Stefan Grigutsch/Ulrich Raatz/Günter Törner

Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern

Abstract

During the Didactics Congress in Duisburg in 1994, a questionnaire of over 300 secondary mathematics teachers was conducted to extract varying views of mathematics and its structure.

Attitudes towards mathematics were extremely complex and diverse in nature. Mathematics was described by the teachers as being refined and structured. The aspects of formalism, schematic orientation (short: scheme), process and application which are known from former research could be reproduced by a factor analysis from the 77-item questionnaires. These are dimensions around which the teachers structure their recognition and cognitive representation of mathematics, thus, creating the central characteristics of a mathematical view of the world.

These attitudes and beliefs represent a global partial structure as four main dimensions, which was primary the goal of the survey. The structure derived from the significant, partial correlations forms a graph which corresponds with the theoretical presumptions of leading antagonistic views of mathematics as a 'process' and as a 'system.' The 'formalism' and 'scheme' aspects (schematic orientation) positively correlate with one another and represent both aspects of a static view of mathematics as a 'system.'They stand in opposition to the dynamical view of mathematics as a process. The aspect concerning the applicability of mathematics is only significantly connected with the aspect 'process.' Thus, the mathematical world view is relatively consistent and coherent.

Differences in the global view of mathematics regarding the aspects of 'formalism', 'process' and 'application' among teachers of varying school types could not be proven. There were significant, provable differences only within the 'scheme aspect.'

Zur Einordnung und Fragestellung der Arbeit

Die mathematikbezogenen Vorstellungen, subjektiven Theorien oder Einstellungen von Schülern sind in den letzten Jahren in vielen empirischen Arbeiten untersucht worden.[1] Das Interesse begründet sich in zwei Motiven: Einerseits sind die individuellen Einstellungen gegenüber Mathematik und Mathematikunterricht ein wesentlicher Ein-

[1] Im Englischen wird oft nicht immer klar abgrenzend die Bezeichnung 'mathematical belief' benutzt. In vielen Fällen stammen die Aufsätze aus dem englischsprachigen Raum (man vergleiche z.B. die Übersichtsartikel von DUNGAN ; THURLOW 1989, UNDERHILL 1988). Es liegen aber auch einige deutschsprachige Arbeiten (z.B. BAUER 1988, JUNGWIRTH 1994, TÖRNER; GRIGUTSCH 1994, ZIMMERMANN 1991) und viele Arbeiten des Finnen Erkki PEHKONEN in finnischer, englischer und deutscher Sprache (z.B. PEHKONEN 1992, 1992 a) vor. TÖRNER; PEHKONEN 1996 gibt einen Gesamtüberblick über die diesbezügliche Literatur.

(JMD 19 (98) 1, S. 3–45)

flußfaktor für mathematische Lehr- und Lernprozesse. Sie beschreiben, selbst wenn sie unbewußt sind, den Kontext, in dem Schüler Mathematik sehen und betreiben. Sie haben einen Einfluß darauf, wie Schüler an mathematische Aufgaben und Probleme herangehen und Mathematik lernen. Andererseits ist das in den Einstellungen der Schüler ausgedrückte Bild von Mathematik und Mathematikunterricht eine sehr präzise Reflexion des realen Mathematikunterrichts, weil Einstellungen in Lernprozessen erworben werden, in die die (sozialen) Umweltbedingungen wesentlich eingehen. Bei diesen Argumenten handelt es sich aber um Hypothesen, die eigentlich als offen gelten müssen.

Weil Einstellungen in Lernprozessen erworben werden, in die die (sozialen) Umweltbedingungen wesentlich eingehen, kann man auch die These aufstellen, daß die Einstellungen der Lehrer die Einstellungen der Schüler maßgeblich beeinflussen - zum einen in der direkten Kommunikation und Interaktion im Mathematikunterricht, zum anderen indirekt über die konkrete Ausgestaltung (Stoff- und Methodenauswahl, Beurteilungssystem) des Mathematikunterrichts. Auf diesen Zusammenhang hat auch BENNO ARTMANN hingewiesen. In seinem Leserbrief "Zum Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit" kommt er zu dem Schluß, "[...] daß das Bild der Mathematik für weiteste Kreise in der Schule geprägt wird. [...] Die Mathematiklehrer sind ausschlaggebend für das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit." (DMV Mitteilungen 3/94, S. 30)

Ausgehend von den Thesen, daß die mathematikbezogenen Einstellungen der Lehrer (1) ein wesentlicher Einflußfaktor für ihre Lehrprozesse sind und (2) die Einstellungen der Schüler maßgeblich prägen, daß damit also die Lehrereinstellungen einen Schlüssel zum Verständnis des Lehr- und Unterrichtsverhaltens und der Schülereinstellungen darstellen, rücken nun die Lehrereinstellungen in das Zentrum des Interesses. Es gibt viele US-amerikanische Studien über die Vorstellungen von Lehrern und ihren Wandel; oft werden allgemeine Vorstellungen über Mathematik und Mathematikunterricht betrachtet, aber in den meisten Fällen spezielle Vorstellungen (z.B. über das Problemlösen oder über spezielle Unterrichtsinhalte). Viele Untersuchungen beziehen sich nicht auf eine große Lehrerstichprobe, sondern auf kleine Fallzahlen oder auf Einzelfallstudien. Man vergleiche hierzu die Übersichtsartikel von UNDERHILL (1988a), THOMPSON (1992) und PEHKONEN (1994a). Für den deutschsprachigen Raum liegen bisher nur Untersuchungen von TIETZE (z.B. 1990) vor. In unserer Untersuchung nutzten wir die Gelegenheit, die sich anläßlich der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1994 in Duisburg bot, die mathematikbezogenen Einstellungen von über 300 Mathematiklehrern der Sekundarstufen aus Deutschland zu erheben.

In der Forschung über mathematikbezogene Einstellungen sind derzeit u.E. vier globale Fragestellungen zu erkennen und wichtig:

1. *Identifikation* der Einstellungssysteme (Einstellungen und ihre Struktur)
2. *Entstehung* und *Entwicklung* von Einstellungssystemen (einschließlich der Einflußfaktoren, z.B. kulturelle, nationale oder soziale Faktoren, Lerngeschichte (z.B. Einfluß der Schul- bzw. Hochschul-Lehrer, des Stoffes und der Methoden in der Schule), Lebens- und Arbeitszusammenhang (z.B. Schultyp des Lehrers, Beruf eines Menschen))
3. *Wirkungen von Einstellungssystemen* ('Handlungsrelevanz') (auf das Lehren, Lernen und Betreiben von Mathematik)

4. *Wandel von Einstellungssystemen* (Faktoren, die einen Wandel auslösen oder begünstigen; Bedingungen eines Wandels)

In dieser Untersuchung beschränken wir uns auf die erste globale Fragestellung und zwar auf das Bild der Lehrer von Mathematik in einem bestimmten Ausschnitt, wie er durch unseren inhaltlichen Untersuchungsansatz (vgl. Abschnitt 2.1.) vorgegeben ist. Zum einen fragen wir, welche Einstellungen die Lehrer gegenüber der Mathematik besitzen. Zum anderen untersuchen wir, welche Struktur das Mathematik-Bild aufweist. Schließlich betrachten wir noch, ob sich Lehrer verschiedener Schulformen der Sekundarstufen in ihren Einstellungen unterscheiden. Daneben möchten wir auch unsere Grundvorstellungen (vgl. Abschnitt 2.1.) und methodischen Prinzipien zur Diskussion stellen.

1. Diskussion der verwendeten Begriffe 'Einstellung' und 'mathematisches Weltbild'

In der mathematikdidaktischen Literatur ist an vielen Stellen von Einstellungen, Auffassungen und Haltungen die Rede, wobei die jeweiligen Objekte zumeist Elemente der Mathematik oder die Mathematik als ganzes sind. Gleichzeitig umfassen diese Einstellungen aber auch Prozesse und Beziehungen im Umfeld des Lehrens und Lernens von Mathematik. Auch in der englisch-sprachigen mathematikdidaktischen Literatur gibt es keine allgemein akzeptierten, abgrenzenden Definitionen, etwa zwischen conceptions, perceptions und attitudes. Vielfach fällt hier der Begriff 'mathematical beliefs' oder 'belief system'. Es soll an dieser Stelle keine vergleichende abwägende Definitionsanalyse betrieben werden, wir verkürzen unsere Diskussion, in dem wir uns den Sprachgebrauch 'Einstellung' verabreden und zwar in einer weiter unten präzisierten Weise.

1.1. Der Begriff der Einstellung

Es existiert keine einheitliche Definition des Begriffes 'Einstellung', ebenso kein allgemein anerkannter und umfassender theoretischer Entwurf (vgl. z.B. MEINEFELD, S. 92). Für den Begriff 'Einstellung' gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Definitionen. Die meisten stimmen in zwei Bestandteilen überein, daß (1) eine Einstellung eine Bereitschaft zur Reaktion auf eine Situation ist und daß (2) eine Einstellung durch Konsistenz der Reaktionen gekennzeichnet ist. (vgl. TRIANDIS, S. 3) Wir wollen den Begriff 'Einstellung' (engl.: 'attitude') in dieser Offenheit, wie sie in diesen beiden Bestandteilen gegeben ist, selbst benutzen.[2]

So definiert SEIFFGE-KRENKE (S. 103) eine Einstellung (Haltung, Attitüde) als eine gelernte, nicht notwendig bewußte, zeitlich länger überdauernde Bereitschaft, in konsistenter Weise auf Personen, Objekte oder Ideen zu reagieren, während SÜLLWOLD den Begriff der Einstellung eher aus der Sicht der Einstellungsmessung definiert. Einstellungen sind überdauernde Persönlichkeitsdispositionen, die sich in einem konsistenten Verhalten gegenüber sozialen Objekten in einer Vielzahl ähnlicher

2 vgl. auch das umfassende Werk von EAGLY; CHAIKEN 1993

Situationen äußern (vgl. SÜLLWOLD, S. 475). Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

Einstellungen sind Persönlichkeitsdispositionen und gehören damit in die Kategorie der sogenannten latenten Variablen (vgl. SÜLLWOLD, S. 475). Sie können nicht direkt beobachtet werden, sondern nur über Indikatoren bzw. die Effekte von Einstellungen, d.h. über ein konsistentes Verhalten in ähnlichen Situationen. Diese Definition unterstellt einen engen Zusammenhang zwischen Einstellungen und einem einstellungsinduzierten Verhalten, und diese Unterstellung ist notwendig für die Einstellungsmessung.

Einstellungen beinhalten per definitionem überdauernde, konsistente Verhaltensbereitschaften gegenüber sozialen Objekten. Nach Campbells berühmter Definition (von 1963) bezeichnet eine Einstellung eine Reaktionskonsistenz gegenüber sozialen Sachverhalten. Eine Einstellung existiert also (erst) dann, wenn viele ähnliche Reaktionen oder Verhaltensweisen auf eine Anzahl ähnlicher sozialer Objekte oder Situationen vorliegen. Dies ist zunächst für die Entwicklung einer Untersuchungskonzeption von Bedeutung. Doch es ergeben sich Konsequenzen für die (qualitative oder quantitative) Erfassung einer Einstellung: "Die individuelle Einstellung wird zumeist nicht aus einer einzigen speziellen Reaktion oder Handlungsweise erschlossen, sondern man bestimmt sie in der Regel durch einen mehrgliedrigen Abstraktionsprozeß, indem man von einer relativ großen Zahl einzelner Reaktionen oder Verhaltensweisen ausgeht, die miteinander in Korrelation stehen. Die Existenz und Wirkung einer bestimmten Einstellung zeigt sich also in der Konsistenz des individuellen Verhaltens in bezug auf eine hinreichend genau definierte Gruppe von Umweltgegebenheiten, namentlich von sozialen Objekten." (SÜLLWOLD, S. 475) Um auf eine Einstellung zu schließen oder eine Einstellung empirisch zu erfassen, müssen somit eine Vielzahl von ähnlichen Reaktionen oder Verhaltensweisen zusammengefaßt werden; es genügt nicht, von einer einzigen Beobachtung auf die Existenz einer Einstellung zu schließen.

1.2. Drei-Komponenten-Ansatz und Konsistenztheorem

Die größte Popularität genoß über Jahrzehnte der 'Drei-Komponenten-Ansatz', der Einstellungen als ein - selten näher spezifiziertes - System von Kognition, Affektion und Konation (Handlungsbereitschaft) begriff, denen eine prinzipielle Tendenz zur Stimmigkeit zugeschrieben wurde. Wesentlich in diesem Ansatz ist das Konsistenztheorem, dem zufolge zwischen diesen Komponenten Beziehungen bestehen, die ein überdauerndes System im Sinne gegenseitiger Abhängigkeiten bilden. Im günstigsten Fall ist dies die Annahme, daß Kognition, Affektion und Konation übereinstimmen. (vgl. MEINEFELD, S. 92; SÜLLWOLD, S. 475; TRIANDIS, S. 4 f.)

Die *kognitive* Komponente der Einstellung äußert sich in den Vorstellungen des Individuums über das betreffende Objekt (vgl. SÜLLWOLD, S. 476). Die kognitive Komponente, also die Vorstellung kann als subjektives Wissen oder allgemein als Information gekennzeichnet werden, das eine Person über ein Objekt besitzt. Wichtig ist, daß dieses Wissen nicht notwendig objektiv bzw. intersubjektiv als gültig nachgewiesen sein muß, sondern subjektiv ist und häufig auch als subjektiv empfunden wird[3].

Die *affektive* Komponente einer Einstellung betrifft die emotionale Beziehung oder Bindung an das Objekt. Sie besteht darin, daß mit dem sozialen Objekt, auf das sich die Einstellung richtet, ein bestimmtes Gefühl verknüpft ist bzw. regelmäßig ein bestimmter emotionaler Zustand hervorgerufen wird. (vgl. SÜLLWOLD, S. 475 f.) Die affektive Komponente unterscheidet die Einstellung von der Meinung.[4]

Die *Handlungskomponente* der Einstellung ist eine Bereitschaft bzw. Tendenz (Wahrscheinlichkeit) zu einer bestimmten Handlung (Klasse von Handlungen), die das soziale Objekt regelmäßig hervorruft. Wichtig ist, daß es sich hierbei lediglich um eine Aktionsbereitschaft handelt; es ist also nicht notwendig, daß die Handlung tatsächlich ausgeführt wird. (vgl. SÜLLWOLD, S. 476)

ROSENBERG und HOVLAND (1960) stellen den *Drei-Komponenten-Ansatz* wie folgt dar:

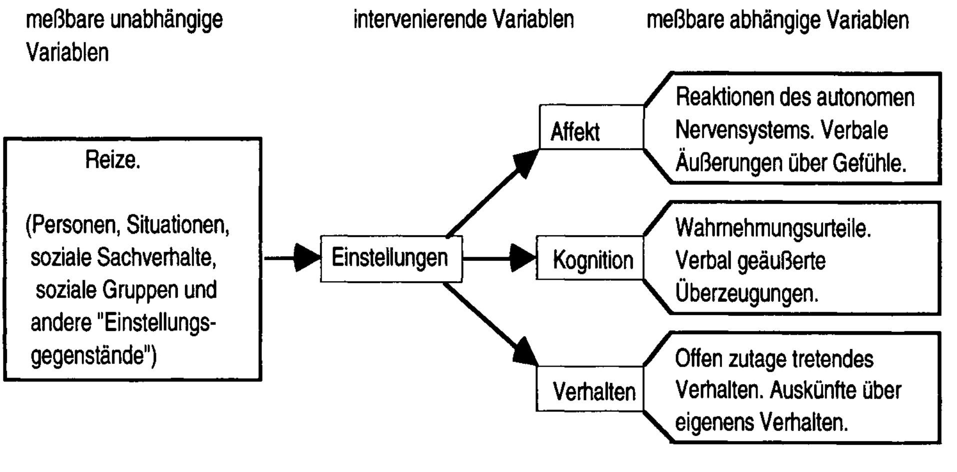


Abb. 1: Schematische Darstellung der Einstellungen (nach ROSENBERG und HOVLAND, 1960; entnommen aus TRIANDIS, S. 5)

Unterstellt man das Konsistenztheorem, eigentlich müßte man eher von einem *Konsistenzaxiom* sprechen, so ist jede Einstellung (vgl. Abb. 1) durch drei Komponenten

3 Zur Unterscheidung zwischen Vorstellungen und Wissen vergleiche insbesondere PEHKONEN 1994.

4 "Unter einer Meinung wird üblicherweise das Fürwahrhalten von etwas verstanden, das nicht hinreichend begründet oder bewiesen ist. Eine Meinung ist also im wesentlichen durch einen kognitiven Faktor bestimmt sowie durch das Bewußtsein der Subjektivität. [...] Der Meinung liegt ein Bemühen um Kognition, um Erkenntnis zugrunde, bei dem der affektive Einfluß relativ schwach oder gar nicht vorhanden ist." (SÜLLWOLD, S. 476) Demgegenüber kommt der affektiven Komponente bei der Einstellung eine zentrale Bedeutung zu.

gekennzeichnet, insgesamt also eine latente, nicht direkt meßbare Variable. Jede Komponente (und damit die Einstellung) wird durch verschiedene Reaktionsweisen gemessen.

Der zentrale Punkt sowohl in der theoretischen Diskussion um den Einstellungsbegriff als auch in der praktischen Bedeutung des Einstellungskonzepts ist naheliegenderweise die Handlungsrelevanz von Einstellungen. Es kann an dieser Stelle nicht auf die sehr heterogenen Ansätze und Ergebnisse eingegangen werden, wir unterstellen in unseren weiteren Erörterungen, daß der oben beschriebene tripolare Ansatz ein nicht ungeeigneter Modellierungsansatz ist.

1.3. Funktionen von Einstellungen

Eine weitere Möglichkeit, den Begriff der Einstellung zu klären, ist die funktionale Analyse. Einstellungen haben zwei Funktionen - die Wirkung von Einstellungen ergibt sich in einem zweistufigen Prozeß:

(1) *Ordnungsfunktion:* Einstellungen erfüllen die Funktionen der Selektion, Akzentuierung, Fixierung und organisierten Konfiguration von Objekten, d.h. sie strukturieren und vereinfachen die komplexe Reizvielfalt. M.a.W.: Sie reduzieren die Reizvielfalt der Umwelt. Damit helfen Einstellungen dem Individuum beim Verständnis der Umwelt. KATZ spricht sogar von einem Bedürfnis des Einzelnen, seine Welt zu strukturieren, sie zu verstehen etc. und ordnet den Einstellungen eine Erkenntnisfunktion zu.

(2) *Anpassungsfunktion:* Einstellungen aktivieren, sofern eine bekannte Kategorie von Einstellungsdimensionen identifiziert worden ist, ein etabliertes Reaktionsrepertoire. Sie legen eine schematische Reaktion des Subjekts auf eine bekannte Reizsituation fest. Auf diese Weise braucht nicht in jeder einzelnen Situation ein Erklärungskonzept oder Handlungsprogramm völlig neu entworfen und entschieden zu werden, sondern es werden bestehende Handlungsschemata aktiviert, die sich aufgrund früherer Erfahrungen als optimal herausgestellt haben. (vgl. TRIANDIS, S. 6 ff.; vgl. auch SEIFFGE-KRENKE, S.103)

Wie optimal das aktivierte Handlungsschema ist, hängt davon ab, ob das Einstellungsobjekt korrekt klassifiziert worden ist, ob sich dieses Objekt genauso verhält wie sich ähnliche Objekte in der Vergangenheit verhalten haben, und ob die früheren Erfahrungen optimal in ein Handlungsschema umgesetzt worden sind.

Zusammenfassend erfüllen Einstellungen somit eine *Orientierungsfunktion.* In einer 'ansonsten chaotischen Umwelt' (William James) üben Einstellungen eine selektive und leitende Funktion bei der Wahrnehmung und Bewertung von Objekten aus, die in eine Selektion von Handlungsmustern mündet. Erst die Existenz von Einstellungen und Affektionen ermöglicht die Orientierung des Menschen in seiner Umwelt; erst dauerhafte und situationsübergreifende Orientierungsmuster, die die Beziehung zwischen dem Individuum und dem Objekt regeln, ermöglichen Stabilität und Kontinuität. (vgl. MEINEFELD, S. 92)

Dies kann man auch als Annahme ansehen: Die Annahme, daß der Mensch einer Orientierung im oben beschriebenen Sinne bedürfe, ist grundlegend für das Konsistenztheorem und damit für den Drei-Komponenten-Ansatz (vgl. MEINEFELD, S. 92).

Neben diesen generellen Funktionen lassen sich Einstellungen auch noch spezielle Funktionen zuweisen.

(3) *Selbstbehauptungsfunktion:* Ist das Einstellungsobjekt die eigene Person, d.h. geht es um Einstellungen gegenüber sich selbst (Selbstkonzept), dann erfüllen Einstellungen oft die Selbstbehauptungsfunktion: Sie schützen das Selbstwertgefühl, indem sie es ermöglichen, unangenehme Wahrheiten über sich abzulehnen oder zu ignorieren.

(4) *Selbstdarstellungsfunktion:* Schließlich sei noch die wertexpressive bzw. Selbstdarstellungsfunktion genannt: Einstellungen dienen dazu, die eigenen Grundüberzeugungen zum Ausdruck zu bringen. Die Äußerung der eigenen Einstellungen ist dem Einzelnen sehr angenehm, weil diese Einstellungen diejenigen Grundwerte repräsentieren, die eben dieser Einzelne besonders schätzt. (vgl. TRIANDIS, S. 6 ff.)

1.4. Der Begriff des mathematischen Weltbildes

Wie bereits oben betont existiert keine allgemein akzeptierte begriffliche Eingrenzung des Einstellungskonzepts. Gleiches gilt für mathematikrelevante Aspekte von Einstellungen. Es würde an dieser Stelle zu weit führen, den nuancenreichen Gebrauch des Term 'mathematical beliefs' resp. 'belief system' in der englischsprachigen Literatur darzulegen. Wir verweisen auf PEHKONEN 1995 resp. PEHKONEN; TÖRNER 1996. Insofern scheint es uns legitim, *sprachlich* einen eigenständigen Begriff hier zu benutzen.

Die Mathematik als Erfahrungs- und Handlungswelt kann als sehr komplexes Gebiet angenommen werden; dementsprechend kann man davon ausgehen, daß die Einstellungen gegenüber Mathematik sehr vielschichtig sind. Es gibt sicherlich nicht nur die positive oder negative Einstellung gegenüber Mathematik, sondern man muß viele Differenzierungen annehmen. Auf der *kognitiven Ebene* gehen wir davon aus, daß das subjektive Wissen über Mathematik und Mathematikunterricht Einstellungen in verschiedenen Kategorien enthält:

(1) Einstellungen über Mathematik
(2) Einstellungen über das Lernen von Mathematik
(3) Einstellungen über das Lehren von Mathematik
(4) Einstellungen über sich selbst (und andere) als Betreiber von Mathematik (Selbstkonzept als Mathematik-Betreiber: u.a. Selbsteinschätzung der Fähigkeiten, Kausalattributionen für den eigenen Erfolg und Mißerfolg).

Dabei umfaßt beispielsweise die Kategorie 'Einstellungen über Mathematik' wiederum ein weites Spektrum von Einstellungen, das mindestens folgende Komponenten enthält: (1) die Vorstellungen über das Wesen der Mathematik als solche wie auch (2) über das (Schul- bzw. Hochschul-) Fach Mathematik im besonderen, weiterhin auch (3) Einstellungen über die Natur mathematischer Aufgaben bzw. Probleme, (4) Einstellungen über den Ursprung mathematischen Wissens und (5) Einstellungen über das Verhältnis zwischen Mathematik und Empirie (insbesondere über die Anwendbarkeit und den Nutzen der Mathematik).

Ebenso, wie die kognitive Komponente der Einstellungen ein weites Spektrum von einzelnen Bestandteilen umfassen kann, so können auch die mit den *Einstellungen verknüpften Emotionen* und *Bewertungen* sowie die dadurch induzierten *Verhaltensdispositionen* und *-intentionen* vielschichtig sein. Es sind *Affektionen* zu jeder der Komponenten (1) bis (4) leicht vorstellbar.

Der Mathematik als komplexe Erfahrungs- und Handlungswelt steht somit eine relational strukturierte 'Welt' der Einstellungen gegenüber, die wir als *mathematisches Weltbild* bezeichnen wollen. Ein mathematisches Weltbild ist im obigen Sinne ein System von Einstellungen gegenüber (Bestandteilen) der Mathematik. Es ist ein hypothetisches Konstrukt, das noch in den Einstellungen gegenüber Mathematik nachzuweisen ist und insofern noch keinen empirischen, aber heuristischen Wert hat.

Für die konkrete Ausprägung eines mathematischen Weltbildes sind Informationen auf zwei Ebenen bedeutsam: Zum einen die *Ausprägungen der einzelnen Einstellungen*, zum anderen aber auch die *Beziehungen zwischen verschiedenen Einstellungen* innerhalb des Weltbildes. Die Beziehungen zwischen einzelnen Einstellungen bilden eine Struktur, die möglicherweise für die Ausprägung des mathematischen Weltbildes und seine Handlungsrelevanz eine größere Bedeutung hat als die in ihm enthaltenen Einstellungen. Ein mathematisches Weltbild ist somit eine Einstellungsstruktur.[5]

Unser eigentliches Forschungsobjekt sind mathematische Weltbilder und nicht einzelne Einstellungen, weil

(1) es gegenüber der Mathematik ein Spektrum von Einstellungen (s.o.) und damit Einstellungen gibt, die sich ggf. gegenseitig beeinflussen und weil dann

(2) die Struktur der Einstellungen möglicherweise bedeutsamer ist als die einzelnen Einstellungen

- für die Ausprägung: Die Ausprägung des mathematischen Weltbildes oder sogar einzelner Einstellungen wird möglicherweise wesentlich dadurch bestimmt, in welcher Beziehung die Einstellungen zueinander stehen.

- für die Handlungsrelevanz: Einstellungsstrukturen können das Handeln möglicherweise besser erklären oder vorhersagen als einzelne Einstellungen.

- für den Wandel: Die Beeinflußbarkeit von Einstellungen hängt möglicherweise wesentlich davon ab, mit wie vielen und wie starken Beziehungen sie in ein Netz von Einstellungen eingebunden sind.

---

5 Andere Forscher, z.B. Pehkonen, die vom Begriff "Vorstellung" ("belief") ausgehen, sprechen von Vorstellungssystemen ("belief systems"). Der Begriff "subjektive Theorie" (vgl. BAUERSFELD 1983) ist bereits als komplexe Struktur von Vorstellungen angelegt.

2. Der Ansatz der Untersuchung

2.1. Zum inhaltlichen Ansatz: Antagonistische Leitvorstellungen von Mathematik[6]

Zum Verständnis des Untersuchungsansatzes und der Anlage des Fragebogens ist es notwendig, unseren inhaltlichen Ansatz zu kennen. Er gibt sicherlich einen Teil unseres eigenen mathematischen Weltbildes wieder. Die grundsätzlichen Leitvorstellungen über Mathematik und damit auch die übergeordneten Grundüberzeugungen ('Philosophien') für den Mathematikunterricht sind die Positionen, daß Mathematik in vereinfachter Form in statischer Sicht als System oder in dynamischer Sicht als Prozeß bzw. als Tätigkeit aufgefaßt werden kann. Beide Standpunkte sind nicht einfach voneinander zu trennen, so daß man manchmal von einer Janus-Köpfigkeit der Mathematik spricht. Dennoch sind beide Seiten in einer pragmatischen Betrachtung als Antagonismen anzusehen.

In der statischen Sicht wird Mathematik als ein (abstraktes) System bzw. eine (abstrakte) Struktur verstanden, vor allem definiert durch den Idealfall der Hochschulmathematik. Mathematik ist in dieser Sehensweise mathematische Theorie, die aus Axiomen, Begriffen und Zusammenhängen zwischen diesen Begriffen (Aussagen, Sätzen) besteht. Überdies ist dieses System eine 'fertig interpretierte mathematische Theorie'. 'Fertige Theorie' besteht zum einen aus den akkumulierten Wissensbeständen, also Begriffen, Regeln, Formeln und Algorithmen. Zum anderen aus den Regeln zur Fixierung dieser Theorie, also aus einer (stillschweigenden) Übereinkunft über die Exaktheit bei der Definition der Konzepte und in der Sprache, aus der strengen deduktiven Methode auf einer exakten axiomatischen Basis, und einer Strenge bei den Beweisen von Aussagen. Plakativ wollen wir diese beiden Teil-Aspekte als *Schema-Aspekt* und *Formalismus-Aspekt* bezeichnen.

Der Umgang mit dieser im Idealtypus 'fertigen' Mathematik besteht, auch im Mathematikunterricht, folglich aus dem Lernen und Anwenden von Definitionen, mathematischen Fakten und Prozeduren, und aus der formallogischen Deduktion zur Überprüfung von Hypothesen und Systematisierung von Erkenntnissen. Mithin werden in einem Mathematikunterricht (auch an der Hochschule) nach dieser Auffassung Wissen aus dem System (, das auch 'Rezeptcharakter' hat,) vermittelt sowie die formallogische Deduktion und das Formalisierungs- und Abstraktionsvermögen der Schüler stärker betont gegenüber Intuition und einer inhaltsbezogenen Denkweise.

Dem steht die Auffassung gegenüber, daß Mathematik eine Tätigkeit ist, über Probleme nachzudenken und Erkenntnisse zu gewinnen: Mathematik als Tätigkeit beginnt mit Fragen und Problemen. Beim mathematischen Tun (zumeist an exemplarischen Fällen) werden Sachverhalte verstanden und Zusammenhänge eingesehen, es werden Erfahrungen gesammelt und Prinzipien entdeckt, die auf verschiedenen höheren Stufen zu Aussagen geordnet werden. Mathematische Tätigkeit besteht im Erfinden bzw. Nach-Erfinden von Mathematik sowie im Ordnen von Erfahrungsfeldern und Prinzipien des Tuns. (Vgl. die zahlreichen Stellungnahmen von FREUDENTHAL, z.B. 1973, S. 110 ff.)

---

6 Die Ideen und auch einige Formulierungen in diesem Abschnitt stammen letztlich aus: ZIMMERMANN 1991a, S. 40 f.; TÖRNER und ZIELINSKI 1992, S. 256 f.

In ihrem Entstehen, in der Entwicklung neuer Erkenntnisse ist die Mathematik primär ein Forschungs-, Erkenntnis- und Theoriebildungsprozeß. Mathematik hat somit einen Prozeßcharakter, wobei sich mathematische Theorien in einem (mitunter dialektischen) Prozeß aus Vermutungen, Beweisen und Widerlegungen, also gerade unter dem Einfluß menschlicher Individuen, entwickeln.

Logisches, deduktives Schließen in einer systematisch-statisch verstandenen Wissenschaft ist zwar zur Überprüfung von Hypothesen unerläßlich, trägt jedoch nicht vorrangig zur Gewinnung von Hypothesen bei. Mathematik ist in kognitiver Hinsicht nicht zuletzt auch eine experimentelle, induktive Wissenschaft, die sich wesentlich des Vermutens sowie plausiblen und analogen Schließens bedient. Für den Umgang mit Mathematik und für den Mathematikunterricht werden die Begriffe 'Prozeß', insbesondere 'Erkenntnisprozeß', und 'Entwicklung' beim Entstehen, Erschaffen, Verstehen und Betreiben von Mathematik betont. Das Erfinden bzw. Nach-Erfinden von Mathematik hat Vorrang gegenüber einem Lehren 'fertiger' Mathematik. Infolgedessen werden das inhaltsbezogene Denken und Argumentieren, das Vermuten und Ausprobieren sowie die Intuition gegenüber einer formallogischen Deduktion sowie dem Formalisierungs- und Abstraktionsvermögen vorrangig betont.

Mathematik ist nicht nur ein Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Prozeduren, mathematisches Arbeiten ist auch nicht nur maschinenhaftes Ausführen von gedrillten Verfahren. Mathematik ist immer wieder Modellierung und Analyse von Sachverhalten; dabei stehen Ideen, Inhalte und Denkprozesse im Vordergrund, während (fehlerloser) Formalismus und insbesondere formale Logik der kritischen Prüfung und Absicherung der Aussagen dienen. ZIMMERMANN (1991a, S. 40) schreibt dazu: "Gute Mathematik wird nicht vor allem durch einen Mangel an Fehlern bestimmt, sondern durch die Qualität der [innewohnenden] Ideen. [...] Das Entwickeln von Ideen ist nicht weniger wichtig wie deren kritische Prüfung und das [formallogische] Absichern von Aussagen. [...] Auch in der Fachwelt der Mathematiker ist allmählich zumindest eine Relativierung der Bedeutung des Bourbakismus und eine stärkere Hinwendung zu [...] einer mehr informellen, intuitiven und inhaltlichen Sicht von Mathematik zu beobachten [...]."

2.2. Zur Anlage des Fragebogens

Mit dem Fragebogen (vgl. Anhang 1) sollten Einstellungen, die die Realisierung von Mathematik in der Schule betreffen, von Lehrern erfaßt werden, soweit dies ein geschlossener Fragebogen ermöglicht.[7] Sie lassen aber einige Rückschlüsse auf die Einstellungen über das Lehren und Lernen von Mathematik zu. Innerhalb der Einstellungen gegenüber Mathematik beschränkten wir uns, wie im Fragebogen vermerkt, auf das Wesen der Mathematik (Mathematik als Fachgebiet) - und nicht die Schul- oder Hochschul-Mathematik. Hier geht es uns um Leitvorstellungen, etwa die Pole Prozeß

7 Mit einem Fragebogen wird evtl. nur eine kognitive Komponente der Einstellung, also eine Meinung bzw. Vorstellung erfaßt. Dennoch sprechen wir weiterhin von Einstellungen, weil Vorstellungen oft eng mit Affektionen und Verhaltensabsichten verknüpft sind, und eine Aussage oftmals nicht nur eine Kognition, sondern auch Emotionen und affektive Bewertungen erregt.

und System (System unterschieden in 'Formalismus' und 'schematische Orientierung') ('Schema') - sowie auf die Nutzeneinschätzung der Mathematik. Damit beziehen wir unsere Untersuchungen also auf vier Aspekte des mathematischen Weltbildes: 'Schema', 'Formalismus', 'Prozeß' und 'Anwendung'.

Jeder dieser vier Aspekte wird durch mehr als zehn Items operationalisiert - dies verlangt der methodische und statistische Ansatz (vgl. Abschnitt 3.1.). Damit ist der Fragebogen auch bereits so lang, daß keine weiteren Aspekte erhoben werden können. Für die Auswahl der vier Aspekte gibt es mehrere Gründe.

1. Wir glauben, daß diese vier Aspekte die zentralen und strategischen Elemente von mathematischen Weltbildern sind. Möglicherweise ist dies ein Ausdruck unseres eigenen Weltbildes. Aber vielfältige Beobachtungen - die sicherlich auch selektiv von unseren eigenen Einstellungen gelenkt werden - zeigten uns, daß das Denken über Mathematik und Mathematikunterricht oftmals in diesen vier Dimensionen erfolgt. Das Denken über das Lehren und Lernen von Mathematik geschieht vielfach mit denselben Kategorien, die auch für das Wesen der Mathematik gelten. Im Denken über das Wesen der Mathematik scheint unseren Beobachtungen zufolge die Frage nach dem Anwendungsbezug der Mathematik und eine globale Einordnung im Spannungsfeld der Pole 'System' und 'Prozeß' vorrangig zu sein. Obzwar die Unterscheidung zwischen den Antagonisten 'System' und 'Prozeß' idealtypisch und paradigmatisch ist, halten wir sie weder für künstlich noch für überzogen. Im didaktischen Denken vieler konkreter Personen und in vielen Texten dient dieser Antagonismus oft als leitende und gewinnbringende globale Strukturierung.

2. In theoretischen Strukturierungen wurden die Elemente 'Schema', 'Formalismus' und 'Prozeß' immer wieder als wesentliche Dimensionen des Denkens über Mathematik herausgestellt. Beispielsweise geht auch ZIMMERMANN im theoretischen Ansatz seiner empirischen Untersuchung über Schüler- und Lehrerbilder von Mathematik und Mathematikunterricht von vier bzw. drei Kategorien aus: Strenge und Präzision (BOURBAKI-Bereich), Problemorientierung, Schemaorientierung, sowie mathematische Inhalte, die wiederum eher einer Schema- oder Problemorientierung zugeordnet werden (vgl. ZIMMERMANN 1991, S. 75 ff.). DIONNE unterscheidet im theoretischen Ansatz seiner empirischen Untersuchung über das Mathematik-Bild von kanadischen Grundschullehrern zwischen einem traditionellen (an Schemata und Algorithmen orientierten), einem formalistischen und einem konstruktivistischen (prozessualen) Bild von Mathematik, die für das Denken über Schulmathematik sehr wichtig seien (vgl. DIONNE 1984). Desweiteren haben wir in einer idealtypischen, paradigmatischen Beschreibung der Leitvorstellungen über Mathematik zwischen den Antagonismen System versus Prozeß unterschieden, wobei der System-Aspekt aus den Elementen Schema und Formalismus besteht (vgl. Abschnitt 2.1.; vgl. auch TÖRNER und GRIGUTSCH 1994).

3. Die Ergebnisse einiger empirischer Untersuchungen zeigen, daß das Denken über das Wesen der Mathematik nur in den grundlegenden Dimensionen 'Schema', 'Formalismus' und 'Prozeß' (sowie ggf. Anwendung) erfolgt. In den Untersuchungen von PEHKONEN weisen seine Faktorenanalyse 2. Ordnung in einer Stichprobe finnischer Schüler (PEHKONEN 1992) und seine Einteilung der Faktoren (in die Komponenten Rechnen, Formalismus, Verstehen, Anwenden) in einer Stichprobe finnischer

und estnischer Lehrer (PEHKONEN und LEPMANN 1994) darauf hin. In einer Reanalyse unserer Befragung von Studienanfängern (vgl. TÖRNER; GRIGUTSCH 1994) erhielten wir die Faktoren 'Schema', 'Prozeß' und 'Anwendung'; ein Faktor 'Formalismus' konnte wahrscheinlich auch deshalb nicht extrahiert werden, weil im Fragebogen zu wenig Items enthalten waren, die einen Formalismus-Aspekt operationalisierten.

Mit der Fragebogenkonstruktion und der (notwendigen) Beschränkung der empirischen Untersuchung auf vier Aspekte sind einige Vorannahmen ('Hypothesen') verbunden, die nicht geprüft werden können, aber es sind damit auch einige wesentliche Fragen verbunden. Die Eingrenzung der empirischen Untersuchung auf vier Aspekte spiegelt unsere *Ausgangshypothese* wider, daß diese Aspekte 'Formalismus', 'Schema', 'Prozeß' und 'Anwendung' die zentralen und strategischen globalen Dimensionen von mathematischen Weltbildern sind: In diesen Dimensionen werden, so unsere Überzeugung, Mathematik und Mathematikunterricht wahrgenommen und kognitiv strukturiert, in ihnen erfolgt das Denken, Bewerten und Fühlen, und Handlungspläne und -intentionen werden in ihnen angelegt. Diese Hypothese ist, wie oben dargelegt wurde, auf unsere Erfahrungen und auf theoretische Strukturierungen sowie auf andere Untersuchungen begründet. Diese *Ausgangshypothese*, daß diese vier Aspekte die <u>zentralen, wesentlichen globalen</u> Elemente im mathematischen Weltbild sind, kann im Rahmen dieser Untersuchung aus formal-logischen Gründen nur - mit Einschränkung - falsifiziert, aber nicht verifiziert werden.

Es <u>kann</u> nur geprüft werden, ob und in welcher Weise diese vorgegebenen Dimensionen reproduziert werden, ob die Ausgangshypothese also beibehalten werden kann. Denn mit den vier Aspekten ist der Ausschnitt aus dem mathematischen Weltbild zwar eingegrenzt, aber die Resultate sind damit keineswegs vorab festgelegt, sondern innerhalb dieses Rahmens durchaus offen. Insbesondere betonen wir, daß die Dimensionalität des mathematischen Weltbildes nicht schon determiniert ist. Innerhalb dieses Rahmens, den die vier Themengebiete bilden, kann nun nach Dimensionen gesucht werden. Unsere früheren Erfahrungen in anderen Stichproben haben gezeigt, daß trotz der Ausrichtung des Fragebogens auf bestimmte Aspekte das Ergebnis offen ist. In einer Reanalyse unserer Erhebung unter Studienanfängern erhielten wir eine Dimension 'Anwendung', obwohl sie nicht 'geplant' war, während sich eine Dimension 'Formalismus' nicht nachweisen ließ. In einer großen Schülerstichprobe (GRIGUTSCH 1996), in der der hier verwendete Fragebogen in einer schülergemäßen Formulierung verwendet wurde, zeigten sich mindestens fünf Dimensionen. Weiterhin variiert die genaue inhaltliche Bedeutung der Dimensionen zwischen den verschiedenen Zielgruppen.

Es <u>soll</u> geprüft werden, ob und in welcher Weise die vorgegebenen Dimensionen reproduziert werden. Es geht um drei Fragen:

1. Verstehen die Befragten die vorgegebenen Items genauso wie der Fragebogen-Autor?
2. Welche Dimensionen sind für die Befragten wesentlich im Denken über Mathematik innerhalb des Rahmens dieser vier Aspekte?
3. Sind die gefundenen Dimensionen auch Einstellungsdimensionen?

Diese Fragen sind für unseren methodischen Ansatz sehr wesentlich; in Abschnitt 3.1. werden wir sie genauer erläutern.

2.3. Die Durchführung der Erhebung

Der Fragebogen wurde auf der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1994 in Duisburg an etwa 400 Lehrer und Lehrerinnen ausgegeben. Es wurden 310 Fragebögen ausgefüllt. Die Rücklaufquote erscheint uns akzeptabel. Zwar kann die Stichprobe nicht als grundsätzlich repräsentativ für Mathematiklehrer der Sekundarstufen eingestuft werden, sie repräsentiert aber insbesondere engagierte Lehrer, die den z.T. nicht unbeträchtlichen Aufwand, an einer Lehrerfortbildungsveranstaltung teilzunehmen, in Kauf genommen haben. Insofern verdient diese Population, der eine gewisse Multiplikatorfunktion unterstellt werden kann, insbesondere unsere Aufmerksamkeit.

3. Faktorenanalyse

3.1. Aufgaben der Faktorenanalyse

Zunächst haben wir die Faktorenanalyse eingesetzt, um Statements des Fragebogens zu gruppieren - dies aus drei Gründen, von denen jeder für sich schwer wiegt und schon eine solche Gruppierung verlangt.

3.1.1. Das konzeptuelle Argument

Das Konzept 'Einstellung' ist u.a. durch eine Konsistenz der Reaktionen gekennzeichnet. Nur wenn dies der Fall ist, kann die Existenz eines Merkmals innerhalb der Mathematik vermutet werden, das Objekt einer Einstellung ist (notwendige, nicht hinreichende Bedingung). (vgl. Abschnitt 1.1.)

3.1.2. Das Argument der Validität

Ein besonderes Problem der Validität von schriftlichen Befragungen stellt die verbale Kommunikation dar. Hierbei geht es darum, ob Befrager und Befragter sich über das geschriebene Wort verständigen können. Zumeist wird dieses Problem auf die Forderung reduziert, daß Items einer Befragung verständlich formuliert sein sollen. In dieser Untersuchung gehen wir jedoch nicht von Paaren, sondern von *Gruppen* von Aussagen aus, die nach Meinung der Verfasser semantisch zusammengehörig sind. Die Frage ist nun, ob diese Gruppen von den Befragten reproduziert werden. Ausgehend von den beobachteten Korrelationen zwischen den Aussagen werden in der Faktorenanalyse die Aussagen gruppiert. An diese Gruppen ist also die Anforderung zu stellen, daß die Aussagen in einer Gruppe inhaltlich homogen sind. Ob die Aussagen innerhalb einer Gruppe auch formal homogen sind, beurteilen wir auf der Basis von Cronbachs Alpha.

3.1.3. Das meßtheoretische Argument

Einstellungen haben in vielen Fällen verschiedene Dimensionen. Es ist eine wesentliche Aufgabe der Messung, die Dimensionen herauszufinden, nach denen eine Gruppe von Probanden ihre Erfahrungen kategorisiert. Die bekannteste Technik zur Lösung dieses Problems ist die Faktorenanalyse. Die Frage, wieviele und welche Einstellungen vorliegen, war in anderen mathematikdidaktischen Untersuchungen oft eine zentrale

Frage (vgl. z.B. JUNGWIRTH 1994; PEHKONEN 1992; PEHKONEN; LEPMANN 1994).

Zu weiteren Akzenten im Zusammenhang mit der Messung von Einstellungen verweisen wir auf GRIGUTSCH (1994).

3.2. Variablen und Stichprobenumfang

Die Items wurden wie folgt skaliert: 5 = "stimmt genau", 4 = "stimmt größtenteils", 3 = "unentschieden", 2 = "stimmt nur teilweise", 1 = "stimmt gar nicht". Als Korrelationskoeffizient wurde der Maßkorrelationskoeffizient gewählt, wobei jede Person, die in einer der Variablen einen fehlenden Wert hat, ausgeschlossen wird ('listwise deletion').

Alle gerechneten Faktorenanalysen gehen von 75 Variablen aus - es wurden die Items 1 bis 77 ohne die Items 22 und 23 einbezogen. Bei den Items 22 und 23 gab es zuviele Antwortverweigerungen, so daß zuviele Beobachtungen (Testpersonen) aus der Faktorenanalyse ausgeschlossen würden; zudem ist grundsätzlich fraglich, ob Items mit vielen Antwortverweigerungen in der Auswertung berücksichtigt werden können. Die Items über die Kausalattributionen für Erfolg oder Mißerfolg (Items 78 bis 105) gehen ebenfalls nicht in die Faktorenanalyse ein, da auch sie viele Antwortverweigerungen enthalten und inhaltlich von den ersten 77 Items verschieden sind: Während die Items 1 bis 77 das Bild von Mathematik thematisieren, geht es bei den Kausalattributionen um einen Aspekt des Selbstkonzeptes (hier: des Schülerkonzeptes) als Mathematikbetreiber.

Der Stichprobenumfang beträgt 310. In der Faktorenanalyse werden jedoch nur 207 Personen berücksichtigt, weil jede Person, die in einer der 75 Variablen einen fehlenden Wert hat, in den statistischen Prozeduren ausgeschlossen wird. Die weiteren statistischen Auswertungen (ab Kapitel 3) beziehen mehr Personen ein (zwischen 253 und 294).

3.3. Scree-Test

Zunächst wurde eine Hauptkomponentenanalyse gerechnet, um die Eigenwerte zu berechnen und den Scree-Test durchzuführen (vgl. Anhang 2). Es sind 25 Eigenwerte größer als 1. Wie man dem Scree-Plot entnimmt, erscheint eine Analyse unter Zugrundelegung von 4 Faktoren angeraten.

3.4. Die 4-Faktoren-Lösung

In der Hauptachsenanalyse gaben wir 4 Faktoren und die Varimax-Rotation vor. In der orthogonalen Lösung (vgl. Anhang 3) wurden für jeden Faktor diejenigen Items bestimmt, deren Ladung über 0.39 lag. Zunächst interessierte uns, ob die Faktoren inhaltlich homogen und sinnvoll interpretierbar sind.

Item	**Faktor 1 = Formalismus-Aspekt**	Ladung
30	Ganz wesentlich für die Mathematik sind ihre logische Strenge und Präzision, d.h. das 'objektive' Denken.	,699
28	Mathematik ist gekennzeichnet durch Strenge, nämlich eine definitorische Strenge und eine formale Strenge der mathematischen Argumentation.	,678
50	Kennzeichen von Mathematik sind Klarheit, Exaktheit und Eindeutigkeit.	,650
32	Unabdingbar für die Mathematik ist ihre begriffliche Strenge, d.h. eine exakte und präzise mathematische Fachsprache.	,614
38	Mathematisches Denken wird durch Abstraktion und Logik bestimmt.	,597
26	Mathematik ist ein logisch widerspruchsfreies Denkgebäude mit klaren, exakt definierten Begriffen und eindeutig beweisbaren Aussagen.	,583
48	Die entscheidenden Basiselemente der Mathematik sind ihre Axiomatik und die strenge deduktive Methode.	,543
36	Für die Mathematik benötigt insbesondere formallogisches Herleiten sowie das Abstraktions- und Formalisierungsvermögen.	,530
40	Im Vordergrund der Mathematik stehen ein fehlerloser Formalismus und die formale Logik.	,527
3	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler streng logisch und präzise denken.	,486
17	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler die Fachbegriffe, und zwar korrekt, verwenden.	,475
45	Mathematik entsteht durch das Setzen von Axiomen oder Definitionen und eine anschließende formallogische Deduktion von Sätzen.	,469

Alle zwölf Items des ersten Faktors weisen Ladungen über .46 auf und besitzen keine Nebenladungen. Die Items sind inhaltlich homogen und lassen sich sinnvoll als Aspekt der Mathematik interpretieren, der den Formalismus besonders betont: Mathematik ist gekennzeichnet durch eine Strenge, Exaktheit und Präzision auf der Ebene der Begriffe und der Sprache, im Denken ('logischen', 'objektiven' und fehlerlosen Denken), in den Argumentationen, Begründungen und Beweisen von Aussagen sowie in der Systematik der Theorie (Axiomatik und strenge deduktive Methode). Wir nennen diesen Faktor den Formalismus-Aspekt der Mathematik.

Item	**Faktor 2 = Anwendungs-Aspekt**	Ladung
68	Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler wichtig.	,695
72	Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.	,659
70	Nur einige wenige Dinge, die man im Mathematikunterricht lernt, kann man später verwenden.	-,638
66	Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.	,600
67	Im Mathematikunterricht kann man - unabhängig davon, was immer unterrichtet werden wird - kaum etwas lernen, was in der Wirklichkeit von Nutzen ist.	-,596
69	Mathematik hat einen allgemeinen, grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft.	,591
71	Mathematik ist nützlich in jedem Beruf.	,580
76	Im Mathematikunterricht beschäftigt man sich mit Aufgaben, die einen praktischen Nutzen haben.	,512

75	Mathematik ist ein zweckfreies Spiel, eine Beschäftigung mit Objekten ohne konkreten Bezug zur Wirklichkeit.	-,438
74	Mit ihrer Anwendbarkeit und Problemlösekapazität besitzt die Mathematik eine hohe gesellschaftliche Relevanz.	,444

Auch für den zweiten Faktor lassen sich zehn Items finden, deren Ladung über .4 liegt, davon acht mit einer Ladung über .5. Alle Items weisen keine Nebenladungen auf. Alle Items drücken einheitlich (man beachte die negativen Ladungen bei drei Items !) einen direkten Anwendungsbezug oder einen praktischen Nutzen der Mathematik aus. Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler wichtig: Entweder hilft Mathematik, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen, oder sie ist nützlich im Beruf. Daneben hat Mathematik noch einen allgemeinen, grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft. Der Faktor ist inhaltlich homogen und sinnvoll interpretierbar als Anwendungs-Aspekt der Mathematik.

Item	**Faktor 3 = Prozess-Aspekt**	Ladung
43	In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.	,603
31	Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.	,570
52	Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden.	,502
54	Wenn man sich mit mathematischen Problemen auseinandersetzt, kann man oft Neues (Zusammenhänge, Regeln, Begriffe) entdecken.	,468
61	Jeder Mensch kann Mathematik erfinden oder nach-erfinden.	,454
58	Es gibt gewöhnlich mehr als einen Weg, Aufgaben und Probleme zu lösen.	,450
41	Für die Mathematik benötigt man vor allem Intuition sowie inhaltsbezogenes Denken und Argumentieren.	,419
55	Um eine Mathematikaufgabe zu lösen, gibt es zumeist nur einen einzigen Lösungsweg, den man finden muß.	-,419
37	Mathematik betreiben heißt: Sachverhalte verstehen, Zusammenhänge sehen, Ideen haben.	,414
35	Mathematische Tätigkeit besteht im Erfinden bzw. Nach-Erfinden (Wiederentdecken) von Mathematik.	,413
25	Mathematik ist eine Tätigkeit, über Probleme nachzudenken und Erkenntnisse zu gewinnen.	,407
46	Im Vordergrund der Mathematik stehen Inhalte, Ideen und Denkprozesse.	,404
49	Mathematik verstehen wollen heißt Mathematik erschaffen wollen.	,393

Es gibt zehn Items, die auf dem dritten Faktor mit einer Ladung über .4 ohne Nebenladungen laden. Sie stimmen inhaltlich darin überein, Mathematik in konstruktivistischer Sicht als Prozeß zu beschreiben. Das Item 49 mit einer Ladung von ,39 entspricht ebenfalls dieser Sicht von Mathematik. Mathematik wird in diesem Faktor als Prozeß charakterisiert, als Tätigkeit, über Probleme nachzudenken und Erkenntnisse zu gewinnen. Es geht dabei einerseits um das Erschaffen, Erfinden bzw. Nach-Erfinden (Wiederentdecken) von Mathematik. Andererseits bedeutet dieser Erkenntnisprozeß auch gleichzeitig das Verstehen von Sachverhalten und das Einsehen von Zusammenhängen. Zu diesem problembezogenen Erkenntnis- und Verstehensprozeß gehören maßgeblich ein inhaltsbezogenes Denken und Argumentieren sowie Einfälle, neue Ideen, Intuition und das Ausprobieren. Der Prozeß-Aspekt drückt die dynamische Sicht von Mathematik aus.

Item	**Faktor 4 = schematische Orientierung (Schema-Aspekt)**	Ladung
44	Mathematik besteht aus Lernen, Erinnern und Anwenden.	,642
24	Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.	,600
73	Es ist schon viel gewonnen, wenn der Mathematikunterricht das Wissen, das man in den Anwendungen, im Beruf oder im Leben braucht, zügig vermittelt - alles andere darüberhinaus ist Zeitverschwendung.	,543
62	Wenn man eine Mathematikaufgabe lösen soll, muß man das einzig richtige Verfahren kennen, sonst ist man verloren.	,513
39	Mathematik ist Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.	,482
34	Mathematik-Betreiben verlangt viel Übung im Befolgen und Anwenden von Rechenroutinen und -schemata.	,468
42	Mathematik-Betreiben verlangt viel Übung im korrekten Befolgen von Regeln und Gesetzen.	,417
20	Um im Mathematikunterricht erfolgreich zu sein, muß man viele Regeln, Begriffe und Verfahren auswendiglernen.	,399
29	Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden.	,376

Sieben Items laden auf dem vierten Faktor über .4 und ohne Nebenladung. Sie sind inhaltlich homogen und operationalisieren eine Sicht von Mathematik als 'Werkzeugkasten und Formelpaket', eine auf Algorithmen und Schemata ausgerichtete Vorstellung. Mathematik wird gekennzeichnet als Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst. Die Konsequenz für den Umgang mit Mathematik ist: Mathematik-Betreiben besteht darin, Definitionen, Regeln, Formeln, Fakten und Verfahren zu behalten und anzuwenden. Mathematik besteht aus Lernen (und Lehren!), Üben, Erinnern und Anwenden von Routinen und Schemata. Wir nennen dies den Schema-Aspekt von Mathematik. Zwei weitere Items mit Ladungen von ,399 und ,379 haben wir hinzugenommen.

Die Varianzanteile zeigen,

Faktor	Varianzanteil an der Gesamtkommunalität (=18,26)		Varianzanteil an der Gesamteinheitsvarianz (= 75)	
		kumuliert		kumuliert
1	31,7 %	31,7 %	7,7 %	7,7 %
2	22,9 %	54,6 %	5,6 %	13,3 %
3	22,0 %	76,6 %	5,4 %	18,7 %
4	23,3 %	99,9 %	5,7 %	24,4 %

daß jeder der vier Faktoren mehr als fünf Prozent der Gesamteinheitsvarianz aufklärt, also die übliche Untergrenze übersteigt und damit formal hinreichend bedeutsam ist. Dies ist um so erstaunlicher, als das 4-Faktoren-Modell nur knapp 25 % der Varianz des

Antwortverhaltens aufklärt. Auch hier zeigt sich wieder, daß die vier Faktoren nur einen kleinen Teil des einstellungshaften Denkens über Mathematik beschreiben und strukturieren; aber sie sind bedeutsam, und weitere bedeutsame Faktoren ließen sich in der 9-Faktoren-Lösung nicht finden.

Eine weitere Eigenschaft der Faktoren, die oft als Kriterium für ihre Auswahl benutzt wird, ist die Einfachstruktur der ausgewählten Items. Diese Items laden i.w. nur auf einem Faktor. Die Menge der ausgewählten Items läßt sich also mit Hilfe der vier Faktoren in vier disjunkte Gruppen unterteilen, es gibt keine Überschneidungen. Für die Faktoren bedeutet dies: Jeder Faktor wird operationalisiert durch Items, die ausschließlich auf ihm laden und auch inhaltlich völlig homogen sind. Jeder Faktor wird mithin unabhängig von den anderen Faktoren durch eine Gruppe von Items operationalisiert. In diesem Sinne kann man die Faktoren als eindeutig und unabhängig voneinander betrachten.

Die Items, die einen Faktor operationalisieren, wurden gruppiert aufgrund korrelativer Zusammenhänge. Die Bedeutung und Aussagekraft dieser Gruppierung ist zunächst offen. Als wichtigste Begründung haben wir die inhaltliche Homogenität geprüft. Nun soll die Homogenität innerhalb einer Gruppierung formal geprüft werden mit Cronbachs Alpha.

Cronbachs Alpha für die Anwendungs-Skala beträgt 0,83 (bei 10 Items), für die Formalismus-Skala 0,85 (bei 10 Items), für die Schema-Skala 0,76 (bei 8 Items) und für die Prozeß-Skala 0,72 (bei 9 Items). Weil alle Werte über .7 liegen, ist die Homogenität innerhalb einer Itemgruppe auch nach diesem formalen Kriterium gegeben.

3.5. Erste inhaltliche Auswertungen

Wir sind daher der Auffassung, daß diese vier Faktoren auch als inhaltlich bedeutsame und interpretierbare Faktoren anerkannt werden können. Die Faktoren 1 (= Formalismus-Aspekt) und 2 (= Anwendungs-Aspekt) enthalten jeweils zwölf bzw. zehn homogene Items, sind also bedeutsam und interpretierbar. Dies gilt auch für die Faktoren 3 (= Prozeß-Aspekt) und 4 (= schematische Orientierung). Diese vier Faktoren sind inhaltlich homogen und interpretierbar, und sie stellen - gemessen an der Zahl der Items - bedeutsame Dimensionen dar. Wir gehen davon aus, daß damit die wesentlichen Einstellungsmuster, die das Reaktionsverhalten gegenüber diesem Fragebogen prägen, optimal erfaßt sind. Mathematik wird von den Lehrern unserer Stichprobe also sehr differenziert wahrgenommen und strukturiert.

3.6. Fazit und Diskussion der Faktorenanalyse

Die vier hier extrahierten Faktoren sind die bedeutsamsten Orientierungen im einstellungshaften Denken über Mathematik in diesem Fragebogen. Sie erfassen alle vier wesentlichen Dimensionen, die sich im Antwortverhalten zeigten, und repräsentieren sie optimal in den gewählten Faktoren. Jedoch wird nur knapp ein Viertel der Gesamteinheitsvarianz aufgeklärt[8]. Das einstellungshafte Denken über Mathematik ist wahrschein-

8 und selbst bei neun Faktoren nur etwa 35 %.

lich sehr vielschichtig und umfaßt viele einzelne Wahrnehmungs- und Denkschemata sowie Verhaltensbereitschaften, die jeweils nur einen kleinen Bereich von Reizen (hier: Fragen) erfassen. Auch die vier Faktoren beschreiben und strukturieren nur einen Teil des einstellungshaften Denkens über Mathematik. Aber im beobachteten Antwortverhalten erfassen sie die wesentlichen strukturierenden Orientierungen.

Die ausgewählten Items, die auf den Faktoren hoch laden, weisen eine Einfachstruktur auf: Sie lassen sich also mit Hilfe der vier Faktoren in vier disjunkte Gruppen unterteilen. Das bedeutet andererseits, daß die Faktoren bzw. Dimensionen unabhängig voneinander operationalisiert werden können und in diesem Sinne als eindeutig und unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Die Aussagen innerhalb eines jeden Faktors sind inhaltlich homogen. Dies zeigt, daß eine Gruppe von semantisch ähnlichen Aussagen konsistent beantwortet wurde. Diese Homogenität innerhalb einer Itemgruppe wurde auch formal (mit Cronbachs Alpha) geprüft. Die Aussagen wurden also von uns und von den Befragten in einem bestimmten, ähnlichen Sinne verstanden. Insofern operationalisieren die Aussagen wahrscheinlich das von uns angegebene Merkmal ('Formalismus', 'Schema', 'Prozeß', 'Anwendung'), und die Messung dieser Merkmale ist in dieser Hinsicht wahrscheinlich gültig (valide).

Damit gilt auch: Die Merkmale 'Formalismus', 'Schema', 'Prozeß' und 'Anwendung' sind Dimensionen, die bei den befragten Lehrern die Wahrnehmung, kognitive Repräsentation, Erfahrung und Reaktionsbereitschaft gegenüber der Mathematik bzw. dem Mathematikunterricht kategorisieren.

Die vier Dimensionen sind eigenständige, voneinander unabhängige Einstellungsdimensionen im mathematischen Weltbild der Lehrer. Die Ausgangshypothese konnte mithin nicht falsifiziert werden und stellt daher eine sinnvolle Arbeitsgrundlage dar. Drei Aspekte dieses Ergebnisses sollen näher diskutiert und erläutert werden.

3.6.1. Inwiefern ist das Ergebnis der Faktorenanalyse durch die Fragebogenkonstruktion festgelegt ?

Das Ergebnis, daß das Antwortverhalten gegenüber dem Fragebogen in weiten Bereichen von vier Dimensionen geprägt ist, mag als Artefakt erscheinen, d.h. als zwangsläufige Folge der Fragebogenkonstruktion, in der nur Items in vier Dimensionen vorgegeben wurden. Dies stimmt nur zum Teil. Selbstverständlich legt die Auswahl der Items auch die Faktoren in bestimmter Weise fest: Es können nur solche Dimensionen in einer Faktorenanalyse extrahiert werden, für die mehrere Items vorliegen. Das Ergebnis der Faktorenanalyse, die Anzahl und der Inhalt der Faktoren, ist damit zwar eingegrenzt auf einen bestimmten Ausschnitt, aber in dieser Untersuchung dennoch als offen innerhalb dieses Ausschnittes einzuschätzen.

Erstens ist offen, ob vorgegebene, inhaltlich ähnliche Items von den Befragten auch als zusammengehörig wahrgenommen werden und im Reaktionsverhalten ein Zusammenhang ausgedrückt wird. Im gesamten Fragebogen sind viele Aussagen enthalten, die zwar inhaltlich und global einer der vier Dimensionen 'Schema', 'Formalismus', 'Prozeß' oder 'Anwendung' zugeordnet werden könnten, die aber nicht hinreichend hoch auf dem Faktor laden. Es gibt also einige Items, die trotz unterstellter Ähnlichkeit von den Befragten nicht als zusammengehörig betrachtet werden. Mithin ist es kein künstlich erzeugtes oder redundantes Ergebnis, daß einige Dimensionen gefunden werden konnten - im Gegenteil: Erst nach der Faktorenanalyse kann man relativ sicher sein, daß die gefundenen Dimensionen auch tatsächlich das einstellungsbezogene Denken, Fühlen und Handeln gegenüber der Mathematik strukturieren.

Zweitens stellen die vier vorgegebenen Dimensionen keine obere Grenze für die Anzahl der bedeutsamen Faktoren dar: In einer großen Schülerstichprobe (GRIGUTSCH 1996) wurde ein fünfter Faktor 'rigide Schema-Orientierung' extrahiert, der im Denken der Schüler eine sinnvolle und wichtige Dimension darstellt. Für einen Teil dieser Schülerstichprobe hätte auch noch ein sechster Faktor 'Logik und Fehlerlosigkeit' extrahiert werden können.

Drittens sind die Inhalte der Faktoren offen. Es werden zwar zu einer Dimension viele ähnliche Items vorgegeben. Doch die genaue inhaltliche Bedeutung eines Faktors ergibt sich erst aposteriori auf der Basis der berechneten Ladungen der einzelnen Items und ist damit durch die Einstellungen der Befragten determiniert. Sie variiert auch leicht zwischen verschiedenen Zielgruppen (Lehrer, Schüler, Studenten).

3.6.2. Sind 4 Dimensionen zu wenig zur Beschreibung des Mathematik-Bildes?

Dieser Komplex betrifft die Frage, ob ein Modell mit nur vier Faktoren ausreicht, um das Denken über Mathematik zu untersuchen. Wir sind - selbst wenn wir hier nur vier Faktoren extrahiert haben - überzeugt davon, daß das eigentliche mathematische Weltbild sehr vielschichtig ist. Es enthält sicherlich sehr viele Elemente und Beziehungen zwischen weiteren Elementen, so daß eine komplexe und hochdifferenzierte Struktur entsteht. In empirischen Untersuchungen von PEHKONEN verwendet er oft Fragebögen von Bernd ZIMMERMANN, die ein breites Spektrum von Einstellungen umfassen, und er extrahiert in seinen Faktorenanalysen viele Faktoren. Das hat zur Folge, daß diese Faktoren aber jeweils nicht durch so viele Items operationalisiert werden wie in dieser Untersuchung, und sie sind inhaltlich oft inhomogen und nur schwer interpretierbar. Diese Unterschiede zu unserer Lösung sind in erster Linie auf methodische Einflüsse zurückzuführen. Wir sehen darin aber keinen Widerspruch zu unserer Untersuchung; vielmehr sehen wir unsere 'grobe' Analyse aus drei Gründen gestützt.

Erstens zeigen auch die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen von PEHKONEN, daß die Einstellungen zu dem Wesen der Mathematik nur die grundlegenden Dimensionen 'Schema', 'Formalismus' und 'Prozeß' (sowie ggf. 'Anwendung') besitzen. Darauf weisen seine Faktorenanalyse 2. Ordnung in einer Stichprobe finnischer Schüler (PEHKONEN 1992) und seine Einteilung der Faktoren (in die Komponenten 'Rechnen', 'Formalismus', 'Verstehen', 'Anwenden') in einer Stichprobe finnischer und estnischer Lehrer (PEHKONEN; LEPMANN 1994) hin.

Zweitens wurden in theoretischen Strukturierungen die Elemente 'Schema', 'Formalismus' und 'Prozeß' immer wieder als wesentliche Dimensionen im Denken über Mathematik herausgestellt (vgl. unsere Ausführungen in Abschnitt 2.2).

Drittens ist die schriftliche Befragung mit einem geschlossenen Fragebogen nur ein sehr 'grobes' methodisches Instrumentarium, mit dem sich keine differenzierten Einstellungen erfassen lassen, weil es nur beschränkte Reaktionen in einem engen Antwortraster ("stimmt genau" bis "stimmt gar nicht" in wenigen Schritten) auf vorgegebene Statements gibt. Daher sollte ein Fragebogen auch nur 'grob' ausgewertet werden. Mit dieser 'groben' Auswahl der Faktoren glauben wir, der 'Grobheit' des Verfahrens der Einstellungsmessung mit einem Fragebogen gerecht zu werden.

4. Resultate über das mathematische Weltbild der Lehrer

Wir stellen im folgenden die Ergebnisse der Befragung in den vier Dimensionen dar, die in der Faktorenanalyse extrahiert worden sind.

- Welche Einstellungen besitzen die Lehrer in den vier Dimensionen ?
- Welche Struktur innerhalb des mathematischen Weltbildes wird von den vier Dimensionen erzeugt ?

Für die folgenden Untersuchungen bildeten wir für jede der vier Dimensionen Skalenwerte für jede befragte Person. Jede der vier Dimensionen wurde durch 9 - 113 Items operationalisiert. Für jeden befragten Lehrer wurden seine Punkte in den Aussagen einer Dimension zusammengezählt. Eine Transformation und eine Streckung der Skala führt dazu, daß jeder Lehrer in jeder Dimension einen Wert auf einer Skala von 0 bis 50 besitzt, wobei etwa 0 - 10 Punkte den Bereich der völligen Ablehnung und 40 - 50 Punkte den Bereich der völligen Zustimmung markieren.

Für jede der vier Dimensionen ergibt sich somit eine sog. ungewichtete Index-Skala. Dabei ist zweierlei zu beachten:

1. Die Indexbildung (Summation) ist ungewichtet. Es wäre ebenfalls sinnvoll, Punktwerte in den einzelnen Items entsprechend der Bedeutung, die die Items für die Faktoren haben, zu gewichten. Der Wert eines Items wäre also mit der zugehörigen Faktorenladung zu multiplizieren. Doch es zeigt sich in diesem Fall, daß die gewichteten Indexwerte nahezu völlig mit den ungewichteten übereinstimmen - wahrscheinlich deshalb, weil die Faktorenladungen sehr eng beieinander liegen. Daher werden wir uns, um das Modell möglichst einfach zu halten, auf die ungewichteten Indexwerte beziehen.
2. Die Indexwerte, aber auch schon die Skalenwerte für jedes einzelne Item, sind Werte einer sogenannten 'Indexmessung': Eine Reaktion eines Individuums auf eine einzelne Aussage wird ausgedrückt (abgebildet) in einem Wert auf einer vorgegebenen Skala. Es werden lediglich Ereignisse auf Zahlen abgebildet, aber es erfolgt keine nachprüfbare Zuordnung der Relationen zwischen den Ereignissen auf Relationen zwischen den Zahlen. Erst dann, wenn Objekte der Wirklichkeit auf Zahlen und Relationen zwischen den Objekten auf Relationen zwischen Zahlen abgebildet würden, würde in der numerischen Struktur der Skalenwerte auch die 'Struktur der Einstellungswirklichkeit' nachprüfbar repräsentiert sein. Eine solche (Repräsentations-) Messung im Sinne der Meßtheorie liegt bei dem hier verwendeten Ratingverfahren allerdings nicht vor. Die Relationen und damit die Struktur des Objektbereichs bleiben im Unklaren. Es ist somit prinzipiell fraglich, inwiefern die Ergebnisse dieser Indexmessung ein (korrektes) Bild über die Einstellungen vermitteln. Insbesondere ist nicht gesichert, inwiefern inter- und intrapersonale Vergleiche mit den markierten Werten durchgeführt werden dürfen. Wir gehen im folgenden jedoch immer von solchen Vergleichen aus, obwohl dies nur für Skalen einer 'Repräsentationsmessung' zulässig wäre. (vgl. GRIGUTSCH 1994; vgl. auch DAWES) Das vorliegende Datenmaterial erlaubte eine Skalierung mit Repräsentationstechniken nicht, zumal es ohnehin nur wenige dieser Repräsentationsmessungen in der Einstellungsforschung (bzw. in den empirischen Wissenschaften schlechthin) gibt.

Die Reliabilität (Cronbach) für die Anwendungs-Skala beträgt 0,83 (bei 10 Items), für die Formalismus-Skala 0,85 (bei 10 Items), für die Schema-Skala 0,76 (bei 8 Items) und für die Prozeß-Skala 0,72 (bei 9 Items). Für individuelle Aussagen (über einen einzelnen Lehrer) liegen die Reliabilitäten zwar unterhalb der für psychologische Tests geforderten Grenze von 0,9. In dieser Arbeit treffen wir jedoch Gruppenaussagen, für die eine Reliabilität über 0,7 gefordert wird. Insofern sind die Reliabilitäten der Skalen gut und akzeptabel, in Anbetracht der geringen Itemanzahl und der üblichen Meßungenauigkeit von Rating-Verfahren sogar erstaunlich hoch. Man kann daher von der Reliabilität der Index-Skalenwerte ausgehen.

4.1. Die Einstellungen in den vier Dimensionen

Hier möchten wir zunächst die Ergebnisse der statistischen Analysen aus Kapitel 3 in einer eher inhaltlichen Sicht zusammenfassend wiedergeben.

Das einstellungshafte Denken, Fühlen und Handeln in der Mathematik ist sehr vielschichtig und umfaßt viele Wahrnehmungs- und Denkschemata sowie Verhaltensbereitschaften. Von dieser Vielschichtigkeit erfaßt der Fragebogen nur einen kleinen Ausschnitt, und von der Vielschichtigkeit des einstellungshaften Antwortverhaltens erfassen die vier extrahierten Dimensionen wiederum nur einen Teil.

Aber diese vier Dimensionen 'Formalismus', 'Schema', 'Prozeß' und 'Anwendung' sind die wesentlichen und bedeutsamsten globalen Dimensionen, die das einstellungshafte Antwortverhalten in diesem Fragebogen über das Bild von Mathematik strukturieren. Diese Dimensionen sind weiterhin eigenständige, voneinander unabhängige Einstellungsausprägungen im mathematischen Weltbild. Denn als Faktoren einer orthogonalen Lösung sind sie formal und wegen der Einfachstruktur inhaltlich unabhängig voneinander. Jedes einstellungshafte Denken, Fühlen und Handeln in der Mathematik wird damit - neben anderen - zuerst (und grob) durch folgende Grundfragen bzw. Grundeinstellungen strukturiert:

(1) Welcher Grad an formaler Strenge und Exaktheit besteht in der Mathematik?

(2) Inwiefern ist Mathematik eine 'fertige Mathematik' in Form von Regeln, Algorithmen und Schemata?

(3) In welchem Ausmaß müssen Ideen und Intuition, Prozesse des Verstehens und Entwickelns in die Mathematik eingebracht werden?

(4) Welchen Nutzen oder Anwendungsbezug hat die Mathematik?

Im Raster dieser vier Grundfragen erfolgt einstellungshaftes Wahrnehmen und Handeln. *Erstens* sind sie Dimensionen, mit denen die befragten Lehrer die Wahrnehmung und kognitive Repräsentation der Mathematik strukturieren. *Zweitens* erfolgt das Denken, Bewerten und Fühlen gegenüber Mathematik auf globaler Ebene in diesen Dimensionen, und die Handlungsintentionen und -pläne werden in ihnen angelegt.

Wir halten dieses Resultat für wichtig und aufschlußreich: Wird ein Lehrer mit dem Objekt 'Mathematik' konfrontiert, dann werden in vielen Fällen nur wenige (globale) Grundeinstellungen aktiviert. Die gefundenen Einstellungsdimensionen der Mathematik betreffen nur vier Fragen, die sich nun nachträglich noch inhaltlich in zwei Bereiche einteilen lassen: *Erstens* ist der 'Anwendungsbezug' bzw. der 'Nutzen' der Mathematik stets bedeutsam. *Zweitens* wird die Frage nach dem Wesen der Mathematik in einer sehr globalen Form gestellt, sie spaltet sich in die Dimensionen 'Schema', 'Formalismus' und Prozeß' auf. Die Antworten auf diese zwei bzw. vier grundlegenden Fragen sind für die Ausprägung des mathematischen Weltbildes sehr bedeutsam. Unseres Erachtens legen sie seine Charakteristik bereits fest. Daher sollen nun die Einstellungen der Lehrer gegenüber diesen vier grundlegenden und eigenständigen Einstellungsdimensionen dargestellt werden.

4.1.1. Die Häufigkeiten in den Skalen

Formalismus-Aspekt

Die Häufigkeiten in der Formalismus-Skala sind 'normal' (Chiquadrat-Test; vgl. Fußnote 9) und symmetrisch verteilt sowie in Richtung der Zustimmung mit einem Mittelwert von 29,4 verschoben. (Standardabweichung = 8,78; Median = Modus = 28,75)

Häufigkeitsverteilung für Faktor F = 'Formalismus'

von (>)	bis (≤)	Anzahl	Prozent	norm. Anzahl	norm Prozent	
0	5	0	0	0,6	0,2	nicht
5	10	4	1,4	3,0	1,1	
10	15	10	3,6	10,3	3,7	teilweise
15	20	34	12,2	25,5	9,2	
20	25	46	16,5	46,1	16,6	unentschieden
25	30	61	21,9	60,9	21,9	
30	35	53	19,1	58,6	21,1	größtenteils
35	40	39	14,0	41,2	14,8	
40	45	19	6,8	21,1	7,6	vollends
45	50	12	4,3	7,9	2,8	
	Total	278	100,0	275,2	99,0	

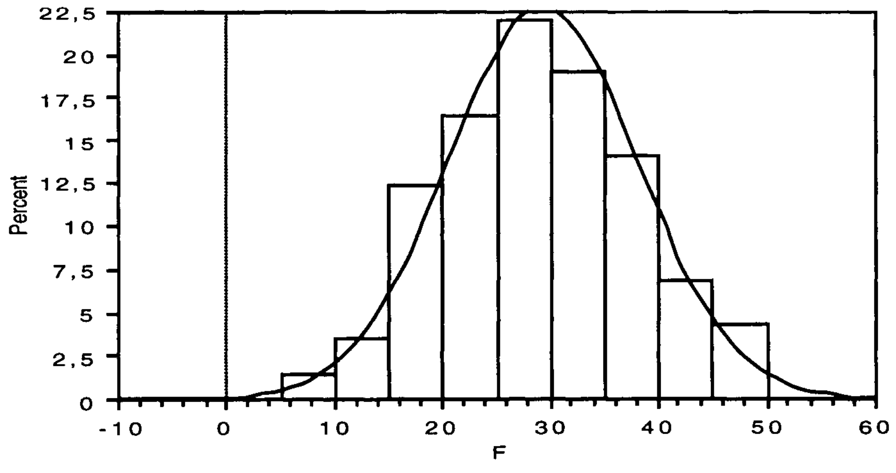


Abb 3. Verteilung des Faktors 'Formalismus'

Nur 1 % sieht in Mathematik keinen und 16 % sehen nur teilweise einen formalen Aspekt, 38 % sind unentschieden, während 33 % größtenteils und 11 % vollends einen Formalismus und hohen Grad an Strenge in der Mathematik sehen. Mathematik besitzt also im Bild der Lehrer grundsätzlich einen formalen Aspekt, kaum ein Lehrer sieht keinen Formalismus in der Mathematik. Geht man nun davon aus, daß zu Mathematik grundsätzlich eine Strenge in der Sprache, im Denken, in der Begründung und in der Systematik der Theorie gehört, dann zeigt sich eine normale Verteilung: Manche Lehrer betonen die Strenge sehr stark, andere nur teilweise, und die Mehrzahl nimmt eine mittlere Position ein.

Anwendungs-Aspekt

Die Verteilung der Häufigkeiten in der Anwendungs-Skala ist einerseits zufallskritisch nicht von einer Normalverteilung zu unterscheiden (Chiquadrat-Test; vgl. Fußnote 9), andererseits weisen die Lageparameter auf eine leichte Linksschiefe hin. Die zentrale Tendenz liegt mit einem Mittelwert von 33,9 im Bereich der Zustimmung. (Standardabweichung = 8,18; Median = 35; Modus = 37,5)

Zwei Drittel der Lehrer (46 % größtenteils, 20 % vollends) attestieren der Mathematik einen Anwendungsbezug, 26 % sind unentschieden. Nur 7 % sprechen der Mathematik einen Nutzen ab. Von einer Anwendbarkeit sowie einem Nutzen der Mathematik in der Wirklichkeit und im späteren Leben der Schüler ist der Großteil der Lehrer somit überzeugt.

Häufigkeitsverteilung für Faktor A = 'Anwendung'

von (>)	bis (≤)	Anzahl	Prozent	norm. Anzahl	norm Prozent	
0	5	0	0	0,1	0	nicht
5	10	1	0,3	0,5	0,2	
10	15	5	1,7	2,6	0,9	teilweise
15	20	14	4,8	10,1	3,4	
20	25	32	10,9	27,7	9,4	unentschieden
25	30	46	15,6	52,6	17,9	
30	35	62	21,1	69,7	23,7	größtenteils
35	40	74	25,2	64,2	21,8	
40	45	44	15,0	41,1	14,0	vollends
45	50	16	5,4	18,3	6,2	
	Total	294	100,0	286,9	97,6	

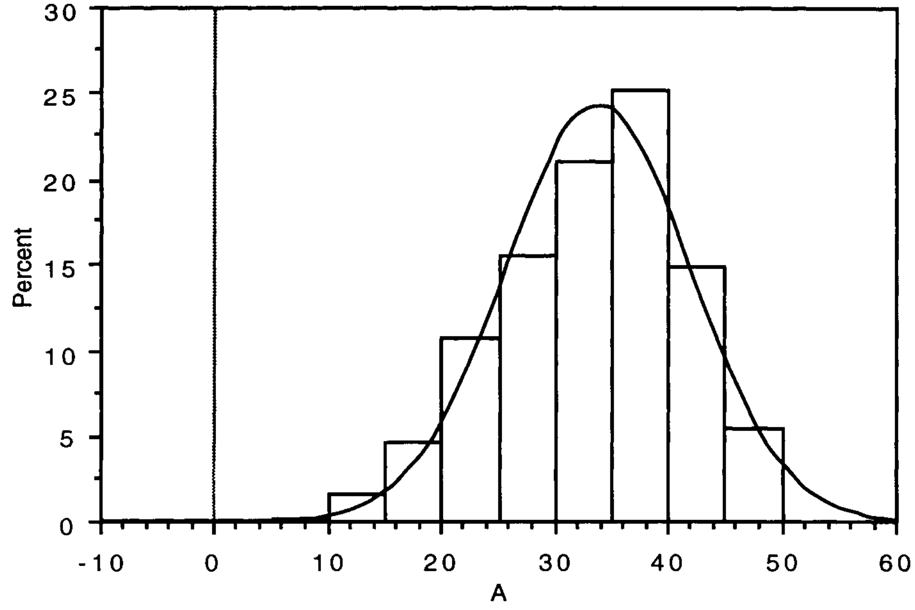


Abb 4. Verteilung des Faktors 'Anwendung'

Prozeß-Aspekt

Die Prozeß-Verteilung ist 'normal' (Chiquadrat-Test; vgl. Fußnote 9) und symmetrisch mit einer zentralen Lage im Bereich der Zustimmung. (Standardabweichung = 7,40; arithmet. Mittel = 32,7; Median = Modus = 33,3)

Häufigkeitsverteilung für Faktor P = 'Prozeß'

von (>)	bis (≤)	Anzahl	Prozent	norm. Anzahl	norm Prozent	
0	5	0	0	0	0	nicht
5	10	0	0	0,3	0,1	
10	15	2	0,7	2,0	0,7	teilweise
15	20	11	3,9	9,7	3,4	
20	25	40	14,1	29,8	10,5	unentschieden
25	30	49	17,3	58,8	20,8	
30	35	73	25,8	74,9	26,5	größtenteils
35	40	53	18,7	61,4	21,7	
40	45	41	14,5	32,4	11,4	vollends
45	50	14	4,9	11,0	3,9	
	Total	283	100,0	280,2	99,0	

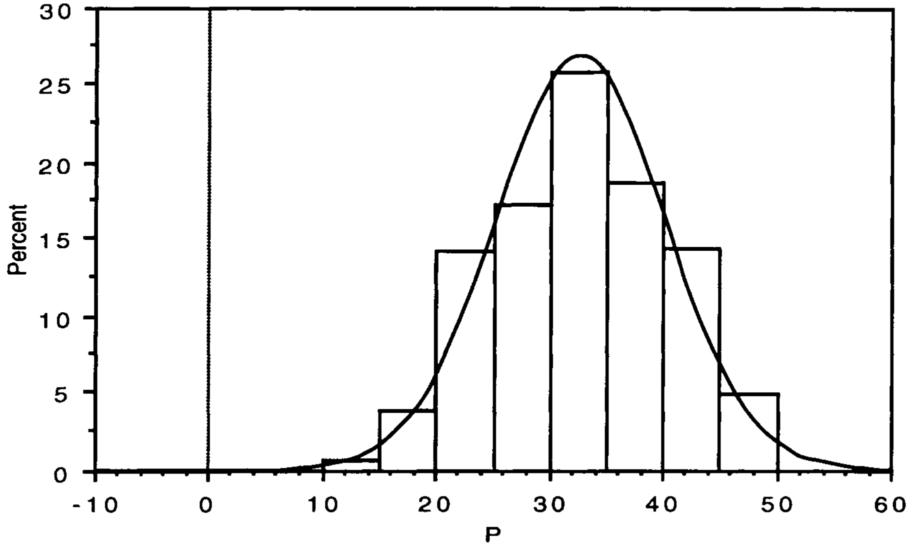


Abb 5. Verteilung des Faktors 'Prozeß'

Knapp zwei Drittel der Lehrer (45 % größtenteils, 19 % vollends) deuten Mathematik als Prozeß, knapp ein Drittel (31 %) sind unentschieden; nur 4 % sehen in der Mathematik keinen prozessualen Aspekt. Das Bild der Lehrer von Mathematik besteht also weiterhin aus einem Prozeß-Aspekt; für zwei Drittel der Lehrer ist Mathematik ein problembezogener Erkenntnis- und Verstehensprozeß, und kaum ein Lehrer sieht diesen Aspekt nicht in der Mathematik.

Schema-Aspekt

Die Häufigkeiten in der Schema-Skala sind zufallskritisch nicht von einer Normalverteilung zu unterscheiden (Chiquadrat-Test; vgl. Fußnote 9), andererseits deuten die Lageparameter auf eine rechtsschiefe Verteilung hin. Die zentrale Lage dieser Verteilung befindet sich im Bereich der Ablehnung. (Standardabweichung = 7,96; arithmet. Mittel = 19,8; Median = 18,75; Modus = 17,19)

11 % lehnen eine Deutung der Mathematik als 'Werkzeugkasten' und 'Formelpaket' vollends, 41 % größtenteils ab. Somit lehnen über die Hälfte ab, und 39% sind unentschieden, während nur 9 % größtenteils oder vollends zustimmen. Mathematik ist demnach für die Lehrer kein 'Werkzeugkasten' oder 'Formelpaket', der Umgang mit Mathematik wird nicht durch das Lehren und Lernen, Üben, Erinnern und Anwenden von Routinen und Schemata bestimmt. Jedoch ist die Ablehnung nicht so deutlich wie die Zustimmung zur Nützlichkeit oder zum Prozeß-Aspekt.

Häufigkeitsverteilung für Faktor S = 'schematische Orientierung' (Schema)

von (>)	bis (≤)	Anzahl	Prozent	norm. Anzahl	norm Prozent	
0	5	5	1,7	7,2	2,5	nicht
5	10	26	9,0	22,2	7,7	
10	15	52	18,0	47,2	16,3	teilweise
15	20	66	22,8	68,3	23,6	
20	25	71	24,6	67,5	23,4	unentschieden
25	30	41	14,2	45,6	15,8	
30	35	21	7,3	21,0	7,3	größtenteils
35	40	3	1,0	6,6	2,3	
40	45	3	1,0	1,4	0,5	vollends
45	50	1	0,3	0,2	0,1	
	Total	289	100,0	287,1	99,4	

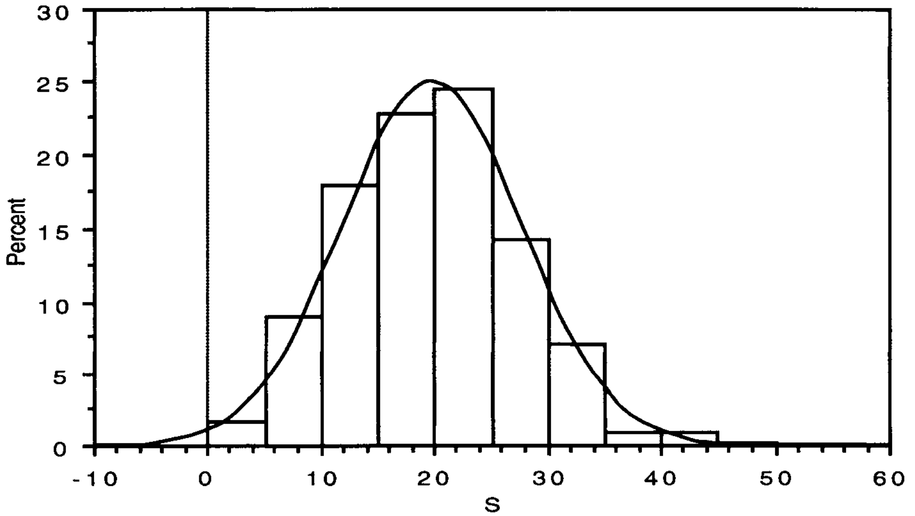


Abb 6. Verteilung des Faktors 'schematische Orientierung' (Schema)

4.1.2. Vergleich der vier Verteilungen

Alle vier Verteilungen sind 'Normalverteilungen' mit sehr ähnlichen Standardabweichungen, die sich nur durch ihren Mittelwert unterscheiden[9]. Im Prinzip besteht in allen

---

9 Der Unterschied zwischen den Verteilungen der Formalismus-, Anwendungs-, Prozeß- und Schema-Skala einerseits und den entsprechenden Normalverteilungen andererseits ist im Chiquadrat-Test (auf dem 5 %-Niveau) nicht signifikant. Die Abweichungen zwischen den Verteilungen und der Normalverteilung können also zufällig sein. Die vorliegenden Verteilungen der Skalen können aus einer Grundgesamtheit stammen, die nor-

vier Skalen dieselbe Verteilung, unterschiedlich ist nur die Lage auf dem Kontinuum zwischen Ablehnung und Zustimmung. Dies bedeutet inhaltlich zweierlei.

1. Weil die Verteilungen in jeder Skala 'normal' sind, gibt es keine Präferenz eines bestimmten Wertes außer des Mittelwertes, der die Verteilung optimal charakterisiert. Weil zudem die Varianzen im Prinzip gleich sind, können wir sie beim Vergleich der Merkmale vernachlässigen: Die Einstellungen der Lehrer - insgesamt betrachtet - gegenüber 'Formalismus', 'Schema', 'Prozeß' und 'Anwendung' sind als einzelne Punkte auf der Skala markierbar, repräsentiert durch ihren Mittelwert.

Die durchschnittliche Einstellung der Lehrer in jeder Dimension wird optimal gekennzeichnet durch den Mittelwert. Weil die Mittelwerte verschieden sind, gibt es auch unterschiedliche Einstellungen gegenüber den vier Einstellungsobjekten. Im Bild der Lehrer von Mathematik sind die vier Faktoren nicht gleich wichtig. Vielmehr liegt ein akzentuiertes Bild von Mathematik vor, in dem einige Elemente mehr und andere weniger betont werden. Im Bild der Lehrer von Mathematik wird der Schema-Aspekt eher gering und zurückhaltend eingeschätzt, während der Formalismus eine mittlere, mäßig hohe Bedeutung hat. Als bedeutsam gelten in diesem Bild der Anwendungs- und Prozeß-Aspekt, die in ihrer durchschnittlichen Einschätzung nicht unterscheidbar sind.

Man muß bei dieser Interpretation allerdings auch kritisch beachten, daß diese Mittelwerte (wie auch die Skalenwerte generell) nicht nur etwas über die Einstellung aussagen, sondern auch etwas über die Items selbst, nämlich über die 'Schwierigkeit' der Items. Dieses Problem ist im Rahmen der klassischen Test- bzw. Meßtheorie grundsätzlich nicht zu lösen.

---

malverteilt ist und den Mittelwert und die Standardabweichung der jeweiligen empirischen Verteilung besitzt.
Die Hypothese, daß die Varianzunterschiede zwischen Paaren von Verteilungen (mit Ausnahme der Paarung Formalismus/Prozeß) gleich Null sind, konnte mit paarweise durchgeführten Ferguson-Tests auf dem 5 % - Niveau nicht verworfen werden. Lediglich der größte Varianzunterschied zwischen den Verteilungen der F- und P-Skala ist signifikant mit einem Fehler von 5 %, jedoch nicht signifikant mit einem Fehler von 0,1 %. Weil zusätzlich bei diesen paarweisen Tests die Wahrscheinlichkeiten für Unterschiede überschätzt werden, kann man davon ausgehen, daß die vorliegenden Verteilungen aus Grundgesamtheiten mit im Prinzip gleichen Varianzen stammen.
Alle Mittelwertunterschiede (mit Ausnahme des Paares Anwendung und Prozeß) sind bei paarweiser Prüfung mit t-Tests signifikant mit einem Fehler von höchstens 0,01 %, was nach der Adjustierung von Bonferroni zu einer Signifikanz auf dem 0,1 % Niveau hinausläuft. Der geringe Unterschied zwischen den Mittelwerten der Skalen Anwendung und Prozeß ist signifikant mit einem Risiko von höchstens 4 %, also nach der Adjustierung nicht signifikant.
Für diese Mittelwertunterschiede gibt es zwei Gründe. Erstens können sie auf Unterschiede in den Einstellungen gegenüber den verschiedenen Einstellungsdimensionen hindeuten. Zweitens können diese Mittelwertunterschiede auch Ausdruck einer unterschiedlichen "Schwierigkeit" der Items bzw. unterschiedlicher Skalen in den verschiedenen Einstellungsdimensionen sein. Dies wird im Text näher erläutert.

2. Betrachtet man hingegen nicht die durchschnittliche Einstellung, sondern die Verteilung und damit die einzelnen Lehrer, so gilt wegen der Normalität der Verteilungen: Es gibt individuelle Unterschiede im mathematischen Weltbild, die normalverteilt sind. Gegenüber keinem der vier Einstellungsobjekte präferieren die Lehrer einen einheitlichen Wert, sondern es gibt unterschiedliche Einstellungen, die in jeder Skala von Ablehnung bis Zustimmung reichen.

4.2. Beziehungen zwischen den Dimensionen

Die vier Dimensionen sind eigenständige, voneinander unabhängige Einstellungsdimensionen, die es zunächst einzeln zu diagnostizieren und auszuwerten galt. Darüberhinaus betrachtet man in der Einstellungstheorie auch die Strukturen, die von den einzelnen Einstellungen bzw. Einstellungsdimensionen gebildet werden. Im semantischen Netz des Gedächtnisses bestehen Strukturen, sowohl auf der Ebene der Einstellungen (kognitive Strukturen) als auch der damit assoziierten Affektionen sowie der damit assoziierten Handlungsschemata. Man kann die Hypothese vertreten, daß mit den kognitiven Strukturen auch Einstellungsstrukturen verbunden sind. Diese Strukturen werden in verschiedener Hinsicht diskutiert, z.B. nach ihrer quasilogischen Struktur, nach ihrer psychologischen Bedeutsamkeit oder ihrer Clustereigenschaft (vgl. PEHKONEN 1994). Möglicherweise - so unsere Vermutung - sind es gerade die Strukturen und weniger die Ausprägungen einzelner Einstellungen, die die Ausprägung des mathematischen Weltbildes, die Wirkungen von Einstellungen und die Beeinflußbarkeit von Einstellungen wesentlich festlegen.

Die vier Skalen weisen folgende partielle Korrelationen auf (n = 253):

	F	A	P	S
F	1,000	,042	-,127 *	,364 ***
A	,042	1,000	,127 *	,087
P	-,127 *	,127 *	1,000	-,146 *
S	,364 ***	,087	-,146 *	1,000

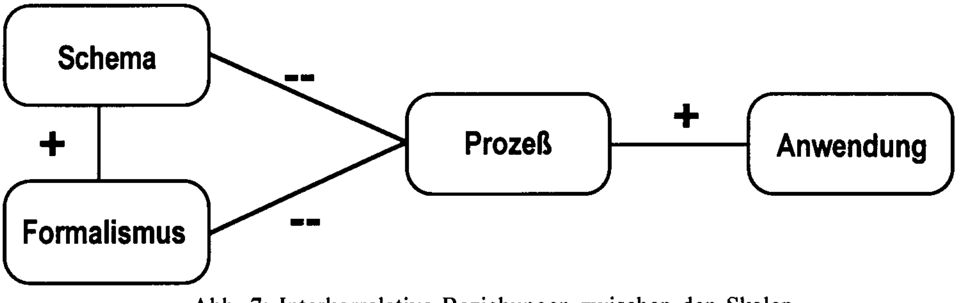


Abb. 7: Interkorrelative Beziehungen zwischen den Skalen

Sicherlich sind die Korrelationskoeffizienten sehr niedrig. Dies mag zum einen daran liegen, daß die Zusammenhänge zwischen den Dimensionen nicht sehr stark sind, d.h. daß es sich um verschiedene Dimensionen handelt. Zum anderen kann wieder der Meßfehler verantwortlich gemacht werden. Unseres Erachtens kann man die signifikanten

Korrelationskoeffizienten aber dennoch interpretieren. *Erstens* sind sie signifikant von Null verschieden, d.h. die aufgezeigten Beziehungen existieren in jedem Fall der Tendenz (Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten) nach. *Zweitens* sind auch niedrige signifikante Korrelationskoeffizienten inhaltlich bedeutsam, wenn man berücksichtigt, daß durch den Meßfehler die Korrelationskoeffizienten erniedrigt werden und daß die Koeffizienten Beziehungen zwischen verschiedenen Dimensionen ausdrücken. Es liegen verschiedene Dimensionen vor, die aber dennoch in Beziehung zueinander stehen.

Aus den Interkorrelationen ergibt sich (vgl. Abb. 7) eine Teil-Struktur des mathematischen Weltbildes, die mit unserer theoretischen Vorannahme der antagonistischen Leitvorstellungen korrespondiert. Die Formalismus-Skala und die Schema-Skala repräsentieren die beiden Aspekte der statischen System-Sicht von Mathematik und interkorrelieren signifikant positiv. Diese beiden Teile des statischen Paradigmas korrelieren signifikant negativ mit der Prozeß-Skala; dies korrespondiert mit unserer These, daß diese beiden Sichtweisen - zumindest in paradigmatischer Analyse - antagonistisch angelegt sind. Der Anwendungs-Aspekt der Mathematik korreliert nur mit dem Prozeß-Aspekt der Mathematik signifikant. Dies paßt insofern in unsere Vor-Theorie, als Schema- und Formalismus-Aspekt eine statische Eigenschaft zum Ausdruck bringen, in der Mathematik nicht primär auf die Lösung von Problemen der Wirklichkeit ausgerichtet ist. Mathematik ist in der formalistischen Sicht weitgehend auf sich selbst bezogen, auf die exakte Begriffsbildung, die streng formallogische Absicherung der Gültigkeit von Aussagen und auf den logisch-systematischen Aufbau. Mathematik in der schematischen Sicht besteht aus einer Sammlung von Rechenverfahren und Algorithmen, die - so muß man den Nicht-Zusammenhang mit der Anwendungs-Skala deuten - wohl eher für die innermathematische Routine als für konkrete Anwendungen und Problemlösungen in der Wirklichkeit ausgelegt eingeschätzt werden. Demgegenüber ist der Prozeß-Aspekt auf eine Entwicklung von Wissen in einem problembezogenen Erkenntnis- und Verstehensprozeß ausgerichtet, bei der das Verstehen von Zusammenhängen, Einfälle und Intuition betont werden. Diese dynamische Mathematik mag für Anwendungen eher geeignet sein - und dies drückt sich auch in den Einstellungen der Lehrer aus.

Das mathematische Weltbild, zumindest in diesen vier Dimensionen, ist damit relativ konsistent und zusammenhängend (kohärent) in seiner Struktur. Diese Aussage gilt nur für die momentane Ausprägung, d.h. für die Statik des mathematischen Weltbildes. Für den Wandel von Einstellungen lassen sich alternative Hypothesen bilden, auf die wir hier nicht eingehen können.

4.3. Unterschiede zwischen Lehrern verschiedener Schulformen

Die befragten Lehrer verteilen sich wie folgt auf die unterrichteten Stufen und Schulformen (in den Spalten S, F, P und A sind die arithmetischen Mittelwerte angegeben):

Die Lehrer der verschiedenen Schulformen lassen sich - dies soll als Hypothese formuliert werden - anhand der Mittelwerte ihrer Einstellungen in eine Rangfolge (deskriptiv, nicht wertend) setzen:

	Anzahl	Prozent	Schema	Formal.	Prozeß	Anw.
Primarstufe	3	1,0	15,1	19,6	35,6	38,7
Sek. I	118	38,1	22,8	29,7	32,1	34,8
Sek. II	29	9,4	20,6	30,9	31,5	34,3
Sek. I/II	151	48,7	17,3	28,8	33,8	32,9
Total	301	97,2				

	Anzahl	Prozent	Schema	Formal.	Prozeß	Anw.
Hauptschule	43	13,9	26,7	32,6	31,3	36,0
Realschule	52	16,8	22,5	29,0	32,2	34,1
Gymnasium	129	41,6	17,1	29,2	33,4	33,3
Gesamtschule	42	13,5	18,5	27,7	34,2	33,0
andere Form	40	12,9	19,5	29,5	31,7	33,8
Total	306	98,7				

Schema: Der Schema-Aspekt wird von Lehrern an Hauptschulen relativ hoch eingeschätzt und wird dann über Realschule und Gymnasium bzw. Gesamtschule immer niedriger eingeschätzt.

Formalismus: Der Formalismus-Aspekt besitzt in der Hauptschule eine hohe Bedeutung, die über Realschule zum Gymnasium und zur Gesamtschule hin abnimmt.

Prozeß: Der Prozeß-Aspekt wird im mathematischen Weltbild der Lehrer an der Hauptschule relativ gering eingeschätzt; die Bedeutung wächst über Realschule bis zum Gymnasium und zur Gesamtschule.

Anwendung: Die Anwendbarkeit der Mathematik wird von Lehrern der Hauptschule hoch eingeschätzt, während diese Überzeugung bei Lehrern an Realschulen und dann an Gymnasien bzw. Gesamtschulen immer niedriger wird.

Diese Rangfolgen zeigen sich auch prinzipiell in den gemessenen Mittelwerten. Eine zufallskritische Prüfung (t-Tests mit Bonferroni-Korrektur) zeigt jedoch nur folgende signifikante Mittelwertunterschiede:

1. Lehrer an der Hauptschule schätzen den Formalismus-Aspekt der Mathematik mit einem Mittelwert von 32,6 geringfügig höher ein als Lehrer an Gymnasien oder Gesamtschulen mit einem Mittelwert von 29,2 bzw. 27,7.

2. Lehrer an der Hauptschule schätzen den Schema-Aspekt mit einem Mittelwert von 26,7 höher ein als Lehrer an allen vier anderen Schulformen.

3. Für Lehrer an Realschulen besitzt der Schema-Aspekt mit einem Mittelwert von 22,5 eine höhere Bedeutung als für Lehrer an Gymnasien (Mittel=17,1) oder Gesamtschulen (Mittel=18,5).

4. Das Ergebnis unter 2. und 3. drückt sich auch darin aus, daß Lehrer in der Sekundarstufe I den Schema-Aspekt mit einem Mittelwert von 22,8 höher einschätzen als Lehrer in der Sek. I/II mit einem Mittelwert von 17,3.

Das Ergebnis zeigt, daß die angenommenen Rangfolgen in den Dimensionen Formalismus, Prozeß und Anwendung zufallskritisch nicht nachgewiesen werden konnten. Demgegenüber läßt das Ergebnis eine Anordnung der Lehrer nach Schulformen mittels des Schema-Aspektes zu. Lehrer an Hauptschulen schätzen den Schema-Aspekt in ihrem

Bild von Mathematik mittelmäßig ein, Lehrer an Realschulen geringer, und Lehrer an Gymnasien und Gesamtschulen lehnen den Schema-Aspekt eher ab.

Es gibt viele Faktoren, die einen Einfluß auf das mathematische Weltbild der Lehrer und schulformspezifische Unterschiede im mathematischen Weltbild haben können. Es gibt u.a. Unterschiede in der Ausbildung der Lehrer für die verschiedenen Schulformen, in den globalen Zielen der Schulen, in Curricula und Lehrplänen, im tatsächlich unterrichteten Stoff und in den unterrichteten Schülergruppen. Diese Unterschiede mögen im unterschiedlichen mathematischen Weltbild der Lehrer verschiedener Schulformen ihren Ausdruck finden, und das mathematische Weltbild mag auf das Lehr- und Unterrichtsverhalten wirken.

Für den Schema-Aspekt konnten schulformspezifische Unterschiede nachgewiesen werden. Sie korrespondieren möglicherweise mit unterschiedlichen Einflußfaktoren und mit dem Lehr- und Unterrichtsverhalten. Es entspricht zumindest unseren - unsystematischen und subjektiven - Erfahrungen, daß im Mathematikunterricht der Hauptschule die Vermittlung von Rechenverfahren und Algorithmen einen relativ hohen Stellenwert besitzt, der in der Realschule etwas geringer ist. Im Gymnasium und evtl. auch in den entsprechenden Kursen der Gesamtschule werden auch in weiten Bereichen Rechenregeln und -verfahren vermittelt, doch zunehmend - zumindest in Phasen der Einführung, Aufbereitung und Vertiefung - mit Aspekten des Nach-Erfindens, Verstehens und Begründens verbunden.

Auf der anderen Seite muß man feststellen, daß die Mittelwertunterschiede in den Dimensionen Formalismus, Prozeß und Anwendung - auch falls sie sich bei einem größeren Stichprobenumfang als signifikant nachweisen ließen - gering sind. Die Lehrer unterscheiden sich nicht derart, daß eine Gruppe einen Aspekt ablehnt, während eine andere Gruppe diesen Aspekt mittelmäßig oder zustimmend einschätzt. Das mathematische Weltbild in den drei Dimensionen Formalismus, Prozeß und Anwendung muß nach den Ergebnissen dieser Untersuchung damit als ähnlich angesehen werden. Im Schema-Aspekt gibt es hingegen nicht nur signifikante, sondern auch relativ bedeutsame Unterschiede, wenngleich nicht in Form eines Für und Wider.

4.4. Zusammenfassung der Ergebnisse über Mathematikeinstellungen der Lehrer

4.4.1. Eine globale Teil-Struktur in mathematischen Weltbildern

Das einstellungshafte Denken, Fühlen und Handeln in der Mathematik ist sehr vielschichtig und umfaßt viele einzelne Wahrnehmungs- und Denkschemata sowie Verhaltensbereitschaften, die jeweils nur einen kleinen Bereich von Reizen erfassen. Die Einstellungen gegenüber Mathematik sind sehr komplex und vielfältig, Mathematik wird von den Lehrern sehr differenziert wahrgenommen und strukturiert. Wir gehen davon aus, daß die Einstellungen zueinander in Beziehung stehen und mithin eine komplexe Einstellungsstruktur bilden - das mathematische Weltbild.

Aus diesem komplexen mathematischen Weltbild konnte eine Teil-Struktur, die das Wesen der Mathematik und die Anwendbarkeit der Mathematik thematisiert, identifiziert und untersucht werden. Sie besteht aus den Dimensionen Formalismus-, Schema-, Prozeß- und Anwendungs-Aspekt der Mathematik. Die vier Dimensionen sind inhaltlich eigenständige, voneinander unabhängige Einstellungsdimensionen im mathematischen Weltbild der Lehrer. Diese Dimensionen beschreiben und strukturieren nur einen Teil der Einstellungen gegenüber Mathematik. Aber sie sind die bedeutsamsten und wesentlichen Orientierungen im beobachteten Antwortverhalten.

Jedes einstellungshafte Denken, Fühlen und Handeln in der Mathematik wird - neben anderen - primär und grob durch die vier Grundfragen bzw. Grundeinstellungen strukturiert, inwiefern das Wesen der Mathematik von einer formalen Strenge und Exaktheit, von 'fertiger Mathematik' in Form von Regeln, Algorithmen und Schemata oder von problembezogenen Prozessen des Verstehens und Entwickelns geprägt ist und inwiefern die Mathematik in der Wirklichkeit nützlich und anwendbar ist. In diesen Grundfragen und -dimensionen strukturieren die Lehrer ihre Wahrnehmung und kognitive Repräsentation der Mathematik. In ihnen erfolgt das Denken, Bewerten und Fühlen über Mathematik auf globaler Ebene, und die Verhaltensabsichten und Handlungspläne werden in diesen Dimensionen angelegt.

Unseres Erachtens sind diese Dimensionen die wesentlichen globalen Dimensionen des mathematischen Weltbildes. Sie sind wahrscheinlich die konstitutiven Elemente in dem Sinne, daß sie die grundsätzliche Ausrichtung und Charakteristik des mathematischen Weltbildes weitgehend festlegen. Die Einstellungen gegenüber diesen vier Einstellungsdimensionen wären demnach die bedeutendsten Charakteristika des mathematischen Weltbildes der Lehrer. Diese vier globalen Dimensionen bilden eine globale Teil-Struktur, die wir bereits in Abschnitt 4.2 diskutiert haben.

4.4.2. Die Ausprägung der globalen Teil-Struktur mathematischer Weltbilder

Im Prinzip besteht in allen vier Einstellungsdimensionen dieselbe Häufigkeitsverteilung, nämlich eine Normalverteilung mit ähnlichen Standardabweichungen - unterschiedlich ist nur die Lage auf dem Kontinuum zwischen Ablehnung und Zustimmung.

Im durchschnittlichen Bild der Lehrer von Mathematik wird der Schema-Aspekt eher gering und ablehnend eingeschätzt, während der Formalismus eine mittlere, mäßig hohe Bedeutung hat. Als bedeutsam, wenngleich nicht überragend, gelten in diesem Bild der Anwendungs- und Prozeß-Aspekt, die in ihrer Einschätzung nicht unterscheidbar sind. Im durchschnittlichen Mathematik-Bild der Lehrer sind die Grundelemente nicht gleich wichtig, so daß ein ausgeglichenes Bild von Mathematik vorläge, das vier Elemente mit gleicher Bedeutung enthielt. Vielmehr liegt ein akzentuiertes Bild vor, in dem der Anwendungs- und Prozeß-Aspekt mehr betont werden, hingegen der Schema-Aspekt weniger.

Diese Orientierung des Mathematik-Bildes in Richtung des Prozeß-Aspektes zeigt sich auch in einem eindimensionalen Modell, das den Antagonismus der Leitvorstellungen System und Prozeß umsetzt in eine Skala mit den Polen 'Schema' und 'Prozeß'. Das durchschnittliche Verhältnis von 'Schema' zu 'Prozeß' liegt bei 4 : 6. Das bedeutet, daß Mathematik im Bild der Lehrer sowohl Schema- als auch Prozeß-Aspekte enthält, wobei der Schema-Aspekt tendenziell abgelehnt wird und der Prozeß-Aspekt leicht dominiert.

Das mathematische Weltbild ist in der Lehrerstichprobe nicht einheitlich, sondern unterschiedlich ausgeprägt. Die Lehrer besitzen in jeder der vier Dimensionen individuell unterschiedliche Einstellungen, deren Spektrum von Ablehnung bis Zustimmung reicht. Es gibt, um es einmal ausdrücklich zu sagen, Formalisten und Nicht-Formalisten, hoch und niedrig Schema-Orientierte, hoch und niedrig Prozeß-Orientierte, Anwendbarkeits-Gläubige und -Ungläubige. Die Verschiedenartigkeit der Einstellungen ist normalverteilt. Allerdings kann diese Untersuchung nichts über individuelle Kombinationen aussagen. Die meisten Lehrer besitzen eine Einstellung in der Nähe des Mittelwertes, doch es gibt Abweichungen zu höheren und niedrigeren Werten in 'normalem' Ausmaß und symmetrisch.

Diese Unterschiede werden noch gestützt bzw. stabilisiert in der Struktur, die von diesen Einstellungsdimensionen gebildet wird. Die Einstellungen gegenüber dem Schema- und dem Formalismus-Aspekt der Mathematik unterstützen sich positiv, während sie in negativer Beziehung zum Prozeß-Aspekt stehen. Eine Sicht, daß Mathematik von Schemata dominiert werde, korrespondiert mit der Einstellung, daß der Formalismus eine sehr hohe Bedeutung habe, während eine prozessuale Sicht von Mathematik weniger zutreffend sei. Eine Einstellung in einer Dimension stützt somit andere Einstellungen in anderen Dimensionen; individuelle Unterschiede werden in der Struktur gestützt. Das mathematische Weltbild - zumindest in diesen vier Dimensionen - ist damit relativ konsistent und kohärent in seiner Struktur; diese Aussage gilt allerdings nur für die momentane Ausprägung, d.h. für die Statik des mathematischen Weltbildes, und nicht für den Wandel und die Beeinflußbarkeit.

Unterschiede in den Lehrereinstellungen in Abhängigkeit von den Schulformen in den Sekundarstufen konnten in dieser Untersuchung nicht nachgewiesen werden. Man kann also vorläufig die Hypothese vertreten, daß das globale Bild von Mathematik in diesen Dimensionen ähnlich ist. Es ließ sich nur die Tendenz feststellen, nach der eine Anordnung der Lehrer nach Schulformen mittels des Schema-Aspektes möglich ist. Lehrer an Hauptschulen schätzen den Schema-Aspekt mittelmäßig ein, Lehrer an Realschulen geringer, und Lehrer an Gymnasien und Gesamtschulen lehnen den Schema-Aspekt eher ab.

4.5. Bewertung einiger Ergebnisse

Abschließend möchten wir die Aufmerksamkeit auf drei Resultate lenken, die uns ein wenig überrascht haben. Wir teilen unsere Bewertungen mit und stellen sie zur Diskussion.

4.5.1. Positives Bild der Einstellungen

Zunächst müssen wir *erstens* das Mathematik-Bild der Lehrer - natürlich vor dem Hintergrund unseres eigenen Bildes - als sehr positiv einschätzen. Im durchschnittlichen Mathematik-Bild der Lehrer werden der Prozeß- und der Anwendungs-Aspekt der Mathematik relativ hoch eingeschätzt, während der Schema-Aspekt eher gering bis ablehnend beurteilt wird. Mathematik wird demnach in erster Linie als 'Prozeß' verstanden, in dem die Erkenntnis und das Verstehen betont werden. Demgegenüber wird die statische Sicht abgelehnt, daß Mathematik im Lernen, Üben und Anwenden von Rechenschemata und -routinen sowie im mechanischen Drill von Verfahren erstarre. Weiterhin wird der Prozeß-Aspekt, die Entwicklung von Wissen in einem problembezogenen Erkenntnis- und Verstehensprozeß, mit der Anwendbarkeit und dem Nutzen der Mathematik verbunden, von der die Lehrer überzeugt sind.

4.5.2. Ähnliches Bild in verschiedenen Schulformen

Zweitens muß nach den vorliegenden Ergebnissen das globale Bild von Mathematik in den Aspekten 'Formalismus', 'Prozeß' und 'Anwendung' bei Lehrern verschiedener Schulformen der Sekundarstufen vorläufig als ähnlich angesehen werden. Es gibt sicherlich Unterschiede in den globalen Lehrzielen, in Lehrplänen und in Unterrichtsinhalten, die auch unterschiedliche Dispositionen und Interessen von Schülern berücksichtigen. Dann ist es einerseits berechtigt und auch wünschenswert, daß diese curricularen Unterschiede mit einem unterschiedlichen mathematischen Weltbild des Lehrers weitgehend in Einklang stehen. Andererseits sind wir erstaunt und werten es positiv, daß die Lehrer der verschiedenen Schulformen ein ähnlich differenziertes und mehrschichtiges Bild von Mathematik zu besitzen scheinen. Wir werten es positiv, daß trotz dieser curricularen Unterschiede ein Lehrer an einer Haupt- oder Realschule ein ähnliches globales Bild von Mathematik besitzt und seinen Schülern vermitteln mag wie ein Lehrer an einem Gymnasium - nämlich ein Bild, das die Mehrschichtigkeit des Wesens der Mathematik aufzeigt und nicht einengt auf isolierte Aspekte. Dies wäre möglich, weil sich nach unserer Überzeugung alle Aspekte des Bildes von Mathematik unabhängig vom Alter und von den Dispositionen der Schüler, unabhängig vom Schultyp und vor allem unabhängig vom konkreten fachlichen Inhalt im Mathematikunterricht vermitteln lassen.

4.5.3. Mathematik als beliebtes Lehrerschulfach

Ein weiteres positives Ergebnis sind die Angaben der Lehrer zu ihrer Lust, Mathematik zu unterrichten. Fast alle Lehrer (97 %) bezeugen, Mathematik gerne zu unterrichten, davon zwei Drittel sogar uneingeschränkt. Möglicherweise spiegelt sich in diesen positiven Zahlen der Umstand wieder, daß die Teilnehmer dieser Untersuchungen durch ihre Bereitschaft, freiwillig an der Lehrerfortbildungstagung teilzunehmen, wie bereits oben erwähnt, als positiv motiviert eingeschätzt werden müssen.

4.5.4. Bewertung der Resultate

Da diese Ergebnisse nicht voll mit unseren Vorstellungen übereinstimmen, haben wir auch kritisch nach Erklärungen gesucht, ohne das Resultat grundsätzlich in Frage ziehen zu wollen. Für eine gegenteilige Einschätzung gibt es vier Erklärungsansätze.

(a) Wie schon früher hervorgehoben, ist die Stichprobe der an der Lehrerfortbildung 'Interessierten' nicht im eigentlichen Sinne repräsentativ für Lehrer.

(b) Auch kann man die Validität der schriftlichen Befragung anzweifeln. Insbesondere könnte das Antwortverhalten in Richtung einer sozialen Erwünschtheit verzerrt worden sein. Die Lehrer haben den Fragebogen während der Bundestagung für Didaktik der Mathematik ausgefüllt, in einer Universität und einer von Wissenschaftlern geprägten Atmosphäre. Die Lehrer mögen die vermeintlichen Erwartungen der Wissenschaft antizipiert haben oder sich in ihre Studienzeit zurückversetzt gefühlt haben.

(c) Es gilt zu beachten, dass im Fragebogen das Bild von Mathematik als Fachgebiet erhoben wurde. Auf das alltägliche Unterrichtshandeln wirken aber auch noch viele andere Vorstellungen bzw. Einstellungen: Einstellungen gegenüber dem Lehren und Lernen von Mathematik, Einstellungen gegenüber Schülern (Lernvermögen, Lernbereitschaft), Einstellungen gegenüber der Institution Schule und dem optimalen Verhalten in dieser Institution, Einstellungen zum ökonomischen Verhalten im Beruf sowie eigene

Motivationen, Interessen und Bedürfnisse als Mathematiklehrer und als Mensch, Ehefrau / -mann, Mutter / Vater, ...

(d) Schließlich mögen die Aussagen im Fragebogen in ihrer inhaltlichen Vielfalt nicht ausreichend gewesen sein, ein valides Abbild des Mathematik-Bildes der Lehrer zu erheben, oder es wurden wichtige Fragestellungen und Aspekte nicht thematisiert, die das Abbild realitätsgetreuer hätten ausfallen lassen. Beispielsweise hätten auch folgende Aussagen vorgegeben werden können, die stärker auf die Bedürfnisse und Potentiale der Schüler abheben und zudem einen Motivations-Aspekt des Mathematikunterrichts einbeziehen, die also den Reiz 'soziale Beziehung Schüler-Lehrer' stärker anregen: "Ein Werkzeugkasten mit Schemata und Algorithmen ist wichtig, um den weniger talentierten Schülern Erfolgschancen zu geben." "Es ist oft schon ein großer Fortschritt, wenn die Schüler das Formelpaket 'Mathematik', z.B. die Integraltafel, sicher handhaben können." "Bei Problemaufgaben blockieren viele Schüler." "Freudenthals Position für einen prozeßorientierten Unterricht halte ich für realitätsfern." Mit diesen Aussagen hätte man evtl. eine schwächere Prozeß-Orientierung und eine stärkere Schema-Orientierung feststellen können. Die Aussagen im Fragebogen haben u.E. (i) das Wesen der Mathematik (ii) global erfaßt, möglicherweise valide erfaßt. Möglicherweise hätten Fragen (i) zu speziellen Aspekten des Unterrichts, des Lehrens und Lernens von Mathematik, das positive Bild zumindest relativiert; möglicherweise wären die befragten Lehrer bei Fragen (ii) zu Randbereichen eher geneigt, ihr global positives Mathematik-Bild zu korrigieren oder aufzugeben.

Die Frage, ob diese drei positiven Resultate im Mathematik-Bild der Lehrer auch das Unterrichtsverhalten leiten, kann nicht beantwortet werden. Es ist zu hoffen, daß dieses positive Bild auch unterrichtsrelevant ist, also die Einstellungen über das Lehren und Lernen von Mathematik bestimmt, im Unterricht auch umgesetzt und von den Schülern rezipiert wird. Und ebenso ist zu hoffen, daß in allen Schulformen - trotz unterschiedlicher Schüler, Lehrpläne und Rahmenbedingungen - zwar der Unterricht und der erlernte Stoff verschieden sind, das Bild von Mathematik allerdings gleich mehrschichtig und positiv ist.

Literatur

BARTENWERFER, H.; RAATZ, U. 1979. Methoden der Psychologie; Einführung in die Psychologie, Bd. 6; Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft

BAUER, L.A. 1988. Mathematik und Subjekt. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.

BAUERSFELD, H. 1983. Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. BAUERSFELD, H. BUSSMANN, G. KRUMMHEUER, J.H. LORENZ & J. VOIGT (Eds.), Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht. IDM-Reihe 6. Köln: Aulis

DIONNE, J. 1984. The perception of mathematics among elementary school teachers; in: Proceedings of the sixth annual meeting of the PME-NA (ed. J. Moser); Madison (Wi): University of Wisconsin, S. 223 - 228

DUNGAN, J.F.; THURLOW, G.R. 1989. Students' Attitudes to Mathematics: A Review of the Literature; in: The Australien Mathematics Teacher **45** (3), S. 8 - 12

EAGLY, A.H.; CHAIKEN, S. 1993. The Psychology of Attitudes. Fort Worth: Harcourt Brace Javanovich College Publishers

FRANK, M.L. 1990. What Myths about Mathematics are held and convoyed by Teachers?; in: Arithmetic Teacher **37** (5), S. 10 - 12

FREUDENTHAL, H. 1973. Mathematik als pädagogische Aufgabe I; Stuttgart: Klett

GRIGUTSCH, S. 1994. Methodische Probleme bei der Erforschung von Schülerhaltungen gegenüber dem Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht 1994, S. 119 - 122

GRIGUTSCH, S. 1996. Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. Duisburg: Universität Duisburg. Fachbereich Mathematik. Dissertation

JUNGWIRTH, H. 1994. Erwachsene und Mathematik - eine reife Beziehung? mathematica didactica **17** (1), S. 69 - 89

MEINEFELD, W. 1983 Einstellung 1983. In: R. ASANGER; G. WENNINGER (Eds.), Handwörterbuch der Psychologie. Weinheim und Basel: Beltz , 3. Aufl., S. 92 - 99

PEHKONEN, E. 1992. Views of Finnish seventh-graders about mathematics teaching; Problem fields in mathematics teaching, part 3; University of Helsinki, Department of Teacher Education, Research Report 108, Helsinki

PEHKONEN, E. 1992a. Auffassungen von Schülern über den Mathematikunterricht in vier europäischen Ländern. Beiträge zum Mathematikunterricht 1992, S. 343 - 346

PEHKONEN, E. 1993. Schülervorstellungen über Mathematik als verborgener Faktor für das Lernen. Beiträge zum Mathematikunterricht 1993, S. 303 - 306

PEHKONEN, E. 1994. Mathematische Vorstellungen von Schülern: der Begriff und einige Forschungsresultate; Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Nr. 265; Duisburg

PEHKONEN, E. 1994a. On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching. Journal für Mathematik-Didaktik **15** (3/4), S. 177 - 209

PEHKONEN, E. 1995. Pupils' view of mathematics. Initial report for an international comparison project. Research Report 152. Helsinki: University of Helsinki. Department of Teacher Education

PEHKONEN, E; LEPMANN, L. 1994. Vergleich der Lehrerauffassungen über den Mathematikunterricht in Estland und Finnland. Research Report 150. Helsinki: University of Helsinki. Department of Teacher Education

SEIFFGE-KRENKE, I. 1974. Probleme und Ergebnisse der Kreativitätsforschung; Stuttgart: Huber 1974

SÜLLWOLD, F. 1969. Theorie und Methodik der Einstellungsmessung; in: Handbuch der Psychologie, 7. Band: Sozialpsychologie, 1. Halbband: Theorien und Methoden; Göttingen: Hogrefe, S. 475 - 514

THOMPSON, A. 1992. Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In: GROUWS, D.A. (ed.): Handbook of Research on mathematics learning and teaching; New York: Macmillan 1992, S. 127 - 146

TIETZE, U.P. 1990. Der Mathematiklehrer an der gymnasialen Oberstufe. Zur Erfassung berufsbezogener Kognitionen. Journal für Mathematik-Didaktik **11** (1990) 3, S. 177 - 243

TÖRNER, G.; GRIGUTSCH, S. 1994. 'Mathematische Weltbilder' bei Studienanfängern - eine Erhebung. Journal für Mathematik-Didaktik **15** (3/4), S. 211 - 251

TÖRNER, G.; PEHKONEN, E. 1996. Literature on Mathematical Beliefs. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Nr. 341; Duisburg

TÖRNER, G.; ZIELINSKI, U. 1992. Problemlösen als integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts - Einblicke und Konsequenzen. Journal für Mathematik-Didaktik **13**, S. 253 - 270

TRIANDIS, H.C. 1975. Einstellungen und Einstellungsänderungen; Weinheim und Basel: Beltz 1975

UNDERHILL, R. 1988a. Mathematics Learners' Beliefs: A Review. Focus on Learning Problems in Mathematics **10** (1), S. 55 - 70; **10** (3), S. 43 - 58

ZIMMERMANN, B. 1991. Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse; Universität Hamburg, Habilitationsschrift (nicht veröffentlicht); Hamburg 1991

ZIMMERMANN, B. 1991a. Offene Probleme für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **23**, S. 38 - 46

Anhang 1: UMFRAGE zum Mathematikunterricht

Mit dem folgenden Fragebogen möchten wir **Ihre Erfahrungen mit üblicherweise erteiltem Schul-Mathematikunterricht** und **Ihre Sicht von Mathematik als Fachgebiet** kennenlernen. Dabei ist jeweils genau eine Möglichkeit anzukreuzen. Diese Umfrage ist Teil eines Forschungsprojektes über Haltungen und Einstellungen gegenüber Mathematik und Mathematikunterricht, das im Fachbereich Mathematik an der Universität Duisburg von Prof. Dr. G. Törner durchgeführt wird und auch ein Promotionsvorhaben integriert. Die bisherigen Ergebnisse über Studienanfänger sind auf ein reges Interesse gestoßen. Wir möchten mehr erfahren und lernen. Diese Umfrage ist anonym, weil wir an Ihrer ehrlichen Meinung interessiert sind. Deshalb keine Angst vor der Wahrheit: nur Ihre wirkliche Überzeugung ist für uns wertvoll.

Wir wissen wohl, daß der Fragebogen lang ist und einige Mühen abverlangt. Vielleicht bearbeiten Sie den Bogen nicht an einem Stück, sondern verteilt auf mehrere Tage. Ihre Teilnahme an dieser GDM-Tagung beweist Ihre Kompetenz in und Ihr Interesse an mathematikdidaktischen Fragen. Gerade deshalb bitten wir Sie um ihre Mitarbeit.

Sprechen Sie Herrn Grigutsch im Tagungsbüro an, wenn Sie mehr erfahren wollen. Auf Wunsch senden wir Ihnen später auch gerne eine Ergebnisdatei (Excel-Tabelle) zu, die Sie statistisch auswerten können (SPSS, StatView, u.a.).

\+ Wir appellieren nochmals eindringlich an ihre Mitarbeit, denn: Jeder einzelne Fragebogen zählt. Bitte geben Sie den ausgefüllten Bogen bei Frau Lonzeck im Tagungsbüro ab.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit und Hilfe !

Ich bin

• Hochschuldidaktiker	O	und zwar in der	• Primarstufe	O
• Hochschulmathematiker	O		• Sek. I	O
• Lehrer	O		• Sek. II	O
			• Sek. I/II	O

in

• einer Hauptschule	O	• einem Gymnasium	O	• sonstige Schule	O
• einer Realschule	O	• einer Gesamtschule	O		

Aus Platzgründen geben wir nur die Fragen wieder; die Antwortkategorien lauteten: 'stimmt genau', 'stimmt größtenteils', 'unentschieden', 'stimmt nur teilweise' und 'stimmt gar nicht'

	Meine Erfahrungen mit üblicherweise erteiltem Schul-Mathematikunterricht
1	Mathematik mag ich gerne unterrichten.
2	Nur der Teil der Mathematik, der in Tests und Klassenarbeiten getestet wird, ist wichtig und wissenswert.
3	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler streng logisch und präzise denken.
4	Im alltäglichen Mathematikunterricht ist es oft wichtiger, Ergebnisse und Fakten zu lernen, als Lösungsideen und weiterführende Fragen möglichst selbständig zu finden.
5	Kenntnisse aus abgeschlossenen Themenbereichen spielen im Mathematikunterricht nur eine marginale Rolle; man kann sie zumeist vergessen.
6	Ich halte es für wichtig und interessant, wenn der Mathematikunterricht Querverbindungen und Zusammenhänge zwischen einzelnen Inhalten der Mathematik aufzeigt.

7	Ein Hauptziel des Mathematikunterrichts ist, den Schülern das Lösen von Aufgaben beizubringen.
8	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler alles ganz genau ausdrücken.
9	Kann der Schüler einen Algorithmus richtig anwenden, so betrachtet er dies oft als 'Verstehen'.
10	Mathematikunterricht erteile ich nur ungern.
11	Im Mathematikunterricht reicht es den Schülern bislang, nur das zu lernen, was in der Klassenarbeit verlangt wird.
12	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler alles ganz genau begründen.
13	Manchmal muß ein Lehrer seinen Schülern sagen: "Hier hilft nur büffeln."
14	Mathematikaufgaben sollten mit den Verfahren gelöst werden können, die im Unterricht kürzlich besprochen worden sind.
15	Eine gute Denkfähigkeit und Einfallsreichtum sind im Mathematikunterricht oft wichtiger als eine gute Lern- und Merkfähigkeit.
16	Das Lernen von systematisiertem und strukturiertem mathematischen Wissen hat Vorrang vor einer tätigen Entwicklung solchen Wissens.
17	Im Mathematikunterricht müssen die Schüler die Fachbegriffe, und zwar korrekt, verwenden.
18	Die Herleitung oder der Beweis einer Formel ist für den Schüler unwichtig; entscheidend ist, daß er sie anwenden kann.
19	Das Erfinden bzw. Nach-Erfinden von Mathematik hat Vorrang vor einem Lehren bzw. Lernen von 'fertiger Mathematik'.
20	Um im Mathematikunterricht erfolgreich zu sein, muß man viele Regeln, Begriffe und Verfahren auswendiglernen.
21	Entscheidend im Mathematikunterricht ist es, ein richtiges Ergebnis zu erhalten.
22	Für das Lösen einer Routineaufgabe benötigt der Schüler (Klasse 10) im Durchschnitt ...... Minuten.
23	Ein Problem erscheint dem Schüler (Klasse 10) dann unlösbar, wenn er mehr als ...... Minuten erfolglos probiert hat.

	Die Mathematik als Fachgebiet aus meiner Sicht
24	Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.
25	Mathematik ist eine Tätigkeit, über Probleme nachzudenken und Erkenntnisse zu gewinnen.
26	Mathematik ist ein logisch widerspruchsfreies Denkgebäude mit klaren, exakt definierten Begriffen und eindeutig beweisbaren Aussagen.
27	Mathematik besteht aus Ideen, Begriffen und Zusammenhängen.
28	Mathematik ist gekennzeichnet durch Strenge, nämlich eine definitorische Strenge und eine formale Strenge der mathematischen Argumentation.
29	Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden.
30	Ganz wesentlich für die Mathematik sind ihre logische Strenge und Präzision, d.h. das 'objektive' Denken.
31	Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.
32	Unabdingbar für die Mathematik ist ihre begriffliche Strenge, d.h. eine exakte und präzise mathematische Fachsprache.

33	Mathematische Tätigkeit besteht aus dem Ordnen von Erfahrungen und Prinzipien, die beim Arbeiten mit Beispielen gewonnen wurden.
34	Mathematik-Betreiben verlangt viel Übung im Befolgen und Anwenden von Rechenroutinen und -schemata.
35	Mathematische Tätigkeit besteht im Erfinden bzw. Nach-Erfinden (Wiederentdecken) von Mathematik.
36	Für die Mathematik benötigt man insbesondere formallogisches Herleiten sowie das Abstraktions- und Formalisierungsvermögen.
37	Mathematik-Betreiben heißt: Sachverhalte verstehen, Zusammenhänge sehen, Ideen haben.
38	Mathematisches Denken wird durch Abstraktion und Logik bestimmt.
39	Mathematik ist Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.
40	Im Vordergrund der Mathematik stehen ein fehlerloser Formalismus und die formale Logik.
41	Für die Mathematik benötigt man vor allem Intuition sowie inhaltsbezogenes Denken und Argumentieren.
42	Mathematik-Betreiben verlangt viel Übung im korrekten Befolgen von Regeln und Gesetzen.
43	In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.
44	Mathematik besteht aus Lernen, Erinnern und Anwenden.
45	Mathematik entsteht durch das Setzen von Axiomen oder Definitionen und eine anschließende formallogische Deduktion von Sätzen.
46	Im Vordergrund der Mathematik stehen Inhalte, Ideen und Denkprozesse.
47	Gute Mathematik stellt viele Strategien und Verfahren bereit, die in zahlreichen Situationen (universell) erfolgreich anwendbar sind.
48	Die entscheidenden Basiselemente der Mathematik sind ihre Axiomatik und die strenge deduktive Methode.
49	Mathematik verstehen wollen heißt Mathematik erschaffen wollen.
50	Kennzeichen von Mathematik sind Klarheit, Exaktheit und Eindeutigkeit.

	Zur Entstehung von Mathematik
51	Mathematik wird fast immer nur von besonders kreativen Menschen erfunden, deren Wissen sich andere dann aneignen müssen.
52	Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden.
53	Neue mathematische Theorie entsteht erst dann, wenn zu einer Menge von Aussagen der Beweis (fehlerlos) vorliegt.
54	Wenn man sich mit mathematischen Problemen auseinandersetzt, kann man oft Neues (Zusammenhänge, Regeln, Begriffe) entdecken.
55	Um eine Mathematikaufgabe zu lösen, gibt es zumeist nur einen einzigen richtigen Lösungsweg, den man finden muß.
56	Bei der Entwicklung von mathematischer Theorie sind Fehler in Kauf zu nehmen; entscheidend sind gute Ideen.
57	Der durchschnittliche Mensch ist meistens nur Konsument und Reproduzent der Mathematik, die andere Menschen erschaffen haben.
58	Es gibt gewöhnlich mehr als einen Weg, Aufgaben und Probleme zu lösen.

59	Fehlerlosigkeit wird erst bei der logischen Absicherung von mathematischen Aussagen verlangt, nicht schon bei ihrer Entwicklung.
60	Entwicklung und logische Absicherung von mathematischer Theorie gehören zusammen, sie sind untrennbar beim richtigen mathematischen Denken, Forschen und Problemlösen.
61	Jeder Mensch kann Mathematik erfinden oder nach-erfinden.
62	Wenn man eine Mathematikaufgabe lösen soll, muß man das einzig richtige Verfahren kennen, sonst ist man verloren.
63	Entstehung und logische Absicherung von mathematischer Theorie sind unterschiedliche, voneinander trennbare Prozesse.

	Mathematik und Wirklichkeit
64	Was einem der Mathematikunterricht für die Wirklichkeit beibringen kann, ist ein gutes, umfangreiches Wissen - mehr nicht.
65	Der Mathematikunterricht schult einige Fähigkeiten, die auch in der Realität weiterhelfen (z.B. das allgemeine klare Denken in abstrakten und komplexen Situationen, das konkrete Rechnen).
66	Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.
67	Im Mathematikunterricht kann man - unabhängig davon, was immer unterrichtet werden wird - kaum etwas lernen, was in der Wirklichkeit von Nutzen ist.
68	Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben der Schüler wichtig.
69	Mathematik hat einen allgemeinen, grundsätzlichen Nutzen für die Gesellschaft.
70	Nur einige wenige Dinge, die man im Mathematikunterricht lernt, kann man später verwenden.
71	Mathematik ist nützlich in jedem Beruf.
72	Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.
73	Es ist schon viel gewonnen, wenn der Mathematikunterricht das Wissen, das man in den Anwendungen, im Beruf oder im Leben braucht, zügig vermittelt - alles andere darüberhinaus ist Zeitverschwendung.
74	Mit ihrer Anwendbarkeit und Problemlösekapazität besitzt die Mathematik eine hohe gesellschaftliche Relevanz.
75	Mathematik ist ein zweckfreies Spiel, eine Beschäftigung mit Objekten ohne konkreten Bezug zur Wirklicheit.
76	Im Mathematikunterricht beschäftigt man sich mit Aufgaben, die einen praktischen Nutzen haben.
77	Bestimmte mathematische Kenntnisse sind für ausgewählte Berufe wichtig.

Hinweis innerhalb dieser Arbeit: Der Leser kann den Fragebogen auch selbst ausfüllen. Diese Ergebnisse sind zwar nur unter Vorbehalt interpretierbar. Aber sie ermöglichen eine grobe Einordnung. Dazu verfahre man wie folgt: (a) Man fülle zunächst den Fragebogen aus. (b) Dann berechne man die Skalenwerte unter folgender Interpretation: "stimmt genau" = 5, "stimmt größtenteils" = 4, "unentschieden" = 3, "stimmt nur teilweise" = 2, "stimmt gar nicht" = 1. (c) Die Faktoren ergeben sich wie folgt:

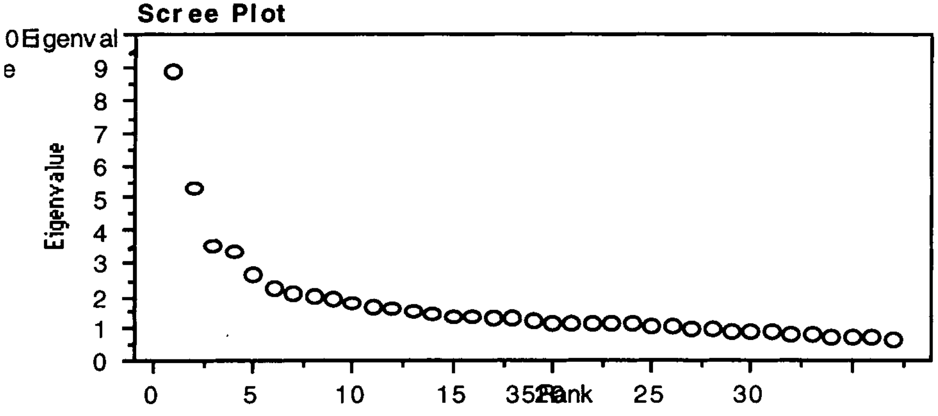
Formalismus: Man addiere die Werte in den Items Nr. 26, 28, 30, 32, 36, 38, 40, 45, 48, 50 und setze F = (Summe - 10) X 5 / 4

Schema: Addieren Sie Ihre Werte in den Items Nr. 20, 24, 29, 34, 39, 42, 44, 62 und setzen Sie S = (Summe X 10 / 8 - 10) X 5 / 4

Prozeß: Addieren Sie Ihre Werte in den Items Nr. 25, 31, 35, 37, 41, 43, 46, 49, 61 und setzen Sie P = (Summe X 10 / 9 - 10) X 5 / 4

Anwendung: Addieren Sie Ihre Werte in den Items Nr. 66, 68, 69, 71, 72, 74, 76. Subtrahieren Sie Ihre Werte in den Items Nr. 67, 70, 75. Man setze A = (Ergebnis + 8) X 5 / 4

Anhang 2: Scree-Plot



Anhang 3: Faktorladungen der orthogonalen 4-Faktoren-Lösung

Item -Nr.	Fak- tor 1	Fak- tor 2	Fak- tor 3	Fak- tor 4	Kom m.	Item -Nr.	Fak- tor 1	Fak- tor 2	Fak- tor 3	Fak- tor 4	Kom m.
1	-0,47	,150	-,029	-,066	,030	41	-,144	,028	,419	,036	#,198
2	,119	-,098	,002	,210	,068	42	,364	,085	-,022	,417	#,314
3	,486	,208	-,147	,139	,320	43	-,153	-,005	,603	-,016	#,388
4	,161	-,157	-,186	,241	,143	44	-,020	,123	-,014	,642	#,428
5	-,147	-,170	,098	,199	,100	45	,469	-,067	-,096	,324	#,339
6	,032	,083	,153	-,245	,091	46	,032	,066	,404	-,007	#,168
7	,226	,152	-,065	,300	,169	47	,076	,267	,302	,144	,189
8	,448	,181	-,172	,166	,291	48	,543	-,010	-,144	,143	#,336
9	,127	,014	,069	-,027	,022	49	-,129	,008	,393	,002	#,171
10	-,059	-,189	-,003	,189	,075	50	,650	,044	,000	,007	#,424
11	,181	-,005	-,086	,041	,042	51	,292	-,089	-,058	,158	,122
12	,400	,212	,123	,073	,225	52	-,066	-,053	,502	-,164	,286
13	,157	,023	-,032	,212	,071	53	,318	,199	-,060	,285	,225
14	,169	-,019	-,129	,211	,090	54	-,097	,214	,468	-,111	,287
15	,093	-,149	,220	-,077	,085	55	,116	,019	-,419	,285	,270
16	,188	-,083	-,251	,326	,212	56	-,307	-,061	,299	,054	,190
17	,475	,100	-,077	,151	,264	57	,152	-,020	-,047	,126	,042
18	,017	-,058	-,145	,144	,045	58	-,061	-,034	,450	-,171	,237
19	-,045	,014	,298	-,157	,116	59	-,116	-,096	,286	-,236	,160
20	,161	,026	,062	,399	#,189	60	,345	,104	,012	,133	,148
21	,156	,008	-,163	,295	,138	61	-,189	-,041	,454	,063	#,248
24	,116	-,025	-,139	,600	#,393	62	,110	-,060	-,179	,513	#,311
25	,004	,087	,407	-,119	#,187	63	-,204	-,088	,310	-,003	,145

26	,583	,048	,019	,048	#,345
27	,135	-,038	,242	-,035	,079
28	,678	-,073	-,146	,017	#,487
29	,214	,068	-,178	,376	#,224
30	,699	-,072	-,199	,074	#,539
31	-,028	-,089	,570	-,311	#,431
32	,614	-,023	-,105	-,058	#,392
33	-,025	,033	,214	,325	,153
34	,285	,052	-,069	,468	#,308
35	-,024	,063	,413	,091	#,184
36	,530	,087	,005	,189	#,324
37	,102	,086	,414	-,113	#,202
38	,597	,056	,031	,082	#,367
39	,188	,058	-,032	,482	#,272
40	,527	,018	-,198	,387	#,468
64	-,072	-,199	-,125	,380	,204
65	,239	,339	,201	,003	,213
66	,143	,600	,041	,033	#,384
67	-,107	-,596	-,065	,198	#,410
68	,081	,695	-,087	,112	#,510
69	,129	,591	,118	-,146	#,401
70	,009	-,638	,063	,089	#,419
71	,078	,580	-,037	,105	#,355
72	,021	,659	,022	,078	#,441
73	,018	-,154	-,056	,543	,322
74	,088	,444	,151	-,082	#,235
75	,008	-,438	,082	,080	#,205
76	-,075	,512	,132	,242	#,344
77	,162	,098	,091	,073	,050

Die Kommunalitäten der verwendeten Items (#) liegen in der 9-Faktoren-Lösung zwischen 30 % und 50 %, in der 4-Faktoren-Lösung zwischen 25 % und 50 %, in beiden Fällen bei einigen Items darüber oder darunter. Die vier Faktoren 'erklären' bei einem ausgewählten Item also nur zwischen 25 % und 50 % der Varianz. Der restliche Varianzanteil entfällt auf die Fehlervarianz und den spezifischen Faktor (spezifische Varianz).

Damit leisten die vier Faktoren - wie bereits in der Faktorenanalyse bemerkt wurde - einen Beitrag zur Stukturierung der Itemmenge. Daß die Erklärungsleistung des 4-Faktoren-Modells nicht sehr hoch ist, hat zwei Gründe. Erstens ist die Fehlervarianz hoch. Die Reliabilitäten der Skalen liegen etwa bei .7, d.h. die Fehlervarianz in einer Skala mit 8 - 10 Items liegt bei 50 %, also bei einem einzelnen Item noch höher. Die Fehlervarianz kann aber den Rest nicht vollends aufklären.

Adresse der Autoren:

Dr. Stefan Grigutsch, Rheinweg 192, 41812 Erkelenz

Prof. Dr. Ulrich Raatz, FB Erziehungswissenschaften, Universität Duisburg, 47048 Duisburg

Prof. Dr. Günter Törner, FB Mathematik, Universität Duisburg, 47048 Duisburg