Visualisierung, Bild und Metapher

Die vermittelnde Tätigkeit der Visualisierung beim Lernen von Mathematik

Zusammenfassung: Dieser Beitrag entwickelt eine durch theoretische Ansätze geleitete Sicht auf den Visualisierungsbegriff. Ein Zeichen kann als Bild gesehen werden, welches dann analog repräsentiert. Damit steht es im Gegensatz zu einem Zeichen, das als Symbole gesehen, propositional repräsentiert. Beide Sichtweisen ergänzen einander. Lernende entwickeln bei der Bearbeitung von Problemen einen stets neuen Blick auf vorliegende Zeichen. Dies drückt sich in der Sprache durch Verwendung metaphorischer Wendungen aus. Ein solcher Wechsel zwischen Analogem und Propositionalem, zwischen Bildhaftem und nicht Bildhaftem, welcher durch den Gebrauch von Metaphern geprägt ist, wird als charakteristisches Merkmal von Visualisierung gesehen.

Abstract: This paper discusses a theory based view on the concept of visualization. Following sign theory a sign seen as an image represents analogously. On the other hand a sign seen as a symbol represents propositionally. Both views are complementary. It is the student who decides his / her own view on a sign as image or symbol. Working on math problems students change their views on signs. One can recognize this change in students use of metaphors. This change between analogy and proposition, between image and symbol using metaphors is significant for the concept of visualization.

I. Einleitung*

Das Wort „Visualisierung" wird in der Mathematik und Mathematikdidaktik in vielfältiger Weise verwendet. Die Bedeutungen reichen von Visualisierung als graphischer Darstellung komplexer mathematischer Zusammenhänge vor allem unter Verwendung von Software und leistungsfähigen Rechnern (vgl. Peitgen, 1986) bis zur Veranschaulichung elementarer Begriffe der Schulmathematik. Didaktiker verknüpfen den Begriff mit dem handelnden Umgang Lernender mit Bildern, welche den Begriffserwerb, das Beweisen, oder das Finden von Problemlösestrategien fördern und erleichtern soll. Dazu wurden zahlreiche und im Mathematikunterricht gut verwendbare Strategien zur Visualisierung entwickelt. Darüber hinaus findet man allgemeinere Positionen (vgl. Bender 1996, Dreyfus 1994, Kautschitsch 1994, Presmeg 1994, Zazkis 1996), die mit unterschiedlichem Abstraktionsanspruch eine allgemeine Sicht auf den Visualisierungsbegriff zu finden versuchen. Aus Sicht des vorliegenden Beitrages scheinen manche dieser Positionen zu abstrakt, während andere dem mathematischen Inhalt noch zu nahe sind, als dass aus ihrer Rezeption ein Gebäude „Visualisierung" schon sichtbar wäre. Dieses Gebäude hätte die Aufgabe, ein trennscharfes Begriffsverständnis von Visualisierung darzustellen, mit welchem einerseits vorliegende Angebote zur Visualisierung von Mathematik beurteilt (stoffdidaktische Komponente) und andererseits globalere Überlegungen zur Visualisierung in ihrem Verhältnis zu gängigen didaktischen Positionen (theoretische Komponente) untersucht werden könnten. Einen Versuch stellt der vorliegende Beitrag dar.

Die vorliegende Untersuchung gliedert sich in vier Teile. Im ersten Abschnitt wird ein Beispiel vorgestellt. Das Zusammenwirken von Bild, Sprache und Symbol bei der Bearbeitung eines mathematischen Textes wird dargestellt. Die Beobachtung zeigt einen

* Für inhaltliche Hinweise danke ich den MitarbeiterInnen der Klagenfurter Abteilung für Didaktik der Mathematik insbesondere Rudolf Sträßer und Roland Fischer, sowie Peter Bender (Paderborn) und den Gutachtern des Textes herzlich.

Wechsel zwischen Darstellungsformen, welche das Denken des Lernenden bestimmen. Dies soll betrachtet und beurteilt werden. Mit welchen Mittel kann dies geschehen? Einerseits benötigt man einen theoretischen Ansatz, der im zweiten Abschnitt vorgelegt wird. Hier wird die verwendete Sprache, die zu Tage getretenen Unsicherheiten, die Teil- und Halbwahrheiten in ihrem Gang und in ihrer Bedeutung sichtbar gemacht. Daraus sollen in Folge didaktisch verwertbare Schlüsse gewonnen werden. Diesem Ansatz wird im dritten Abschnitt ein zweiter theoretischer Überbau zur Seite gestellt werden. Das Bild, seine innere Struktur, welche das Denken des Mathematik treibenden Menschen spiegelt und gleichzeitig steuert, soll unter Bezug auf didaktische und linguistische Sichtweisen so weit dargelegt werden, dass in einem vierten Abschnitt die Zusammenschau von Bild und Sprache in Form der Deutung des vorangestellten Beispiels erfolgen kann. Erst zu diesem Zeitpunkt wird unter Verweis auf eine didaktisch motivierte Definition von Visualisierung (vgl. Kadunz, 1998) die Darstellung dieses Beispiels in ihren Bedeutungen eingeschätzt werden. Mit diesen Einschätzungen ist dann ein Ausblick auf weitere didaktische Betrachtungen zum Einsatz von Bildern und Fragen der Visualisierung beim Lernen von Mathematik möglich. Insgesamt ist es Ziel,

- spezielle Sprachfiguren anzugeben, welche die Konstruktion mathematischer Begriffe befördern.
- Zweites Ziel ist die Entwicklung einer didaktisch orientierten Sicht auf bildhafte Darstellungen.
- Letztes und zu einer Zusammenschau führendes Ziel ist die Beantwortung der Frage, ob und wie bildliche Darstellungen bei Verwendung von metaphorischen Redeweisen das Lernen von Mathematik unterstützen und wie sich darüber hinaus aus dem speziellen Charakter von bildhaften Darstellungen Beschreibungen unbekannter Sachverhalte gewinnen lassen. Kurz gesagt, welchen Beitrag kann Visualisierung beim Lernen von Mathematik leisten?

II. Ein Beispiel

Das vorgelegte Beispiel hat die Aufgabe, die Verwendung von Bildern und umgangssprachlichen Formulierungen bei der Bearbeitung eines mathematischen Textes darzustellen. Dabei wurde der Text so ausgewählt, dass der mathematische Inhalt dem Bearbeiter nicht bekannt war. Die Formulierungen des zu besprechenden Textes sollten nicht sofort in das vorhandene mathematische Wissen des Lesers eingebettet werden können[1]. Die Darstellung der Erarbeitung, das Aufzeigen des Ganges der Gedanken und deren Anbindung an erworbenes und einsetzbares mathematisches Wissen ist Ziel der Ausführungen. Da die Wiedergabe der Bearbeitung nicht aus Sicht eines Lehrbuchautors[2] erfolgte, werden neben den verwendeten Bildern und den damit verbundenen Formulierungen auch die aufgetretenen Denkfehler, Fehlvorstellungen,

---

[1]Ein Beispiel aus der Schulmathematik wurde nicht in Betracht genommen, weil hier das Vorwissen die Anstrengung der Bearbeitung überdeckt hätte. Eine ausschließlich geometrisch orientierte Fragestellung hätte die Veranschaulichung zu offensichtlich werden lassen und wurde daher auch nicht ausgewählt.

[2] „*...The result is a book which will be fun for everybody with an interest in mathematics, requiring only a very modest (undergraduate) mathematical background.*" (Klappentext, Aigner, 1998)

falschen oder umständlichen Interpretationen und die daraus resultierenden Folgerungen in „Ich Form“ vor den Leser gelegt.
Martin Aigner und Günter Ziegler stellen in „Proofs from the book“ (vgl. Aigner, 1998) dem Leser unter dem Motto „Perlen der Mathematik" eine Reihe von bekannten mathematischen Fragen vor. Im Kapitel 8 beschäftigen sie sich mit einer geometrischen Eigenschaft von Punkten und Geraden in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und verallgemeinern diese Eigenschaft. Die auf J.J. Sylvester zurückgehende Fragestellung lautet:
„Question for Solution.
11851. (Professor Sylvester.) - Prove that it is not possible to arrange any finite number of real points, so that a right line through every two of them shall pass through a third, unless they all lie in the same right line.“ (vgl. Aigner, 1998, S. 45)
Da die Formulierung eine Verneinung einer Aussage enthält, ist sie nicht sofort verständlich. Die Autoren formulieren um.
„In any configuration of n points in the plane, not all on a line, there is a line which contains exactly two of the points.“ (vgl. Aigner, 1998, S. 45)

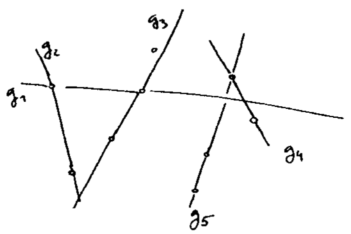


Abbildung 1

Zur Erläuterung wird von mir eine Zeichnung (vgl. Abbildung 1) erstellt, die einen ersten Eindruck des Sachverhaltes vermitteln soll. Gleichgültig, wie die gegebenen Punkte zu liegen kommen, so kann doch immer mindestens eine Gerade gefunden werden, die durch genau zwei Punkte bestimmt ist, sofern nicht alle gegebenen Punkte auf einer einzigen Geraden liegen. Der zu dieser Formulierung angebotene Beweis ist kurz und gut nachvollziehbar. Er wird von einer Abbildung unterstützt. Bei der Bearbeitung dieses Beweises entsteht an keiner Stelle des Argumentationsganges das Gefühl, eine Folgerung nicht unmittelbar nachvollziehen zu können. Über die Anzahl der Geraden, welche durch mindestens zwei Punkte bestimmt sind, kann folgende Aussage getroffen werden:

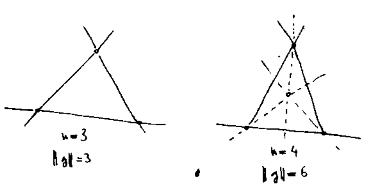


Abbildung 2

„Let $\mathcal{P}$ be a set of $n \geq 3$ points in the plane, not all on a line. Then the set $\mathcal{L}$ of lines passing through at least two points contains at least n lines.“ (vgl. Aigner 1998, S. 46) Abbildung 2 zeigt die Situation für n=3 und eine mögliche Konfiguration für n=4 Punkte. Erhöht man die Anzahl der Punkte, so steigt im Allgemeinen die Anzahl der Geraden wesentlich stärker, als die Anzahl der Punkte. Würde man einen Punkt an eine Dreieckseite heften, so würde sich die Anzahl der Geraden „nur" um eins erhöhen. Jeder weitere Punkt erzeugt aber sicher mehr als eine weitere Gerade, sofern er nicht auf derselben Geraden gewählt wird. Der Beweis wird von den Autoren mittels vollständiger Induktion geführt und soll nicht weiter betrachtet werden. Die Aussage selbst ist von größerer Bedeutung, da ihre Verallgemeinerung zu jener Behauptung über eine Mengeneigenschaft führt, die im folgenden ausführlicher betrachtet werden soll. Beide hier erwähnten geometrisch orientierten Sätze dienen nur als Vorspann für die Verallgemeinerung, die als Theorem 3 hier dargestellt ist. Die geometrischen Bezüge der

vorangestellten Sätze wurden beim ersten Lesen dieses Theorems bedacht. Dies bedeutet, dass versucht wurde, die im Satz formulierten Begriffe geometrisch-anschaulich zu deuten.

Theorem 3: Let X be a set of $n \geq 3$ elements, and let $A_1, \ldots, A_m$ be a proper subset of X, such that every pair of elements of X is contained in precisely one set A_i. Then $m \geq n$ holds.

■ **Proof.** The following proof, variously attributed to Motzkin or Conway, is almost one-line and truly inspired. For $x \in X$ let r_x be the number of sets A_i containing x. (Note $2 \leq r_x$, and $r_x < m$ since $n \geq 3$.) Now if $x \notin A_i$, then $r_x \geq |A_i|$ because the A_i sets containing x and an element of A_i must be distinct. Suppose $m < n$, then $m|A_i| < n\, r_x$ and thus $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ for $x \notin A_i$, and we find

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

which is absurd.

Abbildung 3

Dieses Theorem 3 soll im Folgenden betrachtet werden.

Die Bearbeitung

Die Elemente von X sind Punkte. Die Voraussetzung des Satzes verlangt, dass jedes Paar von Elementen aus X in genau einer Menge A_i enthalten ist. Umgekehrt kann ich dann auch sagen, dass eine Menge A_i schon durch die Angabe eines Paares von Elementen eindeutig bestimmt ist. Zwei Mengen, welche ein gemeinsames Paar von Elementen aus X besitzen, sind identisch. Ich erstelle eine Zeichnung. Die Punkte von X werden durch Strecken miteinander verbunden. Es entsteht ein Polygon. Zur eindeutigen Identifikation des Polygons genügen schon zwei Punkte. Was geschieht, wenn zwei Mengen geschnitten werden? Dann ist ihr Durchschnitt entweder leer, oder er enthält ein Element. Damit verhalten sich Mengen und die ihnen entsprechenden Polygone fast wie Geraden in der euklidischen Ebene. Haben zwei Mengen einen leeren Durchschnitt, obwohl die entsprechenden Polygone einander „euklidisch"

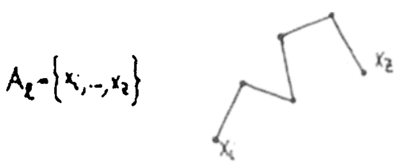


Abbildung 4

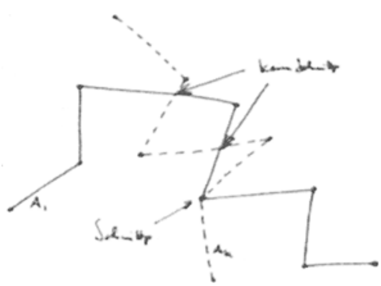


Abbildung 5

schneiden, dann sind sie „parallel". Der Beweis setzt die Bedeutung von r_x als „number of sets A_i containing x" fest. Wenn sich Polygone fast wie Geraden verhalten, dann scheint es mir günstig, diese Polygone im weiteren Verlauf auch so zu benennen. Geraden sind mir vertrauter als Polygone. In meiner Sprache ist damit r_x die Anzahl der Geraden, auf denen x liegt. Diese Zahl r_x ist größer oder gleich zwei. Das sehe ich ein. Denn die gegebene Menge X besitzt mindestens drei Elemente. Und aus diesen kann man dann drei Geraden bauen. Im Sinne der euklidischen Geometrie können diese drei Punkte auch auf einer euklidischen Geraden liegen. Meine Geraden sind in diesem Fall die drei „Strecken" zwischen den drei Punkten, wobei eine Strecke gebogen sein muß. Als nächstes behauptet der Beweis, dass $r_x<m$ gilt. Dies bedeutet, dass es keinen Punkt gibt, der auf allen Geraden liegt. Was geschieht, wenn ich annehme, dass es einen solchen Punkt x doch gibt, dass also $r_x = m$ gilt? Wenn ich an meine Geraden denke, dann genügt für die Festlegung einer beliebigen Geraden A_i, dass ich zwei Punkte auf ihr kenne. Sie ist dann eindeutig bestimmt. Sind x_k und x_l zwei verschiedene Punkte auf A_i, so soll $[x_k,x_l]$ die Gerade A_i bezeichnen. Liegt nun ein beliebiger dritter Punkt x auf A_i, dann gilt auch, dass x_k auf $[x,x_l]$ und x_l auf $[x,x_k]$ liegt.

Ich nehme nun eine beliebige Gerade durch zwei Punkte x_i und x_j, in obiger Schreibung $[x_i,x_j]$. Ich wähle nun einen Punkt x der nicht auf dieser Geraden liegt. Verbindet man x mit x_i und dann mit x_j, dann entstehen zwei neue Geraden, nämlich $[x,x_j]$ und $[x,x_j]$. Wenn es aber nun ein x_k gibt, dass auf allen Geraden liegt, dann wäre x_k auch auf $[x_i,x_j]$. Dies bedeutet aber, dass $[x_k,x_i]=[x_k,x_j]$ gilt. Dies kann ich mit jeder Geraden durchführen. Es gibt somit insgesamt nur einen einzige Gerade. Dies ist aber unmöglich, da keine Gerade alle Elemente der gegebenen Menge X enthalten darf.

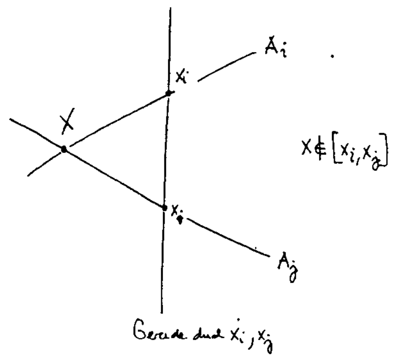


Abbildung 6

Welche Bedeutung hat im Beweis die Behauptung, dass $r_x \geq |A_i|$ gilt, falls der Punkt x nicht auf der Geraden A_i liegt? Ich wähle dazu eine beliebige Gerade und einen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt. Durch jeden Punkt der Geraden A_i und durch x kann ich nun eine Gerade legen. Es entstehen also zu jeder Geraden mindestens so viele neue Geraden, wie die Gerade A_i Punkte besitzt. Können zwei dieser „neuen" Geraden identisch sein, also $[x,x_k]=[x,x_l]$ gelten? Dann wäre auch x_k auf $[x,x_l]$ und letzlich x auf $[x_k,x_l]$. Dies hätte dann zur Folge, dass x auf der eben betrachteten Geraden A_i liegen würde. So war aber x nicht gewählt! Insgesamt halte ich fest, dass es durch jeden Punkt mindestens so viele Geraden gibt, wie eine beliebige Gerade, die x nicht trägt, Punkte besitzt.

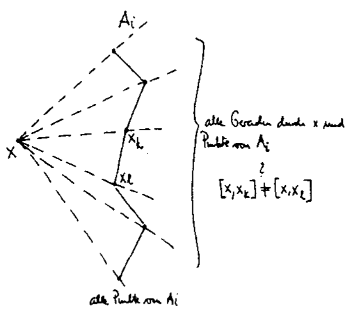


Abbildung 7

Die Autoren geben nun einen Beweis durch Widerspruch an. Zu zeigen ist, dass $m \geq n$, dass also die Anzahl dieser speziellen

Teilmengen, der Geraden, größer oder gleich der Anzahl der Elemente der gegebenen Menge ist. Annahme: $m < n$.
Mit der etwas mühsam überlegten Ungleichung $r_x \geq |A_i|$, wo $x \notin A_i$, erhalte ich unter Verwendung der Rechenregeln für das Rechnen mit Ungleichungen:

$$m(n-|A_i|) > n(m-r_x)$$

Damit bin ich endlich bei jener Zeile des Beweises angelangt, die den Beweis zu einem Einzeiler macht.

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

Sie erweckt in mir einiges Unbehagen, da die Notation nicht sofort einsichtig erscheint. Die Summation läuft über Indexmengen. Ich werde eine Beschreibung dieser Indexmengen in meiner eigenen Sprache versuchen. Dazu skizziere ich mir eine Vorgangsweise zur Abarbeitung der Ungleichung (vgl. Abbildung 8). Ich beginne also am linken Rand und werde mich dann nach rechts durcharbeiten. Die erste Gleichung erscheint einfach. Ich addiere 1/n n-mal. Die Indexmenge ist gleich der gegebenen Menge. Diese besitzt n Elemente. Daher wird n-mal die Konstante 1/n summiert. Wenn ich die nächste Gleichung prüfe, so überlege ich, warum der letzte Ausdruck vor dem Ungleichheitszeichen den Wert 1 besitzt. Ich muß also in dieser Doppelsumme mir zuerst den inneren Ausdruck überlegen und ihn dann mit der äußeren Summe aufsummieren.

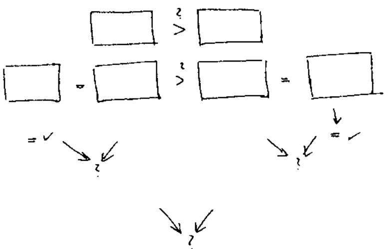


Abbildung 8

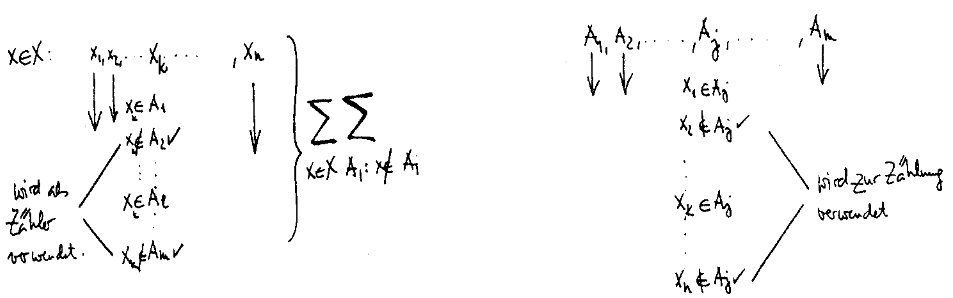
Als inneren Summationsindex habe ich alle Mengen, welche das aktuelle x_i nicht als Element enthalten. Im Nenner des Bruches bedeutet der Faktor $m-r_x$ die Differenz zwischen der Anzahl aller Teilmengen und der Anzahl der Teilmengen, welche x enthalten. Als Summationsindex haben wir $A_i : x \notin A_i$. Dies ist mit einer natürlichen Zahl

$$\sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{n(m-r_x)} > \sum_{x \in X} \sum_{A_i : x \notin A_i} \frac{1}{m \cdot (n-|A_i|} = \sum_{A_i} \sum_{x : x \notin A_i} \frac{1}{m(n-|A_i|}$$

Abbildung 9

ausgedrückt aber wieder $m-r_x$. Wir summieren also k-mal den Wert 1/k. Dies ergibt 1. Jeder einzelne innere Ausdruck wird mit 1/n multipliziert. Mit der äußeren Summe erhalte ich den Wert 1. Also habe ich die gesamte linke Gleichungskette geprüft. Die Überprüfung der rechten Seite erfolgt analog. So verbleibt die Frage nach der Ungleichung selbst. Hier werden Terme verglichen und Summationsindizes verändert. Aus der Annahme, dass $m<n$ sei, wurde $m(n-|A_i|) > n(m-r_x)$ gefolgert. Durch Kehrwertbildung dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Um die Summation zu

verstehen, gehe ich sofort zur Ungleichung. Ich schreibe sie aber so, dass beide Seiten der Ungleichung mit den gleichen Indizes angeführt werden.
Die Ungleichung unter der Doppelsumme ist gültig, da jede „einzelne" Ungleichung gültig ist und weil die Indizierung auf beiden Seiten der Ungleichung gleich bleibt. Ich schreibe nun die neue Indizierung an. Diesen Vorgang zeigt Abbildung 9. Die Gleichung gilt aber nur, wenn links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich viele Summanden addiert werden. Wie kann ich die Anzahl der Summanden verdeutlichen. Nehme ich die linke Seite, dann läuft der äußere Zähler über alle x aus X. Der innere Zähler nimmt dieses x als Kriterium, um in der inneren Summe zu summieren. Ich erstelle dazu eine Zeichnung.
Die Elemente aus X werden in einen Zeile geschrieben. Die innere Summation wird dann durch Spalten dargestellt. Ein aktiver Summationsindex erhält einen Haken. Diese Zeilen- und Spaltendarstellung ist auch für die rechte Seite geeignet. Hier bilden die Mengen A_i die erste Zeile und die Spalten sind nun die Elemente aus X, die überprüft werden. Ich betrachte beide Tabellen. Nehme ich die zweite Tabelle und drehe sie wie



Abbildungen 10 und 11

ein Rechteck um 90 Grad, dann habe ich die erste Tabelle vor mir. Jeder Zeile der zweiten Tabelle entspricht eine Spalte der ersten Tabelle. Dies bedeutet aber, dass die Summationsanzahl links und rechts des Gleichheitszeichens gleich ist. Abbildung 11 zeigt die zweite Tabelle. Insgesamt ist die Ungleichung begründet und führt sofort zum Widerspruch 1 > 1. Also gilt die Behauptung $m \geq n$.

III. Zwischenspiel: ein Aspekt der Sprache

Das Lernen von Mathematik ist von der Auseinandersetzung mit Neuem in einem doppeltem Sinn bestimmt. Wird Mathematik entwickelt, dann findet der Mathematik Betreibende vorerst nichts Materielles, dem er seine Aufmerksamkeit widmen und über das er dann in Folge Theorien entwickeln kann. Hat er durch Experimente angeregt, durch Erfahrung geleitet oder durch Lehrende motiviert eine Vermutung über einen Zusammenhang formuliert, dann steht er vor einem zweiten Problem. Ihm stehen für den mathematischen Umgang mit dem Neuen noch keine Mittel zur Verfügung, mit denen er das Unbekannte in sein mathematisches Wissen zufriedenstellend einbetten kann. Das oben angeführte Beispiel wird im Folgenden unter diesem zweiten Aspekt betrachtet werden.
Richtet man das Augenmerk auf die Formulierungen, welche in der Beschreibung dieses Beispiels verwendet wurden, dann spiegeln diese Unsicherheiten die mathematischen Tätigkeiten des Lernenden wieder. Damit sind insbesondere sprachliche Wendungen

gemeint, die Phänomene nur zum Teil beschreiben, denen es an Präzision mangelt, die Fragen offen lassen. Solche Formulierungen können mit dem Begriff der Metapher umschrieben werden. Metaphern finden sich zumindest in drei unterschiedlichen Zusammenhängen. Sie bestimmen die Sprache der Literatur, des Alltags und auch die Sprache von Lernenden. Hier soll auf die Bedeutung in der Alltagssprache und beim Lernen verwiesen werden. Wie sich im vierten Abschnitt zeigen wird, erfüllen Metaphern die Aufgabe der Verknüpfung von Bekanntem mit Unbekanntem und leisten damit für den Lernenden eine bedeutende heuristische Funktion. In der Sprache das Alltags besitzen Metaphern eine verankernde Funktion. Sie verbinden in letzter Konsequenz das Denken von Menschen, welches sich in Sprache ausdrückt, mit der menschlichen Physis (vgl. Lakoff, 1999). Die Bedeutung, welche dem Begriff der Metapher zugemessen wird, zeigt sich in Einzelpublikationen und Aufsatzsammlungen zum Verhältnis von Mathematikdidaktik und Metapher (vgl. Bauersfeld, 1981; Dörfler, 1991; English, 1997; Maier u. Schweiger, 1999; Steiner, 1988;). Die Metapher ist aus Sicht solcher Beiträge ein Beschreibungsmodell, wie Menschen ihr Wissen erweitern und in neuen Situationen anwenden. Unter Verwendung von vorhandenem Wissen versuchen sie strukturbildend Situationen zu beschreiben und erleben diese als *„pattern of meaningful organized experience“* (vgl. Johnson 1987, S. 19). Komplexe Metaphern projizieren erfolgreiches Wissen aus bekannten Situationen auf unbekannte Situationen. Die bei der Bearbeitung des vorgelegten Beispiels eingesetzte Sprache verwendete trotz ihres formalen Anstrichs Metaphern. So findet man Polygone als Geraden und Tabellen als Rechtecke. Gleichzeitig unterstützen in diesem Beispiel von Hand gefertigte Bilder den Gang der Erkundung. Man kann von einem Wechselspiel zwischen Bild und Sprache sprechen.

IV. Bild

Dieser Abschnitt erläutert den Begriff von Bild bzw. von bildhafter Darstellung, wie er im Folgenden verwendet wird. Es zeigt sich, dass bildhafte Darstellungen geeignet sind, den Lernenden zu unterstützen, da sie vielfältige Beziehungen darzustellen vermögen. Die Deutung von Bildern als Zeichen führt zur Sicht auf Bildern als Repräsentation[3], mit welchen Lernende Beziehungsverwandtschaften, die auf Analogien fußen, zum Ausdruck bringen können. Damit werden diese von Zeichen abgegrenzt, die als Symbole gesehen und denen in einem speziellen Kontext eine eindeutige Bedeutung zugewiesen wird. In dieser Zweiteilung vertreten solche analogen Repräsentationen die heuristische Seite des Lernens, während die nicht analogen Repräsentationen, sie werden hier propositionale Repräsentationen genannt, die algorithmische Seite bestimmen. In der Sprache der Repräsentationen kann das Analoge mit den Eigenschaften mehrdeutig, diffus oder unbestimmt verknüpft werden. Propositionale Repräsentationen können hingegen mit den Adjektiven eindeutig oder algorithmisch in Beziehung gebracht werden. Sie können auch mit Maschinen bearbeitet werden. Es zeigt sich, dass beide Repräsentationen einander ergänzen. Insbesondere ist es die Sicht des Lernenden auf die aktuell vorliegende Problemstellung, mit der er entscheidet, ob sein Blick analog oder propositional ist, ob seine Handlungen in metaphorischen Beschreibungen oder in algorithmischen Bearbeitungen bestehen. Dieser wechselnde, einander steuernde

[3] *Repräsentation* bedeutet hier nicht, dass ein physisch gegebenes oder vorgestelltes Objekt einen Begriff abbildet. Repräsentationen werden als Mittel gesehen, über ... sprechen zu können.

Gebrauch von subjektiv Mehrdeutigem[4] und subjektiv Eindeutigem ist für die vorliegende Arbeit das charakteristische Merkmal von Visualisierung.

Bild als Zeichen

In welcher Weise soll im folgenden über Bilder gesprochen werden? In einem ersten allgemeinen Ansatz wird unter einem Bild ein besonderes, ein komplexes Zeichen verstanden. Sind Bilder Zeichen, so kann man ihre Eigenschaften besprechen, wenn man ihren Zeichencharakter beschreibt. Unter diesem Ansatz ist eine Bildtheorie Teil einer Zeichentheorie, weil dabei ein Bild ein besonderes Zeichen darstellt. Damit wird im Folgenden unterstellt, dass der Zeichencharakter die zentrale Eigenschaft[5] eines Bildes ist.

Ein Zeichen ist ein Gegenstand, der für etwas anderes steht, der auf etwas verweist. Insofern scheint die Wahl des Gegenstandes, des Objektes, auf das verwiesen wird, beliebig. Diese Verknüpfung ist eine Frage der Konvention. Die Bedeutung von Zeichen ist mit ihrem Gebrauch eng verbunden. Im Falle des Bildes ist diese Beliebigkeit, die aus der Konvention fließt, eingeschränkt, weil das im Bild Abgebildete, das vom Bild Bezeichnete meist „erkennbar" ist. So ist ein Landschaftsbild ein Zeichen für eine spezielle oder auch beliebige Landschaft, aber eben nur für Landschaft, wie sie von Menschen gesehen wird. Das Bild[6] nimmt Bezug auf etwas. Goodman nennt die Möglichkeit, ein Bild auf etwas zu beziehen, Denotation (siehe Goodman, 1997). Wenn auch die Beliebigkeit der bezeichneten Gegenstände in ihrer Zahl und in ihrer Art über die Notwendigkeit der Erkennbarkeit eingeschränkt ist, so kann ein Bild auf verschiedene Objekte verweisen. Im Bild selbst können unterschiedlichste Objekte „dargestellt" sein. Ein Portrait kann zusätzlich zu einem Kopf im Hintergrund ein Gebäude zeigen, eine Blumenvase oder einen anderen beliebigen Gegenstand des

---

[4]So ist bei der Bearbeitung des angegebenen Theorem 3 die Sicht des Lernenden auf die Tabellen (Abbildung 10 und Abbildung 11) mehrdeutig, da in ihnen aus seiner Sicht nicht nur ein umschließendes Rechteck sondern auch Zeilen und Spalten als unzusammenhängende Symbole gesehen werden können. Bei der Bearbeitung der Ungleichung $r_x \geq |A_i|$ wird unter Verwendung von Rechenregeln die Ungleichung so umgeformt, dass die Ungleichung $m(n-|A_i|) > n(m-r_x)$ entsteht. Die Verwendung dieser Regeln sind für den Lernenden Ausdruck jener „Eindeutigkeit", welche ihn zu einem regelhaften Vorgehen motiviert. Gleichzeitig ist anzumerken, dass auch die Bearbeitung mit bestimmten regelhaften Methoden bildhafte Momente enthält (vgl. Fischer, 1984), wenngleich dies vom Lernenden nicht bewusst wahrgenommen wird. Für ihn „ist" die Darstellung im Augenblick der Bearbeitung eindeutig.

[5]Diese Unterstellung bzw. der Ansatz der Zeichenhaftigkeit von Bildern wird in einer Theorie der Kunst nicht durchgehend geteilt. Bilder müssen dort sowohl aus der Sicht der Kunstschaffenden als auch aus Sicht der Betrachter den Charakter von Zeichen nicht besitzen, also eben nichts bezeichnen, was einem Objekt oder einer Beziehung entspricht (vgl. Wiesing, 1998). Auf diesen Aspekt der Sicht auf Bilder wird hier nicht eingegangen.

[6]Natürlich nimmt nicht das Bild als physikalische Objekt Bezug auf etwas, sondern der Betrachter bei Inspektion des Bildes kann durch seine Beobachtung den Bezug auf dieses etwas herstellen. Ähnliche im Folgenden vorgelegte Formulierungen sind jedenfalls in diesem Sinne gemeint. Um aber die Sprache der Darstellung zu verkürzen, wird auf die explizite Formulierung der Konstruktion von ... verzichtet.

täglichen Gebrauchs. Aber nicht nur die verschiedenen im Bild dargestellten Gegenstände vergrößern die Menge der Objekte, die vom Bild bezeichnet werden. Auch Beziehungen zwischen den bezeichneten Objekten finden sich in Bildern dargestellt, wodurch sich die Anzahl der Zuordnungen zu Objekten, die bezeichnet werden sollen, entsprechend erhöht. Mittelalterliche Darstellungen von Krönungen zeigen die an einer solchen Zeremonie beteiligten Personen in Größenverhältnissen, die ihrer Wichtigkeit im Rahmen dieser Handlung entsprechen. Auch die Verwendung von Farben, die Abbildung von Insignien geben dem gebildeten Betrachter Auskunft über bezeichnete Objekte, nämlich Beziehungen, die nur vermittelt darstellbar sind. Insgesamt ist die Beliebigkeit der Zuordnung eingeschränkt, wenn man dies mit der möglichen Vielfalt bei der Verwendung von Symbolen als Zeichen vergleicht. Sie ist aber auch nicht so weit eingeschränkt, dass der Betrachter immer nur ein Objekt angeben könnte, welches das Bild als Zeichen denotiert[7]. Durch Konvention, wenn ein Bild als Symbol für ein und nur ein spezielles Objekt gesehen wird, kann die Elementanzahl auf eins reduziert werden. So stellen Flaggen von Staaten Zeichen dar, die nur für einen Staat Gültigkeit haben, ihn damit repräsentieren.

Bild als Repräsentation

Die Sicht von Bildern als Zeichen motiviert, Bilder als Repräsentation zu betrachten. Ein Bild steht für etwas anderes, vertritt etwas anderes, repräsentiert es. In welcher Weise repräsentiert ein Bild ein Objekt? Welche Attribute werden verwendet, wenn von Repräsentation und Bild die Rede ist? Ist ein Bild eine erfolgreiche Repräsentation eines Objekts, falls das Bild sich durch eine große Ähnlichkeit auszeichnet, oder muß ein Bild als Repräsentation sogar eine Kopie des Objektes sein, welches es bezeichnet?

[7]Bilder zeigen aber nicht nur auf Objekte (denotieren Objekte bzw. zeigen Relationen zwischen diesen denotierten Objekten), sondern vermitteln durch ihre spezielle „Bauart" auch Sichtweisen, wie Objekte zu sehen sind (sowohl durch den Bildbetrachter nachträglich als auch durch den Hersteller bei der Erzeugung). Das Bild eines Herrschers bei seiner Krönung wird neben den beteiligten Personen und den daraus ablesbaren Abhängigkeiten die Sicht des Betrachters in eine bestimmte Richtung zu lenken versuchen. Das Bild kann entweder die Verwerflichkeit der Inthronisation eines neuen Tyrannen darstellen oder die Ehrfurcht des Malers vor dem abgebildeten Ereignis zum Ausdruck bringen. Ein Bild besitzt so einen bestimmten Stil und lenkt auf diese Weise seine Interpretation. Ein Bildfälscher darf nur eine Kopie eines Bildes erzeugen, keinesfalls eine eigene Sicht, einen eigenen Stil in die Anfertigung des Bildes einfließen lassen. Insgesamt sind im Bild ein Inhalt, das „Was" und gleichzeitig auch die besondere Form der Darstellung, sein Stil, seine Sicht auf das Dargestellte, das „Wie" sichtbar. Zu bemerken ist, dass vor allem das „Wie", das Erkennen des Stils durch die Zugehörigkeit zu einem Kulturkreis, Bildung etc. bestimmt sind. So ist der Stil des Bildes ein zentrales Gestaltungsmerkmal von Bildern in der Kunst und das „Erkennen" des jeweiligen Stils ist eine Leistung des Betrachters. Der Stil liegt nicht in einem Teil des Bildes, auch nicht in den ablesbaren Beziehungen, sondern entsteht aus einem speziellen Zusammenspiel von Betrachter und Bild. Der Betrachter hebt das Bild über die Ebene der Denotation. Die Sicht des ausgebildeten Betrachters auf das Bild, der die dargestellten Objekte, die daraus ableitbaren Beziehungen und die Sicht des Künstlers auf das abgebildete Thema kennt, nennt Goodman eine Exemplifikation, wie durch das Bild etwas gesehen kann. Eine bestimmte Sichtweise der Welt kann auf diese Weise beispielhaft im Betrachter erlebt werden. (Vgl. Goodman, 1997)

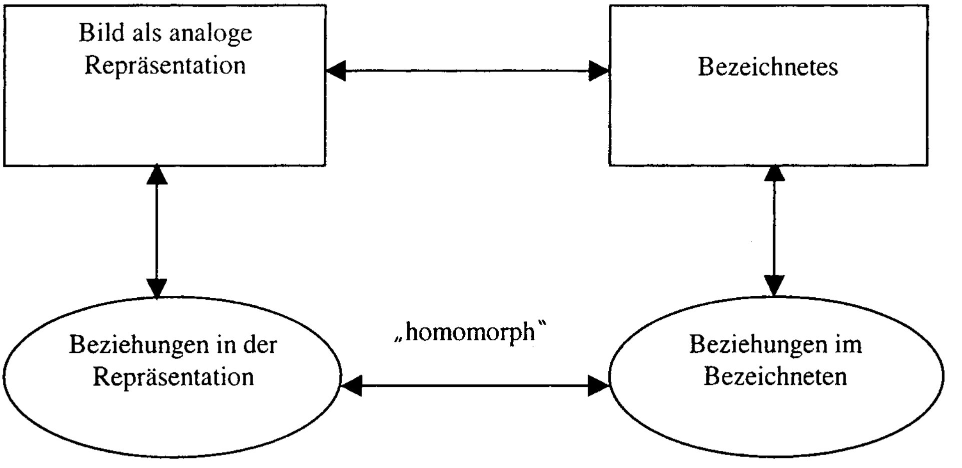
Kopie
Soll etwa von einer Pflanze eine bildliche Kopie angefertigt werden, welche die zentralen Eigenschaften der Pflanze möglichst getreu wiedergibt, diese kopiert, so wird die Schwierigkeit auftreten, welche Eigenschaften dies sind. Ist es die Farbe der Blüten, ist es eine besondere Zellstruktur, ist es die Gestalt der Wurzel zu einer bestimmten Jahreszeit? Bei einer menschlichen Vorlage wäre eine entsprechende Liste wesentlich länger. Ein Maler, welcher allen Aspekten „gerecht" werden wollte, wäre nicht in der Lage, in ein einziges Bild so viele verschiedene, aber gleichzeitig charakteristische Züge eines Objektes zu kopieren. Das Bild könnte weder hergestellt noch gelesen werden.

Ähnlichkeit
Würde man von einer bildhaften Repräsentation[8] Ähnlichkeit verlangen, so könnte nicht von einer Repräsentation gesprochen werden. Zwei Argumente sollen diese Behauptung begründen.
Verlangt man im Sinne der Umgangssprache Ähnlichkeit als Kriterium für eine bildhafte Repräsentation, dann wäre eine große Zahl der von Malern des 20. Jahrhunderts geschaffenen Bilder keine Bilder. Zahlreiche Sachverhalte in der Mathematik und den Naturwissenschaften, insbesondere jene, welche einen abstrakten Sachverhalt zum Inhalt haben, könnten nicht bildhaft dargestellt werden. Wer sollte in diesem Fall die Ähnlichkeit zwischen Bild und Abgebildetem überprüfen?
Geht man über die umgangssprachliche Verwendung hinaus, dann kann unter Ähnlichkeit Beziehungsähnlichkeit verstanden werden. Nun besitzt Ähnlichkeit in diesem Sinne die Eigenschaft, symmetrisch zu sein. Ist ein Objekt A einem Objekt B ähnlich, so ist B auch A ähnlich. Im Falle eines Bildes als Repräsentation ist dieser Ansatz aber nicht sinnvoll. Ein Gemälde der Kaiserin Maria Theresia kann die Kaiserin repräsentieren, auf die Person verweisen. Maria Theresia war aber sicher keine Repräsentation für eines der zahlreichen Gemälde, welche von ihr angefertigt wurden. Im Repräsentationsfalle, also unter der Annahme der Zeichenverwendung von Bildern, ist Ähnlichkeit kein zentrales Kriterium, weil Zeichenhaftigkeit nicht symmetrisch gedacht wird. Bildhafte Repräsentationen können dem bezeichneten Objekt ähnlich sein, sie müssen es aber nicht.
„Tatsache ist, daß ein Bild, um einen Gegenstand repräsentieren zu können, ein Symbol für ihn sein, für ihn stehen, auf ihn Bezug nehmen muß; und daß kein Grad der Ähnlichkeit hinreicht, um die erforderliche Beziehung der Bezugnahme herzustellen." (vgl. Goodman, 1997, S. 17)

Analogie
Neben den unmittelbar sichtbaren Objekten repräsentiert ein Bild auch Beziehungen zwischen diesen Objekten. Verändern sich diese Beziehungen im bezeichneten Objekt, so muß ein Bild, welches diese neue Situation repräsentieren soll, auch diese neuen Beziehungen darstellen. Es muß geändert, neu gezeichnet werden. Im Sinne der Bezeichnung von Beziehungen besitzen bildhafte Repräsentationen die Eigenschaft der Analogie. Die nachfolgenden Überlegungen sehen somit ***Bild als analoge***

[8]Bildhafte Repräsentation oder bildliche Repräsentation werden synonym mit Bild als Repräsentation verwendet.

Repräsentation. Analogie[9] wird als Beziehungs- oder Strukturverwandtschaft gesehen. Eine analoge Repräsentation kann für den Betrachter ein Objekt so darstellen, dass es in



einer bestimmten Hinsicht Beziehungen repräsentiert, die auch im bezeichneten Objekt „gesehen" werden. In Experimenten mit Tieren werden Wechselwirkungen zwischen Medikamenten und der Tierphysiologie beobachtet. Sieht man Teile der Tierphysiologie Teilen der menschlichen Physiologie verwandt, so wird erwartet, dass die beobachteten Reaktionen bei Tieren in analoger Weise auch bei Menschen auftreten. Das Tierexperiment repräsentiert analog. Schlußfolgerungen, die aus diesen Versuchen erhalten werden, sind mit Einschränkungen auf Menschen übertragbar. Auch ein Werkzeug kann in bestimmten Situationen analog verwendet werden. Man kann mit einem kräftigen Schraubenschlüssel einen Nagel in die Wand schlagen. Die Beziehung von Werkzeug und Werkstück, von Nagel und Schraubenschlüssel entspricht der Beziehung von Nagel und Hammer[10]. In der Mathematik kann der Lösungsweg einer Aufgabe zur Bearbeitung einer anderen Aufgabe eingesetzt werden, sofern in beiden Aufgabenstellungen entsprechende Beziehungen festgestellt werden, und diese auch ausreichen, um das Problem zu beschreiben. Man löst das Problem analog.
„Wir haben einen neuen Bereich B, in dem z.B. ein Problem gelöst werden soll. Die

[9] Eine vollkommen andere Bedeutung besitzt das Adjektiv analog, wenn ein Objekt analog im Gegensatz zu „digital" dargestellt wird. Der Tachometer eines Fahrzeuges als analoges Gerät repräsentiert die Geschwindigkeit des Fahrzeuges, er stellt die Geschwindigkeit dar. Kleine Änderungen der Geschwindigkeit erkennt der menschliche Beobachter als kleine Änderungen am Gerät. Diese sind im stets sichtbaren Bild das Tachos ablesbar. Eine analoge Repräsentation, die auch als Maschine realisiert werden kann, reagiert stetig auf Veränderungen. In der Geometrie sind in diesem Sinn Zirkel und Lineal Maschinen zur analogen Repräsentationen von Kreisen und Strecken.

[10] Arnheim berichtet von der Verwendung eines Kaffeelöffels als Schuhlöffel. *„Mit einem solchen Funktionswechsel geht eine deutliche Umstrukturierung der Wahrnehmung Hand in Hand; ... Der bleibenden Gleichheit des Dinges steht der sprachliche Unterschied von „Kaffeelöffel" und „Schuhlöffel" entgegen. Im allgemeineren Sinne widersetzt sich die Sprache der Wahrnehmungstendenz, Dinge als reine Formen zu sehen."* (Vgl. Arnheim, 1996, S 222).

Analogiebildung besteht darin, einen bekannten Bereich A aufzuspüren („Wo gab es schon einmal etwas ähnliches? Woran erinnert dich das?...“), der irgendwie mit dem Bereich B verwandt ist. Diese Verwandtschaft muß durch einen vermittelnden Gedanken (den Homomorphismus [11]) belegt werden („Inwiefern paßt das zu dem?“). Bei Erfolg wird das Problem im bekannten Bereich A (neu) definiert, dort gelöst und die Lösung zurückübertragen in den Bereich B.“ (vgl. Winter 1991, S.47)
Die bei der ungewöhnlichen Verwendung von Werkzeugen vorgestellte Analogie entsteht aus dem Gebrauch des Schraubenschlüssels in einer bestimmten Weise. Die analoge Repräsentation in einem Gemälde erschließt sich dem Betrachter nicht ohne dessen eigene Leistung. Die erfolgreiche Bearbeitung einer Aufgabe verlangt, dass vorher die Beziehungen in der ursprünglichen Aufgabe, der analogen Repräsentation konstruiert wurden. In allen Fällen waren Tätigkeiten und Kenntnisse notwendig, um den gewünschten Erfolg zu erreichen. Wie können diese Tätigkeiten beschrieben werden und wie findet man die Beziehungen in der Repräsentation und im Bezeichneten und damit einen homomorphen Blick? Beschränkt man sich auf einen einfachen Bildgebrauch, so kann ein *naiver Ansatz* zur Beantwortung dieser Frage die Anweisung geben, ein Bild zu untersuchen, zu zerlegen, von Details abzusehen und andere zu betonen. Daraus kann man dann Beziehungen konstruieren, von denen man annimmt, dass sie der Absicht des Künstlers oder den Regeln der Mathematik entsprechen. Bei der Suche nach diesen Beziehungen wird man sich von der Bildhaftigkeit, der Vielfalt der Farben, den einzelnen bildlichen Details distanzieren und letztlich durch das Bild gesteuert die Beziehungen beschreiben. Das Bild selbst wird bei diesem Vorgang auf das Wesentliche reduziert werden und so den Blick auf die Lösung freigeben. Am Ende liegt die analoge Repräsentation als Bild mit allen relevanten Beziehungen wie ein offenes Buch vor dem Betrachter. Eine solche Beschreibung leidet aber unter einem schweren Mangel. Die hier postulierten Handlungen sind nur durchführbar, wenn die Beziehungen dem Betrachter schon bekannt sind. Nur wenn die Beziehungen bekannt sind, kann das Bild gezielt auf einige wenige Aspekte reduziert werden, um diese Beziehungen offen darzulegen. Daher ist es notwendig, einen anderen Zugang zur Beziehungsfindung zu beschreiben.

Nicht analog

Diesem Ziel dient die Suche nach Repräsentationen, welche vorerst nicht als (beziehungs)analog bezeichnet werden. Um die Frage nach einem Gegenstück zur analogen Repräsentation erfolgreich erörtern zu können, wird auf das Einführungsbeispiel Bezug genommen. Zu Beginn der Bearbeitung lag kein Bild im Sinne der Umgangssprache vor. Die von Symbolen und sprachlichen Formulierungen bestimmte Darstellung eines mathematischen Satzes war gegeben. Erst während der Bearbeitung wurden Darstellungen, die mehr als nur Symbole enthielten, hergestellt. Dabei denotierten diese „Bilder“ mehrdeutige Beziehungen. Ihre Bearbeitung motivierte zu Formulierungen, welche metaphorisch die Fragestellungen so beschrieben, dass in Folge die Argumentation „vorwärts getrieben wurde“. „Metaphorisch“ bedeutet hier,

[11] Ein solcher Homomorphismus f kann nicht als homomorphe mathematische Abbildung gesehen werden. Homomorphie wird in den nachfolgenden Bemerkungen als metaphorische Beschreibung der Sicht des Lernenden verwendet. Dies bedeutet, dass der Lernende drei Aufgaben erfüllen muß. Er muß im Zeichen Beziehungen konstruieren, er muß im Bezeichneten Beziehungen konstruieren, und er muß zwischen beiden eine Verbindung herstellen.

dass die Beschreibungen unvollständig waren. Sie waren für den Lernenden noch nicht umfassend genug formuliert, um die zentralen Beziehungen erfolgreich beschreiben zu können. Neben den bildhaften Darstellungen als analoge Repräsentationen förderten auch Repräsentationen, wie sie in Form der Ungleichung vorlagen, den Fortgang. Dies geschah durch formale Bearbeitung der Symbolketten nach syntaktisch vorgegebenen Regeln. Führte diese Bearbeitung aus Sicht des Lernenden zu keiner Klärung, so wurde versucht, die Gleichungen bzw. Ungleichungen auf zwei Arten als analoge Repräsentationen zu deuten. Entweder wurde ein „Bild" zusätzlich angefertigt (vgl. Abbildung 6) oder die Symbolketten wurden bildhaft betrachtet. Dazu wurden Teile der gegebenen Ungleichung bildlich zusammengefaßt (vgl. Abbildung 8). Danach erfolgte die Bearbeitung einzelner Terme innerhalb der Ungleichungskette. Die erzeugten „Bilder" lenkten die Formulierungen via Metaphern und die festgeschriebene Sprache motivierte zur Herstellung von Bildern.

„Die Sprache steht also in Wechselverbindung mit den anderen Wahrnehmungsbereichen, die dem Denken als wichtigstes Medium dienen; Sprache ist nicht einfach das schließlich dem fertigen Gedanken angeheftete Namensschildchen ... Die Sprache beeinflußt die Organisation der Gedanken, indem sie die von der Wahrnehmung geformten Begriffe bestätigt und bewahrt." (vgl. Arnheim, 1996, S. 228)

Bei der Abarbeitung der Ungleichungskette war es dem Lernenden nicht möglich, mit jedem der auftretenden Terme eine unmittelbar einsichtige Bedeutung zu verbinden. Insofern enthielten diese Terme für den Lernenden Mehrdeutigkeiten, die den Stand seines mathematischen Vorwissens spiegelten. Wäre dieses Vorwissen und seine Übung im Umgang mit Ungleichungen elaborierter, dann wäre die gesamte Ungleichung für ihn wohl in einem Stück deutbar gewesen. Dieser Ungleichung hätte dann der Lernende eine für ihn eindeutige Bedeutung zuweisen können, welche ihn subjektiv zufrieden gestellt hätte. Sie wäre für ihn damit keine analoge Repräsentation, weil sie in seinem mathematischen Denken eingebettet wäre. Die gesamte Ungleichung erscheint dann wie ein verschlossener Block, wie ein einzelnes Symbol, das insgesamt verwendbar ist. Das Wissen ist in einem Modul zusammengefaßt. Da dies aber nicht eintrat, sah er die Terme als Repräsentationen von etwas noch Unbekanntem. Diese Repräsentation war diesem Unbekannten zwar analog, aber die Vielfältigkeit der möglichen Beziehungen machte diese Repräsentation auch mehrdeutig und ungenau. Also mußten diese Terme (vgl. Abbildung 9) soweit „vereinfacht" werden, dass sich wenigstens Teile der gesamten Ungleichung in sein mathematisches Wissen eingefügten. Sie erhielten für ihn auf diese Weise mathematische Bedeutung. Dies bezog sich sowohl auf die inhaltliche Deutung der einzelnen Terme als auch auf die Überlegungen zur Durchführung von Umformungen (vgl. Fischer, 1984). Danach wurde im Sinne der Algebra weitergearbeitet.

„An important point is that the historical power of algebra lay in its status as an action notation scheme, one that supports structured actions on well formed character strings in support of reasoning and modelling." (vgl. Kaput, 1998, S. 278)

Propositional - analog

Die regelhaft algorithmisch eingesetzte Bearbeitungsmethode, die Darstellungen mit einer subjektiv eindeutigen mathematischen Bedeutung benötigt, verweist insgesamt auf das Gegenstück zur analogen Repräsentation. Es ist dies die propositionale Repräsentation.

„Der Begriff der Proposition ist der Logik und Linguistik entnommen. Er bezeichnet die

kleinste Bedeutungseinheit, die als selbständige Behauptung stehen kann ..." (vgl. Anderson, 1989, S. 112)
Insofern können auch „Bilder", die auf Grund der Erfahrung bzw. des Vorwissens des Betrachters von ihm eine subjektiv eindeutige mathematische Bedeutung zugewiesen erhalten, in seinen Überlegungen algorithmisch verarbeitet werden. Sie werden so zu propositionalen Repräsentation.
Bisher wurde an zahlreichen Stellen ein Wechsel zwischen zwei Bearbeitungsmethoden geschildert. Einer heuristisch motivierten Vorgangsweise steht eine algorithmisch orientierte Abarbeitung gegenüber. Mit den analogen Repräsentationen unterstützt der Lernende die Erprobung mehrerer Ansätze und paßt diese sowohl der Fragestellung als auch seiner Erfahrung an. Beziehungen liegen nicht in der analogen Repräsentation, sondern werden auf Grund von Vorkenntnissen und Erfahrungen mit diesen Repräsentationen konstruiert. Die Analogie wird erst bei der Bearbeitung hergestellt. Gleichzeitig muß der Lernende aber erkennen, dass die einzelnen „Bilder" den Fortgang nur bis zu bestimmten Punkten führen. Die durch ihre Verwendung konstruierten Beziehungen sind zu vielfältig (vgl. Abbildung 8), um sofort eine Aussage über den Erfolg des eingeschlagenen Weges treffen zu können. In dieser Situationen kann die regelhafte Bearbeitung einer aus den analogen Repräsentationen erarbeiteten propositionalen Repräsentation die Vielfalt der erkannten Beziehungen reduzieren (vgl. Abbildung 9). Dies geschieht so lange, bis die Aufgabe für den Lernenden gelöst ist, oder das neu gefundene Beziehungsgeflecht wieder bildhaft betrachtet werden kann. Der Wechsel zwischen beiden Bearbeitungsmethoden ist aber nicht im Sinne eines Springens zwischen zwei Polen zu sehen.
„Das Begriffspaar analog und propositional bezeichnet keine Dichotomie, sondern die Endpunkte eines Spektrums: Mischformen sind möglich. Eine Repräsentation kann in Bezug auf gewisse Aspekte analog darstellen, während sie in Bezug auf andere Aspekte propositional repräsentiert." (vgl. Rehkämper, 1995, S. 105)
Als Beispiel denke man an die Bearbeitung einer umfangreichen Gleichung mit entsprechenden Termen. Bei deren Umformung entscheidet man sich nicht nur im Sinne der zu verwendenden Rechenregeln. Man versucht größere Teile in den Termen zu finden, diese zu ordnen und zusammen zu fassen. Diese Suche nach einer Geometrie der Terme (vgl. Fischer, 1984) ist Ausdruck eines bildhaften Blickes auf die Darstellung. Ist dies durchgeführt, dann wird regelhaft umgeformt. Ist die Aufgabe umfangreich, dann werden nach ersten Umformungen die erhaltenen Terme wieder auf ihre Geometrie hin untersucht, um danach wieder regelhaft behandelt zu werden. Von analogen Repräsentationen führt der Weg zu propositionalen Repräsentationen und wieder zu den analogen Repräsentationen zurück. Dabei versucht der Lernende Mehrdeutigen zu reduzieren und die Metaphorik der Formulierungen so zu verwenden, dass die Fragestellung aus seiner Sicht in sein mathematisches Wissen integriert wird. Dann erscheinen sie dem Lernenden buchstäblich verständlich.

Gestalt und Konstruktion

Dieser letzte Teil bringt eine weitere Beschreibungen für den eben hervorgehobenen Wechsel. In der einschlägigen Literatur zur Gestaltwahrnehmung (vgl. Fitzek, 1996; Metzger 1986;) findet der Leser eine Fülle von Abbildungen zu optischen Täuschungen. Ihre Interpretationen verwenden die Begrifflichkeit der Gestaltpsychologie[12]. M. Peschl

[12] Der Gestaltbegriff, der von den Gestaltpsychologen in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts

zeigt, dass ein kognitionswissenschaftlicher Ansatz jene Phänomene, die bei der Wahrnehmung solcher Figuren auftreten, konstruktivistisch interpretieren kann.
Abbildung 12 zeigt die „Hermann Illusion" (vgl. Peschl, 1994, S.199). Betrachtet man das Bild, so scheinen zwischen den schwarzen Quadraten in den Kreuzungspunkten der weißen Linien graue Bereiche zu existieren, obwohl an diesen Positionen keine Färbung vorgenommen wurde. Werden die schwarzen Quadrate verdeckt, so verschwindet dieses Phänomen. An die Positionen der weißen Linien werden keine Informationen geschrieben, sie werden in diesem Sinne nicht verändert. Was verändert wird, ist die Umgebung, der Kontext. Peschl beschreibt unter Verweis auf neurobiologische Untersuchungen (vgl. Peschl, 1994, S. 200) diese optische Illusion. Er bemerkt, dass sie aus Sicht der Evolutionstheorie plausibel ist. Ein durchgehend schwarz gefärbtes Quadrat erzeugt zum umgebenden weißen Papier eine schärfere Abgrenzung, als sechzehn kleine Quadrate. Organismen sind bestrebt, ein möglichst kontrastreiches Bild ihrer Umwelt zu erzeugen. Dies unterstützt die Kategorisierung und erleichtert die Generierung von erfolgreichem Verhalten.
„Der „generative Aspekt" der Repräsentation steht also gegenüber dem darstellenden Aspekt klar im Vordergrund. ... es geht nicht darum, den Umweltzustand möglichst gut im Repräsentationssystem abzubilden, sondern vielmehr durch z.B. Kontrasterhöhung die Voraussetzung für die Generierung möglichst adäquaten Verhaltens zu schaffen." (vgl. Peschl, 1994, S. 201)
Diese Sicht auf die Konstruktion von Bildern wurde bereits im ersten Abschnitt vorgestellt. Die Frage lautet nun, ob auch in komplexeren Situationen ein neuronales

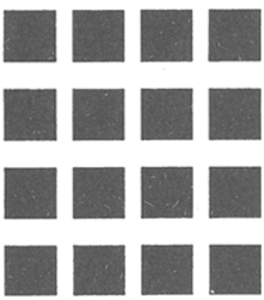


Abbildung 12

Abbildung 13

Modell angenommen werden kann, das mehrdeutige visuelle Stimuli zu ordnen vermag? Wollte man einen solchen Vorgang beschreiben, so versucht hier ein Organismus eine Figur als Gestalt aus einer Menge von Stimuli herauszulösen, Beziehungen zwischen

definiert wurde, besitzt Eigenschaften, die mit dem vorliegenden Ansatz kompatibel scheinen.
„Wir nennen Gestalt die Form eines Gebildes, wenn diese nicht der Starrheit des Materials zu verdanken ist und nicht auf einer Festlegung jedes einzelnen Punktes für sich, sondern auf ein Gleichgewicht von Kräften (Spannungen usw.) beruht. ... Wir nennen also allgemein Gestalten solche Gebilde, die, wie PIAGET richtig bemerkt, ihre Form dem Gleichgewicht von Kräften verdanken." (vgl. Metzger, 1986, S. 130)

verschiedenen Teilstimuli bzw. vorhandenem Wissen zu konstruieren und diese Beziehungen zu einer Einheit zusammen zu fassen.
Die Ansammlung von schwarzen Flecken in Abbildung 13 (vgl. Peschl, 1994, S. 203) „entpuppt" sich nach kurzer Betrachtung als Bild eines Hundes von vorne.
„Man führe eine kurze Selbstbeobachtung durch und versuche, sich bewußt zu machen, wie man an die Erkennung solch eines Bildes herangeht .... Es ist eine Art reflektierendes Nachdenken: Man erstellt verschiedene Hypothesen, die dann gegen den (visuellen) Stimulus getestet und - falls sie nicht passen - verworfen, falls sie passen, weiter ausgefeilt und getestet werden." (vgl. Peschl, 1994, S. 203)
Die oben angeführte Homomorphie besteht in diesem Falle in der subjektiv gefärbten Beobachtung bestimmter Merkmale (Hundeschnauze am „richtigen Ort", Hundeohren). Teile des Bildes werden hervorgehoben und in Beziehung gesetzt. Ändert sich in diesem Bild ein Detail, so ist das Beziehungsgefüge gestört und ein Hund wird nicht oder nur schwer erkennbar sein. In diesem Fall ist das Bild kein Bild von etwas, sondern nur eine für den Einzelnen chaotische Sammlung schwarzer Flecken. Die Abbildungen 14 bis 16

Abbildung 14

Abbildung 15

Abbildung 16

zeigen diese Situation. Sukzessive wurden charakteristische Teile, die das Gesamtbild beeinflussen, entfernt. Abbildung 14 ist auf Grund der Deutung von Abbildung 13 noch als Hund erkennbar. In Abbildung 15 wurde die Symmetrie des Hundes durch Entfernung von Schnauze, Bein und Ohr zerstört . Bei Beobachtung solcher Darstellungen gehen Menschen in der Regel davon aus, dass es sich hier um ein Bild im Sinne der Umgangssprache handelt. Das „Erkennen" von Bildern ist zur Erzeugung erfolgreichen Verhaltens notwendig. Dabei werden Beziehungsmuster in physisch oder mental Gegebenem vom Subjekt konstruiert. Neurobiologische Forschungsansätze zur Wissensrepräsentation verwenden zur Beschreibung dieses reflektierenden Nachdenkens das Modell eines vielfältig verbundenen Netzwerks von rekursiven Architekturen. Ein ankommender visueller Stimulus irritiert das Netzwerk, welches seinerseits versucht, einen stabilen Zustand herzustellen. Die rekursive Architektur kann wie ein System gedacht werden, in welchem es Attraktoren gibt. Sind die richtigen Parameter gewählt, so befindet man sich auf dem richtigen Weg zu einem Attraktor und das Muster springt gleichsam ins Auge. Aus den Stimuli wurde ein Muster konstruiert.
„... - in unserer Terminologie ist dies der Vorgang, in dem ein bestimmtes Aktivierungsmuster (i.e. eine bestimmte Hypothese) nahe an den Attraktor geraten ist und ohne Möglichkeit des „Entkommens" in diesen z.B. Fixpunkt wie durch einen

Strudel hineingezogen wird. Eine kohärente, mit dem Stimulus konsistente zusammenhängende Figur hebt sich vom Hintergrund ab" (vgl. Peschl, 1994, S. 204)
Der oben beschriebene Wechsel zwischen den Repräsentationen in der mathematischen Bearbeitung kann mit diesem Kreislaufmodell interpretiert werden. Ein Startinput löst eine Beunruhigung aus. Die rekursive Bearbeitung der Repräsentationen bestimmt die Bahnen des Denkens. Befindet man sich auf einer dieser Trajektorien, dann prüft man die vorhandenen Bedingungen und Informationen. Dies wird solange durchgeführt, „*bis sich die Dynamik im Attraktor eines Minimums, das alle Randbedingungen gut erfüllt, verfangen hat.*" (vgl. Peschl 1994, S. 205). Gestaltpsychologisch gesprochen (vgl. Fußnote 12) ist ein Gleichgewicht von Kräften erreicht. Diese Kräfte sind einerseits als einwirkende Stimuli deutbar, sie stellen aber andererseits auch das Bestreben des Lernenden dar, diese Stimuli in sein vorhandenes Wissen einzuordnen.

Zusammenfassung
Dieser Abschnitt zeigte jene Sicht vom Begriff des Bildes, wie er zur Interpretation des Einführungsbeispiels im nächsten Abschnitt verwendet wird. Bilder sind Zeichen, die das Bezeichnete analog repräsentieren. Die Analogie, welche per „Homomorphie" eine Beziehungsverwandtschaft zwischen Bild und Bezeichnetem auszudrücken vermag, „lenkt" Denken und Handeln des Lernenden. Allerdings führen analoge Repräsentationen zu Mehrdeutigkeiten und Unsicherheiten bei der Interpretation von bildhaften Darstellungen. In der Sprache zeigt sich dies in der Verwendung von Metaphern. Mit ihnen transportiert der Lernende Bedeutung von Bekanntem in Unbekanntes. Wie die bisherige Deutung des Beispieles nahelegt, tritt der analogen bildhaften Repräsentation die propositionale Repräsentation zur Seite. Beide ergänzen einander und bilden ein Modell, mit welchem die Handlungen des Lernenden beschrieben werden können. Diese sind durch einen fortwährenden Wechsel zwischen Heuristik und Algorithmik gekennzeichnet. Metaphern stehen als vermittelndes Element dazwischen.

V. Visualisierung
In allen bisherigen Ausführungen wurde mit einem semiotischen, einem didaktischen und einem kognitionswissenschaftlichen Blick das selbe Phänomen betrachtet. In einem Wechsel zwischen subjektiv eindeutigen und subjektiv mehrdeutigen Darstellungen eines Phänomens bewegte sich die Suche eines Lernenden solange, bis er für sich die vorgelegte Frage als gelöst betrachtete. Didaktisch gesprochen war es die Abfolge zwischen bildlichen Darstellungen und Darstellungen, die eine algorithmische Bearbeitung erlaubten. Auf der Ebene der Zeichen war dies ein Wechsel zwischen analogen und propositionalen Repräsentationen. Auf der Ebene einer neurobiologisch orientierten Kognitionswissenschaft war es der Wechsel zwischen konkurrierenden Attraktoren eines Netzwerkes. „Neues Wissen" wurde durch metaphorische Beschreibung vorbereitet und durch algorithmische Abarbeitung gefestigt.
Diese durch den Gebrauch von Metaphern geprägte Tätigkeit des ergänzenden Wechsels zwischen Analogem und Propositionalem, zwischen Bildhaftem und nicht Bildhaftem oder zwischen konkurrierenden Attraktoren ist das charakteristische Merkmal von Visualisierung.
Eine solche Sicht von Visualisierung wird zu einer Interpretation des *Einführungsbeispieles* verwendet. Dies bedeutet,

- dass Metaphern aufgezeigt werden,

- dass aus dem Umgang mit bildhaften Darstellungen oder genauer, dass aus der subjektiven Sicht von Darstellungen „als bildhaft“ Metaphern entstehen,
- dass dies im Zusammenhang mit dem Wechsel zwischen Darstellungen erfolgt und zwar auf zwei Ebenen. Einerseits wird eine einzelne Darstellung analog und dann propositional gesehen, andererseits wird zwischen zwei physisch vorhandenen Darstellungen gewechselt,
- dass insgesamt aufgezeigt wird, wie mit diesem Visualisierungsbegriff Lernen beschrieben werden kann.

Die Beschreibung eines Lernvorganges kann dieses Absuchen nur verkürzend untersuchen und wieder geben. Zahlreiche Zwischenschritte, die aus der subjektiven Erfahrung des Lernenden gründen, deren sich das Subjekt nicht bewußt wird, können durch eine nachträgliche Deutung bloß vermutet werden. Sowohl dem Lernenden als auch dem Beobachter steht nie ein so großer Zeitrahmen zur Verfügung, dass alle Details einer Entwicklung dokumentiert werden können. Insofern ist die nun folgende Deutung des Beispiels eine aus der Sache entstehende Verkürzung.
Um Metaphern nachspüren zu können, ist eine elementare Instrumentalisierung notwendig. Hier hilft ein Vorschlag von Norma Presmeg, wenn sie schreibt, dass „*metaphor would state that domain A is domain B*“ (vgl. Presmeg, 1997, S. 268). Dies bedeutet nicht, dass im zu untersuchenden Text nach genau solchen Wendungen gesucht wird. „Domain A is domain B“ ist ein Anhaltspunkt, welcher die gezielte Deutung einiger Tätigkeiten des Lernenden ermöglicht.

Eine Menge ist eine Gerade

Die Beschreibung der Bearbeitung startet mit der Bemerkung, „Die Elemente von X sind Punkte, ...“ . Aus dem Bereich der geometrisch geprägten Anschauung wird der Begriff des Punktes genommen, um als Werkzeug zur Beschreibung der Elemente der Menge verwendet zu werden. Dass diese Metapher gewählt wurde, ist aus dem Vorlauf verständlich. Dort wurde eine Spezialisierung des nun zu untersuchenden Satzes betrachtet. Dieser war geometrischer Natur. So war es naheliegend, in einem ersten Anlauf die Begriffe und Beziehungen im verallgemeinerten Satz auch geometrisch zu deuten.
Die angefertigte Zeichnung (Abbildung 4) hat nur eine untergeordnete Bedeutung, weil die Beschreibung der Voraussetzungen auf sie nicht Bezug nimmt. Ein Paar von Punkten bestimmt eine Menge eindeutig. Zwei Mengen besitzen entweder kein oder genau ein Element gemeinsam. Solche Überlegungen führen den Lernenden zur Vorstellung, dass sich die Mengen im vorliegenden Fall wie Geraden verhalten. „Eine Menge ist eine Gerade“ lautet die Metapher. Die durch diese Formulierung ausgedrückte Unvollständigkeit der Beschreibung wird durch Abbildung 5 dargestellt. In ihr wird ein Polygonzug, der als Eckpunkte Elemente der zugehörigen Menge besitzt, als Gerade gesehen. Welche Wirkung erzielt nun diese Metapher, wenn die Relation $r_x<m$ bearbeitet wird? Die vom Lernenden angestellte Untersuchung dieser Relation beginnt mit einem formalen Ansatz. Was geschieht, wenn $r_x < m$ nicht gilt, wenn also[13] $r_x=m$ ist? Aus der Beschäftigung mit Geometrie ist ihm die Eigenschaft von Geraden bekannt. Um die Ergebnisse seiner Überlegungen leichter darstellen zu können, verwendet er zu Beschreibung einer Geraden g durch zwei Punkt die Darstellung [A,B], wo A und B

[13] $r_x > m$ ist nicht möglich, weil r_x Auskunft über eine Anzahl von Teilmengen gibt und weil die Anzahl aller Teilmengen mit m beschränkt ist.

Punkte auf g sind. Liegen drei Punkte auf einer Geraden, dann bestimmt jedes der drei Punktepaare die Gerade eindeutig. Diese Eigenschaft , die ihm aus der euklidischen Geometrie geläufig ist, führt in Folge zu einem Widerspruch. Noch unmittelbarer kann mit der „Gerade ist Menge"-Metapher die Ungleichung $r_x \geq |A_i|$ nachvollzogen werden. Die Elemente der betrachteten Menge liegen als Punkte auf der entsprechenden Geraden A_i. r_x ist die Anzahl der Geraden durch x. Durch jeden Punkt auf A_i kann von einem Punkt, der nicht auf ihr liegt, eine Gerade gezogen werden. Auch hier wird zur Beschreibung der Argumentation die „[ ]" Darstellung verwendet (vgl. Text zu Abbildung 7). Ihr Zweck liegt in einer „mathematischen" Vermittlung der Auflösung des Teilproblems. Diese Vermittlung, diese Festschreibung des Lösungsweges ist für den Lernenden die Darstellung seiner eigenen Gedanken in kleinen überschaubaren Einheiten. Sie verwendet auch standardisierte mathematische Symbole. Der Lernende verknüpft die einzelnen symbolhaften Darstellungen erst durch den Bezug auf die Metapher „Gerade ist Menge" und lenkt so seine Gedanken. Insofern bewirkt die Metapher die Generierung einer Lösungsidee und unterstützt den Lernenden bei einer symbolhaften Beschreibung, weil mit ihr die verwendeten Symbole interpretiert werden. Diese Interpretation besteht in der Einbettung der Darstellung in das mathematische Vorwissen des Lernenden. Eine vollständige Trennung der Bearbeitung in einen algorithmisch propositionalen Abschnitt und einen analogen heuristischen Teil ist nicht möglich. Eine solche Trennung wäre zur Beschreibung von Lernen unangemessen.

„Behälter[14] vergleichen" ist „eine Ungleichung bearbeiten"

Bildhafte Darstellungen unterstützen den Lernenden nicht nur bei der Konstruktion fruchtbarer Metaphern, sondern besitzen auch eine jeweils verschiedene affektive Wirkung. Abbildung 8 ist die Folge eines Unbehagens, das aus der Betrachtung der im Beweis des Satzes vorgelegten Ungleichung entstand. Eine Kette von Gleichungen, welche darüber hinaus noch durch ein „>" Zeichen geteilt ist, kann nicht in einem Schritt gedeutet werden. Um den Eindruck der Komplexität zu reduzieren, werden „Teilgleichungen" solange in Behälter gesteckt, bis nur mehr zwei Behälter übrig bleiben. Diese Behälter können dann verglichen werden. Aus einer so motivierten emotionalen Sicherheit können dann die Behälter geöffnet und gerade so viele Teile entnommen werden, dass eine Bearbeitung möglich ist. Die Auflösung der Summanden geschah ohne Verwendung bildhafter Darstellungen. Ein Lernender, welcher aus seiner mathematischen Vorerfahrung den Umgang mit Summenzeichen und Indizes nicht kennt, muß auch deren Bedeutung durch analoge Darstellungen gewinnen. Unser Lernender war aber im Umgang mit diesen Symbolen erfahren genug, um deren Bedeutung erfassen zu können.

Ein Rechteck ist eine Tabelle

Nachdem beide Behälter abgearbeitet waren, blieb noch die Prüfung des alles entscheidenden Ungleichheitszeichens. Die Doppelsummen konnten nicht sofort verglichen werden, weil sowohl die Summationsindizes als auch die Summanden verschieden sind. Also mußte ein Zwischenschritt eingeschoben werden. Abbildung 9 zeigt ihn. Die Ungleichung ist umgeformt und der Vergleich bezüglich der Relation „>" bezieht sich auf Summanden, die schon geprüft wurden. Durch diese Brücke erhält der Lernende die Möglichkeit, eine Gleichung zu untersuchen, in der die einzelnen

[14] vgl. Lakoff, 1999, S. 31f.

Summanden gleich und nur die Summationsindizes verschieden sind. Ein algorithmisches Nachrechnen ist an dieser Stelle dem Lernenden nicht möglich. So versuchte, er eine bildhafte Darstellung der Summationsindizes herzustellen. Für die linke Seite und für die rechte Seite der Gleichung werden Bilder entworfen. In eine Zeile schreibt er den äußeren Index. Unter jedem Eintrag dieser Zeile entsteht eine Spalte, welche die Abfolge der zugehörigen inneren Indizes darstellt. Eine solche Konfiguration kennt er. Diese Darstellung der Doppelsummation erinnert an eine Tabelle. Beide Doppelsummen besitzen ähnliche „Tabellen". Wie können sie verglichen werden?
Die Darstellung einer Doppelsumme als Tabelle ist eine andere Art der Darstellung des gleichen Sachverhaltes. Mit der Tabellendarstellung geht die Übersichtlichkeit[15] und Kompaktheit der ursprünglichen Doppelsummendarstellung in eine andere Übersichtlichkeit über. Es entstehen Zeilen und Spalten, eine Matrizendarstellung, die mit einer neuen Sprache beschrieben wird. Zeilen und Spalten sind Koordinaten in der Doppelsumme. Zu dieser geometrischen Sicht auf die Tabelle kommt ein zweiter geometrischer Ansatz. Die Tabelle besitzt einen Rand, der zu einem Rechteck ergänzt werden kann. Unter Vernachlässigung der einzelnen Eintragungen wird die Tabelle zum Rechteck und damit zu einem geometrischen Objekt, welches geometrischen Transformationen unterworfen werden kann. Die für den Lernenden propositionale Doppelsummendarstellung wird in eine bildhafte Darstellung verwandelt. Aus dieser bildhaften Darstellung bezieht er seine Heuristik. „Eine Rechteck ist eine Tabelle" lautet die entscheidende Metapher, die aus der Betrachtung der Tabellen entsteht. Rechtecke können gedreht werden. Dieser Metapher folgend, dreht der Lernende eine der Tabellen um 90 Grad. Er sieht dann durch direkten Vergleich Zeile für Zeile und Spalte für Spalte, also einem algorithmisch durchgeführten Vergleich, dass Anzahl und Art der Eintragungen in beiden Tabellen übereinstimmen. Insgesamt ist für ihn die Gültigkeit der untersuchten Gleichung einsichtig.
Wieder ist die Verschränkung von analogen und propositionalen Darstellungen zu erkennen. Für den Lernenden nehmen seine Fähigkeiten und sein Vorwissen starken Einfluss auf seine Entscheidung, was er als propositionale und was er als analoge Darstellung betrachtet. Die Vermittlung zwischen beiden Darstellungen wird durch eine metaphorische Beschreibung des Sachverhaltes geleistet. Die Metapher selbst entsteht im Lernenden aus der Auseinandersetzung mit einer aktuell erzeugten bildhaften Darstellung oder, wie zu Beginn gezeigt, aus einem anschaulich geometrischen Vorlauf.

Zusammenfassung

Diese Interpretation schließt die Ausführungen zu Visualisierung, Bild und Metapher. Sie untersucht an ausgewählten Textstellen das kognitive Verhalten des Lernenden bei der Bearbeitung des vorgestellten Beispieles. Die in der Einleitung formulierten Ziele forderten als erstes das Aufzeigen von besonderen Sprachfiguren, mit denen Lernende ihnen bekanntes Wissen in neuartigen Situationen einsetzen. Diese Sprachfiguren konnten in Gestalt von Metaphern gefunden werden. Metaphern, die in diesem Sinne eine heuristische Funktion besitzen, befördern das Denken von Lernenden. Mit ihnen transportiert der Lernende Wissen aus für ihn bekannten Situationen in neue Situationen und eröffnet sich selbst neue Sichtweisen. Ihren Ursprung besitzen zahlreiche metaphorische Wendungen in der menschlichen Physis. Deren physikalisch determinierten Eigenschaften strukturieren dann über den Weg der Metapher kognitive

[15] Die Anzahl der Summanden und der allgemeine Summand sind immer sichtbar.

Tätigkeiten von Menschen. Auf diesen Aspekt wurde in Abschnitt III kurz hingewiesen. Das zweite Ziel bestand in der Entwicklung einer didaktisch orientierten Sicht auf bildhafte Darstellungen. Der Abschnitt „Bild“ formulierte Bilder als spezielle Zeichen. Die Argumentation führte zur Sicht von Bildern als analoge Repräsentation im Gegensatz zu Zeichen, die als Symbole betrachtet werden und denen eine propositionale Repräsentation entspricht. Beide Repräsentationen ergänzen einander aus Sicht des Lernenden und motivieren zu jeweils entsprechenden Handlungen. Insbesondere ist es das lernende Individuum, welches durch Vorwissen und Anlagen gelenkt zu entscheiden versucht, ob eine Repräsentation analog oder propositional gedeutet wird. Eine analoge Repräsentation muss im Sinne der Umgangssprache keineswegs bildhaft sein. Wie die Ausführungen im zweiten Abschnitt und in der obigen Interpretation zeigen, kann auch eine „nur“ aus Symbolen aufgebaute Darstellung für den Lernenden einen analogen und damit mehrdeutigen Charakter besitzen. Die mit dem Analogen oft verbundene Mehrdeutigkeit ist Kristallisationspunkt von Metaphern. In der Textinterpretation konnten an verschiedenen Stellen Metaphern gefunden und in ihren Auswirkungen beobachtet werden. Sie können aus dem verständigen Umgang mit bildhaften Repräsentationen entstehen und verknüpfen dann analoge und propositionale Repräsentationen.

So ergänzen einander, durch Metaphern vermittelt, Analoges und Propositionales, Bildhaftes und nicht Bildhaftes. Dabei deutet der Lernende unter Bedachtnahme seines individuellen Wissens und seiner persönlichen Fähigkeiten die Qualität (analog oder propositional) einer Repräsentation und wählt damit auch jene Worte, welche er für sich zu deren Beschreibung benötigt. Er visualisiert.

Literatur

Anderson, J. R. (1989). *Kognitive Psychologie.* Heidelberg, Spektrum der Wissenschaft.

Aigner, M., Ziegler G. (1998). *Proofs from the book.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer.

Arnheim, R. *(1996). Anschauliches Denken: Zur Einheit von Bild und Begriff.* Köln, DuMont.

Bauersfeld, H., Zawadowski, W. (1981). *Metaphors and Metonomies in the Teaching of Mathematics.* Bielefeld, Institut für Didaktik der Universität Bielefeld.

Bender, P. (1996). *Basic imagery and understandings for mathematical concepts.* 8th International Congress on Mathematical Education. C. e. a. Alsina. Sevilla, S.A.E.M. THALES, Facultad de Matematicas.

Dörfler, W. (1991). *Meaning: Image Schemata and Protocols.* Fifteenth PME Conference, Proceedings. F. Furinghetti. Assisi: 17-32.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1994). *On Understanding How Students Learn to Visualize Function Transformations.* Research in Collegiate Mathematics Education. I. E. Dubinsky. Rhode Island, American Mathematical Society: 45 - 68.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images.* London, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Fischer, R. (1984). *Geometrie der Terme oder Algebra vom visuellen Standpunkt aus.* Mathematik Unterricht 8(Juni): 19-34.

Fitzek, H., Salber, W. (1996). *Gestaltpsychologie: Geschichte und Praxis.* Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgemeinschaft.

Goodman, N. (1997). *Sprachen der Kunst: Entwurf einer Symboltheorie.* Frankfurt am Main, Suhrkamp.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind.* Chicago, The University of Chicago Press.

Kadunz, G., Kautschitsch H. (1992). *Entwicklung und Evaluation einer Computer-Mikrowelt im Geometrie-Unterricht.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 24(5): 178 - 182.

Kadunz, G. (1998). *Bemerkungen zur Visualisierung*. Beiträge zum Mathematikunterricht 1998: Vorträge auf der 32. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München, Bad Salzdetfurth, Franzbecker: 335-338
Kaput, J. J. (1998). *Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows*. Mathematical Behavior 17(2): 265-281.
Kautschitsch, H. (1994). *'Neue' Anschaulichkeit durch 'neue' Medien*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 26(3): 79 - 82.
Lakoff, G. (1987). *Woman, Fire and Dangerous Things*. Chicago and London, The University of Chicago Press.
Lakoff, G., Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought*. New York, Basic Books.
Maier, H., Schweiger, F. (1999). *Mathematik als Sprache*. Wien, Österreichischer Bundesverlag.
Metzger, W., (1986). *Gestalt-Psychologie*. Frankfurt am Main, Kramer.
Peitgen, H.-O. (1986). *The beauty of fractals*. Berlin, Springer.
Peschl, M. F. (1994). *Repräsentation und Konstruktion*. Braunschweig / Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn.
Presmeg, N. C. (1994). *The role of visually mediated processes in classroom mathematics*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 26(4): 114-117.
Presmeg, N. C. (1997). *Reasoning With Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning*. Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images. L. English, D. London, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.: 267-280.
Radman, Z., Hrsg. (1995). *From a metaphorical point of view: a multidisciplinary approach to the cognitive content of metaphor*. Berlin, deGruyter.
Radman, Z. (1997). *Metaphors: Figure of the Mind*. Dordrecht, Boston, New York, Kluwer Academic Publisher.
Rehkämper, K. (1995). *Analoge Repräsentation*. Bilder im Geiste: Zur kognitiven und erkenntnistheoretischen Funktion piktorialer Repräsentationen. K. Sachs-Hombach, Amsterdam, Rodopi. 3: 63-105.
Ricoeur, P. (1981). *The Metaphorical Process as Cognition, Imagination, and Feeling*. Philosophical Perspectives on Metaphor. M. Johnson. Minneapolis, University of Minnesota Press: 228-247.
Steiner, H.-G. (1988). *Über Metaphern, Modelle und Mathematik*. Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. P. Bender. Berlin, Cornelsen: 190-201.
Wiesing, L. (1998). *Sind Bilder Zeichen?* Bild - Bildwahrnehmung - Bildverarbeitung. K. R. Sachs-Hombach, Klaus. Wiesbaden, Deutscher Universitäts-Verlag: 95 - 101.
Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig, Vieweg.
Zazkis, R. e. a. (1996). *Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D4*. Journal for Research in Mathematics Education 27(4): 435-457.

Gert Kadunz
Institut für Mathematik
Abteilung für Didaktik der Mathematik
Universität Klagenfurt
A-9020 Klagenfurt