Aiso Heinze

Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext[1]

Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive

Zusammenfassung

Im Fokus des Beitrags steht die Darstellung von kognitionstheoretischen Ansätzen und Forschungsergebnissen zu dem Themenbereich Problemlösen. Dabei wird insbesondere auf Aspekte eingegangen, welche auch für Fragestellungen in der Mathematikdidaktik bedeutsam sind. Des Weiteren werden ausgewählte Förderprogramme für die individuelle Problemlösekompetenz vorgestellt und die Thematik im mathematischen und außermathematischen Kontext diskutiert.

Abstract

This article reviews different aspects of the research on problem solving. Based on a perspective from mathematics education, the presentation focuses on relevant approaches and results from cognitive theory. Moreover, some programs to foster individual mathematical problem solving competence are presented and the topic of problem solving is discussed in a mathematical and non mathematical context.

1 Einleitung

Problemlösen und Mathematik ist ein Begriffspaar, das auf vielfältige Weise Eingang in die kognitionspsychologische und mathematikdidaktische Literatur gefunden hat. Dabei geht es nicht nur darum, dass mathematisches Arbeiten das Lösen von Problemen umfasst, sondern insbesondere auch darum, dass die Mathematik anscheinend gut dazu geeignet ist, die Fähigkeit zum Problemlösen zu entwickeln bzw. zu fördern. Entsprechend wird Problemlösen als wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts angesehen (z.B. Winter, 1995). Zwar ist der Enthusiasmus der 1980er Jahre, die als Reaktion auf die Neue Mathematik der 1970er Jahre zum *Jahrzehnt des Problemlösens* (NCTM, 1980) ausgerufen wurden, wieder etwas gewichen, doch auch heute findet sich die Förderung der Problemlösekompetenz als Ziel in vielen Lehrplänen sowie in den von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten Bildungsstandards für das Fach Mathematik (Kultusministerkonferenz, 2003, 2004). Probleme werden dabei in der Regel im Sinne von Polyà (1949) als eine Form von Aufgabenstellungen verstanden, bei denen notwendige Schritte zur Lösung unbekannt sind (vgl. Abschnitt 2 für eine genauere Definition). Es geht also

[1] An dieser Stelle sei den Gutachter/innen für ihre Hinweise gedankt.
Eine Kurzfassung dieses Beitrags mit dem Titel „Problem solving revisited - Überlegungen zu einem Kernthema der Mathematikdidaktik“ findet sich in Kaune, Schwank & Sjuts (2005).

(JMD 28 (2007) H. 1, S. 3–30)

nicht um die Tätigkeit *Lösen von Problemen*, sondern um eine Fähigkeit *Problemlösen*, die sich auf bestimmte Problemtypen bezieht (vgl. Schoenfeld, 1992).

In der Kognitionspsychologie hat es Ende der 1970er Jahre auf Basis des informationsverarbeitenden Ansatzes (Newell & Simon, 1972) eine Differenzierung in zwei Stränge der Problemlöseforschung gegeben. Zum einen ist es die traditionelle Problemlöseforschung, die auf *statischen* Problemen basiert und damit Problemsituationen umfasst, die sich nur durch Handlungen des Problemlösers verändern können. Zum anderen wird verstärkt die Problemlösekompetenz von Probanden bei der Bearbeitung *dynamischer* Probleme untersucht. Bei diesen Problemen kann sich der Problemzustand auch ohne Handlungen des Problemlösers ändern. Diese Forschung basiert insbesondere auf Problemsituationen, die durch Computersimulationen vorgegeben werden. Ein bekanntes Beispiel dafür ist das Lohhausen-Szenario, bei dem der Proband die Funktion des Bürgermeisters der fiktiven Kleinstadt Lohhausen übernimmt (Dörner, Kreuzig, Reither & Stäudel, 1983). In der Mathematikdidaktik kommt dem dynamischen Problemlösen bisher nicht die Bedeutung zu, die das traditionelle statische Problemlösens erreicht hat[2]. Die folgenden Abschnitte beschränken sich deshalb auf das statische Problemlösen (vgl. Funke, 2003, für einen Literaturüberblick zum Problemlösen).

Dieser Beitrag strebt an, wesentliche Aspekte der mathematikbezogenen Problemlöseforschung aus kognitiver Sicht darzustellen. Aufgrund der Komplexität des Themas Problemlösen und der Fülle an vorhandener Literatur kann selbstverständlich nur eine Auswahl an Forschungsarbeiten behandelt werden. So wird beispielsweise der Fokus auf eine Beschreibung des Problemlöseprozesses gelegt; der Stand der Forschung zu Einflussfaktoren wie Metakognition und Einstellungseffekten (beliefs) kann aber nicht umfassend aufgezeigt werden. Es sei angemerkt, dass es alternativ zur klassischen kognitionstheoretischen Perspektive natürlich auch andere Sichtweisen in der Problemlöseforschung gibt. So wäre etwa der Ansatz „models & modeling perspectives" zu nennen (vgl. Lesh & Sriraman, 2005) oder die in Abschnitt 2.6 nur kurz skizzierten Forschungsansätze aus der UdSSR und DDR.

2 (Mathematisches) Problemlösen aus kognitiver Sicht

Betrachtet man die Literatur zum Thema Problemlösen, so findet man eine Reihe unterschiedlicher expliziter sowie impliziter Charakterisierungen des Begriffs „Problem" (vgl. auch Pehkonen, 2001). Fällt in einigen Beiträgen scheinbar jede Form von Aufgaben unter die Kategorie „Problem", werden in anderen Aufsätzen zwar keine klassischen

2 Wie Ergebnisse der PISA-Studie 2003 andeuten, sind die Beziehungen des dynamischen Problemlösens zur mathematischen Kompetenz nicht so eng wie beim traditionellen Problemlösen (PISA-Konsortium Deutschland, 2004). Dies bestätigt im Grunde den Ansatz von Dörner, der die Problemlöseforschung als eigene Dimension ansieht, die sich insbesondere von der Intelligenzforschung klar unterscheidet. Seine Kritik an der Intelligenzforschung resultiert gerade aus den hohen Korrelationen zwischen Intelligenz und Schulerfolg und den eher mäßigen zwischen den Ergebnissen klassischer Intelligenztests und dem Problemlösen in dynamischen Umgebungen (Dörner et al., 1983).

arithmetischen Routineaufgaben dafür aber alle Textaufgaben („word problems") dazugezählt. Ein weitreichender Konsens in der Mathematikdidaktik und auch der Psychologie und den Erziehungswissenschaften ordnet Problemen die Eigenschaft zu, dass eine Person bei der Problemlösung einen für sie nicht bekannten Lösungsweg beschreiten muss. Ist der Lösungsweg unmittelbar bekannt, so wird von einer (Routine-) Aufgabe gesprochen (vgl. Pehkonen, 2001). Diese spezifische Eigenschaft von Problemen weist darauf hin, dass der Problemcharakter nicht alleine von der speziellen Frage- oder Aufgabenstellung abhängig ist, sondern auch der Wissensstand einer als Problembearbeiterin angenommenen Person mit einbezogen werden muss[3]. Diese starke individuelle Komponente wirft eine Reihe von Schwierigkeiten für die Forschungs- und natürlich auch Schulpraxis auf. Deshalb wird beim Umgang mit Lernenden häufig implizit ein bestimmter Wissenstand als vorhanden angenommen, um somit eine Aufgabenstellung als Problem ansehen zu können.

Neben der o.g. Eigenschaft von Problemen, dass der Lösungsweg für den Problembearbeiter unbekannt ist, gibt es speziell in der Mathematikdidaktik weitere Forderungen, die in gewisser Weise den Anforderungsgrad des Problems spezifizieren. Hintergrund ist hier die Tatsache, dass auch ein unbekannter Lösungsweg vergleichsweise leicht sein kann und somit kaum Anforderungen an den Problemlösenden stellt. Entsprechend wird in der Mathematikdidaktik zusätzlich die Forderung nach einer „Barriere" (im Sinne von Dörner, 1976) erhoben, welche eine einfache Lösung verhindert. Dörner (1976) differenziert die individuell erlebten Barrieren in verschiedene Typen und beschreibt damit die verschiedenen Problemlöseanforderungen. So sind bei der Interpolationsbarriere zwar die einzelnen Lösungsschritte bekannt, nicht aber deren Kombination. Bei der Synthesebarriere sind dagegen einzelne Lösungsschritte unbekannt und müssen erst generiert werden. Die dialektische Barriere zeichnet sich dadurch aus, dass Zielzustand und Lösungsschritte nicht klar sind, sondern nur vage Vorstellungen existieren.

Die Differenzierung in Barrieretypen weist darauf hin, dass bereits die Charakterisierung von Problemen nicht unabhängig von einer Analyse des Problemlöseprozesses betrachtet werden kann. Der Ansatz, die kognitiven Tätigkeiten beim Problemlösen genauer zu untersuchen und dabei insbesondere Modelle mentaler Operationen während des Problemlöseprozesses abzuleiten, hat sich vor allem in der nachbehavioristischen Ära entwickelt. Selbstverständlich gab es auch schon zuvor im Umfeld der Arbeiten von Piaget bzw. der Gestaltpsychologie alternative Sichtweisen, aber der Behaviorismus mit seiner Fokussierung auf das von außen beobachtbare individuelle Verhalten dominierte die wissenschaftliche Ausrichtung. Erst später setzte sich mit dem informationsverarbeitenden Ansatz eine andere Sichtweise auf die Problemlöseprozesse durch.

Im folgenden Abschnitt 2.1 werden Aspekte eines kognitiven Modells des Problemlöseprozesses beschrieben (vgl. Anderson, 1996; Steiner, 2001) und anschließend auf die Bedeutung der Problemrepräsentation (2.2), Hindernisse beim Problemlösen (2.3) sowie den Transfer von bereichsspezifischen Problemlösekompetenzen (2.4) eingegangen. Anzumerken ist, dass keine Differenzierung nach Altersgruppen vorgenommen wird.

[3] Damit ist nicht nur der Problemcharakter sondern auch der Routinecharakter einer Aufgabenstellung abhängig vom Individuum. Entsprechend sind beispielsweise einfache Arithmetikaufgaben wie 7+8 für bestimmte Erstklässler ein Problem, für andere dagegen eine Routineaufgabe.

Zwar sind viele der dargestellten kognitiven Ansätze im Allgemeinen für Individuen vom Grundschul- bis zum Erwachsenenalter gültig, doch gibt es selbstverständlich gerade im Kindesalter spezifische Einschränkungen für den Problemlöseprozess, welche aus entwicklungspsychologischer Perspektive genauer zu betrachten wären. Viele der im Folgenden angeführten empirischen Untersuchungen beziehen sich auf Probanden im Sekundarstufenalter.

2.1 Aspekte eines kognitiven Modells des Problemlöseprozess

Der Problemlöseprozess kann in seiner Grundstruktur als Transformation eines Anfangszustandes in einen gewünschten Endzustand beschrieben werden, wobei eine Barriere zu überwinden ist. Dies geht in der Regel über verschiedene Teilschritte, durch die jeweils ein intermediärer Zustand (Zwischenzustand) erreicht wird. Die Transformation von einem Zustand zum nächsten erfolgt mittels Operationen. Sie sind durch Operatoren bestimmt, die zur Wissensbasis des Problemlösers gehören bzw. noch generiert werden müssen. Ziel eines Problemlösers ist es demnach, eine Sequenz von Operatoren zu finden, die einen vorliegenden Anfangszustand in den gewünschten Endzustand überführen. Die beim Problemlöser aktivierten Operatoren und die damit erreichbaren Zwischenzustände werden auch als Problemraum oder Suchraum bezeichnet. Dieser Suchraum kann insbesondere durch Heuristiken eingeschränkt werden.

Bereits an diesem einfachen Modell des Problemlöseprozesses wird deutlich, dass bei erfolgreichem Problemlösen verschiedene Arten von Wissen nicht nur vorhanden, sondern auch aktivierbar sein müssen. Man muss einerseits über die notwendigen Operatoren verfügen, also eine gesicherte Wissensbasis für die problemspezifische Domäne haben, oder in der Lage sein, diese Operatoren zu generieren. Andererseits muss eine Lösungsstrategie und damit eine Ziel führende Sequenz von Operatoren entwickelt werden können. Darüber hinaus muss der Problemlösende über metakognitive Strategien verfügen, um den Prozess zu kontrollieren und gegebenenfalls zu ändern.

Wie bereits erwähnt, wird zur Auswahl der Operatoren im Problemlöseprozess auf Strategien zurückgegriffen. Diese sind in ihrer Anwendung durch das Maß der Bereichsspezifizität des Problems teilweise beschränkt. Allgemeine Strategien sind beispielsweise das Anstreben der stärksten Unterschiedsreduktion (also der Minimierung der Differenz zwischen Endzustand und jeweils erreichtem Zwischenzustand), das Suchen nach Analogien (also das Anwenden einer bei einem ähnlichen Problem erfolgreichen Strategie), das Zerlegen eines komplexen Problems in einfachere Teilprobleme und die Mittel-Ziel-Analyse (sie ist durch ein Rückwärtsarbeiten gekennzeichnet, wobei mögliche Operatoren zum Erreichen von Teilzielen über das Antizipieren dieser Teilziele identifiziert werden). Problemlöser sind in der Regel je nach Problemschwierigkeit in der Lage, verschiedene Strategien einzusetzen, also auch nicht erfolgreiche Strategien durch andere Strategien zu ersetzen. In den 1980er Jahren wurde dies vor allem bei gut beschreibbaren Problemstellungen mit einer klaren Lösungsstruktur untersucht wie beispielsweise dem „Turm von Hanoi". So zeigten etwa Kotovsky, Hayes und Simon (1985), dass Probanden bei diesem Problem häufig mit der Strategie der Unterschiedsreduktion begannen, dann aber zur Mittel-Ziel-Analyse wechselten und Teilziele erstellten. Nicht auszuschließen ist auch ein Wechsel zwischen eher analytischen Phasen und eherspielerischen Probierphasen. Haussmann und Reiss (1990) modellierten Lösungen des Problems „Turm von Hanoi", bei denen neben Ziel gerichtetem, analytischem Arbeiten auch eher zufallsgesteuerte Prozesse nicht ausgeschlossen waren. Damit wurden Problemlöseprozesse simuliert, wie sie vorher experimentell bei 12 bis 15 Jahre alten Schülerinnen und Schülern beobachtet wurden.

Wird eine Problemlösestrategie wiederholt angewendet, so führt dies zu einer Prozeduralisierung dieser Strategie, die zunächst eher als deklaratives Wissen vorlag. Beispielsweise konnte Anderson (1982) in einer Untersuchung zum Lösen von geometrischen Beweisaufgaben die Prozeduralisierung der Anwendung von Kongruenzsätzen beobachten. Die Speicherung ganzer Lösungsverfahren als prozedurales Wissen führt zu einer Gedächtnisentlastung, die in allgemeinerer Form auch als *chunking* bezeichnet wird. Dabei sind *chunks* Muster, die aus verschiedenen Elementen und den dazugehörigen Beziehungen zusammengesetzt sind, und die in verschiedenen Problemen immer wieder auftreten. Sie haben den Vorteil, dass vorhandenes Wissen verdichtet wird, da chunks in gewisser Weise über ein Etikett abgespeichert werden. Im Rahmen des Experten-Novizen-Ansatzes zum Problemlösen zeigte sich, dass Experten umfangreiches Wissen in Form von chunks gespeichert haben und diese Informationseinheiten sowie mögliche Konsequenzen ihrer Anwendung abrufen können.

> People abstract and codify their experiences, and their codifications of those experiences shape what people see and how they behave when they encounter new situations related to the ones they have abstracted and codified (Schoenfeld, 1992, S. 352).

Novizen sind hingegen darauf angewiesen, bei gleichen Problemen sämtliche in den chunks enthaltene Schritte einzeln zu durchlaufen (Anderson, 1996).

2.2 Auswahl einer geeigneten Problemrepräsentation

Die Auswahl von Ziel führenden Operatoren aufgrund einer gewählten Strategie ist für ein Individuum in bestimmten Fällen erst dann möglich, wenn eine geeignete Repräsentation des Anfangszustands des Problems vorliegt. Um diese zu erreichen, muss gegebenenfalls eine Umstrukturierung der Problemsituation vorgenommen werden. Diese Umstrukturierungen sind bereits früh im Rahmen der Gestaltpsychologie untersucht worden, wobei auch mathematiknahe Probleme eine nicht unwesentliche Rolle spielten (Duncker, 1935; Wertheimer, 1945). Die Idee ist dabei, dass ein Problemlöser den Problemraum so umstrukturiert oder erweitert, dass eine neue *Gestalt* entsteht, die mehr Einsicht in die Zusammenhänge der Problemsituation liefert. Die neuen Beziehungen führen gegebenenfalls zu einem erfolgreichen Problemlösen. Beispiele sind das klassische *Neun-Punkte-Problem* oder das *Schachbrettproblem* (vgl. Kaplan & Simon, 1990). Beim Neun-Punkte-Problem sind neun Punkte in einem Quadrat in Reihen zu je drei Punkten angeordnet. Sie sollen in einem Zug mit vier geraden Linien verbunden werden, was nur möglich ist, wenn man die Geraden über die gegebenen Punkte (also einem imaginären Rahmen) hinaus verlängert. Ein Wechsel in der Perspektive führt hier also zur Lösung. Beim Schachbrettproblem werden aus einem Schachbrett zwei gegenüberliegende Eckfelder entfernt. Die Frage ist, ob man die restlichen Felder mit Dominosteinen auslegen kann. Wenn man sich überlegt, dass zwei nebeneinander liegende Felder auf dem Brett immer unterschiedliche Farben haben, die diagonal gegenüberliegenden

Felder aber gleichfarbig sind, so wird aus dem Problem eine einfache Abzähl- bzw. Rechenaufgabe. Man muss also die Felder nicht (gedanklich oder real) auslegen, sondern einzig und allein eine neue strukturelle Orientierung der Problemsituation vornehmen, um sie erfolgreich zu bearbeiten.

Dass die Problemrepräsentation bzw. ein Repräsentationswechsel für mathematische Probleme von Bedeutung ist, hat Zimmermann (2003a) anhand historischer Beispiele aufgezeigt. In der mathematikbezogenen Lehr-Lern-Forschung wurde die Frage der geeigneten Repräsentation eines Problems vor allem anhand von mathematischen Sachaufgaben analysiert. Bei diesem Aufgabentyp ist es essentiell, ein mentales Modell der Problemsituation aufzubauen (z.B. Kintsch & Greeno, 1985). Ein solches Situationsmodell repräsentiert die in der Aufgabe beschriebenen Beziehungen zwischen den vorkommenden Objekten und zwar partiell losgelöst vom konkreten Kontext. Damit liegt bereits eine Abstraktion der Problemsituation vor; diese kann aber je nach Problem durchaus mehr Merkmale (in Form von Beziehungen) enthalten als die ursprüngliche Situation. Der Aufbau eines Situationsmodells setzt voraus, dass die in der Aufgabe beschriebene Situation verstanden worden ist. Wie aus der Beschreibung des mentalen Modells hervorgeht, handelt es sich hier allerdings nicht mehr unbedingt nur um eine einfache Umstrukturierung des Anfangszustandes eines Problems, sondern es können bereits weitere Informationen abgeleitet worden sein (womit schon ein erster Zwischenzustand im Problemlöseprozess erreicht wäre). Ein differenzierteres Modell als Kintsch und Greeno (1985) liefert Reusser (1990). Er unterscheidet zwischen dem episodischen und dem mathematischen Situationsverständnis und rückt so den Verstehensprozess der Situation in den Vordergrund. Das mathematische Situationsverständnis entspricht dabei in etwa dem Verständnis zum Aufbau eines Situationsmodells bei Kintsch und Greeno (1985). Von großer Bedeutung ist nach Reusser (1990) aber vor allem das episodische Situationsverständnis. Damit ist ein Verständnis der in der Aufgabe beschriebenen Situation vor dem Hintergrund von Alltagswissen und Alltagsverständnis gemeint.

Wie in Stern (1992, 1997) zusammenfassend dargestellt, können bereits einfache Textaufgaben zur Addition und Subtraktion zweier Zahlen in 16 verschiedene Typen eingeteilt werden, denen vier verschiedene Situationsmodelle zugrunde liegen (Kombinationsaufgabe, Austauschaufgabe, Vergleichsaufgabe, Ausgleichsaufgaben). Die Ergebnisse der von ihr angeführten empirischen Studien zeigen, dass je nach Situationsmodell oder Typ auch stark abweichende Lösungsraten zu erwarten sind. Durch Untersuchungen, in denen die Formulierung von Textaufgaben variiert wurde, konnte nachgewiesen werden, dass weniger das sprachliche Verständnis, sondern vor allem das Situationsverständnis und der Aufbau eines adäquaten Situationsmodells die Schülerlösungen beeinflusst (Stern, 1997).

2.3 Hindernisse beim Problemlösen

In jedem Problemlöseprozess kann es Hindernisse geben, die ein erfolgreiches Lösen erschweren oder verhindern. Insbesondere individuelle Vorstellungen (z.B. epistemologische Überzeugungen), affektive Dispositionen oder auch die Wissensbasis des Problemlösers können die Auswahl einer geeigneten Problemrepräsentation oder passender Strategien beeinflussen. Bei diesen so genannten *Einstellungseffekten* werden mit der

Problemstellung deklaratives oder prozedurales Wissen bzw. kontextbezogene beliefs oder Dispositionen assoziiert, wodurch der Suchraum eingeschränkt werden kann (Anderson, 1996; Schoenfeld, 1992). Durch gespeicherte Wisseneinheiten, beliefs oder affektive Dispositionen wird das Problemlöseverhalten gerahmt und so eventuell in die falsche Richtung gelenkt. Anderson (1996) stellt dar, dass negative Folgen von Dispositionen durch Pausen im Problemlöseprozess beeinflusst werden können (sog. Inkubationseffekt). Da nach einer Pause der Problemlöseprozess häufig neu begonnen werden muss und dabei nicht selten andere Lösungsansätze betrachtet werden, kann dies dazu führen, dass ein vorher schwierig scheinendes Problem plötzlich leicht zu lösen ist. Der Mathematiker Bartel Leendert van der Waerden (1954, 1973[3]) nennt es den Einfall, der unvermittelt kommt und für ihn fast mystische Qualität hat. Gerade in der Mathematik sind viele Beispiele für solche plötzlichen Einsichten geschildert worden. Van der Waerden (1954, 1973[3]) schildert die oft zitierten Erlebnisse von Gauß („...wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst"), Hadamard („...fiel mir auf einmal eine seit langem gesuchte Lösung ein, ohne Überlegung meinerseits und in eine Richtung ganz verschieden von allen Richtungen, in denen ich früher gesucht hatte") und Poincaré („...in dem Augenblick, in dem ich meinen Fuss auf das Trittbett setzte, kam mir die Idee, ohne dass irgendetwas in meinen früheren Gedanken diese Idee vorbereitet hatte").

Auch individuelle beliefs beispielsweise zum Aufgabenbearbeiten im Mathematikunterricht leiten das Problemlöseverhalten. Dies zeigt sich bei Schülerbearbeitungen von Textaufgaben, die keinen Sinn ergeben (sog. Kapitänsaufgaben). Wie in Verschaffel (2002) zusammenfassend dargestellt ist, werden die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler vermutlich durch die im Unterricht behandelten Textaufgabentypen und den Umgang mit diesen Aufgaben geprägt:

> In sum, the available evidence suggests that students' beliefs about and tactic for word problem solving do not develop as a result of direct teaching, but rather emerge from nature of the textbook and test problems with which they are confronted and from the permanent interaction between teacher and students around these problems (Verschaffel, 2002, S. 72).

Auch die in Reiss und Thomas (2000) dargestellten Einschränkungen im wissenschaftlichen Denken bei Oberstufenschülerinnen und -schülern im Bereich des Beweisens in der Geometrie stellen Hindernisse beim Problemlösen dar. Insbesondere waren hier die bereits von Dunbar und Klahr (1989) sowie Tschirigi (1980) beschriebenen Verhaltensweisen beobachtbar, dass sich die Probanden nicht nur relativ früh für die Annahme einer Hypothese entscheiden, ohne Alternativen zu betrachten, sondern an dieser Hypothese auch dann noch festhalten, wenn diese durch empirische Evidenz falsifiziert wurde. Auch Heinrich (2004) konnte bei Probanden ähnliche Verhaltensweisen beobachten, die er als lösungshemmendes Steuerungsverhalten bezeichnet.

Eine ähnliche Beobachtung machte Schoenfeld (1992) in seinen Untersuchungen zum Problemlöseverhalten von College-Studierenden und Experten bei mathematischen Problemen. Experten beginnen damit, in einer Explorationsphase die Problemstellung systematisch zu analysieren, um dann einen Lösungsansatz zu generieren:

> As he worked through the problem the mathematician generated enough potential wild goose chasers to keep an army of problem solvers busy. (...) By monitoring his solution with care (...) he managed to solve the problem (Schoenfeld, 1992, S. 356).

Bei Studierenden wurde dagegen oft ein eher unsystematisches Explorationsverhalten beobachtet, das zu einer schnellen Annahme eines (nicht unbedingt korrekten) Lösungsansatzes führte.

> Roughly 60% of the solution attemtps are of the ,read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water' variety (Schoenfeld, 1992, S. 356).

Aber auch ein systematisches Herangehen von Experten auf einem Gebiet führt nicht unbedingt zum Ziel. Eine Untersuchung des Problemlöseverhaltens von 16 promovierten Mathematikern bei Problemen, für die es keine algorithmischen bzw. schematisierten Lösungswege gab, zeigte, dass nur die acht international renommierten Probanden auch Problemlöseexperten waren (DeFranco & Hilton, 1999). Zwar war bei den acht übrigen Mathematikern zweifelsohne fachwissenschaftliche Expertise vorhanden, sie stützten sich aber beim Bearbeiten des Problems nur auf mechanische („mechanical") Lösungsansätze, die bei diesen Problemen nicht Ziel führend waren, und ließen eine flexible Anwendung von Problemlöseheuristiken vermissen. Es ist zu vermuten, dass metakognitive Kontrollstrategien über das eigene Problemlöseverhalten hier nicht adäquat eingesetzt wurden.

Über die Steuerungsfähigkeit des Individuums in Bezug auf kognitive Operationen beim Problemlösen ist relativ wenig bekannt (siehe Übersicht in Heinrich, 2004). Es bleibt somit die Frage, wodurch das individuelle Verhalten im Problemlöseprozess bestimmt wird. Wie Heinrich (1999, 2004) im Bereich des mathematischen Problemlösens an Fallstudien aufzeigen konnte, verändern Oberstufenschüler nach einigen vergeblichen Anläufen z.B. die Betrachtungsweise auf das Problem. Sie verändern damit die Problemrepräsentation und kommen so (ganz im Sinne der Gestaltpsychologie) unter bestimmten Bedingungen doch noch zu einer erfolgreichen Problemlösung. Ausgelöst wird die Änderung der Problemrepräsentation nach Heinrich (1999) nicht selten durch die metakognitive Strategie des „Ausfällens des Gemeinsamen" (vgl. Dörner, 1994). Es werden also Merkmale identifiziert, die einem aktuellen und einem früheren Problemlöseprozess gemeinsam und dabei vermeintlich lösungshinderlich waren. Dörner (1994) weist dieser Strategie eine besondere Bedeutung zu, da sie erfolglose Problemlösestrategien, die aufgrund von individuellen Dispositionen verfolgt wurden, verhindern kann. Vermutlich ist diese Strategie des Ausfällens des Gemeinsamen auch am Zustandekommen des Inkubationseffekts beteiligt.

Die in der o.g. Studie von DeFranco und Hilton (1999) aufgezeigten Problemlöseverhaltensweisen erinnern an die Betrachtung von verschiedenen kognitiven Stilen beim Problemlösen. Hier gibt es unterschiedliche Ansätze der Differenzierung. So haben Groner und Groner (1990) in ihren Untersuchungen eine algorithmische und eine heuristische Orientierung beim Problemlösen identifiziert. Algorithmisch heißt in diesem Zusammenhang, dass auf bereits vorhandene, eventuell sogar standardisierte Lösungsansätze zurückgegriffen wird, während bei der heuristischen Orientierung ein auf die spezifische Problemgegebenheit angepasster neuer Weg gesucht wird. Die faktorenanalytisch entwickelten Skalen hat Hofmann (1996) auf ihre Verhaltensrelevanz beim Lösen von Mathematikproblemen durch Schülerinnen und Schüler der Klassen 8 und 9 ($N = 113$) untersucht. Er fand einen signifikanten Zusammenhang von $r = 0.26$ und damit eine allein durch diese Disposition aufgeklärte Varianz von knapp 7% der Leistungen beim mathematischen Problemlösen. Hofmann schließt, dass die spezifische Orientierung in

Bezug auf einen algorithmischen bzw. einen heuristischen Stil wesentlich beachtet werden sollte. Unklar ist allerdings, unter welchen Bedingungen die Entscheidung für oder gegen ein heuristisches Handeln in letzter Konsequenz getroffen wird. Auch die von Schwank (1990) herausgearbeitete Unterscheidung zwischen prädikativen und funktionalen Strukturen stellt eine solche Disposition dar. Ihre Umsetzung in geeignete Problemstellungen und damit ihre Berücksichtigung etwa im Mathematikunterricht ist in diesem Zusammenhang als hinderlich bzw. förderlich für den individuellen Problemlöseprozess zu werten.

2.4 Problemlösekompetenzen und Transfer

Wurden in den vorherigen Abschnitten Aspekte der Forschung zum Problemlöseprozess dargestellt, so soll im Folgenden die Frage nach einem Transfer von bereichsspezifisch erworbenen individuellen Kompetenzen zum Problemlösen diskutiert werden.

Wie zuvor gesehen, sind in einem Problemlöseprozess zur Bewältigung von Problemen ganz verschiedene Kompetenzen in ihrem Zusammenspiel notwendig. Es ist deshalb mehr als fraglich, ob Problemlösekompetenz als einheitliches Konstrukt angesehen werden kann. Für die PISA-Studie 2003 wurde Problemlösekompetenz definiert als die

> Fähigkeit einer Person, kognitive Prozesse zu nutzen, um sich mit solchen realen, fächerübergreifenden Problemstellungen auseinander zu setzen und sie zu lösen, bei denen der Lösungsweg nicht unmittelbar erkennbar ist und die zur Lösung nutzbaren Wissensbereiche nicht einem einzelnen Fachgebiet der Mathematik, der Naturwissenschaften oder des Lesens entstammen (OECD, 2003, S. 156).

In diesem Beitrag wird der Begriff Problemlösekompetenzen vergleichsweise pragmatisch (und synonym mit dem Begriff Problemlösefähigkeiten) verwendet. Darunter werden die kognitiven und auch motivationalen und volitionalen Fähigkeiten, Kenntnisse bzw. Bereitschaft eines Individuums verstanden, die zur erfolgreichen Bewältigung von Problemstellungen erforderlich sind (vgl. Weinert, 2001). Dem Autor ist bisher kein theoretisch fundiertes, breit akzeptiertes und empirisch verifiziertes Kompetenzmodell zum Problemlösen bekannt. Dies betrifft insbesondere auch die Entwicklung von Problemlösekompetenzen.

Die Frage des Transfers von Problemlösekompetenzen, d.h. inwieweit fachspezifisch erworbene Problemlösekompetenzen auf andere außerfachliche Probleme übertragbar sind, wird schon seit über einem Jahrhundert diskutiert. Die Auffassung, dass allgemeine geistige Fähigkeiten beim Menschen trainiert werden können und dann universell einsetzbar sind, kann sogar bis in das antike Griechenland zurückverfolgt werden. Insbesondere der Mathematik und der Logik wird dabei die Eigenschaft zugesprochen, den Geist zu disziplinieren. Dies fand sogar Eingang in Goethes Faust. Hier spricht Mephisto zum Famulus (zitiert nach der Reclam-Ausgabe von 1957, S. 56):

> Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum // Zuerst Collegium Logicum. //
> Da wird der Geist Euch wohl dressiert, // In spanische Stiefel eingeschnürt, //
> Daß er bedächtiger so fortan, // Hinschleiche die Gedankenbahn, //
> Und nicht etwa, die Kreuz und Quer, // Irrlichteliere hin und her.

Diese Doktrin der formalen Disziplin wurde zunächst auch in der Psychologie angenommen (z.B. Angell, 1908). Sie ging davon aus, dass beispielsweise Problemlösefähigkeiten, die in Mathematik erworben werden, in gleicher Weise in anderen außermathematischen Bereichen zur Verfügung stehen. Der Doktrin der formalen Disziplin stellte Thorndike aufgrund von empirischen Untersuchungen seine Theorie der identischen Elemente gegenüber. Thorndike und Woodworth (1901) hatten festgestellt, dass der angenommene Transfer nur minimal war. Aus der Theorie der identischen Elemente folgt, dass sich das Training einer Tätigkeit nur dann positiv auf eine andere Tätigkeit auswirkt, wenn sie gleiche Elemente enthalten. So können Lateinkenntnisse helfen, Französisch zu lernen (Thorndike, 1906). Allerdings war Thorndikes Theorie so einschränkend, dass der Transfer auch schon bei Problemen mit gleicher logischer Struktur ausgeschlossen wurde, die sich nur in Elementen der Oberfläche unterschieden.

Die Frage, ob und wie weit ein Transfer von Wissen überhaupt möglich ist, führte in den 1990er Jahren vor dem Hintergrund des situated learning Ansatzes (z.B. Lave & Wenger, 1991) noch einmal zu einer heftigen wissenschaftlichen Diskussion (zusammenfassend Klauer, 2001). Nach dem Ansatz des situated learning wird Wissen in einem bestimmten sozialen und inhaltlichen Kontext konstruiert und ist somit situativ und kontextuell gebunden. Probleme beim Transfer von Wissen sind demnach keine Defizite, sondern der Normalfall; auch das Phänomen des „trägen Wissens“ (Whitehead, 1929) lässt sich vor diesem Hintergrund erklären (wobei es allerdings auch andere Erklärungsansätze gibt, vgl. Renkl, 1996). So lassen sich die Beobachtungen zur Rechenfähigkeit bei brasilianischen Straßenkindern ebenfalls mit der Kontextuierung von Wissen deuten. Carraher, Carraher und Schliemann (1985) untersuchten die mathematischen Strategien von Kindern, die als Straßenhändler arbeiteten. Es zeigte sich, dass diese im Kontext des Straßenhandels fast alle vorgegeben Aufgaben korrekt lösen konnten (98%). Die gleichen Aufgaben vom Kontext abgelöst (also etwa die Aufgabe $5 \cdot 35$ zu lösen statt fünf Zitronen zu 35 Cruzeiros zu berechnen) wurden nur zu 37% korrekt bearbeitet. Die Lösungsrate stieg auf 74%, wenn die Aufgaben in Form von Textaufgaben gegeben wurden. Der Kontext der Textaufgaben erlaubte es anscheinend, dass die Kinder ihre Strategien aus dem Straßenhandel anwenden konnten. Die Untersuchung wirft die generelle Frage auf, inwieweit Problemlösefähigkeiten aus dem Alltagsleben im Klassenzimmer anwendbar sind (vgl. auch Abschnitt 4.1).

Insgesamt sind die Ergebnisse der Transferforschung als enttäuschend anzusehen. Transfer konnte bisher nur dann nachgewiesen werden, wenn es sich um sehr ähnliche Probleme im gleichen Kontext handelt (naher Transfer) oder wenn es um Probleme geht, die eine gleiche Struktur aufweisen (Übersicht bei Singley & Anderson, 1989). Letzteres setzt allerdings voraus, dass notwendiges Wissen dekontextualisiert vorliegt, also durch vielseitige Anwendungen aus dem Kontext herausgelöst und damit abstrahiert wurde (Messner, 1978). Für die mathematische Problemlösekompetenz heißt dies, dass die Problemlöseoperatoren und -strategien kontextgebunden gelernt und anschließend durch Dekontextualisierung abstrahiert werden müssen. Es ist fraglich, ob und inwieweit dieser Abstraktionsprozess vom Lernenden alleine geleistet werden kann (Steiner, 2001) oder ob grundsätzlich eine Anleitung notwendig ist. Als förderlich für den Abstraktionsprozess wird eine Flexibilisierung der Wissensstrukturen beispielsweise durch Anwendungen in unterschiedlichen Kontexten angesehen. Prenzel und Mandl (1993) schlagen explizit vor, beim Lernen von Inhalten auch ihre Verwendbarkeit für andere Ziele konkret zu thematisieren.

2.5 Fazit

Insgesamt lässt sich festhalten, dass verschiedene individuelle Merkmale die Problemlösekompetenz beeinflussen und deren Zusammenwirken gerade die Komplexität des Problemlösens ausmacht. Neben der bereichspezifischen Wissensbasis spielen die vorhandenen Problemlösestrategien und metakognitive Fähigkeiten eine entscheidende Rolle. Hinzu kommen individuelle Dispositionen in Form von bereichspezifischen beliefs sowie auch (was im Rahmen dieser Arbeit nicht angesprochen werden konnte) Interesse und Motivation. Die einzelnen Bereiche sind gerade auch wegen ihrer Bereichsspezifizität nicht unabhängig voneinander. So beeinflussen Interesse und Motivation für das Fach Mathematik sicherlich auch die beliefs über Mathematik sowie den Aufbau einer mathematischen Wissensbasis. Die Frage ist, wie diese verschiedenen Bereiche zusammenspielen bzw. ob ein zugrunde liegender Mechanismus identifiziert werden kann. Aktuell schlägt Schoenfeld (2005) diesbezüglich ein theoretisches Modell für das „problem-solving-in-action“ vor, welches die Elemente *knowledge* (= Wissensbasis + Problemlösestrategien), *goals*, *beliefs* und *decision-making* (umfasst u.a. Metakognition) enthält. Er geht davon aus, dass die beliefs eines Individuums die individuellen Ziele des Problemlöseprozesses beeinflussen sowie die in Abhängigkeit der Ziele aktivierte Wissensbasis bzw. Strategien. Je nach Wissensbasis, Strategien, Zielen und beliefs werden dann Entscheidungen getroffen.

Ein Transfer von Problemlösefähigkeiten scheint nur möglich, wenn diese in Form von abstrakten Wissensstrukturen vorliegen, die durch einen Abstraktionsprozess konstruiert werden. Dies impliziert Bedingungen für Problemlösetrainings, von denen im Abschnitt 3 einige vorgestellt werden. Genauer zu klären ist, wie sich die (mathematische) Problemlösefähigkeit im Mathematikunterricht entwickelt und wie der Unterricht diese Entwicklung beeinflusst bzw. welche Unterrichtsvariablen förderlich sind.

2.6 Andere Forschungsansätze

Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass es in der Mathematikdidaktik, der Psychologie und den Erziehungswissenschaften natürlich noch andere Perspektiven und Forschungsansätze zu dem Themenbereich Problemlösen gibt. Die Darstellung in den Abschnitten zuvor beschreibt einen Forschungsstrang, der in den letzten Jahrzehnten vor allem in der sog. „westlichen Welt“ eine wichtige Rolle spielte. Im Westen vergleichsweise wenig rezipiert wurden dagegen die Forschungsansätze sowjetischer Psychologen, deren Ergebnisse beispielsweise auch die Mathematikdidaktik in der DDR beeinflusste und die hier kurz angerissen werden sollen.

Die Grundidee der sowjetischen Psychologie basiert vor allem auf dem Tätigkeitskonzept, das von Rubinstein (1976) in den 1940er Jahren eingeführt und von Galperin und Leontjew (1966) als Basis für eine Charakterisierung des Denkens als Prozess (geistige Tätigkeiten) weiterentwickelt wurde. Ähnlich wie die Gestaltpsychologen geht es im Falle des Problemlösens hierbei um die Umstrukturierung eines Ausgangszustandes, wobei aber von einem Rückkopplungseffekt ausgegangen wird, d.h. vorausgegangene Denkresultate beeinflussen immer wieder nachfolgende Denkprozesse. Als wesentliche Komponenten insbesondere des mathematischen Denkprozesses werden die Synthese und die Analyse in ihrem Zusammenspiel angesehen. Dabei beginnt ein Problemlöseprozess zunächst mit einer Synthese in Form einer Gesamtschau auf das Problem. Sind die Problemmerkmale erfasst, erfolgt als Orientierung eine Analysephase, in der die wesentlichen Aspekte des Problems identifiziert werden, um zu einer Problemlösung zu kommen. Dabei finden immer wieder kurze Synthesephasen statt, in denen neue Erkenntnisse mit relevantem vorhandenem Wissen integriert werden.

Im Bereich der sowjetischen Problemlöseforschung ist vor allem Krutetskii zu erwähnen (vgl. Krutetskii, 1976). Er untersuchte in den 1950er und 1960er Jahren eine Reihe von Schülerinnen und Schülern, die verschiedene mathematische Fähigkeiten aufwiesen. Dabei wurde das Problemlöseverhalten der Lernenden anhand ihrer schriftlichen Lösungen, der aufgezeichneten Erklärungen sowie nachfolgend geführter diagnostischer Interviews analysiert. Eine wesentliche Erkenntnis Krutetskiis ist, dass sich starke und schwache Problemlöser darin unterscheiden, welche Merkmale einer Problemstellung sie wahrnehmen: Während gute Problemlöser eher die Problemstruktur fokussieren, verarbeiten schwache Problemlöser oft auch wenig nützliche Oberflächenmerkmale.

Die Erkenntnisse der Psychologie fanden Eingang in Lerntheorien und auch Konzepte zum Mathematikunterricht. Da nach Galperin und Leontjew (1966) das Wesen der geistigen Tätigkeiten in Orientierungstätigkeiten liegt, muss entsprechend eine hinreichende Orientierungsgrundlage vorhanden sein, um Denkprozesse erfolgreich durchführen zu können. In der DDR wurde dieser Ansatz beispielsweise von Lompscher (1976) sowie Steinhöfel, Reichold und Frenzel (1988) aufgegriffen.

Als wichtige Arbeiten zu heuristischen Lösungsverfahren im Hinblick auf das mathematische Problemlösen wären an dieser Stelle noch Danilowa (1964) und König (1975) zu erwähnen. Auch die Arbeiten von Bruder (2003) sind hier einzuordnen und werden mit dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Programm zur Förderung der Problemlösefähigkeit genauer beschrieben.

3 Förderung der mathematischen Problemlösekompetenzen

In der Mathematikdidaktik wurde insbesondere seit den 1980er Jahren eine Fülle von Vorschlägen gemacht, wie ein für die Problemlösefähigkeit förderlicher Unterricht aussehen kann. Viele dieser Vorschläge basieren auf theoretischen Überlegungen und Erfahrungen, die in die Konzeption von Unterrichtselementen eingeflossen sind. So gibt beispielsweise Kilpatrick (1985) eine Klassifizierung von Ansätzen zur Förderung von Problemlösefähigkeiten an. Er analysierte Maßnahmen über einen Zeitraum von 25 Jahren und teilt die Förderungsansätze in die folgenden Gruppen ein: *Osmosis* (implizites Lernen durch individuelles Lösen von Problemen), *Memorization* (Kennenlernen von Teilprozessen des Problemlöseprozesses), *Imitation* (Lernen durch Nachahmen von Experten), *Cooperation* (Lernen durch kooperatives Arbeiten in Gruppen) und *Reflection* (Lernen durch Reflektion der eigenen Problemlösetätigkeiten). Auch Zech (1998) listet in seinem Standardwerk zur Mathematikdidaktik verschiedene Methoden auf, mit denen im Mathematikunterricht die Problemlösefähigkeit gefördert werden soll. Inwieweit die vorgeschlagenen Ideen in der Realität tatsächlich ihr Ziel einer Förderung von Problemlösefähigkeiten erreichen, wurde allerdings in den wenigsten Fällen mit standardisierten Methoden bei einer größeren Schülerstichprobe evaluiert. Aus verschiedenen Gründen fand die Evaluation oft nur in Einzelfällen statt.

Die Schwierigkeiten bei der Ausarbeitung von Fördermaßnahmen für die mathematische Problemlösekompetenz gehen sicherlich auch auf Defizite der Forschung zur Entwicklung der mathematischen Problemlösefähigkeit (individuell und im Mathematikunterricht) zurück. Es gibt bisher keine elaborierten Theorien zur Entwicklung dieser Fähigkeit (insbesondere im Rahmen der sozialen Interaktion des Unterrichtsgeschehens). Entsprechend ist es kaum möglich, optimale Maßnahmen für den Unterricht abzuleiten. Punktuell liegen dagegen Ergebnisse für die Individualebene vor. So zeigte die Münsteraner Studie über Problemlösungsprozesse bei unlösbaren Problemen, dass bereits bei Grundschulkindern viele der Strategien verfügbar sind, die auch Erwachsene verwenden. Zudem halten sich die Kinder auch an logische Regeln, die allerdings nach einer bestimmten Hierarchie geordnet sind (Stein, 1996, 1999; Buchartz, 2003).

Mathematikdidaktische Ansätze zum problemlösenden Unterricht orientieren sich häufig an einem oder mehreren der Bereiche *Wissensbasis*, *Problemlösestrategien*, *Metakognition* und *Dispositionen.* So wird für den Bereich der Wissensbasis diskutiert, in welcher Form und auf welchem Niveau Wissen über mathematische Begriffe vorliegen muss (Vollrath, 1984). Die Fragestellung, wie Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation im Unterricht umgesetzt werden kann, wird in einem langjährigen Forschungsprogramm an der Universität Osnabrück untersucht (Cohors-Fresenborg, 1996). Empirische Ergebnisse auf Basis von TIMSS-Aufgaben zeigen hier, dass Schülerinnen und Schüler an zwei Versuchsschulen bessere Mathematikleistungen erreichten als eine Vergleichsstichprobe im Rahmen der TIMS-Studie (Cohors-Fresenborg & Klieme, 2000)[4]. Wichtiger Aspekt des Osnabrücker Curriculums ist die Hervorhebung metakognitiver Elemente im Unterricht. Wie Sjuts (2003) unter Bezug auf Reusser (1998) darstellt, kann eine Förderung metakognitiver Kompetenzen nicht inhaltsfrei und unverbindlich erfolgen. Neben einer didaktisch-fachlichen Einbindung, bei der insbesondere adäquate Aufgabenstellungen hervorgehoben werden, ist ebenso eine sozial-unterrichtliche Einbindung notwendig, in der die Lernenden unter Anleitung, Beratung, Unterstützung und Sicherstellung der Lehrkraft den Erwerb mathematischen Wissens mit dem Erwerb metakognitiver Kenntnisse und Fertigkeiten verknüpfen. Sjuts (2003) folgert, dass die Förderung von Metakognition eines didaktisch-sozialen Vertrags bedarf. Entsprechende Vorschläge wurden auf der Grundlage empirischer Ergebnisse auch von Schneider und Hasselhorn (1988) in Form von Instruktionsprinzipien für einen metakognitionsförderlichen Unterricht herausgearbeitet. Dass zur Förderung metakognitiver Kompetenzen eine bewusste Wissensbasis notwendig ist, deuten die Ergebnisse von Kretschmer (1983) an. In seiner Studie mit zwölfjährigen Schülerinnen und Schülern stellte er fest, dass das Steuerungsverhalten im Problemlöseprozess eher assoziativ denn

[4] Dies ist insbesondere auch deshalb auffällig, weil den Versuchsklassen aufgrund des Osnabrücker Curriculums Stoff im Umfang von einem Halbjahr fehlt.

reflektiert ablief. Entsprechend folgert er, dass zunächst ausreichend Erfahrungen mit heuristischen Strategien vorhanden sein müssen, bevor über diese in einem produktiven Sinne reflektiert werden kann. Zimmermann (2003b) schließt daraus, dass Heuristiken zunächst implizit erlernt werden sollen, bevor sie zu einem späteren Zeitpunkt bewusst gemacht werden.

Auch bei dem vierstufigen Schema zum Problemlösen von Polyà (1949) handelt es sich um eine Anleitung, die neben verschiedenen strategischen Hinweisen auch metakognitive Aspekte betont. Polyà, in gewisser Weise der Vater des Problemlösens (aus mathematischer Sicht), unterteilte aufgrund von Beobachtungen an Studierenden sowie eigenen theoretischen Überlegungen den Problemlöseprozess in vier Phasen und entwickelte daraus eine Anleitung, die Lernende beim Lösen von mathematischen Problemen unterstützen soll. Im ersten Schritt geht es zunächst um das vollständige *Verstehen des Problems*. Hier geht es zweifellos darum, eine geeignete Problemrepräsentation aufzubauen und entsprechend ein Situationsmodell abzuleiten, für das die vorliegende Wissensbasis adäquat ist. Im zweiten Schritt geht es um die *Entwicklung einer Lösungsidee*. Wesentlich ist die Zurückführung der aktuellen Aufgabe auf bekannte Aufgabentypen bzw. vorhandenes Wissen. Es geht darum, für den Problemraum geeignete Operatoren zu finden. Explizit sieht Polyà auch die Möglichkeit einer Pause vor, falls man keine Lösungsidee generieren kann. Im dritten Schritt geht es schließlich um die *Ausarbeitung einer Lösung* und die damit verbundene kritische Prüfung jedes einzelnen Lösungsschritts. Der letzte Schritt beinhaltet eine *Kontrolle des Ergebnisses* sowie die Überlegung, wie die Lösung bzw. Lösungsmethode für andere Probleme nutzbar gemacht werden kann. Dieser Schritt umfasst in gewisser Weise einen möglichen Transfer der Lösungsmethode, der durch einen Abstraktionsprozess (Dekontextualisierung von der ursprünglichen Problemsituation) ermöglicht werden soll.

Obwohl mit dem Schema von Polyà eine Anleitung zum Problemlösen vorliegt, die mit kognitionspsychologischen Modellen konsistent ist, ist die Implementation dieser Idee in Form eines Problemlösetrainings im Mathematikunterricht keinesfalls trivial. Ein bekanntes Problem bei Trainingsstudien zum Strategieerwerb ist beispielsweise, dass die Lernenden die erwünschten Strategien zwar erwerben, aber in entsprechenden Situationen nicht verwenden. Dieses Phänomen, das Flavell und Wellman (1977) als Produktionsdefizit beschreiben, ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Lernenden mit anderen, eventuell auch suboptimalen Strategien besser zurechtkommen oder dass ein Aufruf der neu erlernten Strategien zu viele kognitive Ressourcen verbraucht und so für die Lernenden eher hinderlich ist (*cognitive load theory*, vgl. Sweller, 1994).

Umstritten ist zudem, ob Problemlösestrategien unabhängig von einer Wissensbasis gefördert werden können, oder ob diese Strategien nicht immer gleich mit einem Kontext gebundenen Schema verknüpft sind. Letzteres würde bedeuten, dass erlernte Strategien sich mit Elementen des Trainingskontextes zu chunks verbinden, die bei einem Problemlöseprozess aufgerufen werden. Der Transfer über den Trainingskontext hinaus wäre damit nicht möglich (Owens & Sweller, 1989; Lawson, 1990; Sweller, 1990).

Chinnappan und Lawson (1996) stellen in diesem Zusammenhang eine Klassifikation von Strategien vor und unterscheiden sechs Kategorien je nach Grad der Bereichsspezifität (*task-specific*, *domain-specific*, *domain-related*, *task-oriented (beliefs)*, *executive* und *metacognitive-heuristic*). In zwei Studien mit Zehntklässlern (N = 26 und N = 42) wurde jeweils ein dreiwöchiges Training (17 Unterrichtsstunden) von *executive strategies* (*planning, allocation of attention, selection and monitoring activity*), also bereichsunspezifischen Strategien, beim Lösen von Geometrieaufgaben durchgeführt. Das Training fand im regulären Mathematikunterricht auf Basis von Materialien statt. Eine Kontrollgruppe bekam die gleichen Materialien ohne Strategieanweisungen. Der Unterricht wurde für beide Gruppen von einem der Projektleiter übernommen. Die Ergebnisse des Vergleichs von Vortest und Nachtest zeigten, dass das Training sowohl für einen nahen Transfer als auch für einen weiten Transfer im Bereich der Geometrie erfolgreich war, ein Transfer bereichsunspezifischer Strategien hier also möglich war.

Unklar bleibt, ob Problemlösetrainings im Mathematikunterricht unter Realbedingungen erfolgreich sind, d.h. ohne eine fortlaufende Betreuung von Lehrkräften und/oder Schülern von außen. In den folgenden Abschnitten werden drei ausgewählte aktuelle Forschungsprogramme zur Förderung der individuellen mathematischen Problemlösefähigkeit im Mathematikunterricht vorgestellt. Diese basieren jeweils auf materialgestützten Lernumgebungen und fokussieren einzelne Teilbereiche der Problemlösekompetenz, für die ein naher Transfer angestrebt wird. Die systematische Evaluation in Vor- und Nachtest-Designs zeigt, dass eine Förderung der Problemlösefähigkeit im regulären Mathematikunterricht gelungen ist.

3.1 Das Unterrichtskonzept zur Förderung von Problemlösekompetenzen nach Bruder

In der Darmstädter Arbeitsgruppe um Regina Bruder wurde im Rahmen eines DFG-Projektes ein Unterrichtskonzept zur Förderung von Problemlöse- und Selbstregulationskompetenzen ausgearbeitet, implementiert und evaluiert. Das Konzept basiert einerseits auf Polyà (1949) und greift andererseits auf den Ansatz der *geistigen Beweglichkeit* von Lompscher (1976) zurück. Geistige Beweglichkeit zeigt sich beim Problemlösen mit mathematischen Mitteln in verschiedenen Erscheinungsformen, die mit Reduktion, Reversibilität, Aspektbeachtung, Aspektwechsel und Transferierung bezeichnet werden. Den Erscheinungsformen lassen sich jeweils heuristische Techniken, Hilfsmittel oder Prinzipien zuordnen, wie Aspektwechsel, Strategie des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens, heuristisches Transformationsprinzip (ausführlich in Bruder, 2003).

Im Mathematikunterricht sieht Bruder (2003) für das Erlernen von Heurismen vier Etappen vor. Die erste Etappe (Reflektion) sieht zunächst die Gewöhnung an heuristische Methoden und Techniken vor. Dabei werden heuristische Techniken implizit verwendet, aber nicht von der Lehrperson thematisiert. Anschließend folgt das Bewusstmachen einer speziellen Methode oder Technik anhand eines markanten Beispiels (Strategiebereitstellung). In der dritten und vierten Etappe (Kontexterweiterung durch flexible Strategieanwendung) folgen kurze Übungen zur neu erlernten Methode bzw. Technik, die in verschiedenen Aufgabenvarianten angewendet werden soll, und dann vertiefende Übungen, in denen die „unbewusste“ Strategieanwendung, d.h. eine Prozeduralisierung angestrebt wird. Ähnlich wie Zimmermann (2003b) vorschlägt, stellt Bruder (2003) zunächst eine Phase des impliziten Strategieerwerbs voran, um diese erst in der zweiten Phase explizit zu machen und zu reflektieren.

In einer außerunterrichtlich organisierten Trainingsstudie wurden zunächst Teile des Problemlöse- und Selbstregulationstraining probiert und optimiert. Im Anschluss wurde dann in einer ersten Interventionsstudie in neun Schulklassen (Jahrgangsstufen 7 bis 10) das ausgearbeitete Unterrichtskonzept implementiert. Die beteiligten Lehrkräfte wurden über Fortbildungen in das Konzept eingewiesen und setzten es über den Zeitraum eines Schuljahres um. Zu Schuljahresbeginn gab es jeweils eine explizite Einführung in das Problemlösen, während in den folgenden Monaten Problemlöseelemente in die Inhaltsbereiche des Unterrichts und der Hausaufgaben integriert wurden (Komorek, Bruder & Schmitz, 2004). Im Zuge der Intervention wurden mittels verschiedener Erhebungsinstrumente zahlreiche Daten gesammelt. Die mathematischen Leistungstests (Vor-Nachtest-Design) zeigten für sechs der neun Klassen positive Ergebnisse. Auf der Individualebene profitierte vor allem das schwächste Leistungsdrittel von diesem Unterrichtskonzept, während die übrigen Leistungsgruppen kaum Veränderungen zeigten. Für die Klassenstufen 7 und 8 ergab eine Detailanalyse, dass die Verwendung heuristischer Strategien vom Vortest zum Nachtest zugenommen hatte und sich positiv auf die Leistung auswirkte (Komorek, Bruder & Schmitz, 2004). Die Aussagekraft dieser ersten Studie ist aus verschiedensten Gründen noch beschränkt (z.B. ausgewählte Lehrkräfte, keine Kontrollgruppe), eine Feldstudie zur Validierung ist derzeit in Auswertung.

3.2 Das IMPROVE-Programm von Mevarech und Kramarski

Die Förderung von metakognitiven Fähigkeiten ist ein wichtiger Aspekt der Förderung von Problemlösekompetenzen. So gelang es beispielsweise Schoenfeld (1989) durch Trainingsprogramme, bei denen insbesondere metakognitive Aspekte des Problemlösens fokussiert wurden, den Anteil von Lernenden mit unsystematischem Vorgehen von durchschnittlich 60% auf etwa 20% zu senken. Anzumerken ist, dass es bei den Trainings um die Förderung metakognitiver Fähigkeiten und bereichsspezifischer Strategien ging (Chinnappan & Lawson, 1996). Positive Effekte bei Schülerleistungen im mathematischen Problemlösen durch metakognitive Trainingseinheiten konnten auch in den Studien von Lester, Garofalo und Kroll (1989) sowie beim IMPROVE-Programm von Mevarech, Kramarski und Kollegen (Mevarech & Kramarski, 1997) gezeigt werden. Insbesondere Lester et al. (1989) heben hervor, dass das Training am effektivsten ist, wenn es bereichsspezifisch angelegt ist.

Bei dem in Israel entwickelten IMPROVE-Programm handelt es sich um eine Unterrichtsmethode, die in der Tradition von Polyà (1949) steht und (1) die Förderung von Strategieerwerb und metakognitiven Prozessen, (2) das kooperative Lernen in leistungsheterogenen Gruppen und (3) ein produktives Feedback zu einem Gesamtkonzept integriert. IMPROVE ist ein Acronym für *Introducing new concepts, Metacognitive questioning, Practicing, Reviewing and reducing difficulties, Obtaining mastery, Verification* und *Enrichment.* Der Bereich *metacognitive questioning* ist noch einmal unterteilt in Fragetypen (*comprehension questions, strategic questions, connection questions*), die den Lernenden bei der Problemlösung unterstützen sollen. Metakognitive Aktivitäten werden durch *prompt cards* und andere Lernmaterialien initiiert und unterstützt.

Das IMPROVE-Programm wurde in diversen Interventionsstudien evaluiert, wobei in einigen Untersuchungen in verschiedenen Experimentalgruppen nur Teile des Programms durchgeführt wurden (Mevarech & Kramarski, 1997; Mevarech, 1999; Kramarski, Mevarech & Armani, 2002). Bei den in Mevarech und Kramarski (1997) vorgestellten Untersuchungen handelt es sich um Interventionsstudien in Jahrgangsstufe 7, die sich inhaltlich vor allem auf die Algebra beziehen. IMPROVE wurde dabei in den regulären Mathematikunterricht von drei Klassen (N = 99) implementiert und über einen Zeitraum von einem Halbjahr mit einer Kontrollgruppe (fünf Klassen, N = 148) verglichen. Der Unterricht wurde von den regulären Lehrkräften erteilt. In einer zweiten Studie wurde das Programm für ein ganzes Schuljahr in Klasse 7 eingesetzt (sechs Experimentalklassen, N = 164 und drei Kontrollklassen, N = 101). In beiden Studien waren die Experimentalgruppen den Kontrollgruppen in einem Nachtest deutlich überlegen. Starke Effekte wurden für das mittlere und obere Leistungsdrittel festgestellt, während sich das untere Leistungsdrittel nicht signifikant von der entsprechenden Gruppe in der Kontrollstichprobe unterschied. Besonders stark waren die Leistungsunterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe bei Aufgaben zum Beweisen und Begründen, aber auch bei anderen Aufgabentypen (z.B. Textaufgaben) zeigten sich deutliche Effekte. Eingeschränkt werden die Ergebnisse dieser beiden Studien durch das Design. Es gab eine Einteilung der Kontrollgruppen in leistungshomogene Gruppen, während die Experimentalklassen leistungsheterogen waren. Mevarech und Kramarski (1997) heben aber hervor, dass es andere Evaluationsstudien für IMPROVE gibt, in denen die Kontroll- und Experimentalgruppen in leistungsheterogenen Klassen unterrichtet wurden.

3.3 Die Lernumgebung „Heuristische Lösungsbeispiele" von Reiss und Renkl

Auf Grundlage von empirischen Ergebnissen zu Beweiskompetenzen bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe sowie Videoanalysen zum Unterricht über das mathematische Beweisen entwickelten Reiss und Renkl (2002) das Konzept der *heuristischen Lösungsbeispiele*. Es handelt sich dabei um eine didaktische Erweiterung der bereits erfolgreich evaluierten Lernumgebung *Lösungsbeispiele* (z.B. Renkl, 2001), die sich bisher aber nur auf algorithmische Problemstellungen bezog.

Bei Lösungsbeispielen handelt es sich um fertig gelöste Beispielprobleme, die aus der Problemstellung, den Lösungsschritten und der Lösung bestehen. Die Lernenden sind beim Lernen aus Lösungsbeispielen angehalten, sich die einzelnen Lösungsschritte selbst zu erklären, um so ein Lösungsschema für das gegebene Problem zu generieren. Die Bearbeitung mehrerer Lösungsbeispiele zu gleich strukturierten Problemen sorgt für eine Dekontextualisierung des erworbenen Lösungsschemas. Der Erfolg der Lösungsbeispiele gegenüber dem problemorientierten Lernen wird mit der *cognitive load theory* (Sweller, 1994) erklärt: Während beim problemorientierten Lernen gleichzeitig kognitive Ressourcen für Aufgabenlösung und Konstruktion eines abstrakteren Lösungsschemas verwendet werden müssen, werden bei Lösungsbeispielen keine kognitiven Ressourcen durch die Aufgabenlösung gebunden.

Im Gegensatz zu den klassischen Lösungsbeispielen wird bei den heuristischen Lösungsbeispielen nicht nur der Lösungsweg abgebildet, sondern vor allem auch der

Lösungsprozess. Damit werden die heuristischen Strategien explizit gemacht und bleiben nicht, wie beispielsweise bei einem fertig vorgegebenen Beweis, unerkannt. Die heuristischen Lösungsbeispiele sind bisher für geometrische Beweisprobleme der Jahrgangsstufen 8 entwickelt worden. Der dargestellte Beweisprozess basiert auf den Phasen des Beweismodells von Boero (1999).

In einer Interventionsstudie mit 243 Schülerinnen und Schülern (zehn Gymnasialklassen) wurde die Lernumgebung (ein Set aus drei Lösungsbeispielen) evaluiert (Heinze, Reiss & Groß, 2006). Die Experimentalgruppe umfasste dabei sechs Klassen (N = 150), die Kontrollgruppe vier Klassen (N = 93). Im Rahmen des regulären Unterrichts zum Beweisen und Begründen in Klasse 8 wurden in den Experimentalklassen die letzten fünf Unterrichtsstunden durch die Lernumgebung Lösungsbeispiele ersetzt. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten alleine oder in Partnerarbeit die ausgegebenen Materialien mit den dargestellten Beweisprozessen zu drei geometrischen Beweisproblemen. Die Lehrkräfte waren unterstützend tätig. Während Kontroll- und Experimentalgruppe im Vortest keinen signifikanten Unterschied in der Leistung aufwiesen, war die Experimentalgruppe im Nachtest signifikant besser. Eine Effektgröße von $d = 0.47$ weist auf einen mittleren Effekt hin. Bezogen auf die mehrschrittigen Beweisprobleme in den Tests zeigte sich sogar eine Effektstärke von $d = 0.59$. Damit hat sich die Lernumgebung gerade bei der Lösungshäufigkeit von mehrschrittigen Beweisaufgaben hypothesenkonform ausgewirkt. Eine Einteilung der Probanden nach Leistungsdritteln (bezogen auf den Vortest) ergab, dass insbesondere das schwache und das mittlere Leistungsdrittel bei der Lösungshäufigkeit von ein- und mehrschrittigen Aufgaben zugelegt haben (vgl. Heinze, Reiss & Groß, 2006).

3.4 Zusammenfassung

Insgesamt lässt sich feststellen, dass es in Bezug auf das mathematische Problemlösen evaluierte Instrumente gibt, welche die individuelle Problemlösefähigkeit im Rahmen des regulären Mathematikunterrichts fördern. Auch wenn immer noch umstritten ist, inwieweit ein Transfer von Problemlösestrategien unabhängig von der bereichsspezifischen Wissensbasis möglich ist, so zeigt sich in den vorgestellten Programmen, dass Transfer innerhalb eines Bereiches (z.B. Kongruenzgeometrie) möglich ist. Es ist zu vermuten, dass diese Flexibilität von Strategien innerhalb eines Bereichs Voraussetzung dafür ist, dass die Bedeutung dieser Strategien auch übergeordnet (z.B. in der Mathematik) erkannt wird. Dies könnte beispielsweise dadurch passieren, dass durch das Erkennen von Analogien (die gleiche Strategie wurde bisher unabhängig voneinander in Algebra und Geometrie angewendet) Abstraktionsprozesse in Gang gesetzt werden.

Auch wenn über die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten noch keine stabile theoretische Basis vorhanden ist, so ist gesichert, dass diese Fähigkeit zunächst bereichsspezifisch erworben wird. Genau darauf zielen die vorgestellten Programme ab, sodass sich ihre Förderung nicht nur auf generelle Strategien oder Metakognition bezieht, sondern diese auch mit inhaltlichen Aspekten verknüpft wird. Allerdings gibt es in allen Programmen auch Hinweise auf eine Generalisierbarkeit der trainierten Strategien.

4 Zum Zusammenhang von inner- und außermathematischer Problemlösekompetenz

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird die Problemlösekompetenz häufig eng mit dem Schulfach Mathematik in Verbindung gebracht. Die Ursache dafür liegt wohl in der Annahme, dass die Mathematik mit ihren abstrakten Strukturen gut dazu geeignet ist, die allgemeine Fähigkeit des Problemlösens zu entwickeln, sodass diese auch auf außermathematische Bereiche angewendet werden kann. Entsprechend könnte man auch umgekehrt vermuten, dass die Problemlösefähigkeiten von Schülerinnen und Schülern, die in außermathematischen Bereichen erworben wurden, produktive Wirkung in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen zeigen. Wie allerdings anhand der zuvor dargestellten Problematik des Transfers von Problemlösefähigkeiten deutlich geworden ist (vgl. Abschnitte 2.4 und 3), dürften die Wechselwirkungen von außer- und innermathematischen Problemlösekompetenzen nicht automatisch vorhanden sein, sondern müssen entsprechend gefördert werden.

Im Folgenden werden Ergebnisse von PISA 2003 sowie einer eigenen Studie zum Zusammenhang des inner- und außermathematischen Problemlösens vorgestellt und diskutiert.

4.1 Fächerübergreifendes Problemlösen bei PISA 2003

Im Rahmen der PISA-Studie 2003 wurde neben den drei Bereichen Mathematik, Naturwissenschaften und Lesen im internationalen Teil u.a. auch die analytische Problemlösekompetenz[5] erhoben (PISA-Konsortium Deutschland, 2004). Der Problemlösetest von PISA 2003 umfasst die drei Skalen *Entscheidungen treffen*, *Systeme analysieren und entwerfen* und *Fehler erkennen*. Zu den ersten beiden Bereichen gab es jeweils vier Aufgaben, zu dem letzten Bereich zwei Aufgaben. Da die Aufgaben in einigen Fällen unterteilt waren, ergaben sich bei der Auswertung insgesamt 27 Items. In allen Problemen ging es darum, die Problemsituation zu verstehen, Abhängigkeiten und Beziehungen zu erkennen, daraus Handlungsmöglichkeiten zu generieren und schließlich eine Handlung auszuführen (für eine ausführlichere Beschreibung und Beispielaufgaben vgl. PISA-Konsortium Deutschland, 2004, Kap. 5).

Die Ergebnisse fielen für die deutsche Population (N = 4660) vergleichsweise positiv aus. Mit 513 Punkten auf der PISA-Skala befand sich Deutschland bei der Problemlösekompetenz oberhalb des OECD-Durchschnitts. Während 14% der deutschen Population als Risikogruppe eingestuft wurde (bezogen auf eine berufliche Tätigkeit, in der die getesteten Fähigkeiten relevant sind), gelten 58% als hinreichend gut vorbereitet. Die Unterschiede bei den Teilpopulationen aus den verschiedenen Schulformen fallen erwartungsgemäß aus (PISA-Konsortium Deutschland, 2004).

---

[5] Wie in der Einleitung erwähnt, wird hier kein Bezug zur dynamischen (d.h. komplexen) Problemlösekompetenz genommen. Diese war in einer nationalen Ergänzungsstichprobe ebenfalls in PISA erhoben worden.

Auffällig an den Ergebnissen des Problemlösetest ist nach Ansicht der Autoren, dass es einen starken korrelativen Zusammenhang zu den mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler gibt, wobei die PISA-Ergebnisse in Mathematik absolut gesehen allerdings nur im internationalen Mittelfeld liegen (503 Punkte). Die latente Korrelation zwischen Problemlösekompetenz und mathematischer Kompetenz liegt national wie international bei etwa $r = 0.90$ und bezogen auf die Schulformen in Deutschland zwischen $r = 0.80$ (Gymnasium) und $r = 0.88$ (Integrierte Gesamtschule). Selbst wenn man den Einfluss der kognitiven Grundfähigkeiten und der Lesekompetenz konstant hält, bleibt die latente Korrelation noch substanziell (bezogen auf die deutsche Teilstichprobe $N = 535$, für die Ergebnisse zu kognitiven Grundfähigkeiten vorlagen). Die hohen Werte für die korrelativen Zusammenhänge relativieren sich allerdings, wenn man die statistischen und testtheoretischen Effekte mit einbezieht. Die PISA-Daten sind mittels des Rasch-Modells modelliert worden, wobei für die Populationsparameter (wie z.B. Korrelationen) zur Vermeidung von Schätzungenauigkeiten *plausible values* berechnet wurden (vgl. PISA-Konsortium Deutschland, 2004, Kap. 12.2). Es handelt sich also um messfehlerbereinigte modellierte Daten, deren Korrelationen entsprechend höher ausfallen.

Unabhängig von der hohen latenten Korrelation zwischen mathematischer Kompetenz und Problemlösekompetenz bleibt ein anderes auffälliges Phänomen bei den PISA-Ergebnissen. Nur in zwei anderen Ländern (Japan und Ungarn) ist der Unterschied zwischen Problemlösekompetenz und mathematischer Kompetenz größer als in Deutschland, das sich mit Neuseeland den „dritten Platz" teilt (PISA-Konsortium Deutschland, 2004, S. 170). Unter der Annahme, dass sich die Problemlösekompetenz zu großen Teilen außerhalb der Schule entwickelt, schließen die Autoren, dass das kognitive Potenzial der Lernenden im Mathematikunterricht in Deutschland nur mangelhaft ausgeschöpft wird, um die individuelle mathematische Kompetenz aufzubauen. Detailanalysen zeigen, dass bei der deutschen Population nur im oberen Leistungsquartil die beiden Kompetenzen ähnlich gut entwickelt sind. Bei den übrigen Schülerinnen und Schülern, darunter fast die gesamte Hauptschul- und Realschulstichprobe, ist die Problemlösekompetenz z.T. sehr viel besser als die mathematische Kompetenz.

4.2 *„Wer ist der Täter? Begründe!"* versus *„Zeige, dass $\alpha = \beta$!"* Argumentationsfähigkeit beim Problemlösen in unterschiedlichen Kontexten

Der Zusammenhang zwischen Problemlösekompetenzen in inner- und außermathematischen Kontexten ist auch Gegenstand einer Teilstudie eines DFG-Projektes zum Beweisen und Begründen in der Geometrie[6]. Im Gegensatz zu dem Problemlösetest in PISA 2003 ging es hierbei in der Hauptsache nicht nur darum, Probleme zu lösen, sondern zusätzlich die Lösung mit Argumenten zu begründen. Im Fokus stand also die Untersuchung einer möglichen Korrespondenz zwischen der Argumentationsfähigkeit beim inner- und außermathematischen Problemlösen. Die dabei verwendeten Instrumente waren zum einen ein Leistungstest zum Argumentieren, Beweisen und Begründen im

[6] „Beweisen und Begründen in der Geometrie" (RE 1247/4-1) im DFG-Schwerpunktprogramm „Bildungsqualität von Schule".

Bereich der Geometrie und zum anderen ein Test aus drei Detektivaufgaben, bei denen gegebene Informationen logisch kombiniert werden mussten, um den oder die Täter zu identifizieren (vgl. die Beispielaufgabe im Anhang). Es handelt sich also um Aufgaben, die in der Kategorisierung von PISA 2003 unter Entscheidungsprobleme fallen.

Beide Tests wurden in einer Stichprobe von 483 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 8 des Gymnasiums vorgelegt. Für die drei Items der Problemlöseskala ergab sich eine Reliabilität von $\alpha = 0.66$ (Cronbach). Bei der Auswertung des Problemlösetests zeigte sich, dass etwa ein Viertel der Probanden alle Täter und etwa die Hälfte bei zwei Aufgaben die Täter richtig erkannt hat; knapp 4% haben keinen Täter richtig identifiziert (vgl. Tabelle 1). Zieht man allerdings die eingeforderten Begründungen hinzu, so verschlechtern sich die Ergebnisse drastisch. Bei zwei möglichen Punkten pro Aufgabe (ein Punkt für den richtigen Täter und eine teilweise Begründung, zwei Punkte für eine vollständig korrekte Lösung) ergab sich für den Test das Gesamtergebnis in Tabelle 2.

Tabelle 1: Richtigen Täter erkannt

Anzahl richtiger Täteridentifikationen	Prozent der Probanden	kumulierte Prozente
0	3,7	3,7
1	19,0	22,8
2	51,3	74,1
3	25,9	100,0

Knapp 39% der 483 Probanden gelingt es nicht, auch nur eine teilweise Begründung für eine der Täteridentifizierungen anzugeben; dabei haben wie zuvor erwähnt knapp 96% der Probanden mindestens einen Täter richtig erkannt. Es muss dazu gesagt werden, dass bei der Korrektur der Begründungen vergleichsweise „liberal“ vorgegangen wurde und die Begründungen der Schülerinnen und Schüler nur inhaltlich gewertet wurden (es wurde also kein Wert auf sprachliche Kriterien, ganze Sätze etc. gelegt, sondern auch stichwortartige Begründungen wurden akzeptiert).

Der Zusammenhang zu den Ergebnissen des Mathematiktests zum Beweisen und Begründen ist zwar hochsignifikant, aber gering. Es ergibt sich nur eine Korrelation von $r = 0.18$. Der korrelative Zusammenhang verringert sich noch, wenn man bei den Problemlöseaufgaben nur das Erkennen des richtigen Täters akzeptiert und die Begründung vernachlässigt.

Tabelle 2: Ergebnisse des Problemlösetests: Identifizierung und Überführung der Täter

Punktezahl	Prozent der Probanden	kumulierte Prozente
0	39,1	39,1
1	11,8	50,9
2	16,1	67,1
3	9,1	76,2
4	14,1	90,3
5	2,1	92,3
6	7,7	100,0

Eine Auswertung nach Leistungsdritteln ergibt, dass das obere und mittlere Leistungsdrittel mit 36% bzw. 32% der Problemlösepunkte etwa gleichauf liegen, während das untere Leistungsdrittel mit 24% der Punkte signifikant schwächer im Problemlösetest abschneidet. Umgekehrt ergeben sich bei den durch den Problemlösetest definierten Extremgruppen (0 Punkte vers. 6 Punkte) zwar signifikante Unterschiede bei dem Leistungstest, aber auch nicht in dem Ausmaß, das man erwartet hätte (35% zu 44% Lösungshäufigkeit).

Insgesamt lässt sich festhalten, dass ein Großteil der Schülerinnen und Schüler durchaus in der Lage ist, bei den Detektivaufgaben den richtigen Täter zu erkennen (25,7% bei allen Aufgaben, 77,2% zumindest bei zwei Aufgaben), sie aber erhebliche Schwierigkeiten haben, die gedanklich vollzogenen Überlegungen argumentativ darzulegen. Starke Zusammenhänge zwischen Problemlösekompetenz und mathematischer Kompetenz konnten in dieser Untersuchung nicht nachgewiesen werden[7]. Der Unterschied zu den PISA-Ergebnissen ist möglicherweise auf Unterschiede im Untersuchungsdesign zurückzuführen. So beschränkt sich unser Leistungstest auf den Bereich des Beweisens und Begründens in der Geometrie und die Stichprobe auf das Gymnasium. Des Weiteren wird mit den Detektivaufgaben nur eine der drei PISA-Skalen zur Problemlösekompetenz angesprochen und dies nur auf einen Kontext beschränkt.

5 Diskussion und Fazit

Betrachtet man zusammenfassend die dargestellten Ergebnisse bzw. den Stand der wissenschaftlichen Diskussion zu dem Thema Problemlösekompetenzen, so ist festzustellen, dass trotz einer bisher fehlenden empirisch gesicherten Theorie zur individuellen Entwicklung dieser Kompetenz eine Reihe von notwendigen, förderlichen bzw. auch hinderlichen Bedingungen bekannt sind. Eine adäquate Orientierungsbasis bieten hier vor allem die Bereiche *Wissensbasis*, *Problemlösestrategien*, *Metakognition* und *affektive Dispositionen*, die sich sowohl für die Entwicklung von Trainingsprogrammen als auch für die Erklärung von empirischen Ergebnissen heranziehen lassen.

So können bei den differierenden Ergebnissen zur mathematischen und außermathematischen Problemlösekompetenz in PISA 2003 Aspekte der Bereiche Wissensbasis und Dispositionen als Ursache vermutet werden. Da bei der Lösung mathematischer Probleme das Wissen um mathematische Fakten und Begriffe eine bedeutende Rolle spielt, ist es erklärlich, dass bei der Gruppe der Leistungsstarken die Differenz zwischen mathematischer und außermathematischer Problemlösekompetenz geringer ausfällt als bei den leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern. Auch dürfte die Motivation bei den außermathematischen Problemen höher sein als bei den mathematischen. Für einen Transfer von außerschulisch gewonnener Problemlösekompetenz in den Mathematikunterricht wäre zudem eine Analyse der bei den PISA-Aufgaben möglichen und bevorzugt verwendeten Problemlösestrategien von Bedeutung.

In diesem Zusammenhang sind auch die kurz dargestellten Ergebnisse in Abschnitt 4.2 zu sehen. Die schwachen Korrelationen zwischen den Resultaten eines Leistungstests zum geometrischen Beweisen und Begründen und den Ergebnissen der drei Detektivaufgaben dürften auf eine Reihe von unterschiedlichen Anforderungen bei den beiden Tests zurückzuführen sein. Gemeinsam ist den Aufgaben die Exploration von Argumenten, deren Ziel gerichtete Kombination und schließlich die Darstellung der Argumentation. Dies geschieht jedoch auf vollkommen unterschiedlichen Wissensbasen, nämlich geometrisches Faktenwissen des aktuellen und vergangenen Schuljahrs versus Wissen, das im Alltag häufig verwendet wird. Auch die individuellen Einstellungen (Motivation,

[7] Die hier dargestellten Ergebnisse konnten inzwischen in einer neuen, erweiterten Studie repliziert werden. Erste Ergebnisse finden sich in Rudolph-Albert und Kessler (im Druck).

beliefs) zu den beiden Aufgabenbereichen dürften sich stark unterscheiden (mathematische Begründungsaufgaben, die schwierig sind, versus Detektivaufgaben, wie sie in jedem Krimi vorkommen). Fraglich ist zudem, ob die bei den Detektivaufgaben verwendeten Problemlösestrategien bei den geometrischen Problemen adäquat sind.

Die laut PISA 2003 unzureichend genutzte Integration von außermathematischen Problemlösekompetenzen in den Mathematikunterricht kann unter der Perspektive des Transfers von Kompetenzen betrachtet werden. Wie bereits in Abschnitt 2.4 dargestellt, ist dieser Transfer alles andere als ein einfacher Übertragungsprozess, da das Wissen kontextualisiert erworben wird. Dies bedeutet, dass für den Unterricht zunächst solche mathematischen Probleme in Frage kommen, zu denen strukturgleiche außermathematische Probleme existieren. Bei diesen könnte, eine ausreichende mathematische Wissensbasis und motivationale Einstellung vorausgesetzt, ein Transfer von Problemlösestrategien und metakognitiven Kontrollstrategien für mathematische Probleme nutzbar gemacht werden. Nicht zu vernachlässigen sind dabei mögliche Einstellungseffekte durch mathematische beliefs der Lernenden, die durch den Mathematikunterricht aufgebaut wurden und Problemlöseprozesse im mathematischen Kontext behindern könnten.

Es ist nahe liegend, dass im Zusammenhang des Transfers von außermathematischen Fähigkeiten in einen mathematischen Kontext individuelle mentale Modelle von mathematischen Begriffen eine bedeutende Rolle spielen dürften. Diese sind in der Mathematikdidaktik insbesondere in den letzten zehn Jahren als *Grundvorstellungen* mathematischer Begriffe verstärkt betrachtet worden. Sie beschreiben „Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen“ (vom Hofe, 1995, S. 98) und dienen einem Individuum somit als Bindeglied zwischen Mathematik und Realität. Ergänzende Analysen von Mathematikitems aus PISA 2000 haben beispielsweise gezeigt, dass den Grundvorstellungen beim Lösen von Modellierungsaufgaben erhebliche Bedeutung zukommt (Blum, vom Hofe, Jordan & Kleine, 2004). Dies lässt vermuten, dass sie auch bei einem Transfer von außermathematischer Problemlösekompetenz in einen mathematischen Kontext eine wesentliche Funktion einnehmen.

Von Interesse ist an dieser Stelle natürlich, wie die vergleichsweise große Differenz zwischen mathematischer Kompetenz und außermathematischer Problemlösekompetenz in der deutschen PISA-Stichprobe erklärt werden kann (vgl. Abschnitt 4.1). Hier wären vergleichende länderspezifische Analysen bzw. ergänzende Untersuchungen wünschenswert, um empirisch gesicherte Anhaltspunkte zu förderlichen Bedingungen für eine erfolgreiche Nutzung von außermathematischen Problemlösekompetenzen in mathematischen Lernprozessen zu erhalten.

6 Literatur

Anderson, J. [1982]: Acquisition of Cognitive Skills. In: *Psychological Review* 89(1982), 369-406.

Anderson, J. [1996]: Kognitive Psychologie. Heidelberg: Spektrum.

Angell, J. R. [1908]: The doctrine of formal discipline in the light of the principles of general psychology. In: *Educational Review* 36(1908), 1–14.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. [2004]: Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In: M. Neubrand (Hrsg.): *Mathema-*

tische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: VS-Verlag, 145–157.
Boero, P. [1999]: Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In: *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* 7/8(1999).
Bruder, R. [2003]: Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus" zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Kiel: IPN.
Burchartz, B. [2003]: Problemlöseverhalten von Schülern beim Bearbeiten unlösbarer Probleme. Hildesheim: Franzbecker.
Carraher, T. N., Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. [1985]: Mathematics in the streets and in the schools. In: *British Journal of Developmental Psychology* 3(1985), 21–29.
Chinnappan, M. & Lawson, M. J. [1996]: The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. In: *Learning and Instruction* 6(1996)1, 1–17.
Cohors-Fresenborg, E. [1996]: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation - Eine neue Sicht der Schulmathematik. In: G. Kadunz et al. (Hrsg.): *Trends und Perspektiven.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 85–90.
Cohors-Fresenborg, E. & Klieme, E. [2000]: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Eine Evaluationsstudie auf der Basis von TIMSS-Instrumenten. In: M. Neubrand (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000.* Hildesheim: Franzbecker, 149–152.
Danilowa, E. F. [1964]: Wege zur Lösung geometrischer Aufgaben. Berlin : Volk und Wissen.
De Corte, E., Verschaffel, L. & Op' t Eynde, P. [2000]: Self- regulation. A characteristic and a goal of mathematics education. In: M. Boekaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.): Handbook of Self-Regulation. San Diego: Academic Press, 687–725.
DeFranco, T. C. & Hilton, P. [1999]: Distinguishing Features of Mechanical and Human Problem-Solving. In: *Journal of Mathematical Behavior* 18(1999)1, 79–84.
Dörner, D. [1976]: Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.
Dörner, D. [1994]: Selbstreflexion und Handlungsregulation: Die psychischen Mechanismen und ihre Bedingungen. In: W. Lübbe (Hrsg.): *Kausalität und Zurechnung – über Verantwortung in komplexen kulturellen Prozessen.* Berlin: DeGruyter, 199–222.
Dörner, D., Kreuzig, H.-W., Reither, F. & Stäudel, T. (Hrsg.) [1983]: Lohhausen: Vom Umgang mit Komplexität. Bern: Huber.
Dunbar, K. & Klahr, D. [1989]: Developmental differences in scientific discovery strategies. In: D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.): *Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 109–143.
Duncker, K. [1935]: Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Julius Springer.
Flavell, J. H. & Wellman, H. M. [1977]: Metamemory. In: R. V. Kail & J. W. Hagen (Eds.): *Perspectives on the development of Memory and Cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 3–33.
Funke, J. [2003]: *Problemlösendes Denken.* Stuttgart: Kohlhammer.
Galperin, P. J. & Leontjew, A. N. [1966]: Probleme der Lerntheorie. Berlin: Volk und Wissen.
von Goethe, J. W. [1957]: Faust I. Der Tragödie erster Teil. Stuttgart: Reclam.
Groner, R. & Groner, M. T. [1990]: Heuristische versus algorithmische Orientierung als Dimensionen des individuellen kognitiven Stils. In: K. Grawe, R. Hänni, N. Semmer & F. Tschan (Hrsg.): *Über die richtige Art Psychologie zu betreiben.* Göttingen: Hogrefe, 315–330.
Haussmann, K. & Reiss, M. [1990]: KASIMIR. Die Modellierung einer iterativen Strategie beim Lösen eines rekursiven Problems. In: K. Haussmann & M. Reiss (Hrsg.): *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse.* Göttingen: Hogrefe, 12–30.
Heinrich, F. [1999]: Welches „Steuerungsverhalten" vermag das Entstehen kreativer Produkte beim Bearbeiten mathematischer Probleme zu fördern? In: G. David, T. Fritzlar, F. Heinrich, T. Schmitz & B. Zimmermann (Hrsg.): *Kreatives Denken und Innovationen in ma-*

thematischen Wissenschaften. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik 29, Friedrich Schiller Universität Jena, 75–91.

Heinrich, F. [2004]: Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. Hamburg: Kovac.

Heinze, A., Reiss, K. & Groß, C. [2006]: Learning to prove with heuristic worked-out examples. J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.): *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3. Prag (CZ): Charles University, Faculty of Education, 273–280.

Hofmann, H. U. [1996]: Heuristische versus algorithmische Orientierung als kognitiver Stil. In: *Zeitschrift für pädagogische Psychologie* 10(1996)2, 77–84.

vom Hofe, R. [1995]: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

Kaplan, C. A. & Simon, H. A. [1990]: In search of insight. In: *Cognitive Psychology* 22(1990), 374–419.

Kaune, C., Schwank, I. & Sjuts, J. (Hrsg.) [2005]: Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V.

Kilpatrick, J. [1985]: A retrospective account of the past 25 years on teaching mathematical problem solving. In: E. A. Silver (Ed.): *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1-15.

Kintsch, W. & Greeno, J. G. [1985]: Understanding and solving word arithmetical problems. In: *Psychological Review* 92(1985), 109–129.

Klauer, K. J. [2001]: Situiertes Lernen. In: D. Rost (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogischen Psychologie*. 2. Auflage. Weinheim: Beltz/PVU, 635–640.

König, H. [1975]: Anwendung von Hilfsmitteln aus der Heuristik beim Lösen geometrischer Probleme. In: *Mathematik in der Schule* 13(1975)11, 644–651.

Komorek, E., Bruder, R. & Schmitz, B. [2004]: Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In: J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.): *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung*. Münster: Waxmann, 54–76.

Kotovsky, K., Hayes, J. R. & Simon, H. A. [1985]: Why are some problems hard? Evidence from Tower of Hanoi. In: *Cognitive Psychology* 17(1985), 248–294.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R. & Arami, M. [2002]: The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. In: *Educational Studies in Mathematics* 49(2002)2, 225–250.

Kretschmer, I. F. [1983]: Problemlösendes Denken im Unterricht. Frankfurt am Main: Lang.

Krutetskii, V. A. [1976]: The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Edited by J. Kilpatrick & I. Wirszup. Chicago University Press: Chicago.

Kultusministerkonferenz (KMK) [2003]: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Bonn: KMK. http://www.kmk.org

Kultusministerkonferenz (KMK) [2004]: Entwurf "Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)". Bonn: KMK. http://www.kmk.org

Lave, J. & Wenger, E. [1991]: Situated Learning. Legitimate peripheral participation. Cambridge: University Press.

Lawson, M. J. [1990]: The case for Instruction in the use of general problem-solving strategies in mathematics teaching: a comment on Owen and Sweller. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 21(1990)5, 403–410.

Lesh, R. & Srimaran, B. [2005]: Mathematics Education as a Design Science. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 37(2005)6, 490–505.

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. [1989]: Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem-solving behavior. In: D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* New York: Springer, 75–88.

Lompscher, J. [1976]: Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit. Berlin: Volk und Wissen.

Messner, H. [1978]: Wissen und Anwenden. Zur Psychologie des Transfers im Unterricht. Stuttgart: Klett-Cotta.

Mevarech, Z. R. [1999]: Effects of metacognitive training embedded in cooperative settings on mathematical problem solving. In: *Journal of Educational Research* 92(1999)4, 195–205.

Mevarech, Z. R. & Kramarski, B. [1997]: IMPROVE: a multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. In: *American Educational Research Journal* 34(1997)2, 365–394.

National Council of Teachers of Mathematics [1980]: An agenda for action. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [1989]: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Newell, A. & Simon, H. A. [1972]: Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

OECD (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung) (Hrsg.) [2003]: Rahmenkonzept von PISA 2003. Paris: OECD Publications.

Owens, E. & Sweller, J. [1989]: Should problem solving be used as a learning device in mathematics. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 20(1989)3, 322–328.

Pehkonen, E. [2001]: How do we understand problem and related concepts? In: E. Pehkonen (Ed.): *Problem solving around the world. Proceedings of the Topic Study Group 11 at the ICME-9 meeting August 2000 in Japan.* Turku: Faculty of Education, 11–20.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) [2004]: Pisa 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann.

Polya, G. [1949]: Schule des Denkens. Bern und München: Francke.

Prenzel, M. & Mandl, H. [1993]: Lerntransfer aus einer konstruktivistischen Perspektive. In: L. Montada (Hrsg.): *Bericht über den 38. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie in Trier 1992, Bd. 2.* Göttingen: Hogrefe, 701–709.

Reiss, K. & Renkl, A. [2002]: Learning to prove: The idea of heuristic examples. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34(2002)1, 29–35.

Reiss, K. & Thomas, J. [2000]: Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schülern der gymnasialen Oberstufe. In: *Mathematica Didactica* 23(2000), 96–112.

Renkl, A. [1996]: Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. In: *Psychologische Rundschau* 47(1996)2, 78–92.

Renkl, A. [2001]: Lernen aus Lösungsbeispielen. In: *Unterrichtswissenschaft 29(2001)*, 1–95.

Reusser, K. [1998]: Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. In: F. Klix & H. Spada (Hrsg.): *Wissen. Enzyklopädie der Psychologie. Kognition. Band 6.* Göttingen: Hogrefe, 115–166.

Reusser, K. [1990]: From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. In: H. Mandl, E. De Corte, N. Bennett, H. F. Friedrich (Eds.): *Learning and Instruction: Vol 2.2. Analysis of complex skills and complex knowledge domains.* Oxford: Pergamon Press, 477–498.

Rubinstein, S. L. [1976]: Grundlagen der allgemeinen Psychologie. Berlin: Volk und Wissen.

Rudolph-Albert, F. & Kessler, S. [im Druck]: Problemlösekompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Jahrgangstufe 7. Erscheint in *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.*

Schneider, W. & Hasselhorn, M. [1988]: Metakognition bei der Lösung mathematischer Probleme: Gestaltungsperspektiven für den Mathematikunterricht. In: *Heilpädagogische Forschung* 14(1988), 113–118.

Schoenfeld, A. [1989]: Teaching mathematical thinking and problem solving. In: L.B. Resnick & B. L. Klopfer (Eds.): *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research.* Washington D.C.: ASCD, 83–103.

Schoenfeld, A. [1992]: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: D. A. Grouws (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, NY: Simon & Schuster, 334–370.

Schoenfeld, A. [2005]: *Problem solving from cradle to grave.* Paper presented at the symposium "Mathematical learning from early childhood to adulthood" Mons, Belgium, 7.–9.7.2005.

Schwank, I. [1990]: Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens. In: K. Haussmann & M. Reiss (Hrsg.): *Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse.* Göttingen: Hogrefe, 31–54.

Singley, K. & Anderson, J. R. [1989]: The transfer of cognitive skill. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Sjuts, J. [2003]: Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 24(2003)1, 18–40.

Stein, M. [1996]: Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 27(1996)2, 123–146.

Stein, M. [1999]: Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 20(1999)1, 3–27.

Steiner, G. [2001]: Lernen und Wissenserwerb. In: A. Krapp & B. Weidemann (Hrsg.): *Pädagogische Psychologie,* 4. Auflage. Weinheim: Beltz/PVU, 137–206.

Steinhöfel, W., Reichold, K. & Frenzel, L. [1988]: *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht.* Lehrmaterial zur Ausbildung von Diplomlehrern Mathematik. Unveränderter Nachdruck. Potsdam.

Stern, E. [1992]: Warum werden Kapitänsaufgaben „gelöst"? In: *Der Mathematikunterricht* 38(1992)5, 7–29.

Stern, E. [1997]: Mathematik. In: F. E. Weinert (Hrsg.): *Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich D, Serie 1, Pädagogische Psychologie, Band 3.* Göttingen: Hogrefe, 397–426.

Sweller, J. [1990]: On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem-solving strategies. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 21(1990)5, 411–415.

Sweller, J. [1994]: Cognitive load, learning difficulty, and instructional design. In: *Learning and Instruction* 4(1994), 295–312.

Thorndike, E. L. [1906]: Principles of teaching. New York: A.G. Seiler.

Thorndike E. L. & Woodward, R. S. [1901]: The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review* 9(1901), 374-382.

Tschirigi, J. E. [1980]: Sensible reasoning: A hypothesis about hypotheses. In: *Child development* 51(1980), 1–10.

Verschaffel, L. [2002]: Taking the modelling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls. In: A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.): *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1.* Norwich: University, 64–80.

Vollrath, H.-J. [1984]: Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett.

van der Waerden, B. L. [1954; 1973^3]: Einfall und Überlegung. 3. Auflage Basel : Birkhäuser.

Weinert, F. [2001]: Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: F. Weinert (Hrsg.): *Leistungsmessungen in Schulen.* Weinheim: Beltz, 17– 31.

Wertheimer, M. [1945]: Produktives Denken. Frankfurt: Kramer & Co.

Whitehead, A. N. [1929]: The aims of education. In: A. N. Whitehead (Ed.): *The aims of education and other essays.* New York: MacMillan, 1–28.

Winter, H. [1995]: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 61(1995), 37–46.

Zech, F. [1998]: Grundkurs Mathematikdidaktik. 9. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz.

Zimmermann, B. [2003a]: Darstellungswechsel als eine wichtige Methode zur Lösung von Problemen - schon in der Geschichte der Mathematik. In: *Der Mathematikunterricht* 49(2003)6, 6-15.

Zimmermann, B. [2003b]: Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. In: *Der Mathematikunterricht* 49(2003)1, 42-57.

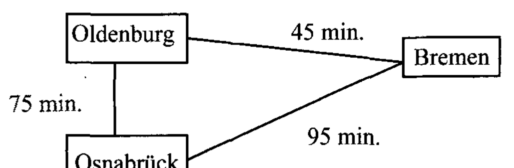
Anschrift des Verfassers:

Aiso Heinze
Lehrstuhl für Mathematikdidaktik
Universität München
Theresienstraße 39
80333 München

Manuskripteingang: 2. Mai 2005
Typoskripteingang: 8. November 2006

Anhang

Beispiel einer Detektivaufgabe (vgl. Abschnitt 4.2): Die Aufgabe mit Begründungsfeld befand sich auf einer DIN A4 Seite und ist hier in kompakter Form wiedergegeben.



In Oldenburg wurde eine Bank überfallen. Der Vorfall ereignete sich um 12.00 Uhr.
Es kommen folgende Personen als Täter in Frage: Tina, Tobi und Tom.

Zwei Zeugen berichten:

Zeuge I: „Ich habe entweder Tom oder Tobi kurz nach 10.30 Uhr in Bremen gesehen. Ich kenne die zwei nicht so gut und bin mir deshalb nicht sicher. Tina ist dort erst um 16.00 Uhr aufgetaucht."

Zeuge II: „Ich habe Tom um ca. 13:00 Uhr in Osnabrück gesehen. Tina habe ich dort schon eine Stunde früher gesehen."

Wer kommt nach den Angaben der Zeugen als Täter in Frage?

Tina ☐ Tobi ☐ Tom ☐

Begründung: