Christian Rüede

Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten

Kurzfassung

Es wird ein Konzept zur Diskussion gestellt, mit dessen Hilfe das bei Begriffen und Regeln stillschweigend „Mitgemeinte" erfasst werden kann. Dabei fließt die Wittgensteinsche Auffassung der Begriffsbedeutung als Begriffsgebrauch ein sowie die empirische Methodik der Expertiseforschung. Die Umsetzung dieses Konzepts macht den Hauptteil des Artikels aus und wird am Beispiel dargelegt, wie Experten und Novizen Bruchtermgleichungen nach dem Vorgehen beim Lösen sortieren. Es konnte gezeigt werden, dass bestimmte Bruchtermgleichungen bei den Experten unterschiedliche Vorstellungen hervorrufen: was die einen als Reduktion auffassen, behandeln die anderen als Strukturierung, als Kürzen oder als Anwendung eines Standardverfahrens. Mit anderen Worten: was mitgemeint ist, wird durch die Summe *aller* Expertenauffassungen bestimmt. Im Vergleich mit den Novizen strukturieren Experten lösungsorientierter und schauen weiter voraus: was die Experten von den Novizen trennt, ist ihre Expertise im flexiblen Rechnen.

Abstract

This article introduces a concept that will help to make explicit those elements which are often tacitly „assumed" in certain rules and terms. The concept refers both to Ludwig Wittgenstein's model of meaning and use of conceptual terms, as well as to methods of empirical research in the expert/novice paradigm. Putting those concepts into practice is the main focus of the research presented in this article. I analyzed examples of how experts and novices sort fraction equations into different categories as they solve them. My research shows that experts categorize certain fraction equations differently from each other: what some experts see as a reduction, others classify as structuring, reducing or applying a standardized method. In other word, the implicit meaning in these terms is revealed only in the sum of all the experts' opinions. Compared to novices, experts tend to work more directly towards possible solutions, and tend to look further ahead. What separated experts from novices is their expertise in "flexible calculation".

1 Einleitung

Für mich als Lehrer war im Mathematikunterricht das Formulieren von (mathematischen) Regeln – egal ob von exakten Rechenregeln oder „strategischen Faustregeln" – stets suspekt. Jene Lernenden, welche den Regeln schon folgten, brauchten sie nicht mehr zu wissen und jenen, welche regelwidrig handelten, war mit der Formulierung der Regeln selten geholfen. Rechenregeln wie etwa $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ vergaß ich selbst immer wieder. Ich hatte ihre Anwendung bei konkreten Termen irgendwie verinnerlicht und nicht die Formel memoriert. Wenn ich die Formel an die Tafel schrieb, leitete ich sie eigentlich im selben Moment wieder her. Bei „strategischen Faustregeln", wie beispielsweise beim Wissen um eine geeignete Umformung einer gegebenen Gleichung, marterte ich mich mit einer angemessenen Formulierung. Kaum hatte ich es gewagt, eine Faustregel an der Tafel zu notieren, kamen mir Gleichungen in den Sinn, wo die soeben formulierte Faustregel wohl anwendbar, doch völlig unangemessen ist. Darüber schwieg ich geflissentlich.

Das Regelhafte nimmt in dieser Arbeit eine zentrale Stellung ein, denn das Verwenden von Begriffen wird als regelgeleitet (also *normativ*) aufgefasst. Zudem wird das angemessene Verwenden von Begriffen gleichgesetzt mit dem Können, die Begriffe korrekt zu gebrauchen – das ist eine *Praxis*. Weil die Regeln durch diese Praxis konstituiert werden und nicht umgekehrt, liegen sie *implizit* vor. Also kann das Verwenden von Begriffen als *implizit normative Praxis* aufgefasst werden, wie sie in der Philosophie von Brandom (2000) ausformuliert, in der Soziologie der Mathematik etwa von Heintz (2000) unterstützt wird und in der Mathematikdidaktik beispielsweise den Arbeiten von Beck & Jungwirth (1999), Krummheuer (1983), Prediger (2004), Ruf & Gallin (1998) und Sfard (2000) – zum Teil stillschweigend – unterliegt. Es gibt verschiedene Gründe für eine solche Wahl der Hintergrundtheorie. Der für mich entscheidende sei kurz angeführt: Als Mathematiklehrperson wie auch als Mathematikdidaktiker muss man mathematische Denkweisen beherrschen *und* diese Denkweisen identifizieren, charakterisieren und auf Relevanz für den Mathematikunterricht untersuchen. Kurz: man nimmt an der mathematischen Praxis teil und reflektiert darüber. Zur Erfüllung dieser Aufgabe ist mathematisches Können notwendig, aber nicht hinreichend. Man muss dieses mathematische Können – soweit möglich – auch explizieren, auf Wichtigkeit und Bedeutsamkeit für den Mathematikunterricht untersuchen und durch Angabe von Gründen für die Lernenden einsichtig machen können. Die Lehrenden haben daher eine Doppelrolle inne. In der ersten Rolle denken sie mathematisch. In der zweiten Rolle identifizieren und beurteilen sie mathematisches Denken und explizieren die erste Rolle. Eine Praxis explizieren kann man aber nur dann, wenn man selbst an der Praxis teilnimmt. Das ist gemeint, wenn man mathematisches Denken als implizit normative Praxis behandelt und die Reflexion über das mathematische Denken als Prozess des Explizitmachens des implizit Normativen versteht.

Im theoretischen Teil der vorgelegten Arbeit wird aus der Sicht dieser Hintergrundtheorie ein Blick auf das Unausgesprochene geworfen, welches das mathematische Arbeiten begleitet. Wer beispielsweise bei einer Gleichung wie

$$\frac{4x^2-4}{x+4}+x(x^2-1)=0$$

vorschlägt, als erstes die Gleichung durch x^2-1 zu dividieren, meint Vieles mit, was (vorerst) unausgesprochen bleibt. Mitgemeint ist zum Beispiel eine entsprechende Strukturierung der Gleichung, das Wissen, wie eine solche Operation durchgeführt wird, eine Vorstellung davon, was diese Division bewirkt, wie auch Gründe, warum die Gleichung nicht direkt mit $x+4$ multipliziert wird. Obwohl es unmöglich ist, all das, was mit dem gemachten Vorschlag in Beziehung steht, zu explizieren, wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass solch (vorerst) Implizites es ist, welches zum geäußerten Vorschlag führte und welches mitgemeint ist. Meines Erachtens spielt das Unausgesprochene auch bei alltäglichen Unterrichtssituationen eine Rolle, zum Beispiel bei einer Aussage wie „Das ist eine Bruchtermgleichung". Je nachdem welche Bezüge Lehrende und Lernende mit dieser Aussage implizit in Verbindung bringen, fassen sie diese Aussage anders auf.

Solche Bezüge werden in dieser Arbeit mit Brandom als *Inferenzen* bezeichnet. Als Folge ist das Implizite von inferentieller Struktur. Welche Inferenzen als angemessen behandelt werden, ist durch die mathematische Praxis bestimmt. So erhalten die Inferenzen einen implizit normativen Charakter.

Weil es die mathematische Praxis und nicht Theorie ist, welche die Angemessenheit von Inferenzen regelt, muss das Handeln von Experten studiert werden, um Auskunft über diese Inferenzen zu erhalten. Im Hauptteil dieses Artikels wird vorgestellt, wie dies beim Thema Bruchtermgleichungen vollzogen werden kann. Die Entscheidung für dieses Thema ist nicht inhaltlich begründet, sondern war durch die Rahmenbedingungen bestimmt: Die mit mir zusammenarbeitenden Lehrpersonen hatten während der Erhebung der empirischen Daten gemäß Lehrplan gerade Bruchterme und Bruchtermgleichungen zu unterrichten. Im Nachhinein erwies sich diese Themenwahl als Glücksfall. Denn es konnte auf Arbeiten zum *flexiblen Rechnen* (Rathgeb-Schnierer, 2006), *structure sense* (Hoch & Dreyfus, 2005) und *symbol sense*[1] (Arcavi, 1994) zurückgegriffen werden, um den Unterschied zwischen Experten und Novizen mit aktuellen Überlegungen und Betrachtungen der Mathematikdidaktik in Verbindung zu bringen. Ein Hauptergebnis der hier vorgestellten empirischen Studie nämlich ist, dass das Implizite höchst relevant ist zur Erlangung mathematischer Expertise und dass sich dieses Implizite als Flexibilität (structure sense bzw. symbol sense) beim Umgang mit Bruchtermgleichungen äußert.

Daraus soll aber auf keinen Fall das Lernziel abgeleitet werden, alle Schüler und Schülerinnen seien zu einer solchen Expertise beim Umgang mit Bruchtermgleichungen hinzuführen. Der Vergleich von Experten und Novizen wie auch das Thema „Bruchtermgleichungen" dienen nur der exemplarischen Illustration der Wichtigkeit des Impliziten. Flexibilität, d.h. der geschulte Blick für algebraische Strukturen und der Sinn für das Symbolische, ist ein themenübergreifender Anspruch. Arcavi formuliert das so: „We begin by proposing that symbol sense is at the heart of what it means to be competent in algebra and the teaching of algebra should be geared towards it" (Arcavi, 1994, 32). Auch wenn Arcavi an konkreten Beispielen aufzeigt, was unter symbol sense zu verstehen ist und wie dieser Wahrnehmungssinn in seinen Beispielen sichtbar wird, unterteilt Arcavi das Curriculum nicht in Themen, wo ein symbol sense gefördert werden soll und andere Themen, die sich dazu nicht eignen. Vielmehr argumentiert er dafür, dass die Unterrichtskultur einer Lehrperson darüber entscheidet, ob die Lernenden symbol sense entwickeln oder nicht:

> This example is far from providing an answer to our question about how experts develop symbol sense. However, it provides some insights about what may be involved to support and encourage its development. In my view, this example illustrates that developing the habit of sense making may strongly related to the classroom culture that supports or suppresses it and is not merely an issue of „innate mathematical ability". (Arcavi, 2005, 45)

[1] In dieser Arbeit werden „structure sense" und „symbol sense" als unübersetzte Fachbegriffe benutzt und wie deutschsprachige Begriffe behandelt.

2 Festlegungen

2.1 Normen als Regelhaftigkeiten

Im Folgenden orientiere ich mich am Inferentialismus, wie er von Brandom (2000) in seiner „Expressiven Vernunft" ausgearbeitet wurde. Schon an anderer Stelle diente die inferentielle Semantik von Brandom als epistemologischer Hintergrund, etwa bei der (Aus-)Bildung statistischer Begriffe (Hußmann & Schacht, 2009). Inwiefern sich ein solcher Inferentialismus auch für die Beschreibung syntaktischer Umformungen (von Bruchtermgleichungen) eignet, ist noch ungeklärt. Die vorgelegte Arbeit ist Ausdruck der Vermutung, dass ein Blick auf syntaktische Umformungen aus der Warte des Brandomschen Inferentialismus durchaus fruchtbar ist. Doch eine vollumfängliche Klärung dieser Fragestellung liegt außerhalb des Artikels.
Die Bedeutung einer Aussage zu erfassen, soll im Beherrschen ihres *inferentiellen* Gebrauchs bestehen. Allgemein ist dies ein Wissen, wie die Aussage mit anderen Aussagen in Beziehung steht. Nach Brandom muss man dazu insbesondere wissen, was einen zu einer bestimmten Aussage *berechtigt*, auf welche *Folgen* man sich damit festlegt und welche anderen Aussagen mit ihr unverträglich sind. Als Beispiel sei die folgende Aussage p betrachtet:

> Um die Gleichung $\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{x}{x+1}+2\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{2x}{x-2}$ zu lösen, streicht man mit Vorteil als erstes auf beiden Seiten $\frac{2x}{x-2}$ weg.

Eine Berechtigung für die Aussage p ist typischerweise eine mathematisch angemessene Beschreibung davon, wie man zu p gelangt und unter welcher Perspektive p als zweckmäßig erscheint. Das kann zum Beispiel ein Hinweis auf die Äquivalenz von $2\cdot\frac{x}{x-2}$ und $\frac{2x}{x-2}$ sein, zusammen mit einer Begründung, warum es umständlicher ist, zuerst gleichnamig zu machen. Auch der Verweis auf eine ähnliche Rechnung in einem anderen Fall oder die Referenz auf die eigene mathematische Kompetenz (oder die eines anderen) kann als Berechtigung dienen. Wer nun p äußert, legt sich auf Folgen fest. In der Regel sind das mathematisch angemessene Konsequenzen wie etwa, dass $x_1=1$ und $x_2=0$ die Lösungen sind, dass man künftig in ähnlichen Fällen nicht zuerst das Produkt ganz links in der Gleichung ausmultiplizieren soll oder dass ein vorgängiges Wegmultiplizieren der Nenner weniger elegant wäre.

Was nun angemessen ist, das heißt, was als Berechtigung und was als Folge anerkannt wird, ist Sache aller am Diskurs Beteiligten. Man wird als einer behandelt, der zu bestimmten Aussagen berechtigt und verpflichtet ist. Die unterliegenden Regelhaftigkeiten,

> die darauf verweisen, wie Ausdrücke *richtig* (*correct*) verwendet werden, unter welchen Umständen es *angemessen* (*appropriate*) ist, unterschiedliche Sprechakte auszuführen, und was die *angemessenen* Folgen solcher Akte sind, (Brandom 2000, 15)

werden in dieser Arbeit als *Normen* bezeichnet. Sie sind von sozialer Natur, weil alle am Diskurs Beteiligten zur Beurteilung von Berechtigungen und Folgen beitragen. In der Mathematik regeln Normen nicht nur, was korrekt und nicht korrekt ist, sondern etwa auch wie beim Lösen einer Bruchtermgleichung vorgegangen werden soll, was ein schöner Lösungsweg ist, wie ein Bruchterm mit Vorteil zu strukturieren ist oder welche Lösungswege als ähnlich gelten.

Allgemein kann eine Inferenz als Übergang von einer Aussage auf eine andere (also als Konditional) ausgedrückt werden. Durch Konstrukte wie „Berechtigung" und „Folge" modelliert Brandom den normativen Druck, den das Äußern solcher Aussagen erzeugt: Indem man etwas sagt, legt man sich auf Folgen fest (und wird auf Folgen festgelegt), die wiederum Einfluss darauf haben, wozu man in Zukunft berechtigt ist.

2.2 Implizite Normen als praktische Richtigkeiten

2.2.1 Das Implizite fundiert das Explizite – und nicht umgekehrt

Viele Arten des praktischen Umgangs sind durch implizite Normen geregelt. So macht zum Beispiel jede Lehrperson im Unterricht die Erfahrung, dass die Anwendung einer Regel[2] gelernt werden muss – und nicht durch die Regel selbst gegeben ist. Als erstes Beispiel mag die Regel $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ dienen. Die meisten Lernenden der Sek I und II wenden diese Regel korrekt auf einen Ausdruck wie $(x+y)(z+w)$ an. Schon mehr Probleme bereiten Terme wie $(1+x)(1+x)$ oder $((a+b)+(a+b)^2)(a+b)$. Hier ist im Allgemeinen nicht allen Lernenden unmittelbar klar, wie die Regel anzuwenden ist. Noch schwieriger wird es, wenn die Anwendung der Regel keine einfache Substitution ist wie beim Term $(ac+ad-b)(c-a)$. Offenbar bestimmt nicht die Regel ihre Anwendung, sondern das, was mit ihr gemeint ist. „'Wie die Formel gemeint wird, das bestimmt, welche Übergänge zu machen sind'. Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist?" (Wittgenstein 1994, 118) – Ein solches Kriterium darf nicht wieder als Regel formuliert werden, weil sonst ein unendlicher Regress droht. Als Folge ist ein Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist, etwa „die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen" (Wittgenstein 1994, 118). Mit *impliziten* Normen sind genau solche Arten und Weisen des praktischen Umgangs gemeint. Diese Argumentationslinie ist in der Literatur als Wittgensteinsches Regressargument bekannt:

> Regeln wenden sich nicht selbst an; sie entscheiden über die Richtigkeit des Handelns nur im Kontext von Praktiken des Unterscheidens zwischen richtigen und unrichtigen Anwendungen der Regeln. Fasst man diese praktischen Richtigkeiten der Anwendung selbst wiederum als regelgeleitet auf, dann begibt man sich in einen Regress. (Brandom 2000, 59)

Nur die Existenz impliziter Normen, das heißt „praktischer Richtigkeiten der Anwendung" vermag diesen Regress aufzulösen. Implizite Normen sind die Konsequenz davon, dass die Anwendung einer Formel nicht durch die Formel selbst bestimmt ist, sondern durch die Erfahrung in der Praxis gegeben ist.

---

[2] Mit Regel ist (ab jetzt) eine explizite Norm gemeint

2.2.2 Das Implizite ist stillschweigend mitgemeint

Auch wenn Mathematik betreiben als implizit normative Praxis aufgefasst wird, ist damit nicht behauptet, dass die impliziten Normen nicht expliziert werden können. Es wird nur behauptet, dass nie alles expliziert werden kann. Wer beispielsweise ein „Gefühl“ für das Lösen von Bruchtermgleichungen hat, kann einiges davon explizieren durch Angabe von Gründen, Motiven, Vorstellungen, Strategien etc., doch ein vollständiges Explizitmachen dieses „Gefühls“ gelingt nicht wegen des obigen Regressarguments. In diesem Abschnitt wird an zwei Beispielen dargelegt, wie sich dieses Argument im Bild der inferentiellen Gliederung von Begriffen äußert.

Als erstes wird nochmals in Erinnerung gerufen, dass mit einer Aussage p Inferenzen verbunden sind. Diese Inferenzen (insbesondere Berechtigungen und Folgen) sind in der Aussage selbst nicht expliziert. Sie sind stillschweigend mitgemeint und bilden die „Brille, *mit* der wir sehen, die wir aber selbst nicht sehen“ (Neuweg, 2004, 39). Das stillschweigend Mitgemeinte, also das Implizite, ist gemäß Brandoms Inferentialismus nicht unstrukturiert, sondern inferentiell gegliedert und umfasst die Inferenzen zu und von der Aussage p. Weil die Anzahl dieser Inferenzen nicht endlich ist (zum Beispiel impliziert jede Folge weitere Folgen), können nie alle expliziert werden. Die Inferenzen, die expliziert werden, bilden somit nur einen kleinen Teil der stillschweigend mitgemeinten. Neuweg (2004) spricht in diesem Zusammenhang von „tacit knowing“.

Diese prinzipielle Endlichkeit des Explizierens zeigt sich auch beim zweiten Beispiel: Es ist nur zum Teil möglich, die impliziten Normen, denen man beim Lösen von Bruchtermgleichungen folgt, mit Regeln zu beschreiben. Als Beispiel mag die Gleichung

$$\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x^2+2x}=1$$

dienen. Bei der Frage nach dem Lösungsvorgehen sind sich mathematisch versierte Personen einig. Sie werden mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner multiplizieren und die resultierende Gleichung nach x auflösen. Die fachlichen Normen, die hier im Hintergrund wirken, lassen sich aber nicht so einfach explizieren. Eine Wenn-dann-Formulierung, wie zum Beispiel „Wenn die Unbekannte im Nenner vorkommt, dann ist die Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner zu multiplizieren“, ist unvollständig. Denn schon bei einer Gleichung wie

$$\frac{4x+8}{3x+6}+\frac{6x-12}{3x-6}+x=0$$

ist diese Regel zwar anwendbar, doch eher unangemessen. Hier kürzen die mathematisch Versierten zuerst die beiden Brüche und lösen die resultierende lineare Gleichung nach x auf. Unter den Fachpersonen herrscht Einigkeit darüber, wie solche Bruchtermgleichungen zu lösen sind. Diese impliziten Normen, denen die Mathematikgilde beim Lösen von solchen Gleichungen folgt, sind aber nicht als Satz von endlich vielen Regeln verbalisierbar, denn es gibt unbeschränkt viele Gleichungen. Entsprechend lässt sich auch kein einheitliches Klassifikationssystem für Lösungsmethoden aufstellen, wie in Threlfall (2002) beispielsweise für das Addieren und Subtrahieren von Zahlen aufgezeigt wird.

2.2.3 Implizite Normen mathematischen Handelns

Es zeichnet die Mathematik als Wissenschaft aus, dass eine zentrale Norm, nämlich die nach der Frage der Korrektheit von Aussagen, in einer solchen Form expliziert werden kann, dass sie sogar (prinzipiell) maschinell überprüfbar wird. Die heutige mathematische Theorie kann vollständig formalisiert werden, das heißt, mathematische Definitionen, Regeln und Theoreme können in einem formalen Kalkül ausgedrückt werden. Ein solcher Kalkül dient als Referenz und sichert die eindeutige Überprüfung dessen, was korrekt bzw. nicht korrekt ist. Ein Resultat der Rekursionstheorie ist, dass diese Überprüfung auf Korrektheit (prinzipiell) maschinell durchführbar ist – man spricht von „rekursiver Entscheidbarkeit".

Doch die Korrektheitsnorm spielt in der Mathematik keine handlungsleitende Rolle, sie gehört eher zum Selbstverständlichen. Viel wichtiger ist zu wissen, welche Regel wann anzuwenden ist. Das liegt aber außerhalb des rekursiv Entscheidbaren. Die entsprechenden impliziten Normen geben Aufschluss darüber, *wie* in der Mathematik vorzugehen ist. Sie besagen beispielsweise, welche Umformung beim Lösen von Gleichungen wann angebracht ist. Meines Erachtens heißt Mathematik Lernen nichts anderes, als diesen impliziten Normen folgen zu lernen. Mit den explizierten Sachverhalten ist bloß das Inhaltsverzeichnis des Curriculums gegeben – die impliziten Normen bilden seinen eigentlichen Inhalt. Als Konsequenz muss den Lernenden die Gelegenheit gegeben werden, vielfältigste Erfahrungen zu machen um Bezüge zwischen den Einzelfällen herstellen und so ein tragfähiges inferentielles Netz aufspannen zu können.

Weitere implizite Normen regeln zum Beispiel die Frage, was als schönes Theorem (Heintz, 2000) oder was als interessante Problemstellung gilt, wann eine Definition oder Strukturierung zweckmäßig ist oder was als langweilige Rechnerei gilt. Bei den Bruchtermgleichungen regeln die impliziten Normen nebst der (explizierbaren) Korrektheit etwa auch die Frage, welche Strategie im Einzelfall geeignet ist und welche nicht, wie ein Term auch noch strukturiert und was als analoges Vorgehen aufgefasst werden kann. Dabei ist zu beachten, dass solche impliziten Normen nicht vom Himmel fallen. Im Gegenteil. Sie spiegeln all die Erfahrung, Routine und Intuition derjeniger Personen, die in irgendeiner Art und Weise Mathematik betreiben oder betrieben haben. Mithilfe des Brandomschen Inferentialismus lässt sich dieser Zoo der impliziten Normen strukturieren, indem expliziert wird, was getan wird. So werden die unterliegenden Inferenzen sichtbar und daher strukturierbar. Das hat eine zumindest partielle Entmystifizierung des Impliziten zur Folge: eine Diskussion über bislang Unausgesprochenes wie zum Beispiel persönliche Erklärungsmuster wird möglich. Ich erachte eine solche Offenlegung des stillschweigend Mitgemeinten selbst beim Umgang mit Bruchtermgleichungen als fruchtbar (Rüede, 2009). Denn so werden nicht nur Kalkülregeln Unterrichtsgegenstand, vielmehr auch der persönliche, kontextabhängige Zugang und Umgang mit ihnen, das Verstehen und die Vorstellungen davon. Das scheint mir wichtig, sind doch Kalkülregeln historisch gerade vor solch persönlichen Erfahrungshintergründen expliziert und schließlich postuliert worden.

2.3 Auffassungen von Normen

2.3.1 Auffassungen sind handlungsleitend

Die Einschätzung, warum es angemessen ist, in einer konkreten Situation einer bestimmten Norm zu folgen, kann unterschiedlich geartet sein. Ich habe Mathematiker beispielsweise gefragt, wie sie die Gleichung

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{x}{x+1}+2\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{2x}{x-2}$$

lösen würden. Alle gaben an, zuerst auf beiden Seiten die $\frac{2x}{x-2}$ wegzustreichen. Verschieden hingegen waren die Gründe, warum sie so vorgehen würden. Ein paar Beispiele von genannten Gründen seien angeführt:

- Dadurch vereinfacht sich die Gleichung.
- Auf beiden Seiten stehen gleiche Summanden.
- So wird eine Gleichung der Form $A\cdot B=0$ erhalten.
- Die Brüche mit gleichem Nenner können zusammengefasst werden und als Folge ergibt sich eine große Vereinfachung.
- So kann schnell und ohne Gebrauch des Satzes von Vieta eine Zerlegung der Form $(x-...)(x-...)=0$ gefunden werden.

Jeder Mathematiker ist derselben Norm gefolgt und hat die $\frac{2x}{x-2}$ weggestrichen. Allerdings hat jeder diese Norm anders aufgefasst, eine der vielen Facetten dieser Norm als die wichtigste herausgegriffen. Schlussendlich war es diese persönliche Auffassung von der Norm und nicht die Norm selbst, welche zum Wegstreichen der beiden Summanden führte. In diesem Sinne handeln wir nicht nach Normen, sondern nach unserem „Erfassen und Verstehen" (Brandom 2000, 75) von Normen. „Die Regeln zwingen uns nicht unmittelbar wie die Naturgesetze. Ihr Zwang ist vielmehr durch unsere *Einstellung* ihnen gegenüber vermittelt" (ebd.).

Lernende konstruieren ihre Auffassungen der zugrunde liegenden impliziten Normen während der Auseinandersetzung mit konkreten Beispielen. Mit Hilfe ihrer Auffassungen orientieren sie sich darüber, wie in weiteren Situationen gemäß dieser Normen vorzugehen ist.

2.3.2 Grundauffassungen als Expertenauffassungen

Die impliziten Normen der Mathematik werden in der mathematischen Praxis, also in den Handlungs- und Betrachtungsweisen der Mathematiker sichtbar. Also ist ihr Handeln zu untersuchen, um Aussagen über die impliziten Normen machen zu können. Weil sich das fachliche Handeln trivialerweise in der realen Welt abspielt, ist eine Charakterisierung des Handelns von Mathematikern nicht am grünen Tisch zu erreichen, sondern nur mit Hilfe von empirischen Instrumenten. An dieser Stelle tritt die Expertiseforschung auf die Bühne. In Gruber (1994) wird dargelegt, wie in neuerer Zeit zur Erklärung von Expertise vermehrt bereichsspezifisches Wissen (statt nur generelle Strategien) herangezogen und qualitative (statt nur quantitative) Aspekte der Wissensrepräsentation immer wichtiger werden. Entsprechend nutzt die Expertiseforschung Instrumente (Sortieren, (Nachträgliches) Lautes Denken, Interviews, repertory grids, Auswertung schriftlicher Bearbeitungen etc.), die – nicht nur, aber auch – bereichsspezifisch qualitative Unterschiede zwischen Experten und Novizen sichtbar machen. Insofern eignet sich ein solches Instrumentarium zur Beschreibung impliziter Normen. Im Abschnitt 4 dieses Artikels wird ein derartiges empirisches Instrument vorgestellt, um Merkmale des Lösens von Bruchtermgleichungen durch Experten zu identifizieren. Die dabei erfassten Auffassungen der Mathematiker werden im Folgenden als Grundauffassungen bezeichnet, eine Grundauffassung expliziert also die Sichtweise eines Experten, wie (also nach welcher Norm) und warum (also aufgrund welcher Auffassung) in einer vorgegebenen Situation gehandelt wurde.

3 Bruchterme und Bruchtermgleichungen

Bruchterme wie auch Bruchtermgleichungen sind mathematikdidaktisches Brachland. Meines Wissens liegen keine nennenswerten Untersuchungen dazu vor. Das ist verständlich, denn mathematisch gesehen fußt der Umgang mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen auf algebraischen Denkweisen und dem Bruchrechnen. Bei den Bruchtermen und Bruchtermgleichungen wird der Umgang mit den Bruchzahlen algebraisiert, als einziges neues Element kommt der Definitionsbereich ins Spiel – wenn nicht schon vorgängig an anderer Stelle eingeführt.

Im nachfolgenden empirischen Teil wird die Hypothese formuliert, dass sich beim Herangehen an Bruchtermgleichungen Experten und Novizen in der Ausprägung des symbol (bzw. structure) sense unterscheiden, also im flexiblen Rechnen mit Bruchtermen. Aus diesem Grund ist der folgende Abschnitt diesem Thema gewidmet.

3.1 Flexibles Rechnen

Das Bildungsziel des flexiblen Rechnens im Zahlenraum von 1 bis 100 ist mittlerweile mehrheitlich anerkannt. In Rathgeb-Schnierer (2006) werden Unterrichtsvorschläge präsentiert und evaluiert, wie dieser Anspruch im Schulalltag umgesetzt werden kann. Was dabei unter flexiblem Rechnen verstanden wird, umschreibt Rathgeb-Schnierer (2006, 59) so: „Flexibles Rechnen wird als aufgabenadäquates Handeln gesehen, welches abhängig ist von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden". Diese Umschreibung umfasst drei Merkmale des flexiblen Rechnens. Erstens ist flexibles Rechnen eine *Praxis*. Es zeigt sich im konkreten Handeln und wird an Rechenwegen dingfest gemacht. Zweitens ist flexibles Rechnen *kontextabhängig*. Angemessenes Handeln bei einer konkreten Aufgabenstellung wird angestrebt und nicht ein Memorieren von Regeln. Drittens ist flexibles Rechnen *geprägt vom Individuum*, insbesondere abhängig vom momentanen Wissen und Können des Individuums. Interessiert das flexible Rechnen von Mathematikern, wird man zu den entsprechenden Grundauffassungen geführt.

Die empirische Untersuchung von Rathgeb-Schnierer (2006) unterstützt die Sichtweise, dass flexibles Rechnen weniger durch bewussten Zugriff auf Regeln geleitet wird, sondern „dass Lösungswege ... sich im konkreten Lösungskontext auf der Basis des individuellen Zahlwissens und Erkennens von Zahleigenschaften und -beziehungen" (ebd.,

295) entwickeln. Möglichst angemessene Auffassungen der impliziten Normen werden angestrebt. Rathgeb-Schnierer spricht in diesem Zusammenhang – mit Verweis auf Schütte (2004) – vom Zahlenblick. Dieser „hat mit Erkennen und Wissen zu tun, insbesondere mit dem Erkennen von Zahleigenschaften, Zahlbeziehungen und Aufgabenbeziehungen“ (Rathgeb-Schnierer, 2006, 79). Dabei spielt die Termerkennung eine entscheidende Rolle, denn „Rechenwege sind abhängig von der Zahlwahrnehmung im Lösungskontext“ (ebd., 273). Bei Rechenaufgaben, die nicht mit Routinemethoden zu lösen sind, müssen spezifische Eigenschaften der vorkommenden Zahlmuster erkannt werden, und das hängt davon ab, als was diese Zahlen wahrgenommen werden.

In die gleiche Richtung weisen Untersuchungen von Hoch & Dreyfus (2005). Hoch und Dreyfus haben Probanden die Ausdrücke $x^4 - y^4$ und $(x-3)^4 - (x+3)^4$ vorgelegt und sie darum gebeten, diese mit Hilfe der Formel $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ zu faktorisieren. Während 77 % es schafften, den Ausdruck $x^4 - y^4$ zu faktorisieren, meisterten nur 7.5 % den zweiten Ausdruck. Die Autoren führen dieses Unvermögen auf einen fehlenden Strukturierungsblick (structure sense) bei den Probanden zurück.

Ähnlich werden in der hier vorgestellten Untersuchung Lernenden Bruchtermgleichungen vorgelegt. Einige davon können mit Routineverfahren gelöst werden, z.B. die Gleichung

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2} = 1,$$

bei anderen ist dieses Verfahren unangemessen, z.B. bei der Gleichung

$$\frac{x^2 + x + 6}{(x-2)(x+3)} + \frac{5x+15}{4x+12} = x^2.$$

Wie im folgenden Kapitel beschrieben, mussten die Probanden solche Gleichungen nach ähnlichen Vorgehensweisen beim Lösen sortieren. Dabei durften keinerlei Hilfsmittel verwendet werden, um den ersten Eindruck von der Gleichung in den Vordergrund zu rücken. Entscheidend ist eine angemessene Strukturierung der Gleichung.

3.2 Zahlenblick als begriffliches Klassifizieren

Der Zahlenblick bei Rathgeb-Schnierer, der Blick für Strukturen bei Hoch & Dreyfus sowie der Sinn für Symbole bei Arcavi entsprechen einer angemessenen Reaktion auf etwas, das in Zeichen gegeben ist. Es geht um das Erkennen von Termeigenschaften und Termbeziehungen und um den Bezug von der einen Gleichung zu anderen Gleichungen. Man muss beispielsweise in der Lage sein, einen Term wie $x^2 - 1$ je nach Kontext anders zu behandeln. Bei der Gleichung

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x-1} + 2 = 0$$

ist mit $x^2 - 1$ zu multiplizieren. Anders im Fall

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} - x = 2.$$

Hier sind die beiden Brüche mit Vorteil als erstes zu subtrahieren und der entstehende Bruch zu kürzen. Die konkrete Gleichung bestimmt somit, wie die Zeichen aufzufassen sind. Solche Auffassungen können expliziert werden. Im zweiten Beispiel der obigen beiden Gleichungen etwa mit den Worten „Ich sehe sofort gleiche Nenner, subtrahiere und das gibt 1“ oder „Bei mir geht der Bruchstrich sofort durch“. Damit werden die (allenfalls unmittelbaren) Beobachtungen, Wahrnehmungen und vorgenommenen Strukturierungen in eine explizite Form gebracht und erhalten so eine inferentielle Rolle. Brandom (2000) spricht in solchen Fällen von „nichtinferentiellen Berichten“. Damit wird erstens betont, dass beispielsweise „Bei mir geht sofort der Bruchstrich durch“ einer direkten Wahrnehmung entspricht, dass das Durchgehen des Bruchstrichs nicht inferentiell als Konklusion erschlossen wird. Zweitens muss der Berichtende selbst Inferenzen beherrschen, in denen die Aussage vorkommt. Genau dies macht den „Unterschied zwischen bloß *responsiver* und *begrifflicher* Klassifikation aus“ (Brandom, 2000, 152). Dies entspricht der Vorstellung eines symbol sense: nicht bloß beobachten, sondern die (implizite) Bedeutung der eigenen Beobachtung erkennen, die damit verbundenen Inferenzen erfassen und beurteilen, das heißt „to try to ‚read' meaning into the symbols“ (Arcavi, 1994, 27).

Was nun beobachtet und welche Bedeutung diese Beobachtung für den Beobachtenden hat, hängt von seiner Perspektive ab. Als Folge muss der Lösende lernen, eine geeignete Perspektive einzunehmen, die sich in einer erfolgversprechenden Strukturierung der Gleichung äußert. Für Flexibilität im Umgang mit Subtraktionen von Zahlen, algebraischen Termen oder Bruchtermgleichungen ist es notwendig, Perspektivenwechsel vornehmen zu können. Setzt man diese Art von Flexibilität als Bedingung für Erkenntnis, „so ist die Möglichkeit der Erkenntnisentwicklung offenbar allgemein dadurch bedingt, dass man in der Lage ist, den Blickpunkt zu wechseln und gleichsam ‚metaphorisch' ein *A* als ein *B* zu sehen“ (Hoffmann 2005, 78).

Abschließend soll betont werden, dass jegliches Strukturieren von Termen als begriffliches Klassifizieren im Sinne von Brandom zu verstehen ist, unabhängig davon, ob die Termerkennung der Routine oder der Flexibilität bedarf. Termstrukturen

> sind keine Eigenschaften der Schreibfiguren an sich, sondern *Sichtweisen*, die angeben, wie diese Schreibfiguren zu verstehen sind. Diese Sichtweisen sind historisch entstanden und müssen von den Lernenden in einem Lernprozess nachentwickelt werden. Da diese Sichtweisen wesentlich auf Konventionen beruhen, ist ein solches Lernen ohne Kommunikation nicht möglich. Irgendjemand muss dem Lernenden sagen oder auf eine andere Weise mitteilen, wie Terme in der Mathematik zu ‚sehen' sind. (Malle, 1993, 254)

Genau hier verortet Malle (ebd.) die Schwierigkeit im Unterricht: Termerkennung ist nicht direkt instruierbar sondern kann nur indirekt durch geeignete Aufgabenstellungen oder Visualisierungen ermöglicht und gefördert werden. Dabei muss man lernen, welche Strukturierungen wozu berechtigen, wozu nicht und was ihre Folgen davon sind. Solche inferentiellen Bezüge bleiben oftmals implizit und machen daher den Lernenden Schwierigkeiten, was in Malle (1993) wie in Krummheuer (1983) eindrücklich dokumentiert ist.

4 Sortieren von Bruchtermgleichungen

4.1 Sortieren in der Expertiseforschung

Chi, Feltovich & Glaser (1981) ist eine der am meisten zitierten Arbeiten in der Expertiseforschung. Unter anderem ließen die Autoren Aufgaben sortieren. Acht „undergraduates“ (Novizen) und acht Doktorierende (Experten) der Physik wurden eingeladen, 24 Physikaufgaben zu kategorisieren nach Ähnlichkeit des Lösungswegs. Die Probanden durften nichts aufschreiben und keine Hilfsmittel verwenden, sie arbeiteten ohne Zeitdruck und wurden am Schluss nach den Gründen für ihre vorgenommenen Gruppierungen befragt.

Durch die Kontrastierung der Novizen mit den Experten wurden die Eigenheiten der beiden Probandengruppen besonders offensichtlich. Die Novizen legten jene Aufgaben in dieselbe Gruppe, bei denen ähnliche Ausdrücke, physikalische Objekte und Anordnungen in der Aufgabenstellung vorkamen. Im Gegensatz dazu verwendeten die Experten als Merkmale für die Kategorienbildung die für die Lösung benötigten physikalischen Prinzipien und Gesetze. Offenbar kategorisierten Novizen nach Oberflächenstrukturen („surface structures“) und Experten nach Tiefenstrukturen („deep structures“) der vorgelegten Aufgaben. Diese Beobachtung war wegweisend, wurden doch in den 1960-er und 1970-er Jahren Unterschiede zwischen Experten und Novizen vorwiegend auf quantitative Differenzen in der Wissensorganisation zurückgeführt. Die Arbeiten von Chi, Feltovich und Glaser trugen wesentlich dazu bei, dass zur Erklärung solcher Unterschiede vermehrt auch qualitative Differenzen in den Wissensrepräsentationen herangezogen werden.

In den vergangenen Jahren haben mehrere Studien gezeigt, dass die Welt der Tiefen- und Oberflächenstrukturen nicht so schön schwarzweiß ist. Zum Beispiel benutzen Experten durchaus Merkmale der Oberfläche, um Problemtypen zu erkennen (Medin & Ross 1989); oder das, was als Tiefenstruktur gilt, ist abhängig von der Auswahl der Experten (Bromme, Rambow & Strässer 1996). Auch bei der hier vorgestellten Sortierung von Bruchtermgleichungen wurde ein Zusammenspiel von Oberflächen- und Tiefenstruktur beobachtet.

4.2 Forschungsfrage, Methode und Stichprobe

Für die empirische Untersuchung waren die folgenden zwei Forschungsfragen leitend:

1. Grundauffassungen: Wie lösen Experten Bruchtermgleichungen und wie fassen sie ihre eigenen Vorgehensweisen auf?
2. Experten-Novizen-Vergleich: Inwiefern unterscheiden sich Experten und Novizen beim Umgang mit Bruchtermgleichungen?

Als Rahmenbedingung wurde verlangt, dass das verwendete empirische Instrument problemlos auch von Lehrpersonen im Unterricht eingesetzt werden kann, beispielsweise zum Einschätzen und Verstehen von Schülerleistungen. Aus diesem Grund wurde weder mit Interviews noch mit Videos gearbeitet sondern ausschließlich mit dem Sortieren von Aufgaben. Allerdings – das sei vorweggenommen – sind zur Erklärung der hier vorgestellten Resultate später Interviews durchgeführt worden. Die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen werden an anderer Stelle präsentiert.

Die Forschungsfrage 2 zielt auf Unterschiede zwischen Experten und Novizen. Selbstverständlich hätten auch Gemeinsamkeiten von Experten und Novizen untersucht werden können, wie es zum Beispiel in Smith, diSessa, Roschelle (1993) dargestellt wird. Allerdings hätte dies einen größeren Forschungsaufwand bedeutet, der von Unterrichtenden nicht bewältigt werden kann.

Die Methode des Sortierens ist schlank in der Anwendung und kann mit unterschiedlichem Aufwand ausgewertet werden, je nach Fragestellung. Im vorliegenden Fall mussten 20 Bruchtermgleichungen sortiert werden. Die schriftliche Instruktion lautete: „...Wir legen Ihnen zwanzig Gleichungen vor. Bilden Sie Gruppen von Gleichungen. Legen Sie all die Gleichungen in dieselbe Gruppe, bei denen Ihres Erachtens eine ähnliche Lösungsstrategie jeweils die beste ist. Mit anderen Worten: Die Gleichungen, welche Sie in die gleiche Gruppe legen, würden Sie von Hand auf ähnliche Art und Weise lösen." Auf dem Anleitungsblatt waren zudem Randbedingungen vermerkt, etwa dass die Lösungsstrategien im Kopf abzuschätzen sind, dass so viele Gruppen wie gewünscht gebildet werden können, dass ohne Zeitdruck gearbeitet werden kann oder dass abschließend für jede Gruppe ein Zettel auszufüllen ist. Auf diesem Zettel mussten die Nummern der zugeordneten Gleichungen angegeben werden sowie eine Beschreibung, worin sich die Lösungsstrategie der Gruppenelemente ähnelt. In Rüede (2008) ist der vollständige Bogen einsehbar.

Die 20 Bruchtermgleichungen enthalten keine speziellen Terme wie Wurzeln in x und führen bei geeigneter Vorgehensweise immer auf lineare oder leicht lösbare Gleichungen höherer Ordnung wie $x^4 = 16$ oder $x^2 = 25$. Über die Hälfte der Bruchtermgleichungen verlangt einen flexiblen Blick für Strukturen, denn das Wegmultiplizieren des Nenners erweist sich bei diesen Gleichungen nicht als geeignetste Strategie. Somit wird mit diesen 20 Bruchtermgleichungen vorwiegend das flexible Rechnen getestet und weniger das Ausführen eines Standardverfahrens wie das Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner.

Als Novizen wurden 19 Schüler (musisches Profil, 10 w, 9 m) eines Schweizer Gymnasiums befragt. Die Schüler waren in der neunten Jahrgangsstufe und hatten das Thema Bruchterme und Bruchtermgleichungen eben behandelt. 13 Schweizer Gymnasiallehrpersonen (1 w, 12 m) der Mathematik dienten als Experten. Alle Experten haben einen Fachabschluss in Mathematik und weisen mehrjährige Unterrichtserfahrung auf, insbesondere haben sie das Thema Bruchterme und Bruchtermgleichungen schon mehrmals unterrichtet. Zudem wurde darauf geachtet, dass sie sich alle durch eine Zusatzqualifikation auszeichnen wie Fachdidaktiker (4), Dissertation in Mathematik (5), Praktikumslehrperson (2), Lehrbuchautor (1), Hochschuldozent für Physik (1).

Bevor zur Präsentation und Auswertung der Ergebnisse übergegangen wird, sei vorerst von einem „misslungenen" Pilotversuch berichtet. Im Vorfeld der hier vorgestellten empirischen Untersuchung fanden Testläufe statt. Unter anderem wurden Experten und Novizen Lösungswege statt Bruchtermgleichungen vorgelegt, allerdings statt zwanzig nur deren drei. Gefragt wurde danach, welcher dieser drei Lösungswege am ähnlichsten zu einem vorgestellten vierten sei und warum. Der Test war so konstruiert, dass nur einer der drei Lösungswege dem vierten inhaltlich ähnlich war. Die zwei anderen waren dem vierten formal ähnlich. Zur großen Überraschung gaben fast alle Experten und Novizen dieselbe „korrekte“ Antwort und dieselbe Begründung. Daraus musste geschlossen werden, dass Experten und Novizen bei vorgegebenen Lösungswegen die als ähnlich einschätzen, welche inhaltlich gleich sind (dieselbe Tiefenstruktur haben) und dies auch so begründen. Als Folge wurde das Test-Konzept wie beschrieben geändert.

5 Ergebnisse: Grundauffassungen

Die von den Versuchspersonen erstellten Beschreibungen der Gemeinsamkeiten der Bruchtermgleichungen einer Gruppe werden als Gruppenlabels bezeichnet. Jedes Gruppenlabel bringt die Auffassung einer Versuchsperson zum Ausdruck, wie die entsprechenden Bruchtermgleichungen zu lösen sind. In einem ersten Schritt wird daher von den Gruppenlabels der Experten auf Kategorien von Grundauffassungen geschlossen. In einem zweiten Schritt werden durch den Vergleich dieser Grundauffassungen exemplarisch Teile der inferentiellen Struktur des Impliziten sichtbar gemacht.

Aus Platzgründen können natürlich nicht alle Sortierungen aufgelistet werden. Damit die Leserschaft aber einen Eindruck des Datenmaterials erhält, seien die fünf Gruppen von Experte 3 angegeben:

1, 8, 9, 11, 12, 14, 17: „Kürzen“. Erstens eventuell Brüche zusammenfassen. Zweitens soviel wie möglich kürzen. Drittens einfache Gleichung lösen (z.T. linear, quadratisch).

7, 18: „Gleichzählrig“. Erstens eventuell zusammenfassen. Zweitens bei gleichen Zählern den Nenner vergleichen. Drittens Nennergleichung lösen.

4, 10, 15: „$a \cdot b = 0$“. Erstens eventuell gemeinsame Summanden wegstreichen. Zweitens einzelne Faktoren $= 0$. Drittens Teilgleichungen lösen.

2, (5), 19, 20: „Die Mühsamen“. Erstens Ausmultiplizieren (ev. binomische Formel). Zweitens schauen, was es gibt, dann vereinfachen. Drittens wahrscheinlich Normalverfahren. (Bei 5 würde ich Substitution machen, es aber von den Schülern nicht erwarten.)

3, 6, 13, 16: „Normalverfahren“. Erstens eventuell zusammenfassen. Zweitens kgV bestimmen. Etc. (Diese Gleichungen haben zwar kleine Spezialitäten (13: kgV, 16: Zusammenfassen), es lohnt sich aber nicht eine spezielle Gruppe zu bilden.)

5.1 Kategorienbildung

Die Gruppenlabels wurden kategorisiert. Das Kategoriensystem wurde hauptsächlich aus dem erhobenen Material abgeleitet (induktive Kategorienbildung). Um Auskunft über die Grundauffassungen zu erhalten, wurden zuerst die 103 Gruppenlabels der 13 Experten kategorisiert. Der Prozess dieser Kategorienbildung führte schließlich zu vier Kategorien (Kürzen, Reduzieren, Strukturieren, Standardverfahren), die im Folgenden beschrieben werden:

Kürzen: Gruppenlabels, welche ein Arbeiten mit Faktoren beschreiben, die schließlich weggestrichen werden. Beispiele genannter Gruppenlabels: „'Kürzen'. Erstens eventuell Brüche zusammenfassen. Zweitens soviel wie möglich kürzen. Drittens einfache Gleichung lösen (z.T. linear, quadratisch)“ oder „Kürze die Brüche intern. Alles ist aufgebauscht“.

Reduzieren: Gruppenlabels, welche eine Reduktion auf eine einfachere Klasse von Gleichungen beschreiben. Beispiele genannter Gruppenlabels: „3 Brüche, von denen zwei wegen gleichen Nennern zusammengefasst werden können“ oder „Auf Gruppe B zurückführen“.
Strukturieren: Gruppenlabels, welche Umformungen beschreiben, die durch eine geeignete Strukturierung der Gleichung hervorgerufen werden. Typischerweise sind diese Umformungen als Regeln wie z.B. $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\rightarrow AD=CB$ formalisierbar. Beispiele genannter Gruppenlabels: „Direkt oder nach umformen. Form $A\cdot B=0\rightarrow A=0\vee B=0$“ oder „Zähler sind gleich $\rightarrow$ auch Nenner müssen gleich sein (oder Zähler = 0)“.
Standardverfahren: Gruppenlabels, welche Multiplikationen der Gleichung mit dem Hauptnenner beschreiben. Beispiele genannter Labels: „Verschiedene Nenner. Arbeite mit dem Hauptnenner“ oder „Gleichungen mit kgV der Nenner multiplizieren. 2: kgV = $2(x-1)(x+1)$; 20: kgV = $(x-2)^2$; 16: kgV = x^2-1; 3: kgV = x^2-4“.

Alle der 103 Gruppenlabels außer 3 konnten kategorisiert werden. Anschließend wurde für jede Gleichung aufgelistet, welchen Gruppenlabels sie von den Experten zugeordnet wurden. Da die Gruppenlabels bereits kategorisiert waren, entstand daraus für jede Gleichung eine Liste, wie oft sie gemäß den Experten welcher Kategorie zuzuordnen ist.

5.2 Grundauffassungen von Bruchtermgleichungen

5.2.1 Übersicht

In Tabelle 1 ist abzulesen, wie oft welche Gleichung einer der vier Kategorien zugeordnet wurde.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kürzen	12	0	0	1	1	0	2	8	10	1
Reduzieren	1	3	2	0	10	1	4	0	3	0
Strukturieren	0	1	1	11	0	5	7	3	0	11
Standardverfahren	0	7	9	1	2	6	0	2	0	1

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Kürzen	12	12	2	9	0	2	8	4	0	0
Reduzieren	0	1	2	3	3	5	4	0	8	4
Strukturieren	1	0	3	0	10	1	1	9	0	0
Standardverfahren	0	0	6	1	0	5	0	0	4	8

Tab. 1: Experten-Zuordnungen der Gleichungen zu den Kategorien

In der ersten Zeile sind die Nummern 1 bis 10 bzw. 11 bis 20 der Bruchtermgleichungen aufgelistet. Die Einträge sind folgendermaßen zu lesen: die Gleichung 1 wurde 12-mal einem Gruppenlabel der Kategorie Kürzen zugeordnet, 1-mal einem der Kategorie Reduzieren, 0-mal einem der Kategorie Strukturieren und 0-mal einem der Kategorie Standardverfahren. Die weiteren Einträge sind analog zu lesen. Weil 3 Gruppenlabels keiner der vier Kategorien zugeordnet werden konnten, ist die Spaltensumme für Gleichung 2, 3, 6, 19 und 20 kleiner als 13.

Jede Kategorie repräsentiert einen Typ von Grundauffassungen. Die Tabelle zeigt, dass zu jeder Gleichung eine unterschiedlich ausgeprägte Vielfalt von Grundauffassungen gehört: Bei Bruchtermgleichungen wie 1, 4, 11, 12 bestimmen die impliziten Normen der Fachwelt im Wesentlichen eindeutig, welches Lösungsvorgehen angemessen ist und wie dieses aufzufassen ist. Hingegen bei Bruchtermgleichungen wie 6, 7, 13, 16 führen die impliziten Normen zu einer Vielfalt angemessener Umformungen und Auffassungen derselben. Zwischen diesen beiden Extrema sind alle Übergangsformen zu finden. Weil es sich hier um eine explorative Studie handelt, wird dieses Ergebnis nicht statistisch untermauert, dafür im Folgenden exemplarisch an typischen Fällen illustriert.

5.2.2 Typische Beispiele

Als erstes Beispiel sei die Gleichung 1 angeführt,

$$\frac{x^2+x-6}{(x-2)(x+3)}+\frac{5x+15}{4x+12}=x^2.$$

12 der 13 Experten fassten dies als eine Gleichung auf, wo als erstes die Brüche zu kürzen sind. Das heißt, durch Angabe dieser Gleichung ist stillschweigend mitgemeint, dass man die darin vorkommenden Brüche einzeln vertikal liest. Das bedingt Flexibilität, schaut man bei Bruchtermgleichungen doch oftmals eher horizontal, die Nenner vergleichend. Arcavi (1994, 27) diskutiert ein ähnliches Beispiel, wo er mit symbol sense eine Art geistige Reife meint, „to defer ‚the invitation' to start solving".

Auch die Gleichung 4,

$$\frac{x-1}{x^2-4}\cdot\frac{6-x}{x^2+x-6}=0,$$

wurde von 11 der 13 Experten gleich aufgefasst; nämlich als Gleichung der Form $A\cdot B=0$, wo als Folge die einzelnen Faktoren gleich 0 zu setzen sind. Das bestätigt, dass der Blick für Strukturen einem *begrifflichen* Klassifizieren entspricht. Die Beobachtung $A\cdot B=0$ trägt die (von den Experten explizierte) Inferenz mit sich, dass daraus $A=0$ und $B=0$ folgt. Um diese Inferenz muss man also wissen, wenn man die Beobachtung $A\cdot B=0$ fachlich verstanden haben will.

Gleichung 1 und 4 sind prototypische Gleichungen, bei denen fast alle Experten je die gleichen Umformungen machen würden und diese auch gleich auffassen. Das ist anders bei einer Gleichung wie zum Beispiel Nummer 6,

$$\frac{x}{2x+1}=\frac{2}{5}.$$

12 von 13 Experten formen diese Gleichung um zu $5x=2(2x+1)$. Doch diesem Schritt unterliegen unterschiedliche Auffassungen:

- Strukturieren: Die Gleichung ist vom Typ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ und es kann übers Kreuz multipliziert werden.
- Standarverfahren: Mit $5(2x+1)$ multiplizieren.

- Reduzieren: Die Unbekannte x kommt nur im Bruch auf der linken Seite vor, also handelt es sich um ein Problem, wo im Wesentlichen „nur ein Bruch zu betrachten ist“ (Experte 4).

Diese drei Typen von Grundauffassungen entsprechen einzelnen, mit der Umformung zu $5x = 2(2x+1)$ verbundenen, Inferenzen: Die an der Praxis Beteiligten generieren eine Vielfalt von Berechtigungen für den Zwischenschritt $5x = 2(2x+1)$, genannt sind oben „übers Kreuz multiplizieren“, Standardverfahren, „nur ein Bruch“. Experten zeichnen sich dadurch aus, dass sie diese Berechtigungen angemessen beurteilen können. Das gehört zum Gebrauchen-Können von $5x = 2(2x+1)$ – und nicht etwa, dass man all diese Berechtigungen aktiv weiß.

Bei Gleichung 6 wurde das Gruppenlabel eines Experten keiner der vier Kategorien zugeordnet. Für diesen Experten war die Gleichung ein Beispiel dafür, dass man die Lösung $x = 2$ sofort sieht. Solche Gruppenlabels hätten einer weiteren Kategorie für die Grundauffassungen bedürft. Weil das Kategoriensystem aber schlank gehalten werden sollte und dieses sofortige Erkennen der Lösung insgesamt nur zweimal vorkam (also in 2% der Fälle), wurde auf diese fünfte Kategorie verzichtet.

Aufschlussreich ist auch die Gleichung 7,

$$\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x+5)} = \frac{x-6}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}.$$

Alle 13 Experten würden als erstes die beiden Brüche rechts addieren und danach die Gleichung vereinfachen zu $(x+1)(x+5) = x^2$. Unterschiedlich ist aber, als was man diese Umformung behandeln soll:

- Reduzieren: Wesentlich ist die Addition der beiden Brüche auf der rechten Seite. Drei Brüche werden auf zwei Brüchen reduziert.
- Strukturieren: Wesentlich ist der zweite Schritt, denn die Gleichung ist eigentlich von der Form $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ und daher ist $B = C$. Man kann von „gleichzählrig“ (Experte 3) sprechen.
- Strukturieren: Wesentlich ist der zweite Schritt, denn die Gleichung ist eigentlich von der Form $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, woraus $AD = BC$ folgt und schließlich $D = B$, weil A und C gleich sind.
- Kürzen: Wesentlich ist der zweite Schritt, in dem der Faktor $x^2 + x - 6$ weggestrichen wird – man kann von „Kürzen“ sprechen. (Weil dabei das Vereinfachen und Arbeiten mit Faktoren zentral ist, wurden die entsprechenden Gruppenlabels der Kategorie Kürzen zugeordnet.)

All diese Strategien haben die Addition der Brüche auf der linken Seite und einen darauffolgenden Schritt zu $(x+1)(x+5) = x^2$ gemeinsam. Die obigen Auffassungen machen wiederum die Komplexität der inferentiellen Gliederung der entsprechenden Umformung deutlich. Als Experte muss man erstens verstehen können, dass der erste Schritt sowohl als entscheidende Reduktion wie auch als Selbstverständlichkeit aufgefasst werden kann und beide Auffassungen als Berechtigung gelten. Zweitens muss man die damit verbundene Inferenz zu $(x+1)(x+5) = x^2$ erkennen und ihre verschiedenen Berechtigungen angemessen beurteilen können.

Als letztes Beispiel sei die Gleichung 16 diskutiert:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}.$$

Hier treten Gruppenlabels aller vier Kategorien auf:

- Reduzieren: Durch die Addition der Brüche auf der linken Seite wird der Fall von drei Brüchen auf den Fall von zwei Brüchen zurückgeführt.
- Strukturieren: Eigentlich steht auf der linken Seite nur ein Bruch, nämlich $\frac{5}{x+1}$. Also ist die Gleichung von der Form $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. Es folgt $AD=CB$.
- Standardverfahren: Multiplikation mit x^2-1.
- Kürzen: Auf der linken und rechten Seite kann der Faktor $x+1$ weggestrichen werden. (Weil dabei das Vereinfachen und Arbeiten mit Faktoren zentral ist, wurden die entsprechenden Gruppenlabels in die Kategorie Kürzen gelegt.)

5.2.3 Interpretation

Jedes Gruppenlabel bringt eine Grundauffassung zum Ausdruck, indem die Experten erstens Angaben über implizite Normen machen, die im Zusammenhang mit dem Lösen der Bruchtermgleichungen der Gruppe stehen, und indem sie zweitens Auffassungen dieser impliziten Normen explizieren. Diese Auffassungen werden durch das Sortieren, durch das Aufsuchen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden, explizit. In diesem Sinne besteht eine Analogie zu den repertory grids. Auch dort werden durch das Benennen von Unterschieden die Überzeugungen der Probanden sichtbar. In diesem Abschnitt soll aber nicht der Vergleich mit anderen empirischen Instrumenten im Vordergrund stehen, sondern der Anschluss an die theoretischen Überlegungen im Abschnitt 2 und 3.

Die Ergebnisse spiegeln in der Vielfalt der Grundauffassungen die Perspektivenvielfalt der Fachwelt wider. Dabei hat das Wort „Vielfalt" eine zweifache Bedeutung. Erstens zeigen Experten durchaus unterschiedliche Lösungsstrategien bei einer konkret vorliegenden Bruchtermgleichung. Offenbar zeichnen die impliziten Normen nicht immer genau eine Lösungsstrategie als die optimalste aus. Allerdings bewegen sich die beobachteten Vorgehensweisen in einem überschaubaren Bereich. Das erstaunt nicht, handelt es sich doch bei den vorgelegten Gleichungen um wohldefinierte Probleme und nicht um komplexes Problemlösen. Entsprechend lösten die Experten die Bruchtermgleichungen ohne größere Anstrengung. Zweitens waren zum Teil markant verschiedene Auffassungen ein und desselben Umformungsschritts zu beobachten. Aus der Gleichheit von Lösungswegen kann also nicht geschlossen werden, dass sich die Lösenden (in diesem Fall die Experten) dasselbe dazu gedacht haben. Es gibt verschiedene angemessene Auffassungen davon, was als richtig gilt. Bei einzelnen Gleichungen wie Nummer 6 oder 7 ist dies in der inferentiellen Gliederung sichtbar geworden. Es konnten unterschiedliche Berechtigungen zu und unterschiedliche Folgen von einer bestimmten Festlegung isoliert werden. Dazu kommen all die mit der Festlegung unverträglichen Aussagen – z.B. ist bei Gleichung 7 das Kürzen von $\frac{x^2}{x^2}$ unverträglich mit der Strategie, als erstes $\frac{x-6}{x^2}$ und $\frac{x^2}{x^2}$ zu addieren. Solche Inferenzen liegen typischerweise implizit vor. Dabei handelt es sich um intra- sowie interpersonale Inferenzen: Zum einen verfügt jeder Experte über angemessene Auffassungen. Diese entsprechen den intrapersonalen Inferenzen und werden in den Grundauffassungen der einzelnen Experten sichtbar. Zum anderen spiegelt erst die Gesamtheit der Grundauffassungen aller Experten die impliziten Normen der mathematischen Praxis. Das führt zu interpersonalen Inferenzen, die erst durch den Vergleich der Grundauffassungen untereinander hervortreten. Die Zusammenstellung der Grundauffassungen bei Gleichung 6, 7 und 16 machen solche interpersonalen Inferenzen explizit. Von Experten wird nun erwartet, dass sie auch diese interpersonalen Inferenzen verstehen, insbesondere die jeweils begleitenden Hintergrundperspektiven umreißen können. Der Einbezug solcher interpersonalen Inferenzen ist meines Erachtens eine Stärke des Brandomschen Inferentialismus. Es erlaubt das teilweise Explizitmachen der sozialen Dimension der Begriffe.

Dass der Zahlenblick eine individuelle, kontextbezogene Ausprägung ist, formuliert Rathgeb-Schnierer (2006, 273) als folgende Deutungshypothese: „Rechenwege sind abhängig von der Zahlwahrnehmung im Lösungskontext". Threlfall (2002, 42) drückt das so aus:

> In this way, flexible mental calculation can be seen as an individual and personal reaction with knowledge, manifested in the subjective sense of what is noticed about the specific problem.

Analog kann bei Gleichungen wie 6, 7 oder 16 festgestellt werden, dass sie je nach Experte anders gelesen werden: structure sense offenbart sich bei jedem Experten anders. Auf der anderen Seite stehen Gleichungen wie 1 und 4, wo sich structure sense bei den Experten ziemlich einheitlich ausdrückt.

6 Ergebnisse: Experten-Novizen-Vergleich

Wiederum sei ein Beispiel einer Sortierung vorangestellt, jene von Novize 1:

> 1, 17: Beide sind binomische Formeln. Man kann sie also ausmultiplizieren und dann muss man bei 1 noch gleichnamig machen. Und bei 17 muss man x mit den anderen beiden gleichnamig machen, weil diese beiden schon gleich sind.
> 3, 9, 14, 16: Hier hat es überall auf der linken Seite eine Addition zwischen den Brüchen. Sie werden auf eine ähnliche Art gelöst.
> 7, 12, 18: Hier kann ich überall mit der dritten binomischen Formel gleichnamig machen.
> 2, 4, 10: Diese Gleichungen ergeben alle 0. Außerdem werden überall Brüche zusammen multipliziert. Ein Schritt ist auch noch (wie fast überall), dass man gleichnamig machen muss.
> 5, 15, 19, 20: Diese werden alle mit anderen Brüchen multipliziert. Schon so kann man sehen, dass die alle einen ähnlichen Lösungsweg haben werden.
> 6, 8, 11, 13: Hier kann ich auch gleichzählrig machen, weil auf jeder Seite nur *ein* Bruch ist. Die werden auch ähnlich gelöst.

6.1 Kategorienbildung

Das für die Experten entwickelte Kategoriensystem musste um drei Kategorien erweitert werden, um auch die Gruppenlabels der 19 Novizen kategorisieren zu können:

Versuchshandeln: Gruppenlabels, welche die allererste Umformung beschreiben. Diese war in allen angetroffenen Fällen jeweils ein Multiplizieren oder Addieren zweier Brüche – wohl aus dem Grund, weil in den entsprechenden Gleichungen eine solche Operation vorkam und deren Ausführung als eine valable Option behandelt wurde. Beispiele genannter Gruppenlabels: „Hier hat es überall auf der linken Seite eine Addition zwischen den Brüchen. Sie werden auf eine ähnliche Art gelöst" oder „Es hat bei allen eine Klammer, die man multiplizieren muss".
Syntaktisches Standardverfahren: Gruppenlabels, die das Standardverfahren bei Gleichungen vorschlagen, die ein gemeinsames syntaktisches Merkmal haben. Beispiele genannter Gruppenlabels: „Diese beiden Gleichungen haben gemeinsam, dass sie beide auf der rechten Seite eine Null haben. Zuerst würde ich die Klammer ausrechnen und später wahrscheinlich mit dem Standardverfahrten weiterlösen" oder „Man denkt, die Nenner sind gleich. Sie sind es aber nicht. Wird auch mit der Standardversion gelöst, aber man muss ‚mehr' überlegen, weil man es nicht von Anfang an sieht".
Syntaktisches Merkmal: Gruppenlabels, die ausschließlich ein gemeinsames syntaktisches Merkmal der Gleichungen beschreiben. Beispiele genannter Gruppenlabels: „Binomische Formel. Bruch + Bruch, Bruch – Bruch" oder „Bruch mal Bruch".

103 von 111 Gruppenlabels der Novizen konnten gemäß diesen drei Kategorien und den vier Kategorien Kürzen, Reduzieren, Strukturieren und Standardverfahren kategorisiert werden. Die meisten der nicht kategorisierbaren Gruppenlabels gaben zum Ausdruck, dass man nicht wisse, wie die Gleichung zu lösen wäre, bzw. dass sie in keine der gebildeten Gruppen passe. Beispiele dafür sind Gruppenlabels wie „Lässt sich nicht einordnen" oder „'Undefinierbare Gruppe'. Dieser Lösungsweg wäre mir nur schriftlich ersichtlich".

6.2 Auffassungen von Experten und Novizen

In Tabelle 2 ist eine zusammenfassende Darstellung der Kategorisierung gegeben. Eingetragen ist bei den Experten und bei den Novizen die Anzahl der Gleichungen pro Kategorie. Zu beachten ist, dass nicht gleich viele Experten (13) wie Novizen (19) befragt wurden. Zur besseren Übersicht wurden die vier Kategorien Kürzen, Reduzieren, Strukturieren und Standardverfahren als Kategorie Grundauffassungen zusammengefasst.

	Experten	Novizen
Grundauffassungen	254	216 (57%)
Versuchshandeln	0	27 (7%)
Syntaktisches Standardverfahren	0	46 (12%)
Syntaktisches Merkmal	0	64 (17%)

Tab. 2: Experten- und Novizen-Zuordnungen der Gleichungen zu den Kategorien

Sofort fällt auf, dass Experten erstens keine Gruppenlabels produzierten, die allein auf syntaktische Auffälligkeiten einzelner Bruchtermgleichungen referieren ohne in Bezug zum Lösungsvorgehen zu stehen. Zweitens zeigen sie kein Versuchshandeln, sondern überschauen auch die Folgen der ersten Umformungen. Dieser Effekt scheint fast „kausal" zu sein. Umgekehrt ist zu betonen, dass deutlich über die Hälfte der Gruppenlabels der Novizen einer Grundauffassung zuzuordnen ist. Also lassen sich auch Novizen nicht nur von syntaktischen Eigenschaften (Oberflächenstrukturen) leiten, sondern mehrheitlich von inhaltlichen Merkmalen (Tiefenstrukturen). Dieser Befund ist darauf zurückzuführen, dass die Novizen der vorliegenden Untersuchung nicht nichts wussten und konnten. Vielmehr hatten sie sich vor der Untersuchung intensiv mit Bruchtermgleichungen auseinander gesetzt, vor allem auch mit deren Vielfalt und Verschiedenheiten in den Lösungswegen.

Weil sich bei jeder der 20 Bruchtermgleichungen immer wieder Novizen fanden, denen etwas Formales auffiel (auch wenn vom Autor nicht vorgesehen), liegen keine Beispiele vor, die praktisch alle Experten und Novizen gleich behandeln würden. Tendenziell kann gesagt werden, dass diejenigen Gleichungen, welche von den meisten Experten gleich aufgefasst werden, auch von vielen Novizen so aufgefasst werden. Hingegen nimmt dort, wo bei den Experten verschiedene Auffassungen vorliegen, bei den Novizen der Anteil der Gruppenlabels mit syntaktischem Charakter zu.

6.3 Hypothesenbildung und Plausibilisierung

Der Vergleich der Gruppenlabels der Experten mit jenen der Novizen führt zur Formulierung von Hypothesen, welche die charakteristischen Unterschiede festhalten sollen.

6.3.1 Hypothesen

Um eine Gleichung lösen zu können, muss sie zuallererst wahrgenommen werden. Als was man eine Gleichung auffasst, was man in ihr liest, ist bei Experten und Novizen verschieden. Die Kategorisierung der Gruppenlabels zeigt, dass bei Novizen manchmal eine „buchstäbliche" Lesart der Gleichung vorkommt. Eine solche Strukturierung der Gleichung ermöglicht keinen Schluss auf gewinnbringende Umformungen. Der Novize, welche eine Gleichung wie Nummer 7,

$$\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x+5)}=\frac{x-6}{x^2}+\frac{x^2}{x^2},$$

unter dem Gruppenlabel „Die Gleichung ist nach der Standardvariante lösbar. Im Nenner ist x^2 noch ausklammerbar, $= x \cdot x$" einordnet, verbindet mit ihr ganz andere Inferenzen als der Experte, der notiert „Zähler sind gleich $\rightarrow$ auch Nenner müssen gleich sein (oder Zähler $= 0$)". Für diesen Experten bedeutet obige Gleichung etwas ganz anderes als für den zitierten Novizen. Die Zusammenhänge der einzelnen Terme der Gleichung, die der Experte sieht, sind lösungsorientiert. Beim Experten gehen die Strukturierung der Gleichung und ein angemessenes Lösungsvorgehen Hand in Hand. Dem Novizen hingegen sind Merkmale wichtig, die nicht in ein angemessenes Lösungsvorgehen münden. Seine Lesart der Gleichung führt ihn weg vom Ziel. In diesem Sinne ist hier das Wort „syntaktisch" gemeint: Wer eine Gleichung syntaktisch auffasst, strukturiert die Gleichung so, dass daraus nicht zwingend lösungsorientierte Inferenzen folgen. Zwei der drei zusätzlichen Kategorien des Vergleichs von Experten und Novizen enthalten genau deshalb das Adjektiv „syntaktisch". Mit den genannten syntaktischen Merkmalen sind keine lösungsorientierten Umformungen verbunden, und die Gruppenlabels der Kategorie syntaktisches Standardverfahren beschreiben Eigenschaften, die sich nicht auf das Lösungsvorgehen beziehen. Die erste Hypothese lässt sich so formulieren:

Hypothese 1: Experten strukturieren eine Gleichung lösungsorientierter als Novizen.

Steht in der Hypothese 1 noch die Berechtigung für eine Umformung im Vordergrund, sind die Folgen einer Umformung Gegenstand der zweiten Hypothese: Um zu entscheiden, welche Umformungen bei einer Gleichung gewinnbringend sind, müssen die Folgen abgeschätzt werden können. Dieses Vorausschauen hat einen evaluativen Aspekt und ist bei Experten häufiger anzutreffen als bei Novizen. Das lässt sich anhand der Gleichung Nummer 9,

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{2x}{2x+1}=x^2,$$

illustrieren. Experten erkennen, dass nach dem Addieren der Brüche auf der linken Seite gekürzt werden kann. Dies wird durch Gruppenlabels wie „Brüche zusammenfassen, wegkürzen und auflösen“ bestätigt. Novizen, die nicht vorausschauen, subsumieren diese Gleichung unter Gruppenlabels wie „Bei dieser Gruppe kann man die beiden einzelnen Brüche zusammenfassen und danach das Standardverfahren anwenden“. Diese Beobachtung ist Gegenstand der zweiten Hypothese.

Hypothese 2: Experten denken mehr Umformungsschritte voraus als Novizen.

Vielleicht ist gerade an dieser Stelle ein Hinweis auf eine Hintergrundfestlegung dieser Arbeit angebracht, die bis jetzt nicht expliziert wurde. Jegliche Beschreibung des Handelns von Experten und Novizen erfolgt hier aus einer Außenperspektive. Wenn das Handeln von Experten mit Begriffen wie Strukturieren und Vorausschauen beschrieben wird, so sind damit Merkmale eingeführt, die es uns erlauben, zu verstehen und zu erklären. Aber „es gibt keinerlei Veranlassung, die zu theoretischen Zwecken von aussen postulierten Informationsverarbeitungsprozesse und das dabei verwendete mentalistische Vokabular in das Subjekt hineinzuverlagern und solcherart zu reifizieren“ (Neuweg 2004, 92). Das heißt, die Experten wenden keinen Plan an, der ihnen sagt zu strukturieren und vorauszuschauen – sie handeln einfach.

6.3.2 Plausibilisierung

Ein Blick auf Tabelle 2 bestätigt, dass die 13 Experten die Bruchtermgleichungen lösungsorientierter als die Novizen aufgefasst haben. Gruppenlabels der Kategorien „Syntaktisches Standardverfahren“ und „Syntaktisches Merkmal“ fanden sich nur bei den Novizen. Ebenso belegt eine Durchsicht aller Gruppenlabels, dass die Experten markant mehr Formulierungen einbrachten, die eines Vorausschauens bedürfen. Allerdings ist der Umfang der Stichprobe $n=13+19$ zu klein, um als repräsentativ zu gelten. In der Folge wurden zur Überprüfung der Hypothesen 1 und 2 Interviews durchgeführt. Deren vollständige Auswertung wird – wie schon erwähnt – an anderer Stelle präsentiert. Hingegen werden hier exemplarisch ein paar Auszüge vorgestellt, welche erklären, wie es zu den in Hypothesen 1 und 2 formulierten Sachverhalten kommen kann.

In den leitfaden-strukturierten Interviews wurden den Probanden Bruchtermgleichungen vorgelegt. Begonnen wurde jeweils mit der Aufforderung, möglichst geeignete erste Umformungsschritte vorzuschlagen. Dazu wurde den Probanden unbeschränkte Bedenkzeit eingeräumt. Eine der Gleichungen war die folgende:

$$\frac{3x^2-18}{2x^2-12}=x-\frac{3x^3-18x}{x^2-6}.$$

Auf die Frage, was er sich zu dieser Gleichung gedacht hatte, sagt Experte T:

> Also schon wieder Nennervergleich. Und hier (*zeigt auf Nenner links*) kann ich 2 ausklammern, dann ist es genau dasselbe. Ich sehe vor mir den Hauptnenner, ich weiß schon, das multipliziert man dann so und dann finde ich das sehr unangenehm. Ich weiß, dass ich x mit diesem Hauptnenner multiplizieren muss und dann gibt mir das zu viele Terme und so. Und so denke ich mir, das geht, aber das ist unangenehm so viel zu rechnen. Dann habe ich auch noch die Zähler berücksichtigt und sehe, dass hier (*zeigt auf Bruch links*) $3x^2$ und 18 und unten $2x^2$ und 12, wenn ich hier nun 3 ausklammere, habe ich eigentlich dasselbe wie wenn ich hier 2 ausklammere. Ja genau, ich muss ja 2 ausklammern. Wegen dem hier (*zeigt auf Nenner rechts*) habe ich schon gesehen, hier ist x^2-6 und hier (*zeigt auf Bruch links*) ist eben auch x^2-6 rausgekürzt und dann bleibt $\frac{3}{2}$ stehen. Dann denke ich mir, das geht hier so schön, und hier (*zeigt auf Bruch rechts*), wenn man so schaut, dann steht hier auch x^2-6, es ist die 3, die man rausnehmen kann, dann kürze ich ganz x^2-6 raus, bleibt $3x$, also $-2x$.

Diese Passage illustriert das, was Arcavi (1994, 26) als charakterisierend für den symbol sense nennt: „The idea is to develop reactions of the sort: ‚this involves too much hard, technical and uninteresting work, there *must* be another approach". Genau so reagiert Experte T, als er die mühsamen Folgen des Wegmultiplizierens der Nenner voraussieht und als Folge die Zähler in seine Überlegungen einbezieht. Der erste horizontale Blick weicht dem vertikalen Blick, was in eine geeignete Strukturierung mündet.

Eine ganz andere Auffassung von obiger Gleichung hat Novize G. Seine erste Äußerung ist:

> Also hier klammere ich zuerst einfach mal aus ... Hier (*zeigt auf Zähler rechts*) klammere ich ein x raus und hier (*zeigt auf Nenner links*) klammere ich eine 2 aus.

Auf die Nachfrage, was als Erstes auffiel, antwortet er:

> Ja, dass es hier (*zeigt auf 18x im Zähler rechts*) ein x hat und hier (*zeigt auf 18 im Zähler links*) nicht. Alles ist eigentlich symmetrisch außer diese x hier. Aber dann ist mir die 3 hier (*zeigt auf die Potenz im Zähler rechts*) aufgefallen. Das war wie ein x zuviel hier.

Die Umformungen von Novize G werden von syntaktischen Merkmalen (Symmetrie) geleitet und gehen nicht über ein Versuchshandeln hinaus. Charakteristisch ist, dass die Folgen der Umformungen nicht expliziert werden, da nicht vorausgeschaut wird.

Zwei weitere Passagen zur Gleichung

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{x}{4x+1}+4\cdot\frac{x}{x-4}=\frac{4x}{x-4}$$

seien angeführt. Experte S meint dazu:

> Also einfach mal spontan würde ich den zweiten Summanden, also $4 \cdot \frac{x}{x-4}$, auf die rechte Seite nehmen, weil wir dann gleichen Nenner haben, also das ins Auge fassen, und dann weiter sofort ersichtlich, dass das (*zeigt auf rechte Seite*) dann dasselbe ist, also es kann gestrichen werden. Dann ist am Schluss noch die Frage, Produkt 0. Als kann ich den Ausdruck in der Klammer gleich 0 setzen beziehungsweise den zweiten Bruchfaktor $\frac{x}{4x+1}$ gleich 0 setzen.

Als er aufgefordert wird, zu sagen, wie er die Gleichung angeschaut hat, sagt er:

> Im Prinzip von links nach rechts ein bisschen ... Dann ist mir aber sofort aufgefallen, dass Gleichnamigmachen hier vor einer möglichen Vereinfachung etwas mühsamer sein könnte, weil ja links die Klammer zuerst umgeformt werden müsste und vor allem eben, ich habe schon mal zwei Terme mit gleichem Nenner, also würde ich die schon mal zusammenfassen. Von der Strategie her alles auf die rechte Seite nehmen um im Prinzip zu verhindern, dass am Schluss auch noch Additionen oder Subtraktionen von Bruchtermen vorliegen, also habe ich links dann quasi einen Bruchterm, der als Einzelbruch geschrieben werden kann und auf der rechten Seite auch. Also ich meine, dass es gerade 0 ist, ist natürlich wieder dem Beispiel zuzurechnen. Aber es könnte auch etwas geben wie $\frac{5x-1}{x-4}$. Auf alle Fälle wäre in diesem Fall meine Strategie: links ein Bruchterm, rechts ein Bruchterm, dann schauen wir weiter.

Diese beiden Aussagen zeigen, wie für das Zwischenziel „links ein Bruchterm, rechts ein Bruchterm" Berechtigungen sowie Folgen gleichzeitig einbezogen werden. Berechtigt durch die gleichen Nenner $x-4$ und die Mühsamkeit eines allfälligen Gleichnamigmachens schätzt Experte S ab, was das Zusammenfassen der Brüche mit dem Nenner $x-4$ zur Folge hat. So wird das Wegfallen der beiden Brüche und die anschließende Trivialisierung erkannt, und Experte S legt sich auf die Umformung fest.

Eine solche Flexibilität ist beim Novizen B nicht ersichtlich. Fokussiert auf das Standardverfahren, setzt er sich fast ausschließlich mit den Nennern auseinander und schlägt als erste Umformung vor:

> Also bei dieser Aufgabe würde ich zuerst bruchfrei machen, weil es mich irritiert, wenn es so viele Brüche hat.

Im Interview wird nachgefragt, was „irritiert". Novize B sagt:

> Ich sehe nicht, wie es schön aufgehen würde. Also ich sehe schon $x-4$, $x-4$, das ist schon eine Gemeinsamkeit. Aber beim $4x+1$ und dann nochmals die 4, das gibt schon eine lange Schlange ... Dass es ähnlich aussieht, aber es ist nicht das Gleiche, also $4x+1$, $x-4$. Es ist ein x und eine 4 am Anfang, da denkt man sich, na gut, okay, könnte, Nein, ist es nicht, es ist nicht ähnlich. Das hat mich am Anfang irritiert.

Rathgeb-Schnierer (2006, 267) bezeichnet ein solches, jeglichen Zahlenblick vermissendes Lösungsverhalten als „Variante 1: Ein ‚mechanischer' Rechenweg, der nicht unbedingt zum Erfolg führt". Novize B versucht einen Hauptnenner zu finden, um die Nenner schließlich wegmultiplizieren zu können. Von diesem „Versuchshandeln" werden die Folgen nicht expliziert und die Berechtigung dazu nicht diskutiert. Die Aufmerksamkeit auf das Standardverfahren versperrt den Blick auf die Zähler und die einzelnen Brüche als Ganzes.

6.4 Interpretation

In der Expertiseforschung wird oft mit den Begriffen der Oberflächen- und Tiefenstruktur argumentiert. Wenn diese Begriffe als Kriterium dafür dienen sollen, wie die Gruppen der Experten und Novizen zu trennen sind, dann repräsentieren die syntaktischen Gruppenlabels das, was unter Oberflächenstruktur zu verstehen ist. In diesem Sinne ist in dieser Arbeit mit Oberflächenstruktur einer Bruchtermgleichung eine Art und Weise gemeint, wie der Lösende die Bruchtermgleichung auffasst: nämlich die Betonung von Strukturen in der Gleichung, die nicht mit lösungsrelevanten Inferenzen in direkter Beziehung stehen. Umgekehrt erfasst jemand in einer Gleichung Tiefenstrukturen, wenn aus seiner Strukturierung der Gleichung lösungsorientierte Inferenzen sichtbar werden.

Die Überlegungen dieses Artikels legen die Umschreibung von Oberflächen- und Tiefenstruktur durch die Begriffe des flexiblen Rechnens bzw. des structure oder symbol sense nahe. Experten haben einen besser ausgebildeten Zahlenblick beziehungsweise einen angemesseneren Blick für Strukturen. Die Auffassungen von Bruchtermgleichungen enthalten bei Experten lösungsrelevante Inferenzen. Bei Novizen lassen sich solche Auffassungen auch finden, jedoch in kleinerem Umfang. Offenbar liefern Konstrukte wie flexibles Rechnen bzw. structure oder symbol sense ein Trennungskriterium für Experten und Novizen. Experten unterscheiden sich von Novizen gerade darin, dass sie das flexible Rechnen wesentlich besser beherrschen. Damit ist ein empirisch abgestütztes Argument gegeben, weshalb flexibles Rechnen Teil der Unterrichtskultur sein darf.

Die Auszüge aus den Interviews legen nahe, dass sich Hypothese 1 und 2 bzw. lösungsorientiertes Strukturieren und Vorausschauen gegenseitig bedingen. Denn um vorauszuschauen muss man wissen, wohin man schauen will. Diese ist durch eine lösungsorientierte Strukturierung gegeben, welche als Berechtigung für die entsprechende Umformung dienen kann. Umgekehrt muss man voraus schauen um eine Strukturierung als lösungsorientiert zu erkennen, darum sind die impliziten Folgen abzuschätzen. Diese beiden Tätigkeiten bedingen sich also gegenseitig. Zum Erfassen einer Umformung gehört Wissen über Berechtigungen für diese Umformung wie auch über Folgen dieser Umformung. Versteht man eine dieser zwei Komponenten nicht, so versteht man die Inferenzen, die mit dem Gebrauch der Umformung verbunden sind, nicht. Dass Berechtigungen und Folgen gemeinsam zum Verstehen beitragen und notwendig sind, ist eine äußerst wertvolle Eigenschaft des Brandomschen Inferentialismus, die in Brandom (2000, 187 f.) ausführlich begründet wird.

Diese Auffassung des Gehalts einer Umformung als inferentieller Gehalt lässt sich mit den „drei Komponenten des Gleichungslösens“ von Malle (1993, 188 f.) in Zusammenhang bringen. Dort ist das Gleichungslösen als Zusammenspiel von „Erkennen von Termstrukturen“, „heuristischen Strategien“ (welche der Fähigkeit entsprechen „sich vorstellen zu können, wie sich diese Termstrukturen im Laufe der Umformungen verändern“ (ebd., 204)) und „Auswahl von Regeln“ konzipiert. Das kann durchaus inferentialistisch im Sinne von Brandom gelesen werden: Welche Umformung man macht (welche Regel man auswählt) wird dadurch bestimmt, wozu man berechtigt ist (welche Termstrukturen man erkennt) und welche Folgen sich daraus ergeben (welche Strategien sich anschließen). Der hier vorgestellte Vergleich zwischen Experten und Novizen belegt, dass Experten Beziehungen herstellen können zwischen ihren Berechtigungen (Hypothese 1) und den sich daraus ergebenden Folgen (Hypothese 2). Sie erfassen den inferentiellen Gehalt von Umformungen. Novizen erkennen solche Bezüge ebenfalls, aber in weniger ausgeprägtem Masse. Analog wird in Malle (1993) festgestellt, dass Schüler und Schülerinnen zum Teil markante Defizite aufweisen in der Termstrukturierung und beim Entwickeln heuristischer Strategien. Entsprechend karg und diffus ist das Verständnis der Regeln ausgebildet.

7 Epilog

Es werden zwei Bemerkungen nachgereicht. Erstens wurde hier eine enge Auswahl von Experten untersucht. Bei einem breiteren Spektrum muss mit zusätzlichen Effekten gerechnet werden. Zweitens eignet sich das Instrument des Sortierens auch für die pädagogische Diagnose. Über diese zwei Punkte wird in diesem Abschnitt berichtet.

Die dreizehn Experten der hier vorgestellten Untersuchung sind hochqualifiziert: sie verfügen über eine ausgezeichnete Fachkompetenz in der gymnasialen Mathematik, besitzen langjährige Unterrichtserfahrung und sind (fach)didaktisch ausgewiesen. Dank dieser engen Auswahl entstand zum Teil hohe Übereinstimmung in den Sortierungen der Experten. Das ändert sich, wenn die Expertengruppe inhomogener wird.

In Vorversuchen wurden auch drei Mathematiker einbezogen, die nicht unterrichten. Auch wenn die von ihnen erzeugten Gruppenlabels durchaus mit den hier vorgestellten Kategorien erfasst werden können, zeigte sich, dass alltägliches Unterrichten auf der gymnasialen Stufe den Umgang mit Bruchtermgleichungen beeinflussen kann. Nicht unterrichtende Mathematiker scheinen mehr dazu zu neigen, Bruchtermgleichungen auf Gleichungen der Form $p(x) = 0$ zu reduzieren ($p(x)$ ein Polynom in x) und schließlich nach dem Grad des Polynoms zu klassifizieren. Es braucht offenbar die Auseinandersetzung mit Lernenden und die sich daraus ergebende Begegnung mit der Vielfalt von Lösungswegen bei Bruchtermgleichungen, um eine Flexibilität beim Lösen solcher Gleichungen zu erhalten. Bruchtermgleichungen sind für den nicht unterrichtenden Mathematiker keine Alltagskost. Als Folge verfügt er über weniger Erfahrung auf diesem Gebiet und behandelt entsprechende Gleichungen (zum Teil) leicht anders.

Eine weitere Beobachtung wurde gemacht, als sieben Lehramtsstudierende zum Sortieren der zwanzig Bruchtermgleichungen aufgefordert wurden. Ihre Guppenlabels fallen mehrheitlich in die vier Kategorien der Grundauffassungen. Etwa zehn Prozent der Gruppenlabels sind aber den syntaktischen Kategorien oder der Kategorie Versuchshandeln zuzuordnen. Solche Gruppenlabels produzierten die hier untersuchten Experten nicht. Darüber hinaus war auch bei den Lehramtsstudierenden eine leicht höhere Tendenz auszumachen, die Bruchtermgleichungen auf die Form $p(x) = 0$ zu bringen und dann zu klassifizieren.

Diese Unterschiede in der Expertenwelt waren in der vorliegenden Arbeit kein zentrales Thema. Trotzdem wurden Beobachtungen in diese Richtung gemacht, die allerdings zu wenig abgesichert sind, um als Resultate präsentiert werden zu können. Hingegen bestätigen sie die Befunde von entsprechenden Untersuchungen wie zum Beispiel Bromme, Rambow & Strässer (1996).

Abschließend sei der Wert solcher Sortierungen für die pädagogische Diagnose herausgestrichen. Jede Sortierung enthält viel Information darüber, wie die entsprechende Person Bruchtermgleichungen auffasst. Erstens lassen sich fachliche Mängel sofort feststellen. Zweitens wird die Perspektive, aus der die Bruchtermgleichungen sortiert werden, sofort ersichtlich. Erst wenn der Lehrkraft diese Perspektive bekannt ist, versteht sie die Schüleraussagen und kann differenziert und fördernd reagieren. Drittens ist das Instrument des Sortierens ohne Mehraufwand im Unterricht einsetzbar. Das Sortieren erfüllt durchaus fachliche Ansprüche, und die Auswertung für Unterrichtszwecke ist schnell erledigt – oft sind die individuellen Eigenheiten auf einen Blick erkennbar. Dabei sei nochmals betont, dass die Ausbildung von symbole sense im Sinne von Arcavi (2005) im Unterricht nicht forciert, aber doch ermöglicht werden soll. Wie eine solche Unterrichtskultur auch bei einem kalküldominierten Thema wie Bruchterme und Bruchtermgleichungen aufrecht erhalten werden kann, ist in Rüede (2009) ausgeführt. Dort ist eine dem Dialogischen Lernmodell (Ruf & Gallin, 1998) folgende Unterrichtseinheit für die gymnasiale neunte Jahrgangsstufe vorgestellt, und an konkreten Beispielen und Problemstellungen wird die unterliegende Unterrichtskultur sichtbar.

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14* (3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25* (2), 42–47.

Beck, C. & Jungwirth, H. (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *20* (4), 231–259.

Brandom, R. B. (2000). *Expressive Vernunft*. Frankfurt: Suhrkamp.

Bromme, R., Rambow, R. & Strässer, R. (1996). Jenseits von "Oberfläche" und "Tiefe": Zum Zusammenhang von Problemkategorisierungen und Arbeitskontext bei Fachleuten des Technischen Zeichnens. In H. Gruber & A. Ziegler (Hrsg.), *Expertiseforschung. Theoretische und methodische Grundlagen* (S. 150–168). Opladen: Westdeutscher Verlag.

Chi, M.T.H., Feltovich, P. & Glaser, R. (1981). Categorization and Representation of Physics Problema by Experts and Novices. *Cognitive Science*, *5*, 121–152.

Gruber, H. (1994). *Expertise. Modelle und empirische Untersuchungen*. Beiträge zur psychologischen Forschung, Band 34. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien, New York: Springer.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145–152). Melbourne: PME.

Hoffmann, M.H.G. (2005). *Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz*. Frankfurt: Vittorio Klostermann.

Hußmann, S. & Schacht, F. (2009). Toward an Inferential Approach Analyzing Concept Formation and Language Processes. Lyon, CERME 6 (to appear).

Krummheuer, G. (1983). Das Arbeitsinterim im Mathematikunterricht. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J.H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 57–106). Köln: Aulis Verlag.

Malle G. (1993). *Didaktische Problema der elementaren Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Medin, D.L. & Ross, B.H. (1989). The specific character of abstract thought: Categorization, problem solving, and induction. In R.J Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 5, pp. 189–223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Neuweg, G.H. (2004). *Könnerschaft und implizites Wissen. Zur lehr-lerntheoretischen Bedeutung der Erkenntnis- und Wissenstheorie Michael Polanyis.* Waxmann: Münster.

Prediger, S. (2004). *Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen.* Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Band 6. München/Wien: Profil Verlag.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen.* Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Band I und II. Seelze: Kallmeyer.

Rüede, C. (2008). Sortieren von Gleichungen. unter http://www.igb.uzh.ch/institut/personen/lehrstuhlruf/christianrueede/Gruppieren_Web.pdf. (27.3. 2009)

Rüede, C. (2009). Bruchterme – Handeln wie Experten. *Praxis der Mathematik,* angenommen.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 25* (2), 130–148.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K.E. Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37–98). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Smith, J.P, diSessa, A.A & Roschelle, J. (1993). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3* (2), 115–163.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 29–47.

Wittgenstein, L. (1994). *Ludwig Wittgenstein. Ein Reader. Herausgegeben von Anthony Kenny.* Stuttgart: Reclam.

Adresse des Autors

Christian Rüede
Univerität Zürich
Institut für Gymnasial- und Berufspädagogik
Beckenhofstrasse 35
8006 Zürich

Manuskripteingang: 14. Juli 2008
Typoskripteingang: 30. März 2009