylindre circulaire en translation. *Mech. Research Comm.* **14**(3) (1987), 187–197.
- [2] M. Hellou et M. Coutanceau, Cellular Stokes flow induced by rotation of a cylinder in a closed channel. *J. Fluid Mech.* **236** (1992), 557–577.
- [3] F. Moreau et J. M. Bourot, Ecoulements cellulaires de Stokes produits en canal plan illimité par la rotation de deux cylindres. *Z. angew. Math. Phys.* **4** (1993), 777–798.
- [4] A. M. J. Davis, M. E. O'Neill, J. M. Dorrepaal et K. B. Ranger, Separation from the surface of two equal spheres in Stokes flow. *J. Fluid Mech.* **77** (1976), 625–644.
- [5] J. M. Dorrepaal et M. E. O'Neill, The existence of free eddies in a streaming Stokes flow.

- Q.Jl.Mech. appl. Math.* **32** (1979), 95–107.
- [6] S. Taneda, Visualization of separating Stokes flows. *J. phys. Soc. Japan* **46**(6) (1979), 1935–1942 .
- [7] A. S. Sangani et A. Acrivos, Slow flow past periodic arrays of cylinders with application to heat transfer. *Int. J. Multiphase Flow* **8**(3) (1982), 193–206.
- [8] R. E. Larson et J. J. L. Higdon, Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part 2. Transverse flow. *J. Fluid Mech.* **178** (1987), 119–136.
- [9] A. Maâlouf, Etude numérique et expérimentale de l'écoulement plan autour et au travers d'un cylindre, faibles nombres de Reynolds ; modélisation d'un milieu poreux par des treillis de cylindres. Doctorat es Sci. Phys., Poitiers, France 1987.
- [10] J. Barrère, O. Coulaud et J. P. Caltagirone, Ecoulements dans des milieux poreux constitués de treillis de cylindres. 8ème Congrès National de Mécanique, Nantes, France, tome **2**, 6–7 1987.
- [11] G. Georgiou, S. Momani, M. J. Crochet et K. Walters, Newtonian and non-Newtonian flow in a channel obstructed by an antisymmetric array of cylinders. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **40** (1991), 231–260.
- [12] S. Saleh, J. F. Thovert et P. M. Adler, Measurement of two-dimensional velocity fields in porous media by particle image displacement velocimetry. *Experiments in Fluids* **12** (1992), 210–212.
- [13] M. Hellou et M. El Yazidi, Visualisation du déplacement de polluants liquides dans un milieu poreux. *First International Congress on Environmental Geotechnics*, Edmonton, Canada, 261–266 (1994).
- [14] M. Rashidi et F. Milanovitch, 3D imaging of chemical transport in porous media. *First International Particle Technology Forum*, Denver, USA, part II, 517–522 (1994).

Françoise Moreau, Mustapha Hellou et Mohamed El Yazidi  
Laboratoire de Géomécanique, Thermique et Matériaux  
Institut National des Sciences Appliquées  
20 avenue des Buttes de Coësmes  
35043 Rennes - France

(Received: July 16, 1996; revised: December 18 1996 and April 22, 1997)