Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 25 (2), pp. 141—146 (1968)

ОБ ЭФФЕКТАХ ТОЖДЕСТВЕННОСТИ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

И. БОРБЕЙ* и Э. И. ДОЛИНСКИЙ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА, МОСКВА, СССР

(Поступило 10. VIII. 1967)

Выведены простые формулы позволяющие учитывать обменные эффекты в амплитуде ядерной реакции $T(a, b)F$ в общем случае.

1. Хотя рассмотрению обменных эффектов в ядерных реакциях посвящено большое число работ (см. [1, 2]) и содержащиеся в них ссылки), конкретные результаты, полученные в этих работах, применимы лишь в случае наиболее простых реакций (p, p'), (n, p) и (d, p).** Ни в одной из работ нет простых формул, позволяющих учитывать обменные эффекты в амплитуде ядерной реакции $T(a, b)\,F$ в общем случае. В настоящей работе, исходя из результатов Экштейна [3], мы вывели такие формулы и в качестве примера применили их к реакции (d, α).

2. Согласно Экштейну [3], амплитуда реакции $i \to f$ M_{fi}, связанная с матричным элементом S-матрицы соотношением ($\hbar = c = 1$)

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\,(2\pi)^4\,\delta\left(\sum_k p_k^{(i)} - \sum_l p_l^{(f)}\right) M_{fi}\,, \tag{1}$$

дается формулами

$$M_{fi} = \langle (H - E)\,\hat{\Phi}_f \,|\, \hat{\Psi}_i^{(+)} \rangle \tag{2a}$$

$$= \langle \hat{\Psi}_f^{(-)} \,|\, (H - E)\,\hat{\Phi}_i \rangle\,, \tag{2b}$$

где H — полный гамильтониан системы, E — полная энергия, $\hat{\Phi}_i$ и $\hat{\Phi}_f$ — полностью антисимметричные по переменным тождественных частиц норми-

* Постоянное место работы: Центральный Институт Физических Исследований АН ВНР.

** Заметим, что выражение (А.32) для амплитуды реакции, приведенное в книге Тобокмана [2], справедливо лишь в том случае, когда внутренние волновые функции ядер представляются в виде произведения одночастичных ортонормированных волновых функций. В общем случае оно отличается от приведенных ниже выражений (12) на постоянный множитель, связанный с нормировкой волновых функций.

рованные «базисные» волновые функции «групп каналов» i и f (определение «групп каналов» см. в [3]),

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_i^{(+)} &= [\,1 + (E - H + i\eta)^{-1}(H - E)\,]\hat{\Phi}_i\,, \\ \hat{\Psi}_f^{(-)} &= [\,1 + (E - H - i\eta)^{-1}(H - E)]\,\hat{\Phi}_f\,, \\ \eta &\to +0. \end{aligned} \tag{3}$$

Дифференциальное сечение реакции $i \to f$ с двумя частицами в начальном и конечном состояниях выражается через M_{fi} с помощью формулы

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_i m_f}{4\pi^2} \frac{k_f}{k_i} |M_{fi}|^2\,,$$

где $m_i(m_f)$ и $k_i(k_f)$ — приведенная масса и импульс относительного движения в начальном (конечном) состоянии.

Разобьем гамильтониан H обычным образом на две части $H = H_i + V_i = H_f + V_f$ и введем функции Φ_i и Φ_f, удовлетворяющие уравнениям

$$(H_i - E)\,\Phi_i = 0, \quad (H_f - E)\,\Phi_f = 0, \tag{4}$$

и представляющие собой произведение нормированных антисимметризованных внутренних волновых функций ядер в начальном и конечном состояниях, соответственно, и плоских волн с единичной амплитудой, описывающих их относительное движение.

Наша цель состоит в построении из перестановочных операторов P_n операторов P_i и P_f таких, что

$$\hat{\Phi}_i = C_i P_i \Phi_i\,, \quad \hat{\Phi}_f = C_f P_f \Phi_f \tag{5}$$

(C_i и C_f — нормировочные коэффициенты). Используя эти соотношения мы преобразуем формулы (2) к виду, удобному для практических расчетов.

3. Рассмотрим реакции

$$a + T \to b + F.$$

Для определенности будем работать в формализме изоспина, то-есть будем считать, что имеется только один сорт частиц. Предположим, что ядра a и T состоят из a и $(A - a)$ нуклонов и обозначим через i совокупность пространственных, спиновой и изоспиновой координат i-го нуклона. Предположим, далее, что внутренние волновые функции ядер a и T зависят от совокупностей переменных $(1, 2, \ldots, a)$ и $(a + 1,\; a + 2, \ldots, A)$, соответственно.

Оператор P_{aT}, производящий антисимметризацию по переменным всех нуклонов $(1, 2, \ldots, A)$ имеет вид (см., например [4], гл. 6)

$$P_{a+T} = \sum_n \sigma_n P_n\,, \tag{6}$$

где P_n — оператор перестановки координат нуклонов, $\sigma_n = 1(-1)$ для четной (нечетной) перестановки и суммирование идет по всем $A!$ перестановкам координат $(1, 2, \ldots, A)$. Определим аналогично операторы P_a и P_T, производящие антисимметризацию по переменным $(1, 2, \ldots, a)$ и $(a+1, a+2), \ldots, A)$ соответственно. Тогда оператор P_{a+T} может быть представлен в виде

$$P_{a+T} = P_{aT}\cdot P_a \cdot P_T\,, \tag{7}$$

где

$$P_{aT} = 1 - \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha} + \sum_{\substack{i<j\\ \alpha<\beta}} P_{i\alpha}P_{j\beta} - \sum_{\substack{i<j<k\\ \alpha<\beta<\gamma}} P_{i\alpha}P_{j\beta}P_{k\gamma} + \ldots\,. \tag{8}$$

$P_{i\alpha}$ — оператор транспозиции, переставляющий переменные пары нуклонов i и α, причем

$$i, j, k = 1, 2, \ldots, a\,; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma = a+1,\ \ a+2, \ldots,\ A,$$

то-есть оператор P_{aT} осуществляет антисимметризацию по переменным нуклонов, входящих в состав разных ядер a и T. В справедливости соотношений (7), (8) легко убедиться путем проверки, что в произведении $P_{aT}\cdot P_a \cdot P_T$ не встречаются дважды одна и та же перестановка и общее число членов равно $A!$ Заметим, что в (7) порядок операторов несущественен, то-есть

$$P_{a+T} = P_{aT}\cdot P_a\cdot P_T = P_a\cdot P_T\cdot P_{aT}\,. \tag{7'}$$

В силу эрмитовости операторов P_n оператор P_{aT} также эрмитов: $P^{+}_{aT} = P_{aT}$.

Вводя операторы P_b и P_F, производящие антисимметризацию по переменным $(1, 2, \ldots, b)$ и $(b+1, b+2, \ldots, A)$ нуклонов ядер b и F соответственно, можем представить оператор P_{a+T} в виде

$$P_{a+T} = P_{bF}\cdot P_b\cdot P_F\,, \tag{7''}$$

где оператор P_{bF} определяется соотношением, аналогичным (8):

$$P_{bF} = 1 - \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha} + \sum_{\substack{i<j\\ \alpha<\beta}} P_{i\alpha}P_{j\beta} - \ldots; \quad \begin{matrix} i,\ j, \ldots = 1, 2, \ldots, b\,; \\ \alpha,\ \beta, \ldots = b+1, b+2, \ldots, A. \end{matrix} \tag{8'}$$

Формулы (8) и (8′) определяют одну из возможных форм искомых операторов P_i и P_f в (5) для реакций с двумя частицами в начальном и конечном состояниях. Используя вместо плоских волн относительного движения в волновых функциях Φ_i и Φ_f нормированные на единицу квазимонохроматические пакеты, нетрудно показать, что правильно нормированные полностью антисимметричные волновые функции $\hat{\Phi}_i$ и $\hat{\Phi}_f$ имеют вид

$$\hat{\Phi}_i = N_{aT}^{-1} \quad P_{aT}\Phi_i, \qquad \hat{\Phi}_f = N_{bF}^{-1/2} P_{bF}\cdot\Phi_f, \tag{9}$$

где

$$N_{aT} = \binom{A}{a}, \qquad N_{bF} = \binom{A}{b}. \tag{10}$$

Заметим, что иногда при выполнении антисимметризации удобно пользоваться формулой

$$P_{aT}\cdot P_a = \left(1 - \sum_{\alpha=2}^{A} P_{1\alpha}\right)\left(1 - \sum_{\beta=3}^{A} P_{2\beta}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \sum_{\omega=a+1}^{A} P_{a\omega}\right), \tag{11}$$

которая получается из сравнения соотношения (7) с соотношением, полученным в результате a-кратного тождества

$$P_{a+T} = \left(1 - \sum_{\alpha=2}^{A} P_{1\alpha}\right) P'_{a+T},$$

где P_{a+T} и P'_{a+T} — антисимметризаторы по переменным $(1, 2, \ldots, A)$ и $(2, 3, \ldots, A)$, соответственно.

4. Используя соотношения (3), (9), (10) и учитывая, что гамильтониан H симметричен относительно перестановок координат частиц, из (2) получаем четыре эквивалентных выражения для матричного элемента реакции $T(a, b)F$ с учетом обменных эффектов:

$$M_{fi} = (N_f/N_i)^{1/2}\langle\Phi_f|V_f P_i|\Psi_i^{(+)}\rangle \tag{12a}$$

$$= (N_i/N_f)^{1/2}\langle\Phi_f|V_f P_f|\Psi_i^{(+)}\rangle \tag{12b}$$

$$= (N_f/N_i)^{1/2}\langle\Psi_i^{(-)}|P_i V_i|\Phi_i\rangle \tag{12c}$$

$$= (N_i/N_f)^{1/2}\langle\Psi_f^{(-)}|P_f V_i|\Phi_i\rangle, \tag{12d}$$

где

$$N_i = N_{aT}, \quad N_f = N_{bF}, \quad P_i = P_{aT}, \quad P_f = P_{bF}$$

и волновые функции $\Psi_i^{(+)}$ и $\Psi_f^{(-)}$ даются выражениями

$$\Psi_i^{(+)} = \left[1 + (E - H + i\eta)^{-1} V_i\right]\Phi_i,$$

$$\Psi_f^{(-)} = \left[1 + (E - H - i\eta)^{-1} V_f\right]\Phi_f. \tag{13}$$

Подставляя в (12) конкретные выражения (8) и (8′) для операторов P_i и P_f и собирая одинаковые члены, возникающие благодаря антисимметричности функций Φ_i и $\Psi_i^{(+)}$ (Φ_f и $\Psi_f^{(-)}$) повнутренним координатам ядер a и T (b и F), можно получить удобные формулы для практических расчетов. Предположим, что $a \leqslant b$. Тогда оператор $P_i = P_{aT}$ в матричном элементе (12a) можно заменить на оператор

$$P_i \to \binom{A-b}{0}\binom{b}{a-0} - \binom{A-b}{1}\binom{b}{a-1} P_{1A} + \binom{A-b}{2}\binom{b}{a-2} P_{1A} P_{2(A-1)} -$$
$$- \ldots + (-1)^n \binom{A-b}{n}\binom{b}{a-n} P_{1A} P_{2(A-1)} \cdot \ldots \cdot P_{n(A-n+1)}, \tag{14}$$
$$n = \min(a,\ A-b),\quad a \le b,$$

то-есть

$$M_{fi} = \left[\binom{A}{b} \Big/ \binom{A}{a}\right]^{1/2} \Big\langle \Phi_f(1, 2, \ldots, a, \ldots, b \,|\, b+1, \ldots, A) | \cdot$$
$$\cdot V_f(1, 2, \ldots, b \,|\, b+1, \ldots, A) \left[\binom{A-b}{0}\binom{b}{a-0} - \binom{A-b}{1}\binom{b}{a-1} P_{1A} + \right.$$
$$\left. + \ldots + (-1)^n \binom{A-b}{n}\binom{b}{a-n} P_{1A} P_{2(A-1)} \cdot \ldots \cdot P_{n(A-n+1)} \right] \cdot \tag{15}$$
$$\cdot |\Psi_i^{(+)}(1, 2, \ldots, a \,|\, a+1, \ldots, b, \ldots, A) \Big\rangle .$$

Здесь волновые функции антисимметричны, а потенциал V_f симметричен по отдельным совокупностям переменных, разделенным вертикальной чертой. Аналогичные выражения можно написать для матричных элементов (12*b*), (12*c*) и (12*d*).

Если мы работаем не в формализме изоспина, то-есть имеется два сорта частиц, то полученные выше формулы надо применять отдельно для протонов и отдельно для нейтронов.

5. В качестве примера рассмотрим реакцию $T(d, \alpha) F$.

а) Формализм изоспина. В этом случае $a = 2$, $b = 4$ и с помощью формулы (15) получаем

$$M_{fi} = \left[\frac{(A-2)(A-3)}{3 \cdot 4}\right]^{1/2} \Big\langle \Phi_f(1, 2, 3, 4 \,|\, 5, \ldots, A) \Big| V_f(1, 2, 3, 4 \,|\, 5, \ldots, A) \cdot$$
$$\cdot \left[6 - 4(A-4) P_{1A} + \frac{1}{2}(A-4)(A-5) P_{1A} P_{2(A-1)}\right] \Big| \cdot \tag{16}$$
$$\cdot \Psi_i^{(+)}(1, 2 \,|\, 3, 4, 5, \ldots, A) \Big\rangle .$$

в) В случае антисимметризации отдельно по протонам и отдельно по нейтронам имеем $a_p = 1$, $b_p = 2$ и $a_n = 1$, $b_n = 2$, соответственно. В этом случае с помощью формулы (15) получаем

$$M_{fi} = \frac{1}{2}\left[(N-1)(Z-1)\right]^{1/2} \langle \Phi_f(n_1, n_2 | p_1, p_2 | n_3, \ldots, n_N | p_3, \ldots, p_z)| \cdot$$
$$\cdot V_f(n_1, n_2 | p_1, p_2 | n_3, \ldots, n_N | p_3, \ldots, p_Z)\left[2-(N-2)P_{1N}^{(n)}\right] \cdot \tag{17}$$
$$\cdot \left[2-(Z-2)P_{1Z}^{(p)}\right] | \Psi_i^{(+)}(n_1 | p_1 | n_2, n_3, \ldots, n_N | p_2, p_3, \ldots, p_Z)\rangle ,$$

где $n_i(p_i)$ — совокупность пространственных и спиновой координат i-го нейтрона (протона), $N(Z)$ — полное число нейтронов (протонов) в системе $d+T$, операторы траспозиций $P_{1N}^{(n)}$ и $P_{1Z}^{(p)}$ переставляют координаты нейтронов и протонов, соответственно.

Авторы выражают благодарность Л. Д. Блохинцеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. S. Levin, Nucl. Phys., **46**, 275, 1963; S. Edwards, Nucl. Phys., **47**, 652, 1963; M. Bolsterli, Phys. Rev., **131**, 883, 1963.
2. W. Tobocman, Theory of direct nuclear reactions, Oxford Univ. Press, 1961.
3. H. Ekstein, Phys. Rev., **101**, 880, 1956.
4. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, Москва, 1963.

ON THE EFFECT OF PARTICLE EXCHANGE IN NUCLEAR REACTIONS

By

I. BORBÉLY and E. I. DOLINSKY

Starting from the general formulas of Ekstein which take into account the effect of antisymmetrization, practically useful expressions are given in this paper for the amplitudes of nuclear reactions containing two nuclei both in the initial and final states.