

Hans-Wolfgang Henn

## Computer-Algebra-Systeme – junger Wein oder neue Schläuche?<sup>1</sup>

**Kurzfassung:** Computer-Algebra-Systeme (CAS) drängen durch ihre immer leichtere Bedienbarkeit und Verfügbarkeit in die Schulen. In verschiedenen Projekten wurden erste Schulerfahrungen gemacht. Ein Beispiel ist das baden-württembergische MAPLE-Projekt „Mobiles Klassenzimmer“. Über Erfahrungen aus diesem Projekt werde ich als Beteiligter berichten. Die klassischen Ziele des Mathematikunterrichts bleiben beim Einsatz eines CAS uneingeschränkt gültig, es muss jedoch Akzentverschiebungen geben. Ein CAS macht den Unterricht nicht „per se“ besser. Einige Beispiele werden eher auf das Gegenteil hinweisen. Weitere Beispiele werden aber demonstrieren, wie ein CAS stärkere Konzentration auf inhaltliche Aspekte unterstützen kann.

**Abstract:** Due to continuous improvement concerning application and program handling, as well as availability, CAS are used in the classroom more and more. Initial experience has been gathered by now in various school projects. One example is the MAPLE project “Mobile Classroom” in the German state of Baden-Wuerttemberg. I will report on my experience as a teacher involved. It stands to reason that the traditional goals of mathematics teaching are still valid when introducing a CAS, but there have been shifts in emphasis. Of course, CAS cannot improve mathematics teaching ‘per se’. Some examples will be given which actually seem to prove the contrary. Other examples will demonstrate how a CAS can promote concentration on content-related aspects.

### 1 Der alte und der neue Wein

Im Matthäus-Evangelium liest man in der Luther-Übersetzung:

*Auch gießt man nicht jungen Wein in alte Schläuche; sonst zerreißen die Schläuche, der Wein läuft aus, und die Schläuche gehen zugrunde. Sondern jungen Wein gießt man in neue Schläuche, und beide werden sich halten.*

(Matthäus 9, 17)

Durch ihre immer leichtere Bedienbarkeit und Verfügbarkeit drängen Computer-Algebra-Systeme (CAS) auch in die Schulen. Sind sie neue Schläuche, in denen der alte Wein der Mathematik besser verdaulich wird? Kommt durch sie junger Wein, d. h. kommen neue mathematische Inhalte in die Schulen? Sind es Inhalte, die ohne CAS nicht vermittelt werden können, die – um im Bild zu bleiben – die alten Schläuche schnell zerreißen lassen? Diesen Fragen soll im Folgenden nachgegangen werden.

CAS sind unverzichtbare Hilfsmittel in allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik geworden. Besonderes Merkmal dieser Systeme ist ihre Fähigkeit, symbolisch rechnen zu können. H. B. Matzat (1993, S. 2) charakterisiert die Computeralgebra treffend als eigenständiges Fachgebiet:

„Die Computeralgebra ist ein Wissenschaftsgebiet, das sich mit Methoden zum Lösen mathematisch formulierter Probleme durch symbolische Algo-

<sup>1</sup> Ausarbeitung meines Hauptvortrags auf der Jahrestagung der GDM in Ludwigsburg 2001

rithmen und deren Umsetzung in Soft- und Hardware beschäftigt. Sie beruht auf der exakten endlichen Darstellung endlicher oder unendlicher mathematischer Objekte und Strukturen und ermöglicht deren symbolische und formelmäßige Behandlung durch eine Maschine. Strukturelles mathematisches Wissen wird dabei sowohl beim Entwurf als auch bei der Verifikation und Aufwandsanalyse der betreffenden Algorithmen verwendet. Die Computeralgebra kann damit wirkungsvoll eingesetzt werden bei der Lösung von mathematisch modellierten Fragestellungen in zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Informatik und Mathematik, sowie in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.“

Um die Bedeutung von CAS für den Mathematikunterricht diskutieren zu können, sollen zunächst nochmals die im Unterricht angestrebten Ziele präzisiert werden. In unserer Expertise für die Kultusministerkonferenz zum SII-Unterricht (Borneleit u.a. 2001) haben wir die Grunderfahrungen zugrunde gelegt, deren Ermöglichung nach Heinrich Winter den Mathematikunterricht allgemein bildend macht (Winter 1995/2003):

- (G 1) *„Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen,*
- (G 2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen lernen und begreifen,*
- (G 3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, erwerben.“*

(G1) berührt den fundamentalen Beitrag der Mathematik zur Erschließung großer Wissensbereiche unserer Welt. Die Mathematik erweist sich als unerschöpfliches Reservoir für Modelle, d. h. begriffliche Konstruktionen, um die Erscheinungen in der Welt um uns auf rationale Art zu interpretieren. (G2) zielt auf die Mathematik als System von abstraktem und formalem Charakter. In diesem System ist es möglich, bei genau vereinbarter Argumentationsbasis zu gesicherten Erkenntnissen zu gelangen. (G3) weist auf die Bedeutung der Heuristik für das Lernen von Mathematik hin. Heuristische Fähigkeiten sind Grundlage für eine verständige Erschließung unserer Welt.

Der Einsatz neuer Technologien wie eines CAS ist für alle drei Grunderfahrungen gleichermaßen bedeutsam und hilfreich: Zum einen ist ein CAS ein leistungsfähiges Werkzeug zur Unterstützung von Modellbildungen und Simulationen, also der ersten Grunderfahrung, zum anderen kann ein CAS – vor allem durch dynamische Visualisierungen – den Aufbau adäquater Grundvorstellungen mathematischer Begriffe und Ergebnisse positiv beeinflussen, was die zweite Grunderfahrung betrifft, und schließlich beflügelt der Computer durch die Möglichkeit heuristisch-experimentellen Arbeitens beim Problemlösen die dritte Grunderfahrung. Die Reflexion über CAS und ihre Anwendungen motiviert zwangsläufig das Nachdenken über die Grundlagen der Mathematik und des Mathematisierens.

Hoffnungen, Versprechungen und erhabene Worte beim Einsatz neuer Medien gibt es viele. So meint Bill Gates: „The most important use of technology is to improve education.“ Dem ist zuzustimmen. Jedoch drängt sich auch der gegenteilige Eindruck auf, dass es z. B. die Aufgabe der Erziehung ist, in die Nutzung des Internets einzuführen. Manchmal erinnert die Euphorie, mit der neue Medien in die Schulen gedrängt werden, an die Naivität, mit der in den 70er Jahren die sogenannte „neue Mathematik“ angeprie-

sen wurde. Die Millionenbeträge, die von Ministerien in die Installierung der Internet-Hardware in den Schulen investiert werden, stehen in krassem Gegensatz zu dem Mangel an produktiven Lernumgebungen für die Arbeit mit einem CAS und zu den noch viel zu wenigen empirischen Studien, in denen das computergestützte Lernen von Schülerinnen und Schülern detailliert beobachtet und analysiert wird. Die Leichtigkeit, mit der unsere Jugendlichen manchmal mit dem Computer umgehen, bedeutet leider nicht, dass der Weg zur Mathematik für sie leichter geworden ist. Der Einfluss des Computereinsatzes für die grundlegend nötigen Begriffsbildungen ist noch weitgehend unbekannt und erfordert zumindest ein sehr behutsames Vorgehen. Viele Beobachtungen in dem in Abschnitt 4 diskutierten PIMOKL-Schulversuch<sup>2</sup> zeigen die Gefahr, dass durch unreflektierten Einsatz von Computern am Ende sogar weniger mathematische Grundvorstellungen als im herkömmlichen Unterricht erreicht werden.

In ihrem Hauptvortrag auf der GDM-Tagung 2000 in Potsdam hat Michèle Artigue (2000) mit Recht darauf hingewiesen, dass die Probleme bei der Integration komplexer Technologien wie der eines CAS oft unterschätzt werden. Es ist noch viel zu wenig darüber bekannt, wie der individuelle Wissenserwerb von mathematischen Konzepten durch Computereinsatz beeinflusst wird. Die didaktische Diskussion zum Einsatz von CAS schlägt sich zwar in weit über 1000 einschlägigen Arbeiten in der ZDM-Datenbank *MATHDI* nieder. Sie hat aber einen Schwerpunkt bei der Produktion „schöner Unterrichtsbeispiele“ mit dem *Werkzeug* CAS. Die Begründung für die behandelte Mathematik ist häufig die Machbarkeit mit Hilfe des CAS, nicht der Wunsch, die drei Winter-schen Grunderfahrungen zu ermöglichen.

## 2 Eine kurze Geschichte der CAS

Die ersten Taschenrechner kamen in den 60er Jahren auf den Markt. Sie kosteten mehr als das Monatsgehalt eines Diplomingenieurs und beherrschten die vier Grundrechenarten mit einer Genauigkeit von acht Ziffern. Das erste System, das man als universelles CAS bezeichnen kann, war das 1968 vorgestellte auf einem Großrechner laufende REDUCE (vgl. Alten u. a. 2003, S. 606 f). Für den schulischen Einsatz wurde 1984 auf dem *International Congress on Mathematical Education* in Adelaide einer breiteren Öffentlichkeit das CAS MUMATH vorgestellt (vgl. Aspetsberger 1985). Dieses Ende der 70er Jahre entwickelte MUMATH war das erste kleinere CAS, das auf den damaligen PC's einsetzbar war, und wurde später als DERIVE zu einem der für die Schule wichtigsten CAS weiterentwickelt. Die zweite Generation startete in den 80-er Jahren mit den ersten Versionen von MAPLE und MATHEMATICA. Heute spricht man von der dritten Generation, neuere Vertreter sind AXIOM und MUPAD. Die implementierten Algorithmen basieren auf den Resultaten praktisch aller mathematischer Gebiete, CAS werden ebenfalls in allen mathematischen Gebieten eingesetzt. Computeralgebra ist ein sehr wichtiges und hochkomplexes Forschungsgebiet. *Modern Computer Algebra* (Gathen&Gerhard 1999) heißt ein Standardwerk über die Algorithmen der symbolischen Mathematik.

Für die Schule besonders interessant ist die Tatsache, dass Computer-Algebra-Systeme schon in kleinen Taschencomputern erhältlich sind (vgl. Henn 2000). Weit verbreitet sind die Texas-Instruments-Taschencomputer TI-89, TI-92 und Voyage 200, in denen DERIVE implementiert ist. Im CASSIOPEIA von Casio ist eine vereinfachte MAPLE-Version implementiert; bei dem 2003 in Deutschland vorgestellten, viel versprechenden

<sup>2</sup> Vierjähriger Unterrichtsversuch mit MAPLE in fünf Klassen der Sekundarstufe II.

CLASSPAD ist Casio beim CAS-Modul und der Bedienung neue Wege gegangen. Schon jetzt sind in einigen Bundesländern Graphik-Taschenrechner verbindlich und CAS-Taschenrechner erlaubt. Die Preisentwicklung bei den CAS-Taschenrechnern lässt vermuten, dass auch solche Geräte in einiger Zeit ebenso im Besitz jeder Schülerin und jedes Schülers sein werden wie früher ein Rechenschieber. Natürlich stellt sich dann die Frage, über welche „CAS-Kompetenz“ (Oldenburg 2004) zusätzlich zu den anderen heute geforderten Kompetenzen jede Schülerin und jeder Schüler verfügen muss.

### 3 CAS-Einsatz in der Schule

Schon jetzt gibt es viele Unterrichtserfahrungen mit der Verwendung von CAS. Nicht wenige engagierte Lehrerinnen und Lehrer setzen diese Geräte in Eigeninitiative ein. In vielen Bundesländern Deutschlands wurden und werden Pilotprojekte von den Kultusministerien durchgeführt. Andere Projekte wurden von Fachverbänden initiiert. Von den vielen DERIVE-Projekten im deutschsprachigen Raum, die jetzt größtenteils als Projekte mit TI-CAS-Taschenrechnern weitergeführt werden, sind insbesondere die landesweiten Projekte in Österreich<sup>3</sup> und die bundesweiten Aktivitäten der internationalen T<sup>3</sup>-Gruppe<sup>4</sup> bemerkenswert. Einen Überblick über die Verhältnisse im deutschsprachigen Raum geben die in zweijährigem Turnus stattfindenden Tagungen *Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung* der Fachgruppe Computeralgebra der Deutschen Mathematikervereinigung<sup>5</sup> (Koepf 2000).

CAS werden zwar heute durchaus häufig im Unterricht eingesetzt. Es gibt aber nur wenige fachdidaktisch begleitete empirische Untersuchungen und Analysen über den *Einfluss* von CAS auf das Lehren und Lernen von Mathematik. Zu den ersten Untersuchungen dieser Art gehören die Arbeiten von Rudolf vom Hofe (1998) und Hans-Georg Weigand (1999) zum CAS-Einsatz im Analysisunterricht. Eine weitere wichtige Arbeit ist die Untersuchung von Edith Schneider (2002; vgl. auch Peschek&Schneider 2002). Sie hat ein Konzept mathematischer Allgemeinbildung als Orientierungsrahmen für die Konzeption und Bewertung von CAS-Unterrichtssequenzen entworfen, das auf einem mehrjährigen Forschungsprojekt mit dem schulischen Einsatz des TI-92 fußt. Arbeiten wie diese müssen dringend ergänzt werden und stellen noch ein weites Forschungsgebiet dar.

Einige wichtige Konferenz-Reihen, in denen Schulpraktiker und Mathematikdidaktiker zusammen diskutieren, beschäftigen sich ausschließlich mit den Auswirkungen und Konsequenzen der neuen Technologien. Beispiele sind die vom österreichischen Zentrum für Didaktik der Computeralgebra (vgl. Fußnote 3) veranstalteten Sommerakademien (zuletzt die 8<sup>th</sup> *ACDCA Summer Academy and 6<sup>th</sup> International Derive&TI89/92 Conference* im Jahr 2004 in Kanada) und die *International Conferences on Technology in Mathematics Teaching* (zuletzt ICTMT 6 im Jahr 2003 in Griechenland). Die Ergebnisse dieser Tagungen versprechen, einen nachhaltigen Einfluss auf die Schulwirklichkeit zu haben.

---

<sup>3</sup> vgl. die Homepage <http://www.acdca.ac.at/> des Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

<sup>4</sup> vgl. <http://www.t3deutschland.de/>

<sup>5</sup> vgl. <http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/>

Die Bedeutung der neuen Medien und Technologien für die Schule geht natürlich über den Einsatz von Computeralgebrasystemen hinaus. Zwei vor kurzem erschienene Bücher von Hans-Georg Weigand und Thomas Weth (2002) und von Horst Hischer (2002) beschäftigen sich mit der Gesamtproblematik. Begründet auf theoriegestützte Überlegungen sensibilisieren Weigand und Weth die Leser für einen reflektierten Computereinsatz und zeigen anhand zahlreicher unterrichtspraktischer Beispiele, wie neue Technologien zur Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Hischer gibt „Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht“ und entwirft eine integrative Medienpädagogik, die in den Hauptteilen des Werks für den Mathematikunterricht konkretisiert wird.

#### 4 PIMOKL: Das Pilotprojekt Mobiles Klassenzimmer

Eines der umfangreichsten CAS-Projekte war das MAPLE-Projekt „Mobiles Klassenzimmer“ in Baden-Württemberg (Henn 1998, Henn 2001). Bei diesem *Pilot-Projekt Mobiles Klassenzimmer*, abkürzend PIMOKL genannt, nahmen alle Schülerinnen und Schüler von fünf Klassen aus verschiedenen Schulen teil. Jeder Teilnehmer hatte während der gesamten Oberstufenzeit von Klasse 11 bis 13 ein eigenes Laptop mit dem CAS MAPLE zur Verfügung und durfte dieses auch im speziell für die Projektklassen gestellten Abitur benutzen. Aufgrund dieses 2000 abgeschlossenen Projekts wurden in Baden-Württemberg weitere Schulprojekte in allgemeinbildenden und in beruflichen Gymnasien genehmigt, wofür eigene CAS-Lehrpläne und eigene Aufgaben für das zentrale Abitur entwickelt wurden. Genauere Informationen zu PIMOKL und den Folgeprojekten finden sich in Henn u. a. 1998 und in den über das Internet<sup>6</sup> zugänglichen Berichten und Materialien.

In den folgenden Abschnitten werden aus fachdidaktischer Sicht einige Schwerpunkte diskutiert, die sich während des PIMOKL-Projekts herauskristallisiert haben. Im 5. Abschnitt wird am Beispiel des Lösens von Gleichungen und der Oberstufen-Geometrie diskutiert, wie mit Hilfe eines CAS klassische Stoffgebiete intensiver durchdrungen werden können und wie durch die Entlastung vom Kalkül eine Konzentration auf inhaltliche Fragen und auf das Verständnis der für die Mathematik typischen Probleme, Grundgedanken und Methoden erreicht werden kann. Abschnitt 6 gibt am Beispiel der wachsenden Bedeutung numerischer und algorithmischer Aspekte in der mathematischen Forschung Hinweise, wie es der Einsatz eines CAS erlaubt, aktuelle fachliche Entwicklungen auch im Unterricht widerzuspiegeln. Erkenntnisse der Lerntheorie stützen die Bedeutung produktiver Lernumgebungen (Wittmann&Müller 1990/1992); im 7. Abschnitt wird ein Beispiel vorgestellt, wie eine solche Lernumgebung unter Einsatz eines CAS gestaltet werden kann. Schließlich zeigt der 8. Abschnitt einen CAS-gestützten, präformalen Beweis des Hauptsatzes der Algebra als Beispiel, wie man ein CAS zur Visualisierung verwenden kann.

Dabei werden sowohl Chancen als auch Probleme, Grenzen und Gefahren des CAS-Einsatzes in der Schule sichtbar werden. Dies ist ja charakteristisch für alle Werkzeuge – nicht das Werkzeug an sich, sondern die Art und Weise seines Gebrauchs entscheidet über seinen Sinn oder Unsinn. Ein CAS ist ein „Universalwerkzeug“, es ist einsetzbar für fast alle mathematischen Aufgaben, die in der Schule denkbar sind. Der nicht unbe-

<sup>6</sup> vgl. <http://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za242/CAS/index.html>

trächtliche Aufwand, die Bedienung eines CAS zu lernen, ist also gerechtfertigt. Jedoch fordert der souveräne Umgang mit einem CAS und die Konzentration auf inhaltliche Fragen von den Lernenden einen stärkeren persönlichen Einsatz und von den Lehrenden mathematische und didaktische Kompetenz.

Ein CAS-Einsatz, auf tradierte Lehrmethoden unreflektiert aufgesetzt, hat sich im PIMOKL-Projekt als kontraproduktiv erwiesen<sup>7</sup>. Beispielsweise wurden elementare Unterrichtsinhalte mit dem CAS auch dort ausgeführt, wo der Einsatz von Papier und Bleistift sinnvoller gewesen wäre. In Einzelfällen überlagerten unnötige programmiertechnische bzw. syntaktische Details die fachlichen Inhalte, die noch nicht gefestigt waren. Da hierbei kein tieferes Verständnis für den mathematischen Sachverhalt, sondern eher syntaktische Kenntnisse trainiert wurden, hat diese Vorgehensweise nichts zum eigentlichen Verständnis von Mathematik beigetragen. In Arbeitsblättern wurden teilweise klassische Problemstellungen allein dadurch erschwert, dass das Zahlenmaterial unhandlicher gewählt wurde oder zusätzliche Parameter eingeführt wurden. Dies führt bei der Benutzung des CAS auf das reine Durchrechnen eines Arbeitsblattes mit veränderten Werten. Diese „Didaktik der Return-Taste“ hat insbesondere bei leistungsschwächeren Schülern nachhaltig ein starkes Gefühl der Abhängigkeit vom Rechner erzeugt und nicht zum Aufbau mathematischer Grundvorstellungen beigetragen. Es wurde nicht immer berücksichtigt, wie wichtig das manuelle Arbeiten an einfachen Beispielen für den Erwerb neuer Begriffe und Verfahren ist. Ein zu früher Einsatz von Rechnerfunktionen, die prinzipiell noch nicht verstanden waren, führte oft zu einem rein syntaktischen Vorgehen. In späteren einfachen Anwendungen, z. B. bei Grenzwertuntersuchungen einfachster Terme, elementaren Gleichungen oder Funktionen, suchten Schüler dann mühsam nach abgespeicherten Arbeitsblättern, anstatt durch eigene Gedanken und Verwendung von Bleistift und Papier Lösungen selbständig zu erarbeiten. In den Kursen der Jahrgangsstufe 12 und insbesondere 13 wurde nach diesen Erfahrungen der Einsatz des CAS eingeschränkt. Neue Inhalte wurden herkömmlich unterrichtet und MAPLE nachträglich zum Üben, Bearbeiten von Beispielen und zum Problemlösen eingesetzt.

## 5 Grundvorstellungen statt Kalkülorientierung

### 5.1 Gleichungen und ihre Lösungen

Wie nicht zuletzt TIMSS gezeigt hat, ist ein wesentlicher Mangel des deutschen Mathematikunterrichts seine unangemessen starke Kalkülorientierung (Baumert u. a. 1997; Blum&Neubrand 1998). Der unterrichtliche Schwerpunkt liegt zu einseitig auf Methoden, die zu exakten, formelmäßig darstellbaren Lösungen führen und zu wenig auf der Durchdringung der zugrunde liegenden mathematischen Methoden.

Gleichungen zu lösen ist eine der primären Aufgaben der Mathematik. Dies liefert jedoch keine Begründung, dass in der Schule gerade die *Formel* zur Lösung quadratischer Gleichungen dem „Mitternachtswissen“<sup>8</sup> der Lernenden zugerechnet und wochenlang schematisch geübt wird. Der Übergang von linearen zu quadratischen Gleichungen hat zwei Aspekte:

- Es gibt erstmals mehr als eine Lösung.

<sup>7</sup> Zu Einzelheiten vgl. den PIMOKL-Abschlussbericht (Webseite in Fußnote 6).

<sup>8</sup> Auch um Mitternacht aus dem Schlaf geweckt muss die Formel parat sein.

- Es gibt eine aus Wurzelausdrücken bestehende Lösungsformel.

In der Schule ist in den letzten 2000 Jahren hauptsächlich der zweite Aspekt mit der „Mitternachtsformel“ betont worden. Lösungsformeln existieren bei Gleichungen jedoch nur sehr selten. Gravierende Missverständnisse bestehen oft beim Unterschied zwischen der Existenz von Lösungen einer Gleichung und der Existenz von Lösungsformeln. Auch in unserem PIMOKL-Projekt wurde das nicht immer deutlich gesehen. Ein beteiligter Kollege hatte für seine Schülerinnen und Schüler unter anderem ein MAPLE-Arbeitsblatt zu dem Befehl „solve“, der Gleichungen löst, erstellt. Die wesentlichen Teile werden in den folgenden Kästen gezeigt und erläutert.

Im ersten Kasten werden die allgemeinen Gleichungen gl2, gl3 und gl4 vom Grad 2, 3 und 4 definiert (die Eingaben des Benutzers werden von MAPLE in gerader Schrift dargestellt, die MAPLE-Antwort in kursiver).

<p>Definition der Gleichungen</p> <pre>&gt; gl2:=x^2+a*x+b=0 ; &gt; gl3:=x^3+a*x^2+b*x+c=0 ; &gt; gl4:=x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+d=0 ;</pre> $gl2 := x^2 + ax + b = 0$ $gl3 := x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ $gl4 := x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
---

Der Befehl „solve(gl,x)“ weist MAPLE an, nach Möglichkeit die Gleichung gl nach der Variablen x aufzulösen. Das wird im folgenden Kasten gemacht:

<p>Lösen der Gleichungen</p> <pre>&gt; solve (gl2, x) ;</pre> $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ <pre>&gt; solve (gl3, x) ;</pre> $\frac{1}{6}(36ab - 108c - 8a^3 + 12\sqrt{12b^3 - 3b^2a^2 - 54abc + 81c^2 + 12ca^3})^{(1/3)} \dots$
---

Die Lösungen der allgemeinen Gleichung zweiten Grades werden von MAPLE in einer gewohnten Darstellung angegeben. Die Lösungen der allgemeinen Gleichung dritten Grades werden von MAPLE auch direkt mit den Cardanoschen Formeln ausgegeben. Diese sind, für die allgemeine Gleichung aufgeschrieben, ziemlich unübersichtlich, im Kasten ist nur die erste Zeile des Resultats angegeben, es folgen noch viele weitere. Der Kommentar des Lehrer in seinem Arbeitsblatt dazu lautete: „Tja, da sieht man, weshalb man bis heute von Schülern die allgemeine Lösung einer Gleichung dritten Grades nicht verlangt hat. Das wird nun wohl anders werden“.

Ein solcher Kommentar gibt ein völlig falsches Bild von Mathematik: Zunächst ist die Existenz von Lösungsformeln aus Wurzelausdrücken für die algebraischen Gleichungen bis zum Grad 4 innermathematisch höchst bedeutsam – den tieferen Grund für die Existenz bis Grad 4 und die Nichtexistenz ab Grad 5 liefert bekanntlich die Galois-theorie. Die Herleitung der Formeln für den Grad 3 ist nicht allzu viel schwieriger als

die der quadratischen Lösungsformeln, für den Grad 4 wird es etwas komplizierter. In der Praxis sind diese Formeln aber weder bisher noch in Zukunft, weder mit noch ohne MAPLE interessant und wichtig.

Anschließend wird auf dem Arbeitsblatt versucht, die Gleichung 4. Grades zu lösen:

```
> solve(g14, x);
```

$$\text{RootOf}(\_Z^4 + a\_Z^3 + \_Z^2 b + \_Z c + d)$$

MAPLE gibt sinnvollerweise nicht die noch umfangreicheren Wurzelausdrücke für den Grad 4 zurück, sondern sagt einfach „RootOf(..)“, also „Wurzel der Gleichung ...“. Der Kommentar des Lehrer ist nun sehr verfälschend: „Bei einer Gleichung vierten Grades scheint selbst MAPLE ratlos zu sein“. Solche Kommentare *müssen* falsche Mathematikbilder aufbauen, etwa nach dem Muster, diese Version von MAPLE schafft gerade noch Grad 3, die nächste dann sogar Grad 4 und so weiter...

Tatsächlich ist RootOf(..) ein MAPLE-Unterprogramm, das erst beim Befehl „Allvalues“ alle Lösungen der Gleichung, wenn möglich algebraisch, sonst (also fast immer) numerisch zurückgibt. Natürlich kennt MAPLE auch die Cardanoschen Formeln für Grad 4 und gibt sie auf Wunsch auch aus. Das Ergebnis füllt allerdings einige Bildschirmseiten und ist völlig unübersichtlich und undurchschaubar. Interessanter ist, dass MAPLE bei *jeder* algebraischen Gleichung höheren Grades mit konkreten Zahl-Koeffizienten *alle* Lösungen mit vorgebarbarer Genauigkeit numerisch zurückgibt.

Der aus mathematischer Sicht eigentlich wesentliche Punkt ist jedoch: Gibt es überhaupt Lösungen? Was sind Lösungsformeln? Wie kann man sicher sein, alle Lösungen zu bekommen? Welche graphischen und numerischen Methoden gibt es hierzu? Wie bekommt man die Lösungen mit vorgeschriebener Genauigkeit? Solche Fragen werden meistens unterschlagen. Genau für Antworten zu diesen Fragen ist natürlich ein CAS ein ideales Werkzeug. Es hilft, die algebraische Sicht „Lösung einer Gleichung“ und die geometrische Sicht „x-Achsen Schnittpunkte eines Funktionsgraphen“ sinnstiftend zu verbinden, adäquate algebraische Strukturen zu entwickeln und an geeignet ausgewählten Beispielen die verschiedenen Möglichkeiten von Lösungen zu erkunden.

Eine genauere Analyse von Lösungsformeln relativiert ihre Bedeutung: Wenn man für die Gleichung  $x^2 = 2$  eine der beiden Lösung als  $\sqrt{2}$  hinschreibt, so erfindet man einen neuen Namen und ein Symbol für eine Zahl, von deren Existenz man überzeugt ist, von der man weiß, wo sie am Zahlenstrahl liegt, die man aber, da sie nicht rational ist, anders nicht angeben kann. Dies ist genau der *eine* Aspekt von Buchstaben oder Variablen, wie ihn Günther Malle beschreibt, der *Gegenstandsaspekt* (Malle 1993). Ausdrücke wie  $\sqrt{2}$  kann man natürlich gut formal manipulieren. Als Dezimalzahl angeben kann man sie, da mit unendlich vielen nichtperiodisch auftretenden Nachkommastellen behaftet, aber nicht. Ähnliche „Tricks“ verwendet man, wenn man zwei andere wichtige Zahlen mit den Namen  $e$  und  $\pi$  belegt. Wenn man die fünf existierenden, reellen, von MAPLE näherungsweise berechneten Nullstellen der Gleichung  $x^5 - 5x^3 + 4x + 1 = 0$  der Größe nach mit  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  bezeichnet, dann hat man genau dasselbe getan. Alle diese Zahlen sind eigentlich „unbekannt“, haben nun einen Namen bekommen, und man kann jetzt mit diesen Zahlen rechnen (genau das macht man in der algebraischen Zahlentheorie). Wenn man jedoch z. B. die Zahl  $\sqrt{2}$  für eine konkrete Anwendung braucht, so benötigt man eine Dezimaldarstellung, man muss die Zahl also geeignet approximieren. Beim Lösen von Gleichungen sind also nicht nur algebraische sondern auch numerische Aspekte wichtig, denn die Approximation nichtrationaler Zahlen ist ein numerisches



Problem. Die Zahl  $\sqrt{2}$  hat, als Dezimalzahl dargestellt, unendlich viele Nachkommastellen, die zunächst alle durch einen „Vorhang“ verdeckt sind. Durch einen geeigneten Algorithmus kann man den „Vorhang“ so weit zurückziehen, dass man so viele Stellen wie gewünscht sehen kann.

Natürlich hat man in der Vorcomputerzeit zum Lösen von Gleichungen höchst kunstvolle Methoden erdacht, die allerdings alle auf einen mehr oder weniger eng umgrenzten Gleichungstyp zugeschnitten waren. Diskutiert wurden nicht diejenigen Differentialgleichungen, die sich aus der Modellierung eines realen Problems ergaben, sondern die Realität wurde aus der Sicht der wenigen speziellen Differentialgleichungstypen (lineare, separable usw.) gesehen, für die es gelang, eine explizite Lösungsformel anzugeben. „Ein Prozess der Selbstselektion setzte ein, bei dem Gleichungen, die nicht gelöst werden konnten, automatisch von geringerem Interesse waren als solche, die gelöst werden konnten. Die Bücher, aus denen junge Generationen die Techniken lernten, enthielten selbstverständlich nur lösbare Probleme“ (Steffen 1994). Ole Skovsmose nennt diese durch die verfügbaren mathematischen Methoden beschränkte Sicht der Realität *formatting power* (Skovsmose 1994).

## 5.2 Der Fall der Geometrie

Ein zweites Beispiel für Kalkülorientierung und das Primat des Syntaktischen vor dem Semantischen ist die Oberstufen-Geometrie. Im Vordergrund vieler Oberstufenkurse *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* steht eine isolierte Axiomatisierung des Vektorraumbegriffs, vernachlässigt wird die Weiterentwicklung der Mittelstufen-Geometrie zur analytischen Geometrie für die bessere Beschreibung, Erfassung und Durchdringung des uns umgebenden Raums.

Leider kann man die Überschrift „*Der Fall der Geometrie*“ ins Englische mit „*the fall of geometry*“ übersetzen, was zurück ins Deutsche korrekt mit „*Untergang der Geometrie*“ zu übersetzen ist. In der schon erwähnten „Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe“ (Borneleit u.a. 2001) wurde das Wort „Lineare Algebra“ bewusst vermieden. Dies war eine politische Entscheidung, die ich uneingeschränkt mittrage. Das hat seinen Grund u. a. darin, dass „das im Ansatz verfehlt Verständnis von Grundkursen als ausgedünnte Leistungskurse, die ihrerseits dem Geiste nach als ausgedünnte Versionen einschlägiger Fachvorlesungen in reiner Mathematik des mathematischen Grundstudiums begriffen werden“ (Borneleit u.a. 2001), in keinem anderen Gebiet so deutlich wird wie bei der Oberstufen-Geometrie. Die Abstraktheit der Linearen Algebra hat ihren tiefen Sinn in ihrer universellen Anwendbarkeit – aber gerade diese Anwendungen von der Funktionalanalysis bis zur Algebraischen Zahlentheorie sind weit außerhalb des Schulcurriculums. Der bei der Linearen Algebra deutlich werdende axiomatisch-deduktive Aufbau der Mathematik ist das Produkt eines langen Entwicklungsprozesses, nicht der Ausgangspunkt. Begriffliche Klarheit und Verständnis für Geometrie-typische Probleme werden nicht durch die unmotivierten und nirgends wirklich benötigten Begriffe „linear abhängig“ und „linear unabhängig“ gewonnen. Vor lauter Begeisterung für die abstrakten Begriffe wird das eigentlich Spannende, die Geometrie, oft vergessen, vor allem wenn diese Begriffe nur auf das unmotivierte Schneiden von Geraden mit Ebenen angewandt werden, interessante geometrische Gebilde aber gar nicht mehr behandelt werden.

Es war eine politische Vorgabe unseres PIMOKL-Projekts, dass die beteiligten Lehrpersonen selbständig über die Gestaltung ihres Projektunterrichts entscheiden konnten. Die Vorschläge und Empfehlungen der pädagogischen Begleitung hatten nur empfehlenden Charakter. Nicht alle unterrichtlichen Entscheidungen entsprachen diesen Vor-

schlägen. So wurden im Unterricht oft die üblichen Operationen wie der Schnitt von zwei Geraden oder von Ebene und Gerade zuerst „per Hand“ eingeführt und geübt. Dann wurden für dieselben Operationen MAPLE-Unterprogramme entwickelt, ohne dass diese in irgendwelchen Visualisierungsprojekten wirklich verwendet wurden. Mit Recht beklagten die Schüler eine Verdoppelung ihrer Arbeit, ohne dass ein Gewinn an mathematischer Einsicht gewonnen wurde oder neue Phänomene mathematisch durchdrungen werden konnten. Der CAS-Einsatz war folglich schlicht und einfach kontraproduktiv, was dann im Nachhinein in der Regel auch von den Lehrpersonen so gesehen wurde.

In aktuellen Lehrplänen enden in der Oberstufengeometrie die verbindlichen geometrischen Gebilde bei Geraden und Ebenen. Ein Spezifikum des Geometrieunterrichts der SI ist die Untersuchung konvexer Figuren der Ebene wie Kreise, Dreiecke und Vierecke. Die natürliche Erweiterung auf konvexe Gebilde des Raums unterbleibt, Kugeln und andere Körper kommen nicht mehr vor. Oft ist das einzige konvexe räumliche Gebilde, das der Lehrplan noch kennt, der Punkt. Nach wie vor wird in manchen Lehrplänen der Unterschied „Affine Geometrie“ und „Euklidische Geometrie“ gemacht, ein Unterschied, dessen innermathematische tiefere Gründe den meisten gar nicht mehr bewusst sind. Dabei kann man die reichhaltige Geometrie des Raums mit relativ wenig Kalkül und mit vielen Phänomenen und vor allem mit viel mehr Gewinn für die Lernenden in die Schule bringen. Einen ausgewogenen Entwurf hierfür hat Hans Schupp in seinem Hauptvortrag „Geometrie in der Sekundarstufe II“ während der GDM-Jahrestagung 1999 in Bern geliefert (Schupp 2000). Ein Schwerpunkt des gesamten Mathematikunterrichts sollte die Geometrie des uns umgebenden Raums sein, die in den Sekundarstufen durch die mächtigen Methoden der Analytischen Geometrie unterstützt wird. Ein CAS kann hier zur Visualisierung und als Rechenknecht hilfreich sein. Allerdings ist die Nutzung der 3-D-Graphik eines CAS, die natürlich eine zweidimensionale Projektion liefert, nicht ohne Weiteres möglich. Die sinnvolle dreidimensionale Sicht einer zweidimensionalen Projektion, die im Kopf erfolgen muss, erfordert eine fundierte dreidimensionale Erfahrung der Schülerinnen und Schüler mit konkreten Objekten, beginnend etwa mit der systematischen Erkundung des Würfels in der 5. Klasse. Mit Recht weist Michael Schmitz (Schmitz 2000) darauf hin, dass die für uns so klaren Visualisierungen durch 3-D-Darstellungen eines CAS nur dann für die Lernenden zugänglich sind, wenn diese tragfähige Grundvorstellungen des Raumes und seiner analytischen Beschreibung haben. Hierzu gehört die Fähigkeit, problemangemessen ein Koordinatensystem zu wählen. Diese Fähigkeit kann man in der frühen Sekundarstufe I entwickeln – oder diese Entwicklung verhindern. Beispielsweise möge es um ein Dreieck ABC gehen. Die Formulierung „Wähle den Punkt A im Ursprung, ...“ gibt schon viel vor, dagegen fordert die Formulierung „Wähle zunächst ein geeignetes Koordinatensystem“ eine Analyse der Situation. Man kann etwa A als Ursprung und AB als x-Achse wählen und unterstützt so die fundamentale Idee des Koordinatisierens. Nach der sachimmanenten Wahl eines Koordinatensystems können viele Probleme analytisch formuliert werden. Wenn dagegen Koordinatensysteme stets vorgegeben sind, muss man sich nicht wundern, dass viele Schülerinnen und Schüler eine Parabel nur noch dann als solche erkennen und akzeptieren, wenn sie sich in ihrem langweiligsten Alltagsgewand „ $y = x^2$ “ präsentiert.

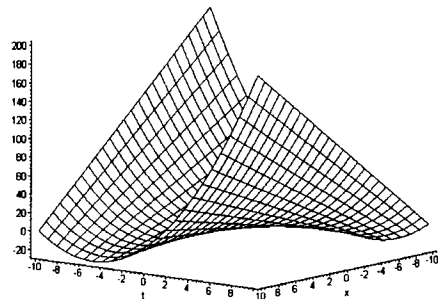
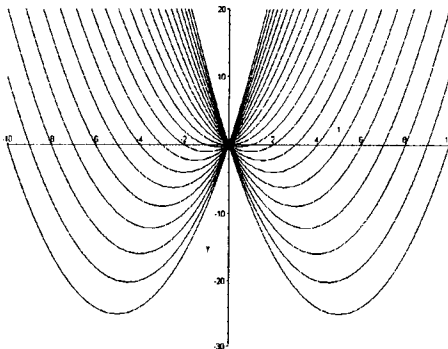
Nach der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems werden geometrische Gebilde durch möglichst einfache Gleichungen beschrieben. Die weitere geometrische Analyse wird also nachhaltig durch ein CAS unterstützt, das die Gleichungen verarbeitet und ihre Lösungsmengen dreidimensional darstellt. Selbstverständlich bedeutet dies auch, die Gebiete Analysis und Analytische Geometrie nicht mehr wie bisher als disjunkte Gebiete zu behandeln, sondern soweit wie möglich zu verzahnen und zu vernetzen. Dabei kommen Funktionen mehrerer Variablen nicht nur versteckt als kalkülorientierte Funktionen

einer Variablen mit Parametern vor, sondern beschreiben – in qualitativer Weise eingeführt und behandelt – Graphen als Flächen und Kurven und stehen auch für das bessere Verständnis naturwissenschaftlicher Modellbildung zur Verfügung (Klika 2000). Insbesondere könnten auch Kegelschnitte mit Hilfe eines CAS eine Renaissance erleben (Meyer 1996).

Ein Beispiel soll die Wechselbeziehung Analysis – Analytische Geometrie verdeutlichen und die Rolle aufzeigen, die das CAS dabei spielt:

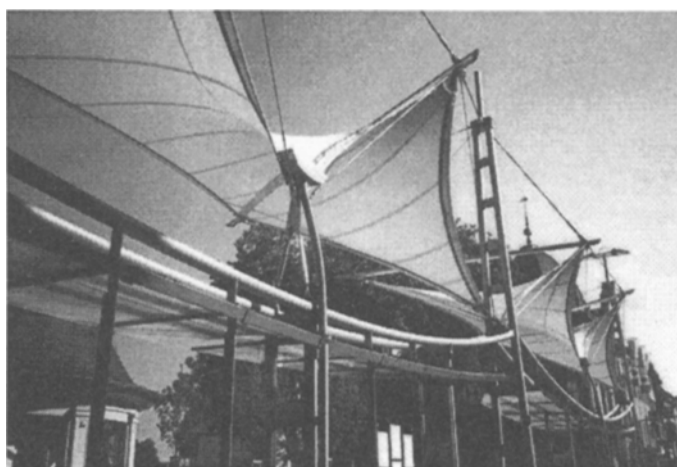
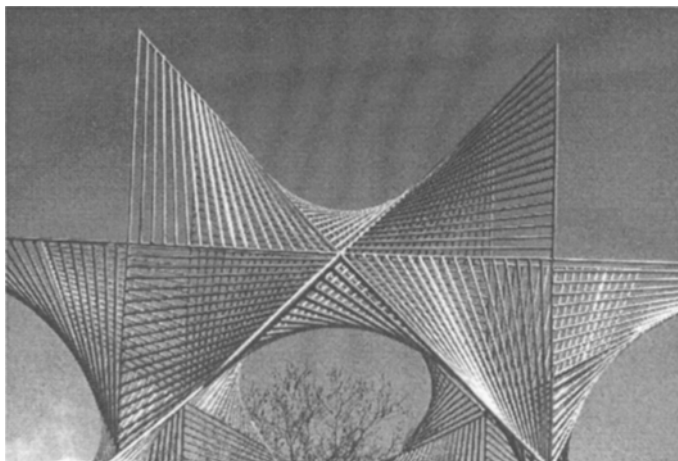
<b>Analysis</b>	<b>Analytische Geometrie</b>
<b>Kurvenscharen</b>	<b>Abstandsfragen</b>
Betrachte die Geradenschar (Parameter $t \in \mathbb{R}$ ) $f(x,t) = tx + t^2$	Beschreibe alle Punkte der Ebene, die von zwei gegebenen Geraden denselben Abstand haben.
Betrachte in symmetrischer Sichtweise die Parabelschar (Parameter $x \in \mathbb{R}$ ) $f(x,t) = tx + t^2$	Bearbeite dieselbe Frage im Raum.
Betrachte die Funktion von zwei Variablen $f(x,t) = tx + t^2$	Untersuche den neuen Fall "windschiefe Geraden" durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems.
<b>Sattelflächen</b> kommen in der Realität vor! Tomographie der Sattelflächen führt zu Geraden, Parabeln, Hyperbeln und vielen interessanten Fragen!	

Bei der Untersuchung der Funktionenschar und Flächen im „Analysis-Strang“ ist das CAS sehr hilfreich. Viele Unterrichtserfahrungen haben gezeigt, dass die graphischen Darstellungen zu mathematischen Vermutungen und Entdeckungen führen können. Die folgende Abbildung zeigt links eine Parabelschar. Die Tiefpunkte der Parabeln scheinen auf einer weiteren Parabel zu liegen. Ihre Daten kann man dem Schaubild entnehmen, was danach mathematisch begründet werden muss. Die Fläche im rechten Bild kann mit Hilfe der Maus gedreht und so von allen Seiten aus betrachtet werden. Daraus wird insbesondere der Name „Sattelfläche“ klar.



Im „Geometrie-Strang“ wird man bei den windschiefen Geraden zunächst überhaupt keine Idee haben, wie die gefragte Punktmenge aussehen könnte. Hier führt eine problemangemessene Koordinatisierung zu einer Gleichung für diese Menge, die sich dann wieder mit Hilfe des CAS visualisieren lässt und die sich auch als Sattelfläche heraus-

stellt (vgl. Meyer 1995; Meyer 2000). Die folgenden Abbildungen zeigen, dass Sattelflächen in der Realität vorkommen. Das erste Beispiel ist ein Kunstwerk am Hafen von Lausanne, das zweite eine Bushaltestelle in Offenburg/Baden.



## 6 Knapp daneben ist auch vorbei

Die schon in 5.1 angesprochene Tatsache, dass fast alle Gleichungen nur numerische Lösungen erlauben, und die durch die heutige Computertechnik mögliche Durchführung beliebiger Algorithmen haben die Problematik der Fehlerfortpflanzung in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Numerische Methoden sind kein minderwertiger Ersatz, sondern der Regelfall bei allen Anwendungen der Mathematik. Ihre mathematische Analyse ist ein höchst komplexes und wichtiges Forschungsfeld.

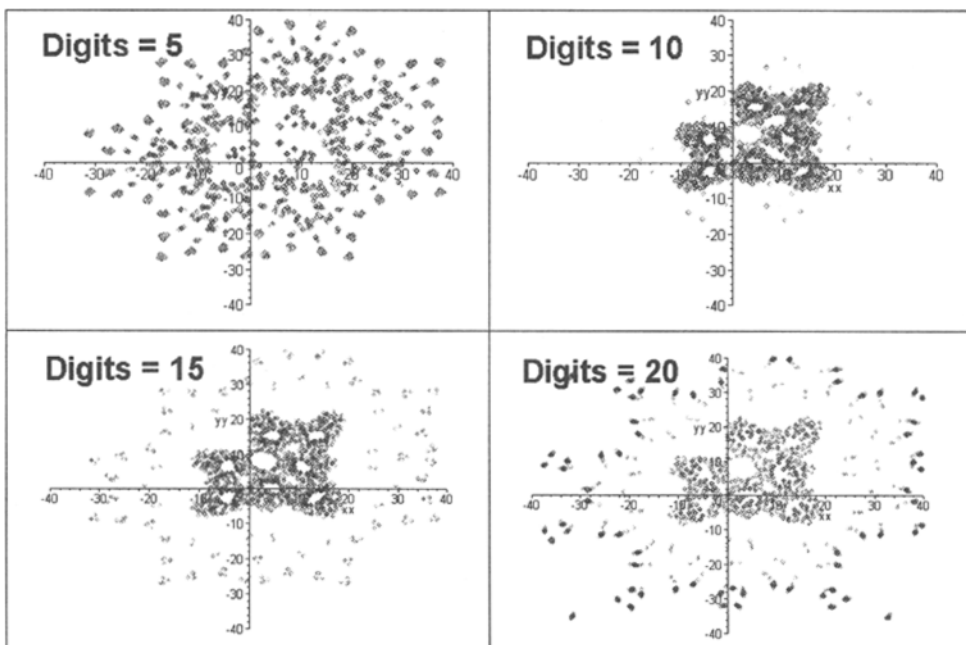
Die numerischen und algorithmischen Aspekte der Mathematik sollten auch im Mathematikunterricht angemessen diskutiert werden, was schon vor vielen Jahren Arthur Engel gefordert hat. Leider dominiert auch in den neueren Lehrplänen immer noch die

analytisch-algebraische Sichtweise der Mathematik, numerische Aspekte kommen praktisch nicht vor. An der Schule ist die Numerik bisher weitgehend vorbegegangen. Zu einem stimmigen Bild von Mathematik gehört aber auch die Numerik. Mit einem CAS ist es einerseits unumgänglich, diese Aspekte zu diskutieren, und es ist andererseits leicht möglich, adäquate Grundvorstellungen schon in der Sekundarstufe I anzulegen.

Dabei geht es natürlich nicht um möglichst exakte Fehlerrechnungen, sondern um ein prinzipielles Verständnis für die Grenzen von Modellierungen. Es gibt die „idealen“ Zahlen der Mathematik, bei denen selbstverständlich  $2 = 2,0 = 2,00$  gilt, und die realen Zahlen des täglichen Lebens, die sehr oft eigentlich Intervalle sind und wo 2 keinesfalls gleich 2,0 ist. Meistens, z. B. bei Messungen, stellen Intervalle, nicht exakte Zahlen, das adäquate Modell der Situation dar. Intervalle führen aber zur Fehlerfortpflanzung bei fortgesetzten Modellrechnungen. Vergisst man das, werden die Ergebnisse schnell beliebig. Hinzu kommen heute die „Computer-Zahlen“, die ganz eigenen Regeln folgen. Zwar hat sich die Geschwindigkeit der Prozessoren rasant gesteigert, eine Fehleranalyse der implementierten Gleitkommaarithmetik wurde aber sträflich vernachlässigt. Mit einem CAS kann man sehr einfach die absolut undurchsichtige Fehlerfortpflanzung bei rekursiven Berechnungen demonstrieren. Einem Vorschlag des Karlsruher Mathematikers Ulrich Kulisch (Kulisch 1998) folgend wurden für die folgenden Abbildungen mit Hilfe von MAPLE iterativ jeweils 2000 Glieder der Punktfolge  $P_n(x_n/y_n)$  mit  $P_0(0/0)$  und

$$x_{n+1} = y_n - \operatorname{sgn}(x_n) \cdot \sqrt{|3 \cdot x_n - 36|}, \quad y_{n+1} = 11 - x_n \quad \text{für } n \geq 0,$$

berechnet. Mit dem Befehl *Digits = m* kann man die Anzahl *m* der Nachkommastellen einstellen, mit denen MAPLE rechnen soll. In den vier folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse mit Genauigkeit  $m = 5, 10, 15$  und  $20$  abgebildet.



Die Farbe der Punkte wurde jeweils nach 500 Punkten gewechselt, was in den obigen Schwarz-Weiss-Abbildungen kaum sichtbar ist. Die vier Bilder zeigen große Unter-

schiede, der Einfluss der Rundung ist nicht nachvollziehbar. Ähnliche Artefakte gibt es bei den schönen, computererzeugten Bildern der Chaostheorie (Kirchgraber&Ruf 1997).

Im täglichen Schulleben spielt das kalkülmäßige Umgehen mit Zahlen eine zu große Rolle, numerische Aspekte werden vernachlässigt. Natürlich liefert der Taschenrechner oder das CAS nicht von allein ein besseres Verständnis. Ohne genaue Konzeption der Lehrerinnen und Lehrer können falsche Grundvorstellungen in vielerlei Hinsicht aufgebaut werden: Auf der einen Seite werden Ausdrücke wie

$$\frac{1}{3}, (\sqrt{3})^2, \frac{\pi}{2} + 2 + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \text{ oder } \cos(\arcsin(0))$$

nicht als wohlbestimmte Zahlen oder als Terme, die zum Beispiel vereinfacht werden können, betrachtet, sondern bloß als Rezepte, als auszuführende Algorithmen. Selbst bei Referendaren, also ausgebildeten Mathematikern, bin ich auf solche Missverständnisse gestoßen: Es wurde ernsthaft diskutiert, ob  $4 + \sqrt{3}$  eine oder zwei Zahlen seien!

Wichtig ist stets die *Doppelgesichtigkeit*: Zu betrachten sind sowohl *Ergebnis* als auch *Prozess*, etwa  $\sqrt{2}$  als Zahl und als Prozessanweisung zur numerischen Approximation.

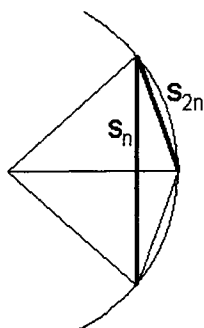
„Wie viel Termumformung braucht der Mensch“ ist die wohlbekannte, von Wilfried Hergert formulierte, nach wie vor unbeantwortete, vielleicht unbeantwortbare Frage des GDM-Arbeitskreises *Mathematikunterricht und Informatik* (Hischer 1993, S. 128). Ich bin davon überzeugt, dass Fertigkeit im Kalkül das verständige Umgehen mit Zahlen und Termen erleichtert. Termrechnen darf aber nicht zum ritualisierten Selbstzweck werden. Hier kann ein CAS helfen, die Maßstäbe vernünftig anzulegen. Oft will man bei Termen eine möglichst einfache Endform finden, was aus vielerlei Gründen eine sinnvolle Aufgabe ist. Nur, was ist „möglichst einfach“? Bei rationalen Zahlen macht eine normierte Endform etwa als gekürzter Bruch natürlich Sinn. Jedoch ist es ausschließlich eine schulische Konvention, bei den beiden algebraisch äquivalenten Darstellungen

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

den rechten als den „besseren“ anzusehen und eventuell sogar den linken mit Punkteabzug zu bestrafen. Das Rationalmachen von Nennern artet so zu einem unsinnigen Ritual aus. Wieso zum Beispiel darf man dann  $\frac{1}{\pi}$  stehen lassen? Die beiden obigen Darstellungen

sind zunächst gleichwertig und als Endergebnis akzeptabel. Wenn man im Kopf Näherungswerte ausrechnen will, ist natürlich die rechte Darstellung besser. Wenn man dagegen mit einem Computer Näherungswerte ausrechnen will, ist die linke Darstellung manchmal deutlich überlegen. Ein überzeugendes Beispiel hierfür beschreiben Hans Humenberger und Hans-Christian Reichel (Humenberger&Reichel 1995, S. 107). Besonders delikat wird die Sache, wenn man mit dem „simplify-Befehl“, über den jedes CAS verfügt, Terme vereinfachen lässt. Was von CAS als besonders einfach angesehen wird, ist oft überraschend. Das Problem liegt sogar sehr tief: Es gibt grundsätzlich keinen Algorithmus, der entscheiden kann, ob zwei beliebige vorgelegte Terme algebraisch äquivalent sind – mit diesem „Mangel“ der CAS werden wir also immer leben müssen. Um so wichtiger ist es, die Schülerinnen und Schüler mit dieser Problematik vertraut zu machen.

Ein sehr bekanntes Beispiel, dessen viele interessante Aspekte jedoch nicht so bekannt sind, ist die Approximation des Kreises durch ein- und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke, ein Thema, das präformal schon in der 5. Klasse und dann wieder in der 10. Klasse behandelt wird. Die Idee, den Einheitskreis durch einbeschriebene n-Ecke mit  $n =$



$3 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 2^2$ ,  $3 \cdot 2^3$ , ... zu approximieren (ist allen Lernenden klar, wieso man nicht einfach einbeschriebene 3-, 4-, 5-, ... Ecke nimmt?), führt durch elementargeometrische Betrachtung an der nebenstehenden Figur zu einer einfachen Rekursionsformel für die Seitenlänge  $s_n$  des jeweiligen  $n$ -Ecks. Aus dieser wohlbekannten Formel  $s_{2n} = f(s_n)$  bekommt man eine analoge Rekursionsformel für den halben Umfang  $p_n$  des jeweiligen  $n$ -Ecks, der dann ja gerade eine Näherung für  $\pi$  ist. Hier wird diese weniger bekannte Rekursionsformel für  $p_n$  verwendet, da sie die numerischen Probleme sehr klar zeigt. Am Einheitskreis wird mit  $n = 6$  begonnen, da dann die Seitenlänge  $s_6 = 1$  und die erste  $\pi$ -Näherung  $p_6 = 3$  ist. Das leicht verifizierbare Resultat für die Rekursion ist:

$$p_{2n} = n \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}.$$

Diese schöne, „einfache“ Formel kann man auch „verschlimmern“ zu

$$p_{2n} = \frac{2p_n}{\sqrt{2 + 2 \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}}.$$

Beide Formeln sind algebraisch gleichwertig, sollten also beide, zumindest in der Theorie,  $\pi$  immer besser approximieren. Konkret lässt sich diese Approximation natürlich nur numerisch durchführen, was in der Schule normalerweise nicht gemacht wird. Mit einem CAS ist die rekursive Berechnung problemlos. Die folgende Tabelle wurde mit MAPLE berechnet, die Rechengenauigkeit wurde auf 5 Dezimalstellen eingestellt.

### 1. Iterationsformel

$n = 1$	$\pi = 3.0$
$n = 2$	$\pi = 3.1055$
$n = 3$	$\pi = 3.1315$
$n = 4$	$\pi = 3.1385$
$n = 5$	$\pi = 3.1476$
$n = 6$	$\pi = 3.1839$
$n = 7$	$\pi = 3.3256$
$n = 8$	$\pi = 3.8400$
$n = 9$	$\pi = 0$
$n = 10$	$\pi = 0$

### 2. Iterationsformel

$n = 1$	$\pi = 3.0$
$n = 2$	$\pi = 3.1058$
$n = 3$	$\pi = 3.1326$
$n = 4$	$\pi = 3.1394$
$n = 5$	$\pi = 3.1412$
$n = 6$	$\pi = 3.1416$
$n = 7$	$\pi = 3.1418$
$n = 8$	$\pi = 3.1418$
$n = 9$	$\pi = 3.1418$
$n = 10$	$\pi = 3.1418$

In der linken Spalte wurde mit der „schönen“ ersten Formel gerechnet. Zunächst wird  $\pi$  immer besser approximiert, aber ab dem 6. Schritt wird die Approximation schlechter und ab dem 9. Schritt ist der Näherungswert immer Null! Eine Erhöhung der Stelligkeit schiebt die Katastrophe nur ein paar Schritte weiter hinaus. Verwendet man dagegen die zweite Rekursionsformel (rechte Spalte), so wird  $\pi$  durchgängig immer besser approximiert; ab dem 7. Schritt wird das Verfahren stabil.

Wenn man die beiden Formeln genauer anschaut, versteht man, was geschehen ist:

$$p_{2n} = \frac{n}{\rightarrow \infty} \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}$$

$\rightarrow 0$

„Katastrophe für große n“

$$p_{2n} = \frac{2p_n}{\sqrt{2 + 2 \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{n}\right)^2}}}$$

$\rightarrow 1$

„ $p_{2n} \approx p_n$  für große n“

Da Computer immer nur mit endlicher Genauigkeit rechnen können, identifizieren sie hinreichend kleine Zahlen mit Null, also *muss* die erste Iteration versagen. Das Problem geht übrigens tiefer: Es gibt leider keine Möglichkeit, für eine beliebig vorgelegte Zahl zu entscheiden, ob sie Null ist oder nicht; Luitzen Egbertus Jan Brouwer hat solche Zahlen konstruiert. Wenn man dagegen die scheinbar schlechtere zweite Formel nimmt, ist das Problem beseitigt. Die Rekursion wird stets stabil, und die Approximation wird wesentlich besser.

## 7 Strukturiertes Üben mit einem CAS

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie ein CAS die Konstruktion produktiver Lernumgebungen unterstützen kann. In den beiden *Handbüchern produktiver Rechenübungen* (Wittmann&Müller 1990/1992) beschreiben Erich Ch. Wittmann und Gerhard N. Müller ihre in *mathe 2000* überzeugend realisierte Konzeption, Lernprozesse in der Schule durch die Konstruktion produktiver Lernumgebungen zu planen. Produktive Übungsformen müssen auch für die Sekundarstufen entwickelt werden, ein kleines Beispiel ist die folgende Übungssequenz zu Polynomfunktionen. Dieses Beispiel ist im PIMOKL-Projekt erfolgreich eingesetzt worden (Henn&Jock 1998, Henn 2002). Die Teilaufgaben stehen in einem ganzheitlichen Strukturzusammenhang und geben ein reichhaltiges Potential für mathematische Aktivitäten. Das CAS hilft beim heuristisch-experimentellen Arbeiten und bei Termumformungen. Geübt werden sowohl notwendige Basisfertigkeiten als auch Problemlösefähigkeiten.

### **Entdecke und beweise!**

*f* sei eine Polynomfunktion 3. Grades.

- f* habe die Nullstellen 2, 4 und 5. Zeichne für  $x_0 = 3$  die Tangente an den Graphen von *f*. Was fällt Dir auf?
- Gilt deine Vermutung auch, wenn *f* drei andere Nullstellen hat?
- Lässt sich eine entsprechende Vermutung übertragen, wenn *f* nur zwei Nullstellen hat?
- Lässt sich eine entsprechende Vermutung übertragen, wenn *f* nur eine Nullstelle hat?
- Wie könnte eine Übertragung auf ganzrationale Funktionen beliebigen Grades aussehen?

Eine mögliche Bearbeitung unter Verwendung von MAPLE soll kurz skizziert werden: Es ist nur wenig MAPLE-Syntax nötig. Nach Eingabe einer möglichen Funktionsgleichung

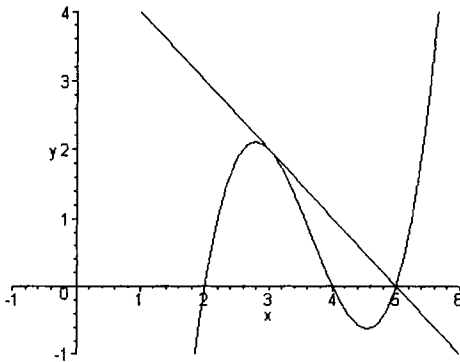
$$f(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$$

berechnet MAPLE die Ableitung  $f'$  von *f*. Die Gleichung

$$t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3)$$



der Tangente  $t$  kann jetzt direkt so in MAPLE definiert werden, und das CAS zeichnet die Graphen von  $f$  und  $t$ :



Die Zahlenwerte sind so gewählt, dass der angestrebte Satz, dass nämlich bei drei Nullstellen  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  die Tangente für  $x_0 = \frac{n_1 + n_2}{2}$  durch den dritten Achsen-schnittpunkt  $(n_3|0)$  verläuft, ins Auge fällt (vgl. nebenstehende Abbildung).

Eine abstrakt denkende Schülerin kann jetzt sofort den allgemeinen Ansatz

$$f(x) = a \cdot (x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)$$

machen und dann MAPLE an der Stelle  $x_0$  die Tangentengleichung  $t(x)$  berechnen

lassen. Hierbei kommt die Fähigkeit des CAS zum Tragen, algebraisch aus dem allgemeinen Ansatz von  $f(x)$  die Ableitung  $f'$  von  $f$  und die Tangentengleichung  $t(x)$  berechnen zu können. Danach bestätigt das CAS, dass die Gleichung  $t(x) = 0$  stets die Lösung  $n_3$  hat. Damit sind zugleich noch die Fragen b. und c. beantwortet, wenn man wie üblich die doppelte Nullstelle zweimal hinschreibt. Ein mehr visuell veranlagter Schüler wird weitere Beispiele untersuchen, was durch leichtes Abändern des MAPLE-Worksheets einfach möglich ist.

Die Frage d. lässt sich ohne CAS beantworten! Wenn alle drei Nullstellen zusammenfallen, so ist der Satz trivialerweise richtig; ist dagegen die Nullstelle nur einfach, so macht die Aussage des Satzes keinen Sinn. Interessanter ist natürlich eine Verallgemeinerung des Satzes, indem die drei Nullstellen durch drei  $a$ -Stellen ersetzt werden.

Die offene Frage e. wird z. B. dahingehend präzisiert, dass Polynomfunktionen vom Grad  $n$  gesucht werden, die mindestens die drei Nullstellen 2, 4 und 5 haben. Der Grad  $n$  muss also mindestens 3 betragen. Ein möglicher Ansatz mit MAPLE ist

$$f(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)g(x)$$

mit einem Polynom  $g(x)$  vom Grad  $n-3$ . Die Untersuchung, wann für  $x_0 = 3$  die Tangente  $t$  mit der Gleichung

$$t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

durch den Punkt  $(5|0)$  verläuft, ist mit Hilfe von MAPLE leicht zu bewerkstelligen. Die zugehörige Gleichung  $t(5) = 0$  ist für  $n = 4$  unlösbar, für  $n > 4$  ist sie jedoch stets lösbar. Die Verallgemeinerung auf beliebige Nullstellen  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  verläuft dann mit Hilfe von MAPLE ganz analog.

## 8 Proofs that explain: Ein präformaler Beweis des Hauptsatzes der Algebra

Behauptungen zu beweisen, ist ohne Zweifel eine wesentliche Seite der Mathematik. Allerdings soll ein Beweis nicht nur die Richtigkeit einer Behauptung zeigen, sondern möglichst auch überzeugen und Verständnis ermöglichen, wieso die Behauptung gilt. Gila Hanna spricht in diesem Zusammenhang von „*proofs that explain*“ im Gegensatz zu „*proofs that only proof*“ (Hanna 1989). Die mathematische Tradition, Beweise mög-

lichst formal, deduktiv und lückenlos aufzubauen, ist gerade für Anfänger ein großes Verständnishindernis. Die Konzentration auf wesentliche Ideen kann hier Abhilfe schaffen. Beispiele sind die „präformalen Beweise“ von Werner Blum und Arnold Kirsch (Blum&Kirsch 1991) und die „inhaltlich-anschaulichen Beweise“ von Erich Ch. Wittmann und Gerhard N. Müller (Wittmann&Müller 1988), die Lernenden helfen sollen, mathematische Begründungen zu verstehen. Hier liegt auch eine Stärke von CAS, die durch Visualisierung und Dynamisierung den Kern mathematischer Ideen aufzeigen können, ohne dass man in einem formal korrekten Beweistext hoffnungslos den Überblick verliert. Ein schönes Beispiel ist der folgende präformale Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, dass jedes Polynom  $g$  vom Grad  $n$  mit  $n > 0$  im Körper der komplexen Zahlen genau  $n$  (ggf. mehrfach gezählte) Nullstellen hat (Henn 2003, S.157 f.). Auf diesen Beweis trifft auch Godfrey Harold Hardys Aussage zu: „The best mathematics is serious as well as beautiful“ (Hardy 1992). Die Idee zu dieser topologischen Beweisvariante geht auf Gauß zurück. Der Beweis verwendet implizit die fundamentale Idee der Approximation.

Zugrunde liegt die folgende Überlegung: Der (einfach durchlaufene) Kreis  $k$  um  $O$  mit Radius  $r$  wird mit Hilfe des Polynoms  $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  auf die Bildkurve  $g_k$  abgebildet. Genauer betrachtet man dabei die Punkte des Kreises  $k$  als komplexe Zahlen  $z$ , die jeweils auf die komplexe Zahl  $g(z)$  abgebildet werden. Die Bildkurve lässt sich also schreiben als

$$g_k = \{g(z) \mid z \in k\}.$$

Fall a: Für sehr kleine Kreisradien  $r$  sind höhere Potenzen zu vernachlässigen, es gilt also in diesem Fall  $g(z) \approx a_1 z + a_0$ , und das Bild ist näherungsweise ein kleiner, einfach durchlaufener Kreis um  $a_0$  mit dem Radius  $|a_1| \cdot r$ .

Fall b: Für sehr große  $r$  ist nur die höchste Potenz relevant, es gilt  $g(z) \approx a_n z^n$ , und das Bild ist näherungsweise der  $n$ -fach durchlaufene Kreis um  $O$  mit dem Radius  $|a_n| \cdot r^n$ .

Wenn  $r$  von  $0$  gegen  $\infty$  geht, verformt sich die Bildkurve  $g_k$  „wie eine Spiralfeder“ vom winzigen, einfach durchlaufenen Kreis um den Punkt  $a_0$  (Fall a) zum  $n$ -fach durchlaufenen Nullpunktkreis (Fall b) und überquert dabei genau  $n$  mal den Nullpunkt, was dann jeweils zu Nullstellen von  $g(x)$  führt.

Das folgende MAPLE-Programm erzeugt für  $g(x) = x^3 + (2+i)x^2 + ix + 3 + 2i$  durch den Befehl *animate* eine Folge von 20 Bildern  $g_k$  für  $0 \leq r \leq 5$  in äquidistanten Schritten. Diese Bilder werden dann nacheinander am Bildschirm dargestellt, so dass der Eindruck des stetigen Wachsens von  $g_k$  ausgehend vom kleinen Kreis um  $a_0 = 3 + 2i$  bis zum dreimal durchlaufenen Kreis um  $O$  entsteht.  $g_k$  „verbiegt“ sich dabei wie eine Spiralfeder, jede Überquerung des Nullpunkts liefert eine weitere Lösung von  $g(x) = 0$ .

```
> g:=x->x^3+(2+I)*x^2+I*x+3+2*I;
> animate([Re(g(r*cos(t)+I*r*sin(t))),Im(g(r*cos(t)+I*r*sin(t))),t=0..2*Pi],
r=0..3,scaling=constrained,frames=20,numpoints=100,color=blue);
```

Mit dem ersten Befehl wird die Funktion  $g$  definiert. Dann kommt die Animation mit dem *animate*-Befehl. In den eckigen Klammern steht die zu zeichnende Kurve  $g_k$  in Parameterform

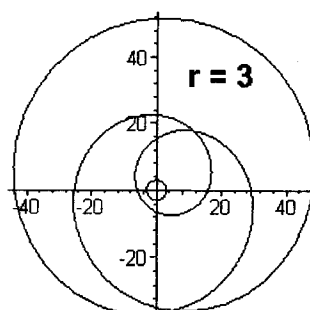
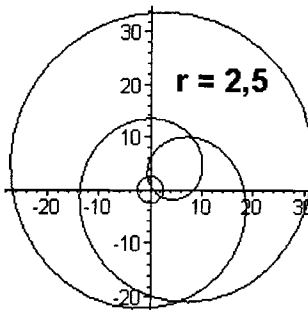
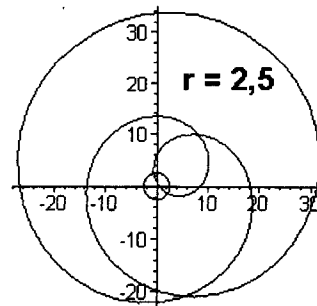
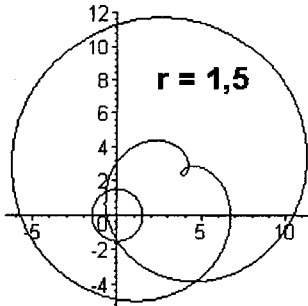
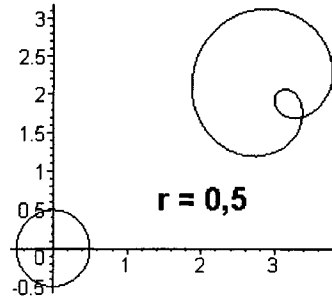
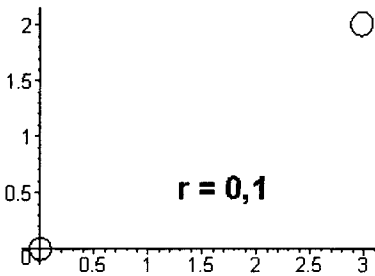
$$[a(t), b(t), t = 0..2\pi].$$

Dabei ist  $a(t)$  der Realteil,  $b(t)$  der Imaginärteil der komplexen Zahl  $g(z)$  mit

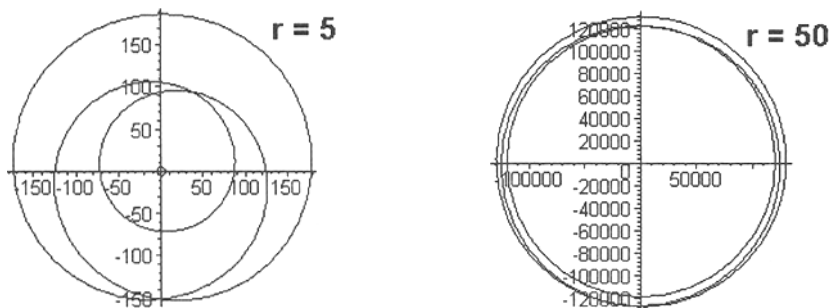
$$z = r \cdot e^{it} = r \cdot \cos(t) + i \cdot r \cdot \sin(t) \in k.$$

Das Symbol  $i$  ist für MAPLE die komplexe Einheit. Der Zeichenbereich für den Parameter  $t$  ist das Intervall  $[0; 2\pi]$ . Berechnet werden nun 20 Bilder (frames = 20), wobei der Radius  $r$  äquidistant von 0 bis 3 wächst. Für jedes Bild werden 100 Punkte (numpoints = 100) berechnet, die interpoliert werden. Die Achsen haben auf dem Bildschirm unverzerrte Einheiten (scaling = constrained), die Zeichenfarbe für die Kurven ist blau (color = blue)<sup>9</sup>.

Die acht folgenden Abbildungen wurden nicht mit den Animate-Befehl erzeugt, sondern zeigen „Momentaufnahmen“ für verschiedene  $r$ -Werte. Es sind jeweils der Urbild-Nullpunktkreis  $k$  mit angegebenem Radius  $r$  und die Bildkurve  $g_k$  gezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass MAPLE die Skalierung der Achsen automatisch angepasst hat.



<sup>9</sup> Für eine Visualisierung mit einem dynamischen Geometriesystem vgl. Henn 2003, S. 162. Über <http://www.wolfgang-henn.de/> sind zugehörige MAPLE- und EUKLID-Dateien erhältlich.



## 9 CAS – Herausforderung und Chance

Die Erfahrungen aus dem PIMOKL-Schulversuch können natürlich keine vollständige Gesamtlösung für die Problematik des Einsatzes eines CAS im Unterricht geben. Sie sind jedoch schon in die Gesamtrevision der Bildungspläne in Baden-Württemberg eingeflossen und haben zusammen mit dem BLK-Modellversuch SINUS (vgl. Henn 1999) eine grundlegende Neuorientierung des Mathematikunterrichts bewirkt. Wesentlich für eine erfolgreiche Eingliederung eines CAS in den Mathematikunterricht ist eine didaktische Reduktion des Stoffes auf fundamentale Ideen und nicht eine zusätzliche Anreicherung mit neuen syntaktischen Elementen und zusätzlichen Problemstellungen. Die schüler- und output-orientierte Idee der Kerncurricula und Bildungsstandards<sup>10</sup> der Sekundarstufe I muss hierfür in die Oberstufe fortgesetzt werden.



Wesentlich ist der Wein, nicht das Fass oder der Schlauch, in dem er ruht. Unser Fass ist ein CAS, ob es nun MAPLE, DERIVE oder sonst wie heißt. Es bietet große Chancen und birgt einige Gefahren in sich. Es darf nicht zum scheinbaren „universellen Problemlöse-Instrument“ entarten, sondern tritt als wichtige methodische Ergänzung zu den klassischen Medien hinzu, ohne sie jedoch zu ersetzen. Für Ideen zur Problemheuristik, für das Design einer Lösestrategie sind meistens Kopf, Papier und Bleistift nötig. Der nebenstehende MAPLE-Werbe-Slogan gibt einen schlechten Rat!

Das CAS ist ein wertvolles Werkzeug für selbstgesteuerte mathematische Aktivitäten. Dies erfordert aber von den Lehrenden die Entwicklung von geeigneten produktiven Lernumgebungen, die die Eigentätigkeit der Lernenden anregen, in die richtigen mathematischen Bahnen lenken und auf ein ausgewogenes Gleichgewicht zwischen Instruktion durch die Lehrperson und Konstruktion durch die Lernenden selbst achten. Bei der Entwicklung von Arbeitsblättern und Lernumgebungen besteht die große Gefahr, dass diese zu sehr vorstrukturiert sind und zu einem eher schematischen Nachvollziehen des vom Lehrer vorgegebenen Wegs führen. Eine gute Arbeitsumgebung zur Erarbeitung eines mathematischen

<sup>10</sup> vgl. Barzel u.a. 2004; die aktuellen „Bildungsstandards“ von Baden-Württemberg findet man unter <http://www.bildungsstandards-bw.de/>

Zusammenhangs gibt ein klar formuliertes Problem vor und gibt Hinweise, wie man vorgehen könnte, lässt aber den Lernenden die Entscheidung, wie sie vorgehen wollen und ob und wie sie das CAS einsetzen.

Das starke Gewicht der Vermittlung und Anwendung von Kalkülen im traditionellen Mathematikunterricht führt zu einer Sicht von „Mathematik als Produkt“, das angewendet wird. Der Paradigmenwechsel zu „Mathematik als Prozess“, den Mathematikdidaktiker wie Erich Ch. Wittmann schon lange fordern, kann durch die Existenz der CAS gefördert werden. Im Vordergrund steht nicht die Vermittlung und Anwendung eines Kalkül sondern die Erarbeitung des und die Einsicht in den Kalkül. Das selbständige mathematische Handeln der Schülerinnen und Schüler erlaubt nicht mehr die lehrerzentrierte Sicht des Vorgebens von Begriffen, des Formulierens von Sätzen und des formalen Beweisens dieser Sätze. Im Vordergrund sollte die schülerorientierte Sicht der Entwicklung von Begriffen, des Findens und plausibel Machens von Sätzen stehen. Beim selbständigen Explorieren offener Fragestellungen können die Visualisierungsmöglichkeiten eines CAS sehr hilfreich sein, zu selbstständigen Lösungswegen unterschiedlicher mathematischer Qualität führen und die Kreativität herausfordern. Der „Lehrplan für das Fach Mathematik mit einem Computer-Algebra-System an allgemeinbildenden Gymnasien in Baden-Württemberg“<sup>11</sup> versucht, diese Erkenntnisse aus dem PIMOKL-Schulversuch landesweit zu verbreiten. Eine große Anzahl von Schulen nutzt diese Möglichkeit schon seit einiger Zeit. Verwendet wird oft MAPLE, aber auch DERIVE am PC oder die verschiedenen Typen von CAS-Taschenrechnern. Bei den beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg ist man einen etwas anderen Weg gegangen, dort wird in etwa 90% der Schulen der TI-92 verwendet. Selbstverständlich wurden die aus den CAS-Projekten gewonnenen Erfahrungen auch in den regulären Oberstufenlehrplan eingebracht. Da in Baden-Württemberg grafikfähige Taschenrechner verbindlich sind, kann zumindest auf gewisse numerische Fähigkeiten und auf die Fähigkeiten zur Visualisierung, die ein CAS hat, zurückgegriffen werden.

Damit die Chancen der CAS langfristig den Mathematikunterricht positiv beeinflussen können, ist ein wesentlicher Punkt noch nicht erwähnt worden: Es ist die Aufgabe der Universitäten, die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer dementsprechend auszubilden. Dies stellt eine große Anforderung an die Lehrenden der mathematischen Fachbereiche dar.

## 10 Literatur

- Alten, H.-W. u. a.: 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen – Berlin: Springer, 2003
- Artigue, M.: Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, S. 11 – 18
- Aspetsberger, K. u. G. Funk: Experiments with muMATH in Austrian high schools. – In: SIG-SAM Bull. 18(4) 1984, S. 4–7
- Barzel, B., S. Hußmann u. T. Leuders: Bildungsstandards und Kernlehrpläne in NRW und BW. – In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 57/3, 2004, S. 142 – 146
- Baumert, J. u.a. (Hrsg.): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. – Opladen: Leske+Budrich 1997
- Blum, W. u. M. Neubrand (Hrsg.): TIMSS und der Mathematikunterricht. – Hannover: Schroedel 1998
- Blum, W. u. A. Kirsch: Preformal Proving: Examples and Reflections. – In: Educational Studies in Mathematics, 22 (1991), S. 183 – 203

<sup>11</sup> Der Lehrplan ist auf der in Fußnote 6 angegebenen Webseite zugänglich.

- Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., Weigand, H.-G.: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. – In: H.-E. Tenorth (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. – Weinheim: Beltz (2001), S. 26 – 53. Kurzfassung in: JMD 22 (2001), H. 1, S. 73 – 90
- Computeralgebra in Deutschland. – Herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM, 1993, S. 2
- Gathen, v. z. J. u. J. Gerhard: Modern Computer Algebra. – Cambridge University Press 1999
- Hanna, G.: Proofs that prove and proofs that explain. – In: Thirteenth International Conference of the International Group on Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, Proceedings (1989), S. 45 – 51
- Hardy, G. H.: A Mathematician's Apology. – Cambridge: Cambridge University Press (1992), S. 89
- Henn, H.-W.: The impact of Computer Algebra Systems on Modelling Activities. – In: Galbraith, P.W. et al (Eds): Teaching and Assessing in a Technology rich World. Chichester: Ellis Horwood 1998, S. 115 – 123
- Henn, H.-W. u.a. (Hrsg.): Wie verändert sich der Mathematikunterricht durch den Einsatz eines Computer Algebra Systems? – Stuttgart: Landesinstitut für Erziehung und Unterricht 1998
- Henn, H.-W. u. W. Jock: Ganzrationale Funktionen dritten Grades. – In: Henn, H.-W. u.a. (Hrsg.): Wie verändert sich der Mathematikunterricht durch den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems? LEU Baden-Württemberg, Stuttgart 1998, S. 19 – 23
- Henn, H.-W. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Aufbruch. – Hannover: Schroedel 1999
- Henn, H.-W.: CAS-Taschenrechner – ein vergleichender Überblick. – In: Computeralgebra-Rundbrief (DMV-Fachgruppe Computeralgebra) 27 (Okt. 2000), S. 20 – 24
- Henn, H.-W.: The CAS Project Mobile Classroom in the German State of Baden-Wuerttemberg. – In: Weigand, H.-G. u.a. (Hrsg.): Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. München 1998. – Hildesheim: Franzbecker 2001, S. 41 - 53
- Henn, H.-W.: Strukturiertes Üben mit einem Computer Algebra System. – In: mathematik lehren 115, 2002, S. 50 – 53
- Henn, H.-W.: Elementare Geometrie und Algebra. – Wiesbaden: Vieweg, 2003
- Hischer, H. (Hrsg.): Wie viel Termumformung braucht der Mensch. – Hildesheim: Franzbecker 1993
- Hischer, H.: Mathematikunterricht und neue Medien. – Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. – Hildesheim: Franzbecker 2002
- Humenberger, H. u. H.-Ch. Reichel: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik. – Mannheim: BI 1995
- Kirchgraber, U. u. U. Ruf: Von Modellen und Prognosen oder Warum manche Mathematiker nicht ungern über das Wetter reden. – In: Der Mathematikunterricht 43/5, 1997, S. 30 – 36
- Klika, M.: Modellbildung und Realitätsbezug am Beispiel der Funktionen von zwei Variablen. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, S. 342 – 345
- Koepf, W. : Mehr Moderne in die Schulen. – Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 70 (Juni 2000), S. 93 – 97
- Kulisch, U.: Computer, Arithmetik und Numerik. Ein Memorandum. – In: Überblicke Mathematik 1998, S. 19 – 54, Wiesbaden: Vieweg 1998
- Malle, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. – Braunschweig: Vieweg 1993
- Matzat, H. B.: Computeralgebra in Deutschland 1993. – Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM, 1993
- Meyer, J.: Die Sattelfläche im Grundkurs. – In: Praxis der Mathematik (1995), V. 37(6), S. 250 – 255
- Meyer, J.: Kegelschnitte mit Geometrie-Software. – Mathematik betrifft uns (1996), Nr. 5
- Meyer, J.: Die Sattelfläche im Leistungskurs. – In: Praxis der Mathematik (2000) V. 42(6), S. 253 – 257
- Oldenburg, R.: CAS-Kompetenz – Was ist das?. – In: Tagungsband Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung IV. Konsequenzen aus PISA. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI, 2004, S. 59 – 66
- Peschek, W. u. E. Schneider: CAS in general mathematics education. – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34/5, 2002, S. 189 – 195

- Skovsmose, O.: Towards a philosophy of critical mathematics education. – Dordrecht: Kluwer Academic 1994
- Schmitz, M.: Analytische Geometrie als wichtige Voraussetzung für Veranschaulichungen am Computer. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, S. 552 – 554
- Schneider, E.: Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Didaktische Orientierungen – Praktische Erfahrungen. – München: Profil-Verlag 2002
- Schupp, H.: Geometrie in der Sekundarstufe II. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 2000, H.1, S. 50 – 66
- Steffen, K.: Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit. – In: DMV-Nachrichten 1994, H.1, S. 24 – 40
- vom Hofe, R.: Computergestützte Lernumgebungen im Analysisunterricht. Fallstudien und Analysen. – Habilitationsschrift Universität Augsburg 1998
- Weigand, H.-G., Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 20 (1999), H. 1, S.28 – 54
- Weigand, H.-G. u. Th. Weth: Computer im Mathematikunterricht – Neue Wege zu alten Zielen. – Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2002
- Winter, H.: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. – In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 1995, S. 37 – 46. Überarbeitete Version in: Henn, H.-W. u. K. Maaß (Hrsg.): ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8. Hildesheim: Franzbecker, 2003, S. 6 – 15
- Wittmann, E. Ch. u. G. N. Müller: Wann ist ein Beweis ein Beweis? – In: P. Bender (Hrsg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. – Berlin: Cornelsen 1988, S. 237 – 257
- Wittmann, E. Ch. u. G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. – Stuttgart: Klett, Band 1, 1990, Band 2, 1992

### Adresse des Autors

Hans-Wolfgang Henn  
Universität Dortmund  
Fachbereich Mathematik  
IEEM  
Vogelpothsweg 87  
42221 Dortmund  
Wolfgang.Henn@uni-dortmund.de