

DIE STATISTISCHE THEORIE DES ATOMKERNS

I. Teil

Von
P. GOMBÁS

PHYSIKALISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT FÜR TECHNISCHE WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

(Eingegangen : 2. Februar, 1952)

INHALTSÜBERSICHT

- § 1. Einleitung und Zusammenfassung
 - § 2. Grundlagen der statistischen Behandlungsweise eines freien Nucleonengases
 - § 3. Die kinetische Energie des Nucleonengases
 - § 4. Allgemeine Grundlagen der Berechnung der Wechselwirkung von Nucleonen
 - § 5. Wechselwirkungsenergie eines Nucleonengases
 - § 6. Absättigungscharakter der Austauschkräfte
 - § 7. Das statistische Modell des Atomkerns
 - § 8. Der statistische Kern mit konstanter Nucleonendichte
 - § 9. Berechnung der Dichteverteilung im Kern und der Energie des Kerns mit dem Ritzschen Verfahren
 - § 10. Resultate für die Kernenergien und die Dichteverteilungen im Kern
 - § 11. Vergleich mit der wellenmechanischen Berechnung des Deuterons
 - § 12. Diskussion der Resultate und der möglichen Erweiterungen
- Mathematischer Anhang

§ 1. Einleitung und Zusammenfassung

Die Anwendung statistischer Ansätze zur Erklärung der Eigenschaften und Gesetzmässigkeiten der Atomkerne reicht ziemlich weit zurück. Als erster versuchte *Majorana*¹ die statistische Theorie auf die Atomkerne anzuwenden, wobei aber nur einige qualitative — allerdings wesentliche — Resultate erzielt wurden. Die wichtigsten Grundlagen zur Weiterentwicklung der statistischen Kerntheorie wurden einerseits von *Heisenberg*² durch die explizite Berechnung der Austauschenergie für verschiedene Anziehungspotentiale und andererseits von *Weizsäcker*³ durch die Einführung der kinetischen Energiekorrektur, der sogenannten Inhomogenitätskorrektur gegeben. Die weiteren Berechnungen⁴ erfolgten dann auf diesen Grundlagen, wobei als Anziehungsenergie zwischen zwei Nucleonen meistens die Ansätze von der Form $-\gamma e^{-r_{ij}/r_0}$ und $-\gamma e^{-(r_{ij}/r_0)^2}$ zugrunde gelegt wurden, wo r_{ij} die gegenseitige Entfernung der beiden Nucleonen ist und γ sowie r_0 Konstante bezeichnen. Mit Ausnahme der zitierten Arbeit von *Flügge* hat man diese Berechnungen mit sehr vereinfachenden Annahmen

durchgeführt, indem man für die Dichteverteilung der Nucleonen einen stark vereinfachten Ausdruck benutzte, oder aber die Dichte bei Vernachlässigung der Inhomogenitätskorrektur als vollkommen konstant ansetzte. In dieser Beziehung bedeutet die schon erwähnte Arbeit von Flügge einen Fortschritt, indem in dieser für die Dichteverteilung keinerlei vereinfachende Annahmen gemacht wurden, sondern der Dichteverlauf und die Kernenergie für die leichten Kerne bis Si^{28} mit dem Ritzschen Verfahren ermittelt wurden. Allen diesen Berechnungen ist gemein, dass man mit diesen die Energie der Kerne nur in der Weise darstellen kann, dass sich je nach der Wahl der frei verfügbaren Parameter entweder für die leichten, oder für die schweren Kerne merkliche Abweichungen vom empirischen Befund ergeben. So ergibt sich z. B. bei Flügge, wo die Wahl der frei verfügbaren Parameter auf die ganz leichten Kerne abgestimmt ist, schon beim schwersten von Flügge behandelten Kern, Si^{28} , eine Abweichung der Energie von der empirischen um 12%. Eine Ausnahme bilden natürlich diejenigen Berechnungen, bei denen das Ziel die Auffindung einer mit der Erfahrung möglichst gut übereinstimmenden Formel ist, die drei, vier oder mehr empirische Parameter enthält; mit einer solchen Formel kann man natürlich die empirischen Resultate von den leichtesten bis zu den schwersten Kernen in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Erfahrung darstellen⁵. Dies ist aber mehr eine formelmässige Beschreibung des empirischen Befundes, nicht aber eine Zurückführung der empirischen Tatsachen auf allgemeine Grundgesetze, demzufolge diese Berechnungen von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet von geringerem Interesse sind, womit natürlich der grosse heuristische Wert dieser Verfahren nicht in Abrede gestellt werden soll.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bindungsenergie der Kerne, sowie die Lage der stabilen Isobare auf Grund der statistischen Theorie und der Annahme eines skalaren Yukawaschen Anziehungspotentials zwischen den Nucleonen aus dem allgemeinen Prinzip der Minimumforderung der Energie mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens ohne jegliche willkürlichen Annahmen zu berechnen. Hierbei wird zwischen Neutronen-Protonen, Neutronen-Neutronen und Protonen-Protonen der nur von der gegenseitigen Entfernung der Teilchen abhängige Anteil der Wechselwirkungsenergie als gleich vorausgesetzt. Im Ausdruck der Wechselwirkungsenergie zweier Nucleonen wird nur eine Konstante als frei verfügbarer Parameter betrachtet, der den einzigen frei verfügbaren Parameter in der ganzen Theorie darstellt. Es wird gezeigt, dass man durch eine entsprechende Wahl dieses einen Parameters für die Bindungsenergie der Kerne Resultate erhält, die von den leichtesten Kernen bis zu den schwersten sehr gut mit der Erfahrung übereinstimmen. Die Abweichungen von den empirischen Werten liegen abgesehen von den ganz leichten Kernen innerhalb 7%; für die sehr leichten Kerne, deren Bindungsenergie als Funktion der Teilchenzahl keinen monotonen Verlauf zeigt, kann natürlich die statistische Theorie nur einen Mittelwert der stark schwankenden empirischen Werte liefern, was

durch die statistische Theorie auch tatsächlich geleistet wird. Die Lage der stabilen Isobare wird ebenfalls in sehr befriedigender Weise dargestellt.

Dass die hier entwickelte statistische Theorie, deren Anwendungsgebiet ihrem Charakter nach doch in erster Linie die Kerne mit grosser Teilchenzahl ist, auch für leichte Kerne so gute Resultate liefert, ist dem Umstand zuzuschreiben, dass wir zwei Korrekturen einföhrten, und zwar brachten wir eine Korrektur an der Austausch-Wechselwirkungsenergie der Nucleonen an, wodurch die aus dem Selbstaustausch der Teilchen resultierende Energie ausgeschaltet wird, weiterhin haben wir auch für die kinetische Energie eine Korrektur eingeföhrt, wodurch die statistische kinetische Energie für den Kern He^4 und für leichtere Kerne in den exakten wellenmechanischen Ausdruck übergeht. Durch diese Korrekturen wird erreicht, dass der statistische Ausdruck der Gesamtenergie der leichten Kerne den wellenmechanischen gut approximiert und einen guten Mittelwert der empirischen Resultate liefert.

Die statistische Theorie des Atomkerns gründet sich im wesentlichen auf das Verhalten eines Nucleonengases am absoluten Nullpunkt der Temperatur und auf die Wechselwirkung der Nucleonen. Wir befassen uns daher im folgenden zunächst mit den allgemeinen Grundlagen der statistischen Behandlungsweise eines freien Nucleonengases und im Anschluss hieran mit der kinetischen Energie eines freien Nucleonengases. Danach folgen die allgemeinen Grundlagen der Wechselwirkung von Nucleonen und die statistische Berechnung der Wechselwirkungsenergien. Auf diesen Grundlagen wird dann das statistische Kernmodell mit Hilfe des Variationsverfahrens entwickelt, und die Energie sowie die Dichteverteilung der Nucleonen von den leichtesten bis zu den schwersten Kernen, sowie die Energie einiger Isobare berechnet.

§ 2. Grundlagen der statistischen Behandlungsweise eines freien Nucleonengases

Im statistischen Modell des Atomkerns werden die Nucleonen als ein Nucleonengas am absoluten Nullpunkt der Temperatur betrachtet und statistisch behandelt. Die statistische Theorie eines Neutronen- oder Protonengases gründet sich auf die Statistik von Fermi und Dirac, die auf der Nichtunterscheidbarkeit der Teilchen und auf dem Pauli-Prinzip beruht. Das Pauli-Prinzip besagt bekanntlich, dass in einem vollständig gequantelten System jeder Quantenzustand höchstens von einem Teilchen besetzt werden kann. Der Quantenzustand ist hierbei durch den Zustand der Bahnbewegung und das Vorzeichen des Spins definiert. Die Brücke zwischen Quantentheorie und Statistik wird durch den bekannten Satz gegeben, dass auf das Volumen h^3 des Phasenraumes bei Berücksichtigung des Spins 2 Neutronen-Quantenzustände mit antiparallelem Spin und 2 Protonen-Quantenzustände ebenfalls mit antiparallelem Spin entfallen ; wobei h die Planksche Konstante bezeichnet. Eine Zelle vom Volumen

h^3 des Phasenraumes kann also höchstens durch die Bildpunkte von 2 Neutronen und 2 Protonen besetzt werden.

Wir befassen uns im folgenden mit einem freien Nucleonengas von Q_n Neutronen und Q_p Protonen, die sich im Volumen Ω befinden, von dessen Wänden wir annehmen, dass sie für Nucleonen undurchlässig sind. Das Nucleonengas betrachten wir, wie gesagt, als frei, d. h. wir nehmen an, dass in Ω ein konstantes Potential herrscht, das wir gleich 0 setzen können. Wir können uns hier auf sehr tiefe Temperaturen, d. h. auf den Fall beschränken, dass die Teilchen die möglichst tiefsten Energieniveaus besetzen. Bei sehr tiefen Temperaturen entstehen grosse Vereinfachungen, da in diesem Fall die Fermi-Diracsche Statistik nur durch die Bedingung zur Anwendung gelangt, dass eine Elementarzelle vom Volumen h^3 höchstens durch die Bildpunkte zweier Neutronen und zweier Protonen besetzt werden kann.

Die energetisch tiefsten Energieniveaus können wir folgendermassen beschreiben. Nach unseren Annahmen ist der Raum, in dem sich die Nucleonen befinden, potentialfrei, die Energie eines Nucleons ist daher eine rein kinetische, für die sich

$$u = \frac{p^2}{2M} \quad (1)$$

ergibt, wo p den Betrag des Impulses und M die Masse des Nucleons bezeichnet; M kann hier für Neutronen und Protonen als gleich gross angenommen und mit dem Mittelwert der Neutronen- und Protonenmasse gleichgesetzt werden. u ist also eine Funktion von p und hängt vom Ort nicht ab. Man kann sich daher auf den Impulsraum beschränken.

Wir befassen uns zunächst mit den Neutronen, für Protonen verläuft dann alles ganz analog. Wegen der Kräftefreiheit des Raumes sind alle Bewegungsrichtungen der Neutronen gleichberechtigt; da ausserdem die Energie der Neutronen nur vom Betrag p des Impulses abhängt, von der Impulsrichtung aber unabhängig ist, sind die energetisch tiefsten Quantenzustände in einer Kugel des Impulsraumes enthalten, deren Zentrum der Origo des Impulsraumes ist und deren Radius $p_{\mu n}$ den Betrag des maximalen Impulses der Neutronen darstellt. Jeder dieser energetisch tiefsten Quantenzustände ist am absoluten Nullpunkt der Temperatur maximal mit einem Neutron besetzt, alle Quantenzustände ausserhalb der Kugel sind leer.

Die Bestimmung von $p_{\mu n}$ kann folgendermassen geschehen. Das Volumen der Impulskugel ist $\frac{4\pi p_{\mu n}^3}{3}$. Den Neutronen im Volumen Ω entspricht also das Phasenraumvolumen $\Omega \frac{4\pi p_{\mu n}^3}{3}$. Die Anzahl der Quantenzustände erhält man durch Division mit $h^3/2$. Da jeder dieser Quantenzustände 1 Neutron enthält, folgt

$$2 \frac{4\pi p_{\mu n}^3 \Omega}{3h^3} = Q_n. \quad (2)$$

Hieraus ergibt sich für $p_{\mu n}$

$$p_{\mu n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \varrho_n^{1/3}, \quad (3)$$

wo

$$\varrho_n = \frac{Q_n}{\Omega} \quad (4)$$

die Dichte des Neutronengases bezeichnet.

Für Protonen gilt alles in ganz entsprechender Weise. Wenn wir den Betrag des maximalen Impulses der Protonen mit $p_{\mu p}$ bezeichnen, so besteht der Zusammenhang

$$p_{\mu p} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h \varrho_p^{1/3}, \quad (5)$$

wo

$$\varrho_p = \frac{Q_p}{\Omega} \quad (6)$$

die Dichte des Protonengases bedeutet.

§ 3. Die kinetische Energie des Nucleonengases

Wir gehen nun zur Berechnung der kinetischen Energie eines Nucleonengases über und befassen uns zunächst mit dem schon im vorangehenden Paragraphen beschriebenen freien Nucleonengas, das sich im Volumen Ω befindet und aus Q_n Neutronen und Q_p Protonen besteht. Wir ziehen zunächst das Neutronengas in Betracht. Solange man die Neutronen als vollkommen frei betrachten kann, ist die kinetische Energie des Neutronengases U_K^n die sogenannte Fermische kinetische Energie, die man durch den Ausdruck

$$U_K^n = \int u \, dn \quad (7)$$

darstellen kann⁶, wo wir u als eine Funktion von p auffassen und dementsprechend dn die Anzahl der Neutronen-Quantenzustände bedeutet, denen ein Impulsbetrag zwischen p und $p + dp$ entspricht; die Integration ist auf alle mit Neutronen besetzten Quantenzustände auszudehnen. Mit Rücksicht auf (1) und den Zusammenhang

$$dn = \frac{8\pi\Omega}{h^3} p^2 dp \quad (8)$$

ergibt sich für die Fermische kinetische Energie der Neutronen

$$U_K^n = \frac{4\pi\Omega}{Mh^3} \int_0^{p_{\mu n}} p^4 dp = \frac{4\pi\Omega}{5Mh^3} p_{\mu n}^5. \quad (9)$$

Nach Einsetzen des Ausdruckes für $p_{\mu n}$ aus (3) erhält man

$$U_K^n = \kappa_K \varrho_n^{5/3} \Omega, \quad (10)$$

wo κ_K die Konstante

$$\kappa_K = \frac{3}{40} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{M} \quad (11)$$

bezeichnet.

Für das Protonengas gilt all' dies in ganz analoger Weise, dementsprechend erhält man für die Fermische kinetische Energie der Protonen den Ausdruck

$$U_K^p = \kappa_K \varrho_p^{5/3} \Omega. \quad (12)$$

Die Fermische kinetische Energie des gesamten Nucleonengases wird also

$$U = U_K^n + U_K^p = \kappa_K (\varrho_n^{5/3} + \varrho_p^{5/3}) \Omega. \quad (13)$$

All' dies gilt für ein gänzlich freies Nucleonengas, d. h. für ein Nucleonengas mit konstanter Dichteverteilung. Es erhebt sich nun zunächst die Frage, wie sich die Fermische kinetische Energie für ein nicht freies Nucleonengas gestaltet? Zur Herleitung dieses Ausdruckes unterteilen wir das Volumen des Nucleonengases mit einem System von Scheidewänden in Teilvolumina in der Weise, dass sich in jedem Volumenelement dv noch viele Neutronen und Protonen befinden, und in den Volumenelementen das Potential praktisch konstant sei. Man kann dann die Nucleonen in den einzelnen Volumenelementen als ein freies Nucleonengas betrachten. Wenn wir die Neutronen- und Protonendichte in dv mit ϱ_n bzw. ϱ_p bezeichnen, so ergibt sich nach (10) und (12) für die Fermische kinetische Energie des Neutron- und Protonengases in dv der Ausdruck $\kappa_K \varrho_n^{5/3} dv$, bzw. $\kappa_K \varrho_p^{5/3} dv$. Die Fermische kinetische Energie aller Neutronen bzw. aller Protonen erhält man durch Integration dieser Ausdrücke über das ganze Volumen. Es wird also

$$U_K^n = \kappa_K \int \varrho_n^{5/3} dv, \quad U_K^p = \kappa_K \int \varrho_p^{5/3} dv. \quad (14)$$

Für die Fermische kinetische Energie des gesamten Nucleonengases folgt also der Ausdruck

$$U_K = U_K^n + U_K^p = \kappa_K \int (\varrho_n^{5/3} + \varrho_p^{5/3}) dv. \quad (15)$$

Für ein gänzlich freies Nucleonengas, d. h. im Fall konstanter Dichteverteilungen gehen natürlich diese Ausdrücke in die entsprechenden Ausdrücke (10), (12) und (13) über.

Der Ausdruck (15) gibt nur dann die volle kinetische Energie des Nucleonengases, wenn die Nucleonen in den Volumenelementen dv vollkommen frei sind. Wenn man die Nucleonen in den Volumenelementen dv nicht als vollkommen frei betrachten kann, dann hat man diesen Ausdruck noch mit der sogenann-

ten Weizsäckerschen Inhomogenitätskorrektur zu ergänzen. Diese wurde von *Weizsäcker* ausführlich begründet⁷, worauf wir hier aber nicht näher eingehen wollen. Statt dessen wählen wir hier einen sehr stark vereinfachten Weg zur Herleitung dieser Korrektur, der gerade wegen seiner Einfachheit das Wesentliche an der Sache sehr gut hervortreten lässt.

Wir ziehen zunächst wieder die Neutronen in Betracht. Ohne das Pauli-Prinzip, also im Falle der Bose-Statistik, würden die Neutronen im Gleichgewicht alle den energetisch möglichst tiefsten Quantenzustand besetzen. Wenn wir die Eigenfunktion dieses Zustandes mit ψ bezeichnen, so ergibt sich in diesem Fall für die Dichte ϱ_n und die Schrödingersche kinetische Energie U_J^n der Neutronen

$$\varrho_n = Q_n |\psi|^2, \quad (16)$$

$$U_J^n = Q_n \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \int |\text{grad } \psi|^2 dv. \quad (17)$$

Durch Elimination von ψ folgt

$$U_J^n = \kappa_J \int \frac{(\text{grad } \varrho_n)^2}{\varrho_n} dv, \quad (18)$$

wo κ_J die Konstante

$$\kappa_J = \frac{\hbar^2}{32\pi^2 M} \quad (19)$$

bezeichnet; für M kann man auch hier einen Mittelwert der Neutron- und Protonmasse einsetzen. U_J^n ist die Weizsäckersche Inhomogenitätskorrektur für Neutronen.

Auf ganz ähnliche Weise erhält man für die Inhomogenitätskorrektur der Protonen

$$U_J^p = \kappa_J \int \frac{(\text{grad } \varrho_p)^2}{\varrho_p} dv. \quad (20)$$

Die Inhomogenitätskorrektur des gesamten Nucleonengases wird also

$$U_J = U_J^n + U_J^p. \quad (21)$$

Wie zu sehen ist, verschwindet U_J für eine konstante Nucleonenverteilung.

Wie aus der Herleitung folgt, ist U_J die kinetische Energie eines Nucleonengases, für dessen Teilchen das Pauli-Prinzip nicht besteht. Die Berücksichtigung des Pauli-Prinzips, demzufolge nicht alle Teilchen den energetisch tiefsten Quantenzustand besetzen können, geschieht in der Weise, dass man neben U_J auch die Fermische kinetische Energie U_K in Rechnung zu stellen hat, die eine alleinige Folge des Pauli-Prinzips ist. Durch die Energie U_K werden dann die Teilchen gemäss dem Pauli-Prinzip in die energetisch höheren Quantenzustände gehoben. Hierbei wird die Annahme gemacht, dass $\text{grad } \varrho_n$ und $\text{grad } \varrho_p$

vom Impulsvektor, d. h. vom Quantenzustand unabhängig sind. All' dies zeigt sehr anschaulich die Rolle der beiden kinetischen Energieanteile.

Bei der gleichzeitigen Berücksichtigung der beiden kinetischen Energieanteile U_K und U_J begeht man jedoch einen Fehler, was man am einfachsten für den Fall von 2 Neutronen und 2 Protonen sehen kann. In diesem Fall befinden sich nämlich sowohl die beiden Neutronen, wie die beiden Protonen im energetisch tiefsten Quantenzustand, so dass der Energieanteil U_J genau die volle kinetische Energie der Teilchen darstellt, der Energieanteil U_K muss also in diesem Fall verschwinden. Dies folgt auch daraus, dass in diesem Fall das Pauli-Prinzip keinerlei Rolle spielt, da keine Teilchen in energetisch höhere Quantenzustände zu heben sind, demzufolge der durch das Pauli-Prinzip bedingte Energieanteil U_K verschwinden muss. Tatsächlich verschwindet jedoch U_K nicht. Dies liegt im Wesen der statistischen Behandlungsweise, bei welcher im Phasenraum bzw. im Impulsraum auch von einem einzelnen Teilchen ein endliches Volumen beansprucht wird, und somit die kinetische Energie der beiden Teilchen im tiefsten Quantenzustand nicht nur in U_K sondern auch in U_J enthalten ist. Hieraus ist zugleich zu sehen, dass dieser Fehler natürlich nicht nur für den Fall von 2 Neutronen und 2 Protonen, sondern auch für alle anderen Teilchenzahlen besteht. Allerdings ist er nur für kleine Teilchenzahlen bedeutend, für grosse Teilchenzahlen ist er im Verhältnis zur gesamten kinetischen Energie klein.

Es fragt sich nun, wie man diesen Fehler möglichst einfach korrigieren kann?⁸ Ein Weg hierzu besteht darin, dass man die Fermische kinetische Energie eines Teilchens im energetisch tiefsten Quantenzustand der mittleren Fermischen kinetischen Energie eines Teilchens gleichsetzt und diese für die im tiefsten Energiezustand befindlichen beiden Neutronen und Protonen in Abzug bringt. Die mittlere Fermische kinetische Energie eines Neutrons und eines Protons ist U_K^n/Q_n bzw. U_K^p/Q_p . Die Korrektur besteht also nach unseren Annahmen darin, dass man die Energie $2U_K^n/Q_n + 2U_K^p/Q_p$ von U_K in Abzug bringt, oder was dasselbe ist, in (15) U_K^n mit dem Faktor $k_n = 1 - \frac{2}{Q_n}$ und U_K^p mit dem Faktor $k_p = 1 - \frac{2}{Q_p}$ multipliziert. Die gesamte kinetische Energie unseres Nucleonengases wird also

$$U_K = k_n U_K^n + k_p U_K^p + U_J . \quad (22)$$

Die Faktoren k_n und k_p sind für $Q_n = 2$ und $Q_p = 2$ gleich Null, demzufolge in diesem Fall U_K verschwindet, die Korrektur führt also hier zum exakten Wert der kinetischen Energie. Weiterhin muss $k_n U_K^n$ auch für $Q_n = 1$ und $k_p U_K^p$ auch für $Q_p = 1$ verschwinden, was durch die Korrekturfaktoren nicht geleistet wird, man muss also die Zusatzvorschrift machen, dass der Korrekturfaktor k_n auch für $Q_n < 2$ und der Korrekturfaktor k_p auch für

$Q_p < 2$ gleich 0 zu setzen ist. Die kinetische Energie ist also dann auch in diesen Fällen mit dem Ausdruck U_j gleich, der auch in diesen Fällen tatsächlich den exakten Ausdruck der kinetischen Energie darstellt. Für grosse Teilchenzahlen wird die Korrektur ungenau, was aber unwesentlich ist, da für grosse Teilchenzahlen die Korrektur im Verhältnis zur gesamten kinetischen Energie unbedeutend wird.

§ 4. Allgemeine Grundlagen der Berechnung der Wechselwirkung von Nucleonen

Zur statistischen Berechnung der Wechselwirkungsenergie von Nucleonen ist es wesentlich, dass wir uns zunächst auf Grund der Wellenmechanik ganz allgemein mit der Berechnung der Wechselwirkung von Nucleonen befassen. Wir wollen annehmen, dass unser Nucleongas wieder aus Q_n Neutronen und Q_p Protonen besteht. Zur wellenmechanischen Beschreibung des Gesamtsystems gehen wir von der Hartree-Fock'schen Näherung aus, d. h. wir beschreiben das System durch Einteilcheneigenfunktionen, und zwar nehmen wir an, dass die Q_n Eigenfunktionen der Q_n Neutronenzustände $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{Q_n}$ und die Q_p Eigenfunktionen der Q_p Protonenzustände $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{Q_p}$ seien. Mit Rücksicht auf das Pauli-Prinzip kann man dann die Eigenfunktion des Gesamtsystems in folgender Form darstellen⁹

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{Q_n! Q_p!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(q_n^1) & \varphi_1(q_n^2) & \dots & \varphi_1(q_n^{Q_n}) \\ \varphi_2(q_n^1) & \varphi_2(q_n^2) & \dots & \varphi_2(q_n^{Q_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{Q_n}(q_n^1) & \varphi_{Q_n}(q_n^2) & \dots & \varphi_{Q_n}(q_n^{Q_n}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(q_p^1) & \psi_1(q_p^2) & \dots & \psi_1(q_p^{Q_p}) \\ \psi_2(q_p^1) & \psi_2(q_p^2) & \dots & \psi_2(q_p^{Q_p}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{Q_p}(q_p^1) & \psi_{Q_p}(q_p^2) & \dots & \psi_{Q_p}(q_p^{Q_p}) \end{vmatrix}, \quad (23)$$

wo q_n^i statt der räumlichen Koordinaten $r_n^i(x_n^i, y_n^i, z_n^i)$ und der Spinkoordinate σ_n^i des i -ten Neutrons sowie q_p^i statt der räumlichen Koordinaten $r_p^i(x_p^i, y_p^i, z_p^i)$ und der Spinkoordinate σ_p^i des i -ten Protons steht; r_n^i und r_p^i bezeichnen den Ortsvektor des i -ten Neutrons bzw. des i -ten Protons. Von den Einteilcheneigenfunktionen φ_i und ψ_i können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass sowohl die Neutronen-Eigenfunktionen φ_i unter sich, wie die Protonen-Eigenfunktionen ψ_i unter sich orthogonal sind. Wir setzen ausserdem voraus, dass sie auch normiert sind, es ist dann auch Ψ normiert.

Bei der im folgenden zu gebenden Herleitung des allgemeinen Ausdruckes der Wechselwirkungsenergie der Nucleonen sehen wir zunächst von der Coulomb'schen Wechselwirkung der Protonen ab und ziehen zunächst die Nucleonenwechselwirkung allein in Betracht. Zur Herleitung des allgemeinen Ausdruckes der Wechselwirkungsenergie der Nucleonen brauchen wir einen Ansatz für die Nucleonenwechselwirkung. Dieser ist unter Berücksichtigung der experimentellen Befunde zu wählen, dass erstens diese Wechselwirkung einen Absättigungscharakter aufweist und zweitens, dass die Kernkräfte von sehr kurzer Reich-

weite sind. Der ersten Tatsache kann man durch eine entsprechende Wahl des Mechanismus der Wechselwirkung und zwar durch Voraussetzung einer Austauschwechselwirkung zwischen den Nucleonen (man vgl. § 6) und der zweiten durch einen entsprechenden Ansatz für das Wechselwirkungspotential der Nucleonen Rechnung tragen. Für die Wechselwirkungsenergie der Nucleonen machen wir zunächst den ganz allgemeinen Ansatz, dass sich diese aus der paarweisen Wechselwirkung je zweier Teilchen folgendermassen zusammensetzt

$$W = \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} G_{ik}(q_n^i, q_p^k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} N_{ik}(q_n^i, q_n^k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} P_{ik}(q_p^i, q_p^k), \quad (24)$$

wo G_{ik} die Wechselwirkungsenergie des i -ten Neutrons und k -ten Protons, N_{ik} die Wechselwirkungsenergie des i -ten und k -ten Neutrons und P_{ik} die des i -ten und k -ten Protons bezeichnet. Die Faktoren $1/2$ vor der zweiten und dritten Summe auf der rechten Seite stehen zur Vermeidung der doppelten Zählung der Neutronen- und Protonenpaare.

Mit dem Ausdruck (24) und der Eigenfunktion (23) erfolgt dann die Berechnung des wellenmechanischen Erwartungswertes der Wechselwirkungsenergie W_A der Nucleonen ganz analog zur Wechselwirkungsenergie der Elektronen in Atomen mit mehreren Elektronen.¹⁰ Man erhält

$$\begin{aligned} W_A = & \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} \iint \varphi_i^*(q_n) \psi_k^*(q_p) G_{ik}(q_n, q_p) \varphi_i(q_n) \psi_k(q_p) d\tau_n d\tau_p + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \iint \varphi_i^*(q_n) \varphi_k^*(q_n') N_{ik}(q_n, q_n') \varphi_i(q_n) \varphi_k(q_n') d\tau_n d\tau_n' - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \iint \varphi_k^*(q_n) \varphi_i^*(q_n') N_{ik}(q_n, q_n') \varphi_i(q_n) \varphi_k(q_n') d\tau_n d\tau_n' + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_i^*(q_p) \psi_k^*(q_p') P_{ik}(q_p, q_p') \psi_i(q_p) \psi_k(q_p') d\tau_p d\tau_p' - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_k^*(q_p) \psi_i^*(q_p') P_{ik}(q_p, q_p') \psi_i(q_p) \psi_k(q_p') d\tau_p d\tau_p', \end{aligned} \quad (25)$$

wo die Integration über τ_n, τ_p usw. ausser einer Integration über die räumlichen Koordinaten der Neutronen und Protonen auch eine Summation über die Spinkoordinate bedeutet. Von den fünf Doppelsummen ist die erste die gegenseitige Wechselwirkungsenergie der Neutronen und der Protonen, die zweite und dritte die Wechselwirkungsenergie der Neutronen und schliesslich die vierte und fünfte die Wechselwirkungsenergie der Protonen. Es sei noch bemerkt,

dass die dritte und fünfte Doppelsumme die sogenannte Austauschenergie der Neutronen bzw. Protonen darstellt ; diese tritt nur zwischen gleichen Teilchen auf und resultiert aus der Determinantendarstellung der Eigenfunktion dieser Teilchen.

Wie sich zeigen lässt (man vgl. hierzu § 6), kann man dem Absättigungscharakter der zwischen den Nucleonen wirkenden Kräfte dadurch Rechnung tragen, dass man für die Wechselwirkung der Nucleonen eine reine Austauschwechselwirkung voraussetzt. Dementsprechend setzen wir für G_{ik} eine Austauschwechselwirkung an und zwar wählen wir für diese eine Wechselwirkung vom Majoranaschen Typ¹¹, d. h. wir nehmen an, dass beim Platzwechsel eines Protons und Neutrons der Spin an der Ladung haftet. Durch den Operator G_{ik} werden also nur die Ortskoordinaten des i -ten Neutrons und k -ten Protons vertauscht. Man hat also

$$G_{ik}(q_n, q_p) = J_{np}(r_{np})II(r_n, r_p), \quad (26)$$

wo $II(r_n, r_p)$ den Permutationsoperator bezeichnet, der nur die Ortskoordinaten des Neutrons und Protons vertauscht, die Spinkoordinaten aber unverändert lässt, $J_{np}(r_{np})$ ist eine nur von der gegenseitigen Entfernung $r_{np} = |r_n - r_p|$ des Neutrons und Protons abhängige gewöhnliche Funktion, auf die wir später zu sprechen kommen. Mit diesem Ausdruck für G_{ik} folgt

$$G_{ik}(q_n, q_p)\varphi_i(r_n, \sigma_n)\psi_k(r_p, \sigma_p) = \varphi_i(r_p, \sigma_n)\psi_k(r_n, \sigma_p)J_{np}(r_{np}). \quad (27)$$

Wenn wir den Zustand der Bahnbewegung vom Spinzustand in erster Näherung als unabhängig betrachten, dann können wir die Eigenfunktionen φ_i und ψ_i als Produkte einer nur von den Ortskoordinaten und einer nur von der Spinkoordinate abhängigen Spinfunktion folgendermassen darstellen

$$\varphi_i = u_i(r)\eta(\sigma), \quad \psi_i = w_i(r)\eta(\sigma). \quad (28)$$

Hier ist $u_i(r)$ und $w_i(r)$ der nur von den Ortskoordinaten abhängige Anteil der Neutronen bzw. Protoneneigenfunktion ; $\eta(\sigma)$ bedeutet die Spinfunktion, die wir für die beiden Werte der Spinkoordinate $\sigma = +1/2$ und $\sigma = -1/2$ mit η_+ bzw. mit η_- bezeichnen. Mit Hilfe von (27) und (28) lässt sich die Summation über die Spinkoordinaten im ersten Integral im Ausdruck von (25) einfach durchführen und man erhält für die gegenseitige Wechselwirkungsenergie des i -ten Neutrons und k -ten Protons

$$\varepsilon_{ik}^{np} = \iint u_i^*(r_n)w_k^*(r_p)u_i(r_p)w_k(r_n)J_{np}(r_{np})dv_n dv_p, \quad (29)$$

wo dv_n und dv_p die Raumelemente in den entsprechenden Koordinatenräumen bezeichnen. Wie man sieht, ist ε_{ik}^{np} von der Form einer Austauschenergie, die aus der Vertauschung des Neutrons und Protons resultiert.

Wir kommen nun auf die Neutron-Neutron und Proton-Proton Wechselwirkung, d. h. auf die zweite bis fünfte Doppelsumme im Ausdruck (25) zu spre-

chen. Für diese Wechselwirkung der gleichen Teilchen kann man entweder eine spinabhängige oder eine spinunabhängige Wechselwirkung ansetzen, wobei nochmals betont sei, dass wir hier zunächst von der spinunabhängigen Coulombischen Wechselwirkung absehen. Im Falle einer spinunabhängigen Wechselwirkung würde neben der Austauschwechselwirkungsenergie der Teilchen auch noch die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie auftreten, was bei den Atomkernen zu einer gänzlich fehlgehenden Abhängigkeit der Bindungsenergie von der Teilchenzahl führen würde. Man muss daher für die Wechselwirkung gleicher Teilchen eine Spinabhängigkeit voraussetzen. Es erweist sich als zweckmässig folgenden Ansatz zu machen

$$N_{ik}(q_n, q'_n) = -\frac{1}{3} J_{nn}(r_{nn'}) (S, S'), \quad (30)$$

$$P_{ik}(q_p, q'_p) = -\frac{1}{3} J_{pp}(r_{pp'}) (S, S'). \quad (31)$$

Hier bezeichnen q_n und q'_n die Koordinaten des i -ten und k -ten Neutrons und zwar ist in q_n, q'_n auch die Spinkoordinate der Teilchen inbegriffen, $r_{nn'}$ bezeichnet die gegenseitige Entfernung der beiden Neutronen, d. h. es ist $r_{nn'} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_n|$, schliesslich bezeichnet S bzw. S' den Paulischen Spinoperator bezogen auf die beiden Teilchen. Die in (31) stehenden Grössen mit den Indices p, p' beziehen sich auf das i -te und k -te Proton und haben für diese eine ganz analoge Bedeutung. Der Faktor $-\frac{1}{3}$ wurde eingeführt um zu erreichen, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Neutronen mit entgegengesetzter Spinrichtung sowie zwischen zwei Protonen mit ebenfalls entgegengesetzter Spinrichtung gleich J_{nn} bzw. J_{pp} wird. Dass dies tatsächlich erreicht wird, ist sofort zu sehen, da in diesem Fall $S + S'$ gleich Null ist und somit der Zusammenhang

$$2(S, S') = (S + S')^2 - S^2 - S'^2 = -6 \quad (32)$$

besteht.¹²

Zur Berechnung der Wechselwirkungsenergie gleicher Teilchen setzen wir die Eigenfunktion der Teilchen wieder als Produkt einer nur von den Ortskoordinaten abhängigen Funktion und einer Spinfunktion in der Form (28) voraus. Des Weiteren halber sei erwähnt, dass die Spinfunktionen den folgenden Beziehungen genügen

$$S_x \eta_+ = \eta_- , \quad S_x \eta_- = \eta_+ , \quad (33)$$

$$S_y \eta_+ = i \eta_- , \quad S_y \eta_- = -i \eta_+ , \quad (34)$$

$$S_z \eta_+ = \eta_+ , \quad S_z \eta_- = -\eta_- . \quad (35)$$

Es ist also z. B.

$$(S, S') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') = \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') \quad (36)$$

und

$$(S, S') \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') = -\eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') + 2 \eta_-(\sigma) \eta_+(\sigma') . \quad (37)$$

Die Berechnung der Wechselwirkungsenergie gleicher Teilchen kann auf Grund dieser Beziehungen sehr einfach erfolgen. Wir führen hier die Berechnungen für Neutronen durch; für Protonen verläuft alles ganz analog. Wir berechnen zunächst die Wechselwirkungsenergie eines Neutrons mit positivem Spin im Zustand $\varphi_i = u_i\eta_+$ mit zwei Neutronen in den beiden Zuständen $\varphi_{k_1} = u_k\eta_+$ und $\varphi_{k_2} = u_k\eta_-$, die sich nur in der Spinrichtung unterscheiden.

Die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie der beiden Neutronenpaare wird gemäss der zweiten Zeile in (25) durch die Summe der folgenden beiden Integrale dargestellt

$$-\frac{1}{3} \iint |u_i(\mathbf{r})|^2 |u_k(\mathbf{r}')|^2 \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (38)$$

$$-\frac{1}{3} \iint |u_i(\mathbf{r})|^2 |u_k(\mathbf{r}')|^2 \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (39)$$

wo zu beachten ist, dass die Integration auch eine Summation über die Spinordinate bedeutet. Mit Rücksicht auf (36) und (37) und darauf, dass die Spinfunktionen η_+ und η_- auf einander orthogonal sind, ergibt die Summation über die Spinkoordinaten im ersten Integral $+1$ und im zweiten -1 . Da die übrigen Teile der beiden Integrale identisch sind, heben sich die beiden Integrale in der zweiten Doppelsumme in (25) weg. Somit verschwindet die ganze zweite Doppelsumme in (25), d. h. die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie der Neutronen.

Die Austauschenergie der beiden Neutronenpaare erhält man entsprechend der dritten Zeile in (25) als Summe der folgenden beiden Integrale

$$+\frac{1}{3} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_+(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n, \quad (40)$$

$$+\frac{1}{3} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') \eta_-(\sigma) \eta_+(\sigma') (S, S') \eta_+(\sigma) \eta_-(\sigma') J_{nn}(r_{nn'}) d\tau_n d\tau'_n. \quad (41)$$

Auf dieselbe Weise wie im vorangehenden Fall erhält man hier durch die Summation über die Spinkoordinaten beim ersten Integral $+1$ und beim zweiten $+2$. Da die übrigen Teile der Integrale auch hier identisch sind, ergibt sich für die Summe der Austauschenergie der beiden Neutronenpaare, d. h. für die Summe von (40) und (41)

$$\iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') J_{nn}(r_{nn'}) dv dv'. \quad (42)$$

Dies ist die Austauschenergie eines Neutrons im Zustand $\varphi_i = u_i\eta_+$ mit zwei Neutronen im Zustand $\varphi_{k_1} = u_k\eta_+$ und $\varphi_{k_2} = u_k\eta_-$, d. h. mit zwei Neutronen, die sich im selben Bahnzustand mit antiparallelen Spins befinden. Die mittlere Austauschenergie zwischen den beiden Neutronen i und k ist also

$$\varepsilon_{ik}^{nn} = \frac{1}{2} \iint u_k^*(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}) u_k(\mathbf{r}') J_{nn}(r_{nn'}) dv dv'. \quad (43)$$

Mit dem Ansatz (31) verläuft für Protonen alles ganz analog, die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie verschwindet auch im Falle von Protonen, und man erhält für die mittlere Austauschenergie zwischen den beiden Protonen i und k

$$\varepsilon_{ik}^{pp} = \frac{1}{2} \iint w_k^*(\mathbf{r}) w_i^*(\mathbf{r}') w_i(\mathbf{r}) w_k(\mathbf{r}') J_{pp}(r_{pp'}) dv dv'. \quad (44)$$

Für die aus der Neutron-Proton Wechselwirkung resultierende Gesamtenergie W_A^{np} , sowie für die aus der Neutron-Neutron und Proton-Proton Wechselwirkung resultierende Gesamtenergie W_A^{nn} bzw. W_A^{pp} erhält man also

$$W_A^{np} = \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{np}, \quad W_A^{nn} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k \neq i}^{Q_n} \varepsilon_{ik}^{nn}, \quad W_A^{pp} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{pp}. \quad (45)$$

Somit ergibt sich für die aus der Wechselwirkung aller Nucleonen resultierende Gesamtenergie

$$W_A = W_A^{np} + W_A^{nn} + W_A^{pp}. \quad (46)$$

Wir müssen hier nun noch den nur von der gegenseitigen Entfernung der Nucleonen abhängigen Anteil der Nucleonenwechselwirkung, d. h. die Funktionen $J_{np}(r_{np})$, $J_{nn}(r_{nn})$ und $J_{pp}(r_{pp})$ näher definieren. Gemäss dem experimentellen Befund, dass die Kernkräfte eine sehr kurze Reichweite und zwar eine Reichweite von der Grössenordnung 10^{-13} cm besitzen, setzt man für J_{np} , J_{nn} und J_{pp} mit wachsender gegenseitiger Entfernung der Nucleonen sehr rasch abklingende Funktionen an. Wir setzen hier für die Wechselwirkung der Nucleonen ein skalares zentrales Yukawa-Potential an, d. h. wir nehmen an, dass die Austauschwechselwirkung der Neutronen mit den Protonen durch den Austausch elektrisch geladener Mesonen und zwar π -Mesonen und die Austauschwechselwirkung zwischen gleichen Nucleonen durch den Austausch elektrisch neutraler Mesonen von der gleichen Masse erfolgt. Weiterhin nehmen wir an, dass der nur von der gegenseitigen Entfernung der Nucleonen abhängige Anteil der Wechselwirkung zwischen Neutronen-Protonen, Neutronen-Neutronen und Protonen-Protonen gleich sei, d. h. wir setzen

$$J_{np} = J_{nn} = J_{pp} = J = \gamma \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/r_0}, \quad (47)$$

wo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ die gegenseitige Entfernung der betreffenden beiden Nucleonen und γ eine Konstante von der Dimension einer Energie mal Länge bezeichnet; r_0 ist ebenfalls eine Konstante und zwar ergibt sich aus der Yukawaschen Theorie, dass man r_0 mit der durch 2π dividierten Comptonschen Wellenlänge der π -Mesonen gleichzusetzen hat. Wenn wir für die Masse der π -Mesonen, M_π , den Wert von 285 Elektronenmassen setzen¹³, so ist

$$r_0 = \frac{\hbar}{2\pi M_\pi c} = 1,355 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad (48)$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Über die einstweilen nicht näher definierte Konstante γ werden wir später verfügen.

Es sei hier erwähnt, dass in den bisherigen Anwendungen der statistischen Theorie auf Atomkerne für die Wechselwirkungsenergie zweier Nucleonen fast ausschliesslich die Ansätze

$$J = -\varepsilon e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0} \quad (49)$$

und

$$J = -\varepsilon e^{-(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/r_0)^2} \quad (50)$$

gemacht wurden, wo ε eine Konstante von der Dimension einer Energie und r_0 wieder eine Länge von der Grössenordnung 10^{-13} cm bezeichnet.

Ausser der hier besprochenen Wechselwirkung der Nucleonen besteht zwischen den Protonen noch eine Coulombsche elektrostatische Wechselwirkung zufolge der elektrischen Ladung der Protonen. Diese Wechselwirkung setzt sich bekannterweise ebenfalls aus einer paarweisen Wechselwirkung der Teilchen zusammen, ganz ähnlich wie wir dies bei der vorhin behandelten Nucleonenwechselwirkung vorausgesetzt und im Ansatz (24) formelmässig zum Ausdruck gebracht haben. Während sich in dieser Beziehung die beiden Wechselwirkungen gleich verhalten, besteht in einer anderer Beziehung ein wesentlicher Unterschied, während nämlich die oben behandelte Wechselwirkung zwischen gleichen Nucleonen als spinabhängig vorausgesetzt werden musste, ist die elektrostatische Coulombsche Wechselwirkung der Protonen spinunabhängig. Dementsprechend tritt dann hier nicht nur die Austauschenergie, sondern auch die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie der Teilchen auf. Zur Berechnung der Coulombschen Wechselwirkungsenergie hat man im Ausdruck (25) für P_{ik} die Coulombsche Wechselwirkungsenergie zweier Protonen $e^2/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ zu setzen, wo e die positive Elementarladung bezeichnet. Man erhält so für die gewöhnliche elektrostatische Coulombsche Wechselwirkungsenergie der Protonen

$$W_C = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint |\psi_i(\mathbf{q}_p)|^2 |\psi_k(\mathbf{q}_p)|^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} d\tau_p d\tau'_p \quad (51)$$

und für die aus der elektrostatischen Wechselwirkung resultierende Austauschenergie

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint \psi_k^*(\mathbf{q}_p) \psi_i^*(\mathbf{q}'_p) \psi_i(\mathbf{q}_p) \psi_k(\mathbf{q}'_p) \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} d\tau_p d\tau'_p. \quad (52)$$

Mit der Annahme (28) folgt für W_C der Ausdruck

$$W_C = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k \neq i}^{Q_p} \iint |w_i(\mathbf{r}_p)|^2 |w_k(\mathbf{r}'_p)|^2 \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} dv_p dv'_p. \quad (53)$$

Bei W_R ergibt sich mit der Annahme (28), dass nur diejenigen Integrale nicht

verschwinden, in denen die Integration auf Zustände mit parallelem Spin auszudehnen ist. Man erhält

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{\substack{k \neq i \\ \sigma_k = \sigma_i}}^{Q_p} \iint w_k^*(\mathbf{r}_p) w_i^*(\mathbf{r}'_p) w_i(\mathbf{r}_p) w_k(\mathbf{r}'_p) \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'_p|} dv_p dv'_p, \quad (54)$$

wo die Doppelsumme nur auf je solche zwei Zustände auszudehnen ist, die parallelen Spin besitzen. Dass in W_R im Gegensatz zu W_A^{pp} (oder W_A^{nn}) die Austauschwechselwirkung nur aus der Wechselwirkung von Teilchen mit parallelem Spin resultiert, folgt daraus, dass die Coulombsche Wechselwirkung im Gegensatz zu der Nucleonenwechselwirkung P_{ik} bzw. N_{ik} spinunabhängig ist.

Hiermit sind wir im Besitz der wellenmechanischen Ausdrücke der Wechselwirkungsenergien zwischen den Nucleonen. Über die gewöhnliche Coulombsche Wechselwirkungsenergie W_C ist nichts weiteres zu sagen; wir müssen uns jedoch noch mit der Berechnung der Austauschenergie, insbesondere der Austauschenergie eines freien Nucleonengases ausführlich befassen.

Hierbei sei erwähnt, dass wir bis jetzt noch nicht gezeigt haben, wie durch die Austauschwechselwirkung der Absättigungscharakter der Kernkräfte zum Ausdruck kommt; wir kommen hierauf im übernächsten Paragraphen zu sprechen, wo wir dies an Hand von expliziten Ausdrücken der Austauschenergie leicht zeigen können.

§ 5. Wechselwirkungsenergie eines Nucleonengases

Wir befassen uns in diesem Paragraphen mit der expliziten Berechnung der Wechselwirkungsenergie der Teilchen des schon im vorangehenden behandelten freien Nucleonengases, das aus Q_n Neutronen und Q_p Protonen besteht und sich in einem Volumen Ω befindet. Wir setzen wieder voraus, dass sich das Gas am absoluten Nullpunkt der Temperatur, d. h. im tiefsten Energiezustand befindet. Dies bedeutet, dass jeder Neutronen-Bewegungszustand durch je 2 Neutronen mit antiparallelem Spin und jeder Protonen-Bewegungszustand ebenfalls durch je 2 Protonen mit antiparallelem Spin besetzt ist.¹⁴ Den k -ten Bewegungszustand eines freien Neutrons oder Protons können wir bzw. durch die ebenen Wellen

$$u_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\mathbf{p}_k, \mathbf{r})}, \quad w_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\mathbf{p}_k, \mathbf{r})} \quad (55)$$

beschreiben, wo \mathbf{p}_k den Impulsvektor des Neutrons bzw. Protons bezeichnet. Diese Wellenfunktionen erfüllen die Randbedingungen, wonach die Eigenfunktionen an den Berandungsflächen des Volumens Ω verschwinden müssen, nicht. Wenn man aber annimmt dass Ω sehr gross ist, so kann man diese Randbedingungen schon durch eine kleine Modifikation der Wellenfunktionen erfüllen, indem

man die Wellenfunktionen über einen infinitesimalen Bereich des Ausbreitungsvektors integriert, wodurch erreicht werden kann, dass die Wellenfunktionen im Unendlichen verschwinden. Weiterhin müssen die Eigenfunktionen der verschiedenen Neutronenzustände unter sich, sowie die der verschiedenen Protonenzustände unter sich orthogonal sein. Dies wird in unserer hier folgenden Betrachtungsweise z. B. für Neutronen dadurch zum Ausdruck gebracht, dass den Impulsvektoren \mathfrak{p}_i und \mathfrak{p}_k im Phasenraum verschiedene Zellen des Impulsraumes entsprechen müssen.

Zur Berechnung der Austauschenergie W_A unseres freien Nucleonengases führen wir der Einfachheit halber die folgenden Bezeichnungen ein

$$\varrho_{ik}^{np}(\mathfrak{r}) = u_i^*(\mathfrak{r})w_k(\mathfrak{r}), \quad \varrho_{ik}^{nn}(\mathfrak{r}) = u_i^*(\mathfrak{r})u_k(\mathfrak{r}), \quad \varrho_{ik}^{pp}(\mathfrak{r}) = w_i^*(\mathfrak{r})w_k(\mathfrak{r}). \quad (56)$$

Mit diesen kann man ε_{ik}^{np} , ε_{ik}^{nn} und ε_{ik}^{pp} in folgender Form schreiben

$$\varepsilon_{ik}^{np} = \iint \varrho_{ik}^{np}(\mathfrak{r}) \varrho_{ik}^{np*}(\mathfrak{r}') J(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|) dv dv', \quad (57)$$

$$\varepsilon_{ik}^{nn} = \iint \varrho_{ik}^{nn}(\mathfrak{r}) \varrho_{ik}^{nn*}(\mathfrak{r}') J(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|) dv dv', \quad (58)$$

$$\varepsilon_{ik}^{pp} = \iint \varrho_{ik}^{pp}(\mathfrak{r}) \varrho_{ik}^{pp*}(\mathfrak{r}') J(|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|) dv dv'. \quad (59)$$

Zur Berechnung von W_A haben wir diese drei Integrale auszuwerten, indem wir in die Übergangsdichten ϱ_{ik}^{np} , ϱ_{ik}^{nn} und ϱ_{ik}^{pp} ebene Wellen von der Form (55) einsetzen.

Wir beginnen mit der Berechnung von ε_{ik}^{np} , d. h. der Austauschenergie des i -ten Neutrons und k -ten Protons, die sich mit Rücksicht auf (47) in folgender Form schreiben lässt

$$\varepsilon_{ik} = -\gamma \iint \varrho_{ik}^{np}(\mathfrak{r}) \varrho_{ik}^{np*}(\mathfrak{r}') \frac{e^{-|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|/r_0}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|} dv dv' \quad (60)$$

mit

$$\varrho_{ik}^{np}(\mathfrak{r}) = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_i, \mathfrak{r})} \quad (61)$$

Man kann nun

$$V_{ik}(\mathfrak{r}) = \int \varrho_{ik}^{np*}(\mathfrak{r}') \frac{e^{-|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|/r_0}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|} dv' \quad (62)$$

als das Potential der Verteilung $\varrho_{ik}^{np*}(\mathfrak{r})$ betrachten und mit Hilfe dieses Potentials ε_{ik}^{np} in der Form

$$\varepsilon_{ik}^{np} = -\gamma \int \varrho_{ik}(\mathfrak{r}) V_{ik}(\mathfrak{r}) dv \quad (63)$$

darstellen.

Die Berechnung des Potentials V_{ik} ist sehr einfach. Ganz ähnlich nämlich wie das Potential einer räumlichen elektrischen Ladungsverteilung mit Coulombschen Kräften die Poissonsche Gleichung erfüllt, genügt das Potential V_{ik} der

Verteilung Q_{ik}^{np*} mit Yukawaschen Kräften der erweiterten Poissonschen Gleichung von der Form

$$\Delta V_{ik} - \frac{1}{r_0^2} V_{ik} = -4\pi Q_{ik}^{np*}. \quad (64)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$V_{ik}(r) = \frac{h^2}{\Omega\pi} \frac{1}{p_0^2 + |\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k|^2} Q_{ik}^{np*} \quad (65)$$

mit

$$p_0 = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{r_0}. \quad (66)$$

Nach Einsetzen von (65) in (63) folgt

$$\varepsilon_{ik}^{np} = -\frac{\gamma h^2}{\Omega\pi} \frac{1}{p_0^2 + |\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k|^2}. \quad (67)$$

Die aus der Austauschwechselwirkung der Neutronen und Protonen resultierende gesamte Austauschenergie W_A^{np} erhält man nach (45) in der Weise, dass man ε_{ik}^{np} über alle vollbesetzten Neutronen- und Protonenzustände, d. h. über alle Neutronenimpulse \mathfrak{p}_i und Protonenimpulse \mathfrak{p}_k summiert.

Die Herleitung des Ausdruckes für ε_{ik}^{np} erfolgte im vorangehenden Paragraphen auf Grund der Wellenmechanik, die Berechnung von W_A^{np} , d. h. die Summation über die Neutronen- und Protonenimpulse, führen wir auf statistischen Grundlagen durch. Dies bedeutet, dass wir die Summation über \mathfrak{p}_i und \mathfrak{p}_k durch eine Integration ersetzen, was folgendermassen geschehen kann. Wenn wir den Betrag von \mathfrak{p}_i und \mathfrak{p}_k mit p_i bzw. p_k und den Winkel zwischen \mathfrak{p}_i und \mathfrak{p}_k mit ϑ bezeichnen, dann ist

$$|\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k|^2 = p_i^2 + p_k^2 - 2p_i p_k \cos \vartheta. \quad (68)$$

Wir führen ein Polarkoordinatensystem ein, als dessen Achse wir \mathfrak{p}_i wählen. Die Anzahl der Neutronen, deren Impulsrichtung zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und deren Impulsbetrag zwischen p_i und $p_i + dp_i$ liegt, ist

$$dn = \frac{4\pi\Omega}{h^3} p_i^2 \sin \vartheta dp_i d\vartheta. \quad (69)$$

Somit lässt sich die Summation über p_i durch die folgende Integration ersetzen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Q_n} \varepsilon_{ik}^{np} &= -\frac{4\gamma}{h} \int_0^{p_{\mu n}} dp_i p_i^2 \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{p_0^2 + p_i^2 + p_k^2 - 2p_i p_k \cos \vartheta} = \\ &= -\frac{2\gamma}{h} \left[\frac{1}{2p_k} (p_{\mu n}^2 - p_k^2 - p_0^2) \ln \frac{(p_{\mu n} + p_k)^2 + p_0^2}{(p_{\mu n} - p_k)^2 + p_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2p_{\mu n} - 2p_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{p_{\mu n} + p_k}{p_0} - 2p_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{p_{\mu n} - p_k}{p} \right], \end{aligned} \quad (70)$$

wo $p_{\mu n}$ den Betrag des maximalen Impulses der Neutronen bezeichnet. Dieser Ausdruck gibt die Austauschenergie aller Q_n Neutronen mit dem Proton mit dem Impuls p_k . Die gesamte Energie, die aus der Austauschwechselwirkung der Q_n Neutronen mit allen Q_p Protonen resultiert, erhält man, wenn man diesen Ausdruck noch über die Protonenimpulse p_k summiert. Diese Summierung ersetzen wir wieder durch eine Integration. Hierzu haben wir den Ausdruck auf der rechten Seite in (70) mit $8\pi\Omega p_k^2/h^3$ zu multiplizieren und über p_k von 0 bis zu $p_{\mu p}$ zu integrieren, wo $p_{\mu p}$ den Betrag des maximalen Impulses der Protonen bezeichnet. Nach einer ziemlich mühsamen Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
 W_A^{np} &= \sum_{i=1}^{Q_n} \sum_{k=1}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^{np} = -\frac{16\pi\gamma\Omega}{h^4} \int_0^{p_{\mu p}} \left[2p_{\mu n} + \frac{1}{2p_k} (p_{\mu n}^2 - p_k^2 + p_0^2) \ln \frac{p_0^2 + (p_{\mu n} + p_k)^2}{p_0^2 + (p_{\mu n} - p_k)^2} \right. \\
 &\quad \left. - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} + p_k}{p_0} - 2p_0 \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} - p_k}{p_0} \right] p_k^2 dp_k = \\
 &= -\frac{16\pi\gamma\Omega}{h^4} \left\{ \frac{1}{2} (p_{\mu n}^3 p_{\mu p} + p_{\mu n} p_{\mu p}^3) - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu n} p_{\mu p} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{24} [p_0^4 + 6p_0^2 (p_{\mu n}^2 + p_{\mu p}^2) - 3(p_{\mu n}^2 - p_{\mu p}^2)^2] \ln \frac{p_0^2 + (p_{\mu n} + p_{\mu p})^2}{p_0^2 + (p_{\mu n} - p_{\mu p})^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} p_0 (p_{\mu n}^3 + p_{\mu p}^3) \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} + p_{\mu p}}{p_0} + \frac{2}{3} p_0 (p_{\mu n}^3 - p_{\mu p}^3) \operatorname{arctg} \frac{p_{\mu n} - p_{\mu p}}{p_0} \right\}. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Wenn wir die dimensionslosen Funktionen

$$\omega_n = \frac{p_{\mu n}}{p_0} = (3\pi^2)^{1/3} r_0 \varrho_n^{1/3} \quad \text{und} \quad \omega_p = \frac{p_{\mu p}}{p_0} = (3\pi^2)^{1/3} r_0 \varrho_p^{1/3} \quad (72)$$

eingeführen, so lässt sich W_A^{np} in folgender Form schreiben

$$\begin{aligned}
 W_A^{np} &= -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{6\pi^3} \left\{ 3(\omega_n^3 \omega_p + \omega_n \omega_p^3) - \omega_n \omega_p + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} [1 + 6(\omega_n^2 + \omega_p^2) - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2] \left\{ \ln [1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \ln [1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n + \omega_p) + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg} (\omega_n - \omega_p) \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Die Berechnung von W_A^{nn} und W_A^{pp} erfolgt auf eine ganz ähnliche Weise. Zunächst berechnet man auch hier ε_{ik}^{nn} und ε_{ik}^{pp} , für die sich formal derselbe Ausdruck ergibt, wie für $\frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^{np}$ [man vgl. (67)], jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, dass im Ausdruck von ε_{ik}^{nn} alle beide Impulse, p_i und p_k , Neutronenimpulse und im Ausdruck von ε_{ik}^{pp} Protonenimpulse bedeuten. Alles weitere

verläuft ganz analog zur Berechnung von W_A^{np} , nur hat man im Fall von W_A^{nn} bei den Integrationen über p_i und p_k beidesmal von 0 bis $p_{\mu n}$ und im Fall von W_A^{pp} beidesmal von 0 bis $p_{\mu p}$ zu integrieren. Es ergibt sich mit Rücksicht auf (45)

$$W_A^{nn} = -\frac{4\pi\gamma\Omega}{h^4} \left[p_{\mu n}^4 - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu n}^2 + \frac{1}{24} (p_0^4 + 12p_0^2 p_{\mu n}^2) \ln \frac{p_0^2 + 4p_{\mu n}^2}{p_0^2} - \frac{4}{3} p_0 p_{\mu n}^2 \operatorname{arctg} \frac{2p_{\mu n}}{p_0} \right], \quad (74)$$

$$W_A^{pp} = -\frac{4\pi\gamma\Omega}{h^4} \left[p_{\mu p}^4 - \frac{1}{6} p_0^2 p_{\mu p}^2 + \frac{1}{24} (p_0^4 + 12p_0^2 p_{\mu p}^2) \ln \frac{p_0^2 + 4p_{\mu p}^2}{p_0^2} - \frac{4}{3} p_0 p_{\mu p}^2 \operatorname{arctg} \frac{2p_{\mu p}}{p_0} \right]. \quad (75)$$

Wenn man auch hier die dimensionslosen Funktionen ω_n und ω_p einführt, so erhält man

$$W_A^{nn} = -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{24\pi^3} \left[6\omega_n^4 - \omega_n^2 + \frac{1}{4} (1 + 12\omega_n^2) \ln(1 + 4\omega_n^2) - 8\omega_n^3 \operatorname{arctg} 2\omega_n \right], \quad (76)$$

$$W_A^{pp} = -\frac{\gamma\Omega}{r_0^4} \frac{1}{24\pi^3} \left[6\omega_p^4 - \omega_p^2 + \frac{1}{4} (1 + 12\omega_p^2) \ln(1 + 4\omega_p^2) - 8\omega_p^3 \operatorname{arctg} 2\omega_p \right]. \quad (77)$$

All' dies gilt nur für ein freies Nucleonengas, d. h. für den Fall, dass die Dichteverteilung der Nucleonen konstant ist. Für ein nicht freies Nucleonengas kann man die Austauschenergie auf ähnliche Weise berechnen, wie wir dies im Fall der Fermischen kinetischen Energie (15) eines nicht freien Nucleonengases getan haben. Wir unterteilen also mit einem System von Scheidewänden das Volumen des Gases in Teilvolumina dv , in denen sich noch viele Neutronen und Protonen befinden, die man als ein freies Nucleonengas, d. h. als ein Nucleonengas mit konstanter Dichte betrachten kann. Die Austauschenergie der Nucleonen in den einzelnen Teilvolumina lässt sich in der Form (73), (76) und (77) darstellen mit dem Unterschied, dass statt Ω überall dv steht. Die gesamte Austauschenergie erhält man also durch eine Integration über das ganze vom Nucleonengas beanspruchte Volumen. Wenn man zur Abkürzung die Bezeichnung

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{1}{24\pi^3} \left\{ 3(\omega_n^3 \omega_p + \omega_n \omega_p^3) - \omega_n \omega_p + \frac{1}{4} [1 + 6(\omega_n + \omega_p)^2 - 3(\omega_n^2 - \omega_p^2)^2] \{ \ln[1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \ln[1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \} - 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n + \omega_p) + 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n - \omega_p) \right\} \quad (78)$$

einführt, so ergibt sich

$$W_A^{np} = -\frac{4\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_p) dv, \quad (79)$$

$$W_A^{nn} = -\frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_n) dv, \quad (80)$$

$$W_A^{pp} = -\frac{\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_p, \omega_p) dv. \quad (81)$$

Während in (45) im Ausdruck von W_A^{pp} und W_A^{np} die aus dem Selbstaustausch der Neutronen bzw. Protonen resultierenden Glieder durch Ausschliessen der Glieder $k = i$ in den Doppelsummen eliminiert sind, enthalten (80) und (81) sowie die entsprechenden vorangehenden Ausdrücke auch die aus dem Selbstaustausch resultierende Energie, da in beiden Fällen über dasselbe Impulsintervall zweimal integriert wird. Mangels eines genaueren Verfahrens zur Korrektur des Selbstaustausches kann man so vorgehen, dass man die aus dem Selbstaustausch eines Neutrons oder Protons resultierende Energie der mittleren Austauschenergie eines Neutrons bzw. Protons, d. h. W_A^{nn}/Q_n^3 bzw. W_A^{pp}/Q_p^3 gleichsetzt. Die aus dem Selbstaustausch aller Neutronen und Protonen resultierende Energie ist also W_A^{nn}/Q_n bzw. W_A^{pp}/Q_p . Zur Korrektur des Selbstaustausches hat man also diese Energien von (80) bzw. (81) in Abzug zu bringen, d. h. die Korrektur des Selbstaustausches besteht darin, dass man die Ausdrücke (80) und (81) einfach mit den Faktoren $s_n = 1 - \frac{1}{Q_n}$ bzw. $s_p = 1 - \frac{1}{Q_p}$ multipliziert. Man erhält also für die gesamte Austauschenergie

$$W_A = W_A^{np} + s_n W_A^{nn} + s_p W_A^{pp}. \quad (82)$$

Allerdings ist die auf diese Weise durchgeführte Korrektur sehr grob, es sei jedoch hervorgehoben, dass die Korrektur für den Fall $Q_n = 1$ und $Q_p = 1$, wo die Korrektur relativ am grössten ist, den exakten Wert liefert, da in diesem Fall die Korrekturfaktoren s_n und s_p gleich 0 sind und somit auch die korrigierten Ausdrücke $s_n W_A^{nn}$ und $s_p W_A^{pp}$ verschwinden, wie dies auch sein muss. Für grössere Teilchenzahlen liefert die Korrektur nur einen groben Näherungswert, was aber ziemlich belanglos ist, denn — wie man sieht — wird die Korrektur von umso geringerer Bedeutung, je grösser die Teilchenzahl ist.

Wir geben hier noch für die Wechselwirkungsenergien (49) und (50) die Funktion $f(\omega_n, \omega_p)$ an. Im Falle der Wechselwirkungsenergie (49) ist

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{24\pi^3} \left\{ 4\omega_n\omega_p - [1 + 3(\omega_n^2 + \omega_p^2)] \left\{ \ln[1 + (\omega_n + \omega_p)^2] - \ln[1 + (\omega_n - \omega_p)^2] \right\} + 4(\omega_n^3 + \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n + \omega_p) - 4(\omega_n^3 - \omega_p^3) \operatorname{arctg}(\omega_n - \omega_p) \right\} \quad (83)$$

und im Falle der Wechselwirkungsenergie (50) findet man

$$f(\omega_n, \omega_p) = \frac{r_0}{6\pi^{5/2}} \left[\frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 + \omega_p^3) \Phi\left(\frac{\omega_n + \omega_p}{2}\right) + (\omega_n^2 + \omega_p^2 - \omega_n \omega_p - 2) e^{-\left(\frac{\omega_n + \omega_p}{2}\right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\pi^{1/2}}{2} (\omega_n^3 - \omega_p^3) \Phi\left(\frac{\omega_n - \omega_p}{2}\right) - (\omega_n^2 + \omega_p^2 + \omega_n \omega_p - 2) e^{-\left(\frac{\omega_n - \omega_p}{2}\right)^2} \right], \quad (84)$$

wo $\Phi(x)$ die Gaussche Transzendenten

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (85)$$

bezeichnet.

Die Herleitung dieser Ausdrücke bzw. der Austauschenergien mit den Wechselwirkungsenergien (49) und (50) erfolgt auf einem etwas anderen Weg, als in dem von uns behandelten Fall einer Yukawaschen Wechselwirkung; die Berechnung von ε_{ik}^{np} kann in diesen Fällen durch die direkte Auswertung des Integrals (60) geschehen¹⁵. Für die Wechselwirkungsenergie (49) kann z. B. die Herleitung von W_A^{np} , W_A^{nn} , W_A^{pp} , wie aus einem Vergleich von (49) und (47) sofort zu sehen ist, auch so erfolgen, dass man die für die Yukawasche Wechselwirkung (47) hergeleiteten entsprechenden Ausdrücke (71), (76) und (77) nach $-1/r_0$ d. h. nach $-2\pi p_0/h$ differenziert.

Die aus der elektrostatischen Coulombschen Wechselwirkung der Protonen resultierende Austauschenergie W_R lässt sich für freie Protonen mit Hilfe des Ausdruckes für ε_{ik}^{pp} einfach berechnen.¹⁶ Das Doppelintegral in (54), das wir der Kürze halber mit ε_{ik}^R bezeichnen, ist nämlich für Protonen mit parallelem Spin mit $2\varepsilon_{ik}^{pp}$ gleich, wenn man im Ausdruck von ε_{ik}^{pp} für die Konstanten γ und $1/r_0$ die Werte $\gamma = e^2$ und $1/r_0 = 0$, d. h. $p_0 = 0$ setzt. Es geht dann nämlich $J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ in die Coulombsche Wechselwirkungsenergie $e^2/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ über. Es ergibt sich also für Protonen mit parallelem Spin

$$\varepsilon_{ik}^R = -\frac{e^2 \hbar^2}{\Omega \pi} \frac{1}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k|^2}. \quad (86)$$

Für Protonen mit antiparallelem Spin ist $\varepsilon_{ik}^R = 0$.

Zur Berechnung von W_R hat man ε_{ik}^R über alle Protonenzustände mit parallelem Spin zu summieren. Die Summationen kann man ganz analog zur Berechnung von W_A^{pp} durch Integrationen ersetzen, wobei aber zu beachten ist, dass jetzt die Summation, d. h. Integration nur auf Protonenzustände mit parallelem Spin auszudehnen ist. Es ergibt sich¹⁷

$$W_R = -\frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma_k = \sigma_i}}^{Q_p} \varepsilon_{ik}^R = -\frac{4\pi e^2 \Omega}{h^4} p_{\mu p}^4. \quad (87)$$

Wenn man auch hier statt $p_{\mu n}$ die dimensionslose Funktion ω_p einführt, so folgt für ein freies Protonengas

$$W_R = -\frac{e^2 \Omega}{r_0^4} \frac{1}{4\pi^3} \omega_p^4. \quad (88)$$

Für ein nicht freies Protonengas, d. h. für ein Protonengas mit beliebiger Dichteverteilung erhält man ganz ähnlich zu (79)—(81) den Ausdruck

$$\mathcal{W}_R = -\frac{e^2}{r_0^4} \frac{1}{4\pi^3} \int \omega_p^4 dv. \quad (89)$$

Gerade so wie in (80) und (81), ist auch in diesem Ausdruck, aus denselben Gründen wie dort, die aus dem Selbstaustausch der Protonen resultierende Energie enthalten. Den hierdurch begangenen Fehler braucht man jedoch nicht eigenst zu korrigieren, sondern man kann so verfahren, dass man in den gewöhnlichen Coulombschen Energieausdruck \mathcal{W}_C auch die der elektrostatischen Selbstwechselwirkung entsprechenden Glieder aufnimmt, was bei der statistischen Behandlungsweise sowieso nicht vermieden werden kann. Dies bedeutet, dass wir im Ausdruck (53) auch die Glieder mit $k = i$ aufnehmen, wodurch wir für ein beliebiges, d. h. sowohl freies als nicht freies Protonengas den Ausdruck

$$\mathcal{W}_C = \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^{Q_p} \sum_{k=1}^{Q_p} \iint |w_i(\mathbf{r})|^2 |w_k(\mathbf{r}')|^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \frac{1}{2} e^2 \iint \frac{\varrho_p(\mathbf{r}) \varrho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \quad (90)$$

erhalten, wo gemäss der wellenmechanischen Definition der Teilchendichte

$$\sum_{i=1}^{Q_p} |w_i(\mathbf{r})|^2 = \varrho_p(\mathbf{r}) \quad (91)$$

gesetzt wurde. Die Glieder mit $k = 1$ in \mathcal{W}_C sind nämlich, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben wie die Glieder mit $k = i$ in \mathcal{W}_R , wie dies aus einem Vergleich mit (54) sofort zu sehen ist. Da ausserdem diese Glieder in \mathcal{W}_C und \mathcal{W}_R verschiedenes Vorzeichen haben, ergibt sich, dass sich diese Glieder in der Summe von \mathcal{W}_C und \mathcal{W}_R — und nur auf diese Summe kommt es im folgenden an — gerade kompensieren. Allerdings ist die Kompensation nur in den wellenmechanischen Ausdrücken vollkommen, in den statistischen Ausdrücken ist sie nur eine teilweise. Man kann sich jedoch damit vollkommen begnügen, da diese Selbstwechselwirkungsenergien sowieso nur für kleine Protonenzahlen von Bedeutung sind, für diese ist aber — wie sich zeigen wird — sowohl \mathcal{W}_C als \mathcal{W}_R im Verhältnis zu \mathcal{W}_A unbedeutend.

Ergänzend zum Ausdruck (90) sei noch bemerkt, dass man \mathcal{W}_C auch in der Form

$$\mathcal{W}_C = \frac{1}{2} e \int V(\mathbf{r}) \varrho_p(\mathbf{r}) dv \quad (92)$$

schreiben kann, wo

$$V(\mathbf{r}) = e \int \frac{\varrho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (93)$$

das elektrostatische Potential der Protonen am Ort \mathbf{r} bezeichnet.

§ 6. Absättigungscharakter der Austauschkräfte

Bekanntlich ergibt sich aus dem empirischen Befund, dass die Energie der Kerne angenähert zur Nucleonenzahl proportional ist. Dies weist darauf hin, dass die zwischen den Nucleonen wirkenden Anziehungskräfte, gerade so wie die chemischen Valenzkräfte, eine Absättigung zeigen müssen, d. h., dass durch diese Kräfte von einem Nucleon nur eine beschränkte Anzahl von Nucleonen gebunden werden kann. Wir wollen nun hier zeigen, dass die im vorangehenden beschriebenen Austauschkräfte, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Kräften, diesen Absättigungscharakter besitzen, und zwar wollen wir dies auf einem indirekten Weg tun, indem wir untersuchen, wie die Austauschenergie von der Teilchenzahl abhängt, wobei wir den Korrektionsfaktor s gleich 1 setzen können.

Wir ziehen hierzu den schon im vorangehenden behandelten Fall in Betracht, bei dem sich Q_n Neutronen und Q_p Protonen mit konstanter Dichteverteilung im Volumen Ω befinden. Wir wollen ausserdem noch die Vereinfachung machen, dass die Anzahl der Neutronen und Protonen gleich gross ist, d. h. dass $Q_n = Q_p = Q/2$ ist, wo Q die Gesamtzahl der Nucleonen ist. Mit diesen Vereinfachungen wird

$$\varrho_n = \varrho_p = \frac{1}{2} \varrho = \frac{Q}{2\Omega} \quad \text{und} \quad \omega_n = \omega_p = \omega = \left(\frac{3\pi^2 r_0^3}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^{1/3}, \quad (94)$$

wo ϱ die gesamte Nucleonendichte bezeichnet.

Für die Austauschenergie der Nucleonen ergibt sich aus (73), (76) und (77) mit Rücksicht auf (94)

$$\begin{aligned} W_A &= W_A^{np} + W_A^{nn} + W_A^{pp} = -\frac{6\gamma}{r_0^4} f(\omega, \omega) \Omega = \\ &= -\frac{3}{8\pi} \frac{\gamma}{r_0} Q \left[6\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega^3} + \frac{12}{\omega} \right) \ln(1 + 4\omega^2) - 8 \operatorname{arctg} 2\omega \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

Wie man aus diesem Ausdruck sieht, wird für grosse ω

$$W_A \cong -\frac{9}{4} \frac{\gamma}{r_0} Q \omega. \quad (96)$$

W_A ist also für grosse ω zu $Q\omega$ proportional. Da sich weiterhin ω wegen der hier konstanten Dichte zu $Q^{1/3}$ als proportional erweist, folgt, dass W_A zu $Q^{4/3}$ proportional ist.

Während sich also die gewöhnliche Wechselwirkungsenergie der Nucleonen zu ϱ^2 , d. h. zu Q^2 als proportional ergibt, ist W_A nur zur $4/3$ -ten Potenz von Q proportional. Hierin kommt der Absättigungscharakter der Austauschkräfte zum Ausdruck. Allerdings ist hier die Absättigung keine vollkommene, denn bei einer vollständigen Absättigung der Wechselwirkungskräfte müsste die Wechsel-

wirkungsenergie zur Teilchenzahl, d. h. zu Q proportional sein, während sich in unserem Fall eine Proportionalität zu $Q^{4/3}$ ergibt. Dies ist eine Folge dessen, dass wir die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Nucleonen in der Form (47) angesetzt haben, wenn wir diese Wechselwirkungsenergie in der Form (49) oder (50) ansetzen würden, dann ergäbe sich für $\omega \gg 1$ die Austauschenergie zu Q als proportional,¹⁸ die Absättigung wäre also in diesen Fällen für $\omega \gg 1$ vollständig.

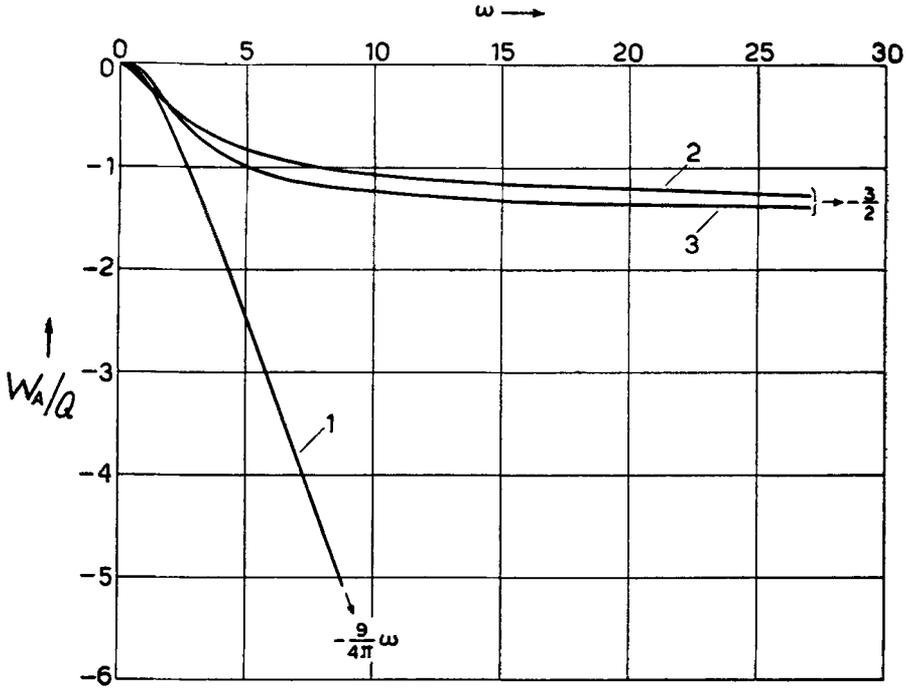


Fig. 1. Die auf ein Teilchen entfallende Austauschenergie W_A/Q eines Nucleonengases mit konstanter Dichte als Funktion von ω .

- Kurve 1: W_A/Q aus (95) berechnet in γ/r_0 -Einheiten,
- Kurve 2: W_A/Q aus (97) berechnet in ε -Einheiten,
- Kurve 3: W_A/Q aus (98) berechnet in ε -Einheiten.

Dies kann leicht gezeigt werden. Wir brauchen hierzu nur die dem Ausdruck (95) entsprechende gesamte Austauschenergie W_A für die Wechselwirkungsenergien (49) und (50) anzugeben. Mit Hilfe von (83) und (84) ergibt sich mit den Vereinfachungen (94) im Falle der Wechselwirkungsenergie (49)

$$W_A = -\frac{3}{8\pi} \varepsilon Q \left[\frac{4}{\omega} - \left(\frac{1}{\omega^3} + \frac{6}{\omega} \right) \ln(1 + 4\omega^2) + 8 \operatorname{arctg} 2\omega \right] \quad (97)$$

und im Falle der Wechselwirkungsenergie (50)

$$W_A = -\frac{3}{2\pi^{1/2}} \varepsilon Q \left[\pi^{1/2} \Phi(\omega) + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) e^{-\omega^2} - \frac{3}{\omega} + \frac{2}{\omega^3} \right]. \quad (98)$$

Für grosse ω gehen diese Ausdrücke der Reihe nach asymptotisch in die folgenden über

$$W_A \cong -\frac{3}{8\pi} \varepsilon Q \ 8 \operatorname{arctg} 2\omega \cong -\frac{3}{2} \varepsilon Q, \quad (99)$$

$$W_A \cong -\frac{3}{2\pi^{1/2}} \varepsilon Q \pi^{1/2} \Phi(\omega) \cong -\frac{3}{2} \varepsilon Q. \quad (100)$$

In beiden Fällen ist also W_A für sehr grosse ω zu Q proportional.

W_A/Q als Funktion von ω ist für die Ausdrücke (95), (99) und (100) in Fig. 1 dargestellt, die die Verhältnisse deutlich veranschaulicht.

Im Verhalten für grosse ω besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen den Wechselwirkungsenergien (49) und (50) einerseits und der von uns zu Grunde gelegten Yukawaschen Wechselwirkungsenergie (47) andererseits und es dürfte zum Teil auf diesem Unterschied beruhen, dass die im weiteren Verlauf dieser Arbeit durchzuführenden Berechnungen zu befriedigenderen Resultaten führen, als die bisher mit den erwähnten anderen Wechselwirkungsenergien erzielten Resultate.

Die Ursache dieses verschiedenen asymptotischen Verhaltens der Wechselwirkungsenergien liegt offenbar darin, dass für $|\tau - \tau'| = 0$ die Wechselwirkungsenergien (49) und (50) in eine Konstante übergehen, während die Yukawasche Wechselwirkungsenergie (47) wie $1/|\tau - \tau'|$ unendlich wird.

7. Das statistische Modell des Atomkerns

Die statistische Theorie des Atomkerns gründet sich auf die Annahme, dass man die Nucleonen des Kerns als ein entartetes Neutronen- und Protonengas am absoluten Nullpunkt der Temperatur betrachten kann. Es wird angenommen, dass in diesem Nucleonengas die Teilchen kontinuierlich verteilt sind, man betrachtet also die Teilchen als pulverisiert. Das Nucleonengas wird durch die in den beiden vorangehenden Paragraphen ausführlich besprochenen Austauschenergien des Nucleonen zusammengehalten; die Abstossungsenergien, die der Anziehung des Gleichgewicht halten, sind die im § 3 besprochenen kinetischen Energien des Nucleonengases und die im § 4 und am Ende des § 5 behandelte Coulombsche Wechselwirkungsenergie der Protonen. Dem Wesen der statistischen Betrachtungsweise entsprechend werden im statistischen Kernmodell die individuellen Eigenschaften der Nucleonen verwischt. Aus den Grundannahmen der Theorie folgt weiterhin, dass man die Theorie nur auf solche Kerne anwenden kann, in welchen die Anzahl der Neutronen und Protonen gross, also die statistische Behandlungsweise gerechtfertigt ist.

Wir ziehen im folgenden einen Kern in Betracht, der N Neutronen und Z Protonen enthält. Die Gesamtzahl der Nucleonen im Kern, d. h. die Massenzahl bezeichnen wir mit A ; es ist also

$$A = N + Z. \quad (101)$$

Zufolge der im vorangehenden schon besprochenen Korrekturen, die wir an der Fermischen kinetischen Energie und der Austauschenergie gleicher Teilchen angebracht haben, können wir die Beschränkung auf schwere Kerne fallen lassen und auch leichte Kerne in unsere Betrachtungen aufnehmen.

Das Grundproblem besteht in der Bestimmung der Energie des Kerns und in der Dichteverteilung der Nucleonen im Kern. Die Lösung dieses Problems kann mit Hilfe eines Variationsprinzips geschehen. Zu diesem Variationsprinzip gelangt man, indem man den Energieausdruck des Kerns bildet. Zur Herleitung dieses Energieausdruckes führen wir ein System von Scheidewänden ein, mit denen wir das Nucleonengas, ganz ähnlich wie in den Paragraphen 3 und 5, in Teilvolumina dv unterteilen und zwar in der Weise, dass jedes räumliche Volumenelement noch viele Neutronen und Protonen enthalte, die man als ein freies Neutronen- bzw. Protonengas betrachten kann. Von der Schwierigkeit, dass diese Bedingung in den vom Kernmittelpunkt weit entfernten Gebieten — wegen der kleinen Nucleonenzahl — nicht erfüllbar ist, können wir zunächst absehen, da diese Gebiete bei der Berechnung der uns in erster Linie interessierenden Kernenergie von geringer Bedeutung sind. Die einzelnen Energieanteile des Kerns können wir mit Hilfe der in den Paragraphen 3 und 5 erhaltenen Resultate sofort angeben. Bevor wir dies tun, machen wir noch einige zum Teil vereinfachende allgemeine Festsetzungen.

Bei der Berechnung der Energie ist es vorteilhaft alle Energieanteile in derselben Energieeinheit auszudrücken. Wir setzen $g = 4e$ und wählen als Energieeinheit

$$\varepsilon_0 = \frac{g^2}{r_0} = 2,724 \cdot 10^{-5} \text{ erg} = 17,01 \text{ MeV}. \quad (102)$$

Dies ist praktisch das Doppelte des mittleren Packungsanteils.

Weiterhin wollen wir den Ausdruck für die Fermische kinetische Energie und die Ausdrücke für die Austauschenergie gleicher Teilchen vereinfachen, indem wir für die Korrektionsfaktoren k_n , k_p sowie s_n und s_p die folgenden Vereinfachungen durchführen. Diese Korrektionsfaktoren sind nur für leichte Kerne von Bedeutung. Bei den stabilsten leichten Kernen ist nun $N = Z = A/2$. Wir können daher bei der Energieberechnung der stabilsten leichten Kerne

$$\text{für } A \geq 4 \quad k_n = k_p = k = 1 - \frac{4}{A}, \quad (103)$$

$$\text{für } A < 4 \quad k_n = k_p = k = 0, \quad (104)$$

sowie

$$\text{für } A \geq 2 \quad s_n = s_p = s = 1 - \frac{2}{A}, \quad (105)$$

$$\text{für } A < 2 \quad s_n = s_p = s = 0 \quad (106)$$

setzen. Diese vereinfachten Korrektionsfaktoren k und s können wir auch für die schweren Kerne, für die $N \neq Z$ ist, beibehalten, denn bei diesen ist die

ganze Korrektion unbedeutend. Die Fälle $A < 4$ bzw. $A < 2$ sind nur der Vollständigkeit halber angegeben, praktisch kommt diesen keine Bedeutung zu, da es sich hier um eine statistische Theorie handelt, die bei diesen kleinen Teilchenzahlen versagt, und wir in unseren folgenden Berechnungen höchstens noch den schon sehr extremen Fall $A = 4$ aufnehmen können. Wir werden daher im folgenden einfach $k = 1 - \frac{4}{A}$ und $s = 1 - \frac{2}{A}$ setzen.

Schliesslich führen wir noch in den einzelnen Energieanteilen statt der Dichtefunktionen ϱ_n und ϱ_p durchweg die durch (72) definierten dimensionslosen Funktionen ω_n und ω_p ein.

Mit Berücksichtigung all' dieser Festsetzungen geben wir nun die einzelnen Energieanteile an. Wenn wir die Fermische kinetische Energie der Nucleonen mit E_K , die Weizsäcker'sche Inhomogenitätskorrektion der kinetischen Energie mit E_J , die aus der Neutron-Proton Wechselwirkung resultierende Austauschenergie mit E_A^{np} , die aus der Neutron-Neutron Wechselwirkung resultierende Austauschenergie mit E_A^{nn} , die aus der Proton-Proton Wechselwirkung resultierende Austauschenergie mit E_A^{pp} , die gewöhnliche elektrostatische Coulombsche Wechselwirkungsenergie der Protonen mit E_C und schliesslich die aus derselben Wechselwirkung resultierende Austauschenergie mit E_R bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned} E_K &= k\kappa_K \int (\varrho_n^{5/3} + \varrho_p^{5/3}) dv = \frac{k\kappa_K}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^5} \int (\omega_n^5 + \omega_p^5) dv = \\ &= \frac{k\mu_K}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^3} \varepsilon_0 \int (\omega_n^5 + \omega_p^5) dv, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} E_J &= \kappa_J \int \left[\frac{1}{\varrho_n} \left(\frac{d\varrho_n}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\varrho_p} \left(\frac{d\varrho_p}{dr} \right)^2 \right] dv = \frac{3\kappa_J}{\pi^2 r_0^3} \int \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dr} \right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dr} \right)^2 \right] dv = \\ &= \frac{3\mu_J}{\pi^2 r_0} \varepsilon_0 \int \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dr} \right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dr} \right)^2 \right] dv, \end{aligned} \quad (108)$$

$$E_A^{np} = -\frac{4\gamma}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_p) dv = -\frac{4\lambda}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_n, \omega_p) dv, \quad (109)$$

$$E_A^{nn} = -\frac{\gamma s}{r_0^4} \int f(\omega_n, \omega_n) dv = -\frac{\lambda s}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_n, \omega_n) dv, \quad (110)$$

$$E_A^{pp} = -\frac{\gamma s}{r_0^4} \int f(\omega_p, \omega_p) dv = -\frac{\lambda s}{r_0^3} \varepsilon_0 \int f(\omega_p, \omega_p) dv, \quad (111)$$

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} e^2 \iint \frac{\varrho_p(\mathbf{r}) \varrho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \frac{e^2}{18\pi^4 r_0^6} \iint \frac{\omega_p^3(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e}{3\pi^2 r_0^3} \int V(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{96\pi^2 e r_0^2} \varepsilon_0 \int V(\mathbf{r}) \omega_p^3(\mathbf{r}) dv, \end{aligned} \quad (112)$$

$$E_R = -\frac{e^2}{4\pi^2 r_0^4} \int \omega_p^4 dv = -\frac{1}{64\pi^3 r_0^3} \varepsilon_0 \int \omega_p^4 dv. \quad (113)$$

Hier bezeichnen μ_K , μ_J und λ die folgenden dimensionslosen Grössen

$$\mu_K = \frac{\varkappa_K}{r_0^2 \varepsilon_0} = 3,814, \quad \mu_J = \frac{\varkappa_J}{r_0^2 \varepsilon_0} = 0,1660, \quad \lambda = \frac{\gamma}{r_0 \varepsilon_0} = \frac{\gamma}{g^2}; \quad (114)$$

$V(r)$ ist das durch (93) definierte elektrostatische Potential der Protonen; zu integrieren ist überall auf alle Gebiete, in welchen ϱ_n und ϱ_p nicht verschwinden.

Statt γ wurde also λ eingeführt, λ ist ein zunächst unbestimmter dimensionsloser Parameter und zwar der einzige frei verfügbare Parameter, den wir mit Hilfe empirischer Daten bestimmen werden.

Die gesamte Energie E des Kerns ist die folgende

$$E = E_K + E_J + E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp} + E_C + E_R. \quad (115)$$

Das Problem besteht darin, diejenigen Verteilungsfunktionen ϱ_n und ϱ_p bzw. ω_n und ω_p zu bestimmen, die die Energie des Kerns zum Minimum machen, wobei zu berücksichtigen ist, dass für ϱ_n und ϱ_p , bzw. für ω_n und ω_p die Nebenbedingungen

$$\int \varrho_n dv = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega_n^3 dv = N, \quad (116)$$

$$\int \varrho_p dv = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega_p^3 dv = Z \quad (117)$$

bestehen, durch die die Gesamtzahl der Neutronen bzw. Protonen im Kern festgelegt wird. Das Problem lässt sich also in der Form eines Variationsprinzips folgendermassen formulieren

$$\delta(E + b_n N + b_p Z) = 0, \quad (118)$$

wo b_n und b_p Lagrangesche Multiplikatoren bezeichnen und die Variation entweder hinsichtlich ϱ_n und ϱ_p oder hinsichtlich ω_n und ω_p zu erfolgen hat. Ferner sei bemerkt, dass für das elektrostatische Potential der Protonen die Poissonsche Gleichung

$$\Delta V = -4\pi e \varrho_p = -\frac{4e}{3\pi r_0^3} \omega_p^3 \quad (119)$$

bestehen muss.

Es würde keinerlei Schwierigkeiten bereiten das zur Bestimmung von ϱ_n und ϱ_p , bzw. von ω_n und ω_p dienende Differentialgleichungssystem mit den Randbedingungen herzuleiten. Die Lösung dieses Gleichungssystems würde aber zu sehr ausgedehnten und schwierigen numerischen Rechnungen führen, die man umgehen kann, wenn man das Variationsproblem mit Hilfe des Ritz-

schen Verfahrens direkt löst, wie wir dies im nächsten Paragraphen tun wollen. In diesem Fall genügt es neben den Bedingungen (116) und (117) die folgenden Randbedingungen zu berücksichtigen. Erstens muss aus Symmetriegründen der Anstieg der Richtungstangente von ϱ_n und ϱ_p , bzw. ω_n und ω_p im Kernmittelpunkt gleich 0 sein, d. h. es müssen die Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial \varrho_n}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \varrho_p}{\partial r}\right)_{r=0} = 0, \quad (120)$$

bzw. die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \omega_n}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \quad (121)$$

bestehen, wo r die Entfernung vom Kernmittelpunkt bezeichnet. Zweitens muss ϱ_n und ϱ_p , bzw. ω_n und ω_p in unendlicher Entfernung vom Kern verschwinden.

§ 8. Der statistische Kern mit konstanter Nucleonendichte

Bevor wir die Lösung des Variationsproblems mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens in Angriff nehmen, möchten wir vorerst noch die nullte Näherung besprechen, deren exakte Lösung eine durchweg konstante Dichteverteilung ist. Zu dieser nullten Näherung gelangt man, wenn man im Ausdruck der Gesamtenergie (115) nur die wichtigsten Energieanteile berücksichtigt; diese sind E_K und $E_A = E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp}$. Wenn wir von den ganz leichten Kernen absehen, so sind alle übrigen Energieanteile im Verhältnis zu diesen beiden nur Korrekturen und können in nullter Näherung vernachlässigt werden. Konsequenterweise wird man dann auch die Korrekturfaktoren k und s gleich 1 setzen. Ausserdem machen wir noch die vereinfachende Annahme, dass die Anzahl der Neutronen und Protonen gleich ist, d. h. dass $N = Z = A/2$ ist. Es wird dann

$$\varrho_n = \varrho_p = \frac{1}{2} \varrho \quad \text{und} \quad \omega_n = \omega_p = \omega, \quad (122)$$

wo ϱ die gesamte Nucleonendichte bezeichnet.

Für die Energie dieses vereinfachten Kernmodells erhält man

$$E = \frac{2\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^3} \int \omega^5 dv - \frac{6\lambda \varepsilon_0}{r_0^3} \int f(\omega, \omega) dv, \quad (123)$$

wobei ω der Nebenbedingung

$$\int \varrho dv = \frac{2}{3\pi^2 r_0^3} \int \omega^3 dv = A \quad (124)$$

zu genügen hat.

Das Variationsprinzip lautet nun

$$\delta(E + bA) = 0, \quad (125)$$

wo b einen Lagrangeschen Multiplikator bezeichnet.

Aus (125) erhält man den Zusammenhang

$$\frac{10\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{5/3}} \omega^4 - 6\lambda \varepsilon_0 \frac{\partial f}{\partial \omega} + b \frac{2}{3\pi^2} \omega^3 = 0. \quad (126)$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ eine Funktion von ω allein ist und der Lagrangesche Multiplikator b eine Konstante ist, ergibt sich hieraus, dass ω , d. h. ϱ , konstant ist.

Dieses Resultat, das wir hier aus dem Variationsprinzip hergeleitet haben, hätten wir auch ohne jede Rechnung erhalten können. Aus dem Energieausdruck (123) der nullten Näherung ergibt sich nämlich, dass die Energiedichte, d. h. die Energie pro Volumeneinheit an jedem Punkt nur von der Teilchendichte an diesem Punkt selbst abhängt und von der Dichteverteilung der Umgebung des fraglichen Punktes völlig unabhängig ist. Es ist also im Kern kein Punkt energetisch ausgezeichnet, es wird sich daher — in Übereinstimmung mit unserem weiter oben erhaltenen Resultat — im ganzen Kern überall dieselbe Dichte einstellen und zwar diejenige, die zur tiefsten Energie führt.

Mit der konstanten Nucleonendichte folgt aus der Normierungsbedingung (124), dass sich die Dichte nur auf eine Kugel erstreckt und ausserhalb der Kugel überall Null ist. Wenn man das Volumen dieser Kugel mit Ω bezeichnet, so ergibt sich aus (124) die Beziehung

$$\varrho = \frac{2}{3\pi^2 r_0^3} \omega^3 = \frac{A}{\Omega}. \quad (127)$$

Mit Rücksicht darauf, dass ω konstant ist, erhält man mit Hilfe von (127) aus (123) für die Energie des Kerns

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\mu_K \varepsilon_0}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^3} \omega^5 \Omega - \frac{6\lambda \varepsilon_0}{r_0^3} f(\omega, \omega) \Omega = \\ &= A \varepsilon_0 \left\{ \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{2/3}} \omega^2 - \frac{3\lambda}{8\pi} \frac{1}{\omega^3} [6\omega^4 - \omega^2 + \frac{1}{4} (1 + 12\omega^2) \ln(1 + 4\omega^2) - \right. \\ &\quad \left. - 8\omega^3 \operatorname{arctg} 2\omega] \right\}. \end{aligned} \quad (128)$$

Der einzige frei verfügbare Parameter in diesem Ausdruck ist λ . Wenn man

$$\lambda = 3,31 \quad (129)$$

setzt, so erhält man für das Energieminimum die Beziehung

$$E_0 = -0,50 A \varepsilon_0 = -8,5 A \text{ MeV}, \quad (130)$$

die abgesehen von den leichtesten Kernen, durch den empirischen Befund im Mittel gut bestätigt wird.

Das Energieminimum liegt beim folgenden Wert von ω

$$\omega = 2,39, \quad (131)$$

dem die Dichte

$$\varrho = 0,922 \frac{1}{r_0^3} \quad (132)$$

entspricht.

Für den Grenzradius R , bis zu welchem die Dichte ausläuft, erhält man mit $\omega = \omega_0$ aus (124)

$$R = \frac{(9\pi)^{1/3}}{2\omega_0} A^{1/3} r_0 = 0,637 A^{1/3} r_0. \quad (133)$$

Der Grenzradius ergibt sich also in dieser Näherung in Übereinstimmung mit dem empirischen Kernradius zu $A^{1/3}$ proportional und hat auch die richtige Grössenordnung. Darauf, inwiefern es zulässig ist diesen Grenzradius mit dem empirischen Kernradius unmittelbar zu vergleichen, kommen wir am Ende des § 9 zu sprechen.

§ 9. Berechnung der Dichteverteilung im Kern und der Energie des Kerns mit dem Ritzschen Verfahren

Wir wenden uns nun der Lösung des vollständigen Variationsproblems (64) mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens zu. Das Ritzsche Verfahren besteht darin, dass man die unbekannt Funktionen — in unserem Fall die Dichteverteilungen ϱ_n und ϱ_p bzw. ω_n und ω_p — in einer den Randbedingungen genügenden Form mit zunächst unbestimmten Parametern ansetzt. Mit diesem Ansatz berechnet man dann die Energie als Funktion dieser Parameter und bestimmt die Parameter aus der Minimumsforderung der Energie, womit sich das ganze Verfahren auf ein gewöhnliches Minimumproblem reduziert. Zur exakten Bestimmung der gesuchten Funktionen hätte man unendlich viele, zunächst unbestimmte Parameter einzuführen, indem man z. B. die gesuchte Funktion nach zweckmässig gewählten Funktionen f_i mit zunächst unbestimmten Koeffizienten in eine Reihe entwickelt, also die gesuchte Funktion in der Form $\sum_i c_i f_i$ ansetzt. Die Funktionen f_i müssen dieselben Randbedingungen erfüllen, wie die gesuchte Funktion, können aber ansonsten beliebig gewählt werden. Da man im allgemeinen den Verlauf der gesuchten Funktion ungefähr kennt, geht man praktisch in der Weise vor, dass man die gesuchte Funktion in einer Form ansetzt, die der exakten möglichst nahe kommt und kann so meistens schon mit einer kleinen Anzahl von Parametern die unbekannt Funktion gut

annähern. Das Integral, dessen Minimum man aufsucht — im vorliegenden Fall die Energie — nähert sich relativ rasch dem exakten Wert und zwar bedeutend schneller als die approximierenden Funktionen sich der exakten Lösung anpassen. Die Energiewerte, die man mit den Näherungslösungen des Ritzschen Variationsverfahrens erhält, liegen naturgemäss höher als der exakte Energiewert.

Unser Problem ist kugelsymmetrisch, so dass wir nur eine unabhängige Variable, nämlich die Entfernung vom Kernmittelpunkt r haben. Es erweist sich als zweckmässig statt r die dimensionslose Variable

$$x = \frac{1}{3^{1/2}} a \frac{r}{r_0} \quad (134)$$

einzuführen, wo a einen Variationsparameter bezeichnet.¹⁹

Für ω_n und ω_p machen wir nun folgenden Ansatz

$$\omega_n = \omega_{n0} e^{-x^2} \sum_{i=0}^m \gamma_{ni} x^{2i}, \quad \omega_p = \omega_{p0} e^{-x^2} \sum_{i=0}^m \gamma_{pi} x^{2i}, \quad (135)$$

wo ω_{n0} und ω_{p0} Normierungsfaktoren sind und die Koeffizienten γ_{ni} , sowie γ_{pi} weitere Variationsparameter bezeichnen; die Koeffizienten γ_{n0} und γ_{p0} sind gleich 1 zu setzen. Die Normierungsfaktoren sind durch die Normierungsbedingungen (116) und (117) festgelegt. Die Variationsparameter a , γ_{ni} und γ_{pi} werden aus der Minimumsforderung der Energie bestimmt. Diese Ansätze erfüllen die Randbedingungen, denn einerseits genügen die Funktionen (135), wie sofort zu sehen ist, den Bedingungsgleichungen (121) und andererseits garantiert der Faktor e^{-x^2} in ω_n und ω_p das Verschwinden dieser Funktionen im Unendlichen.

Für $m = 1, 2, 3, \dots$, d. h. bei Berücksichtigung von 1, 2, 3, ... Gliedern der Summen in den Ausdrücken (135) erhält man einen schrittweise wachsenden Grad der Näherung. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, bei dem alle Koeffizienten γ_{ni} und γ_{pi} , mit Ausnahme von γ_{n0} und γ_{p0} , gleich Null sind. Man hat dann

$$\omega_n = \omega_{n0} e^{-x^2}, \quad \omega_p = \omega_{p0} e^{-x^2}. \quad (136)$$

Dies bedeutet, dass wir die Dichteverteilung der Neutronen und Protonen als gleich ansetzen und einen Unterschied in den Dichtefunktionen nur insofern zulassen, dass wir diese gemäss der verschiedenen Anzahl der Neutronen und Protonen verschieden normieren.

Die Ansätze (136) enthalten nur einen einzigen Variationsparameter, nämlich den Parameter a , der gemäss (134) implicite in x enthalten ist und der naturgemäss auch in die Normierungsfaktoren ω_{n0} und ω_{p0} eingeht, für die sich aus (116) und (117) die folgenden Ausdrücke ergeben

$$\omega_{n0} = (9\pi)^{1/6} N^{1/3} a, \quad \omega_{p0} = (9\pi)^{1/6} Z^{1/3} a. \quad (137)$$

Der folgenden halber erweist es sich zur Abkürzung und zur Vereinfachung einiger Formeln als zweckmässig die folgenden Bezeichnungen einzuführen

$$c_n = 2\omega_{n_0} = 2(9\pi)^{1/6} N^{1/3} a, \quad (138)$$

$$c_p = 2\omega_{p_0} = 2(9\pi)^{1/6} Z^{1/3} a, \quad (139)$$

$$c = 2(9\pi)^{1/6} \left(\frac{N+Z}{2} \right)^{1/3} a = 2(9\pi)^{1/6} \left(\frac{A}{2} \right)^{1/3} a, \quad (140)$$

$$c_s = \frac{1}{2} (c_n + c_p), \quad (141)$$

$$c_d = \frac{1}{2} (c_n - c_p). \quad (142)$$

Es ist weiterhin zweckmässig ω_n und ω_p sowie ϱ_n und ϱ_p mit den Parametern c_n bzw. c_p weiterhin ϱ_n und ϱ_p auch noch als Funktionen von r darzustellen. Es ist

$$\omega_n = \frac{1}{2} c_n e^{-x^2}, \quad \omega_p = \frac{1}{2} c_p e^{-x^2} \quad (143)$$

und

$$\varrho_n = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \omega_n^3 = \frac{1}{24\pi^2 r_0^3} c_n^3 e^{-3x^2} = \frac{N}{\pi^{3/2} r_0^3} a^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2}, \quad (144)$$

$$\varrho_p = \frac{1}{3\pi^2 r_0^3} \omega_p^3 = \frac{1}{24\pi^2 r_0^3} c_p^3 e^{-3x^2} = \frac{Z}{\pi^{3/2} r_0^3} a^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2}. \quad (145)$$

Nach all' diesen Vorbereitungen kommen wir nun auf unser ursprüngliches Ziel, auf die Berechnung der Energie als Funktion des Variationsparameters zu sprechen und zwar erweist es sich als zweckmässig statt a die zu a proportionale Grösse c als Variationsparameter einzuführen. Wir gehen von den Formeln (107)—(113) aus. Die Energieanteile E_K , E_J , E_C und E_R kann man nach der Durchführung elementarer Integrationen sehr einfach als Funktion von c angeben.

Für E_K ergibt sich

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{4 \cdot 3^{3/2} \pi \kappa_K k}{(3\pi^2)^{5/3} r_0^5} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty (\omega_n^5 + \omega_p^5) x^2 dx = \\ &= \frac{3}{20} \left(\frac{3}{5} \right)^{1/2} \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{2/3}} 2^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} k A c^2 \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (146)$$

Der Ausdruck $2^{2/3}(N^{5/3} + Z^{5/3})/A^{5/3}$, der für $N = Z$ gleich 1 ist, lässt sich vereinfachen. Wenn man den Neutronenüberschuss mit n bezeichnet, d. h.

$$n = N - Z \quad (147)$$

setzt und den Ausdruck nach n/A in eine Reihe entwickelt, so erhält man

$$2^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} = 1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2 + \frac{5}{243} \left(\frac{n}{A}\right)^4 + \dots \quad (148)$$

Wenn man diese Reihe nach dem zweiten Glied abbricht und den so gewonnenen Ausdruck in (146) einsetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{3}{20} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \frac{\mu_K}{(3\pi^2)^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2\right] kAc^2\varepsilon_0 = \\ &= 0,04630 \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2\right] kAc^2\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (149)$$

Für E_J erhält man

$$\begin{aligned} E_J &= \frac{12 \cdot 3^{1/2} \kappa_J}{\pi r_0^3} \frac{1}{a} \int_0^\infty \left[\omega_n \left(\frac{d\omega_n}{dx}\right)^2 + \omega_p \left(\frac{d\omega_p}{dx}\right)^2 \right] x^2 dx = \\ &= \frac{3\mu_J}{(18\pi)^{1/3}} A^{1/3} c^2 \varepsilon_0 = 0,1297 A^{1/3} c^2 \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (150)$$

Den Energieanteil E_C kann man nach einfacher Rechnung in folgender Form darstellen

$$E_C = \frac{2e}{3\pi r_0^3} \int_0^\infty V(x) \omega_p^3(x) x^2 dx = \frac{e^2}{(2\pi)^{1/2} r_0} Z^2 a = \frac{1}{(32)^{4/3} (72\pi^4)^{1/6}} \left(\frac{2Z}{A}\right)^2 A^{5/3} c \varepsilon_0, \quad (151)$$

wo $V(x)$ das durch (93) definierte elektrostatische Potential der elektrischen Ladungsdichte $e\rho_p = \frac{e}{3\pi^2 r_0^3} \omega_p^3$ an der Stelle x ist. Wenn man den Faktor $2Z/A$ mit

Hilfe von (147) und des Zusammenhanges $A = N + Z$ mit A und n ausdrückt, so ergibt sich

$$\frac{2Z}{A} = 1 - \frac{n}{A}. \quad (152)$$

Nach Einsetzen in (151) folgt

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{(32)^{4/3} (72\pi^4)^{1/6}} \left[1 - 2 \frac{n}{A} + \left(\frac{n}{A}\right)^2\right] A^{5/3} c \varepsilon_0 = \\ &= 0,002250 \left[1 - 2 \frac{n}{A} + \left(\frac{n}{A}\right)^2\right] A^{5/3} c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (153)$$

Für E_R erhält man

$$\begin{aligned} E_R &= - \frac{3^{3/2} e^2}{\pi^2 r_0} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty \omega_p^4 x^2 dx = - \frac{27}{32\pi} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/6} \frac{e^2}{r_0} Z^{4/3} a = \\ &= - \frac{27}{2048 \cdot 3^{1/2} \cdot \pi} \left(\frac{2Z}{A}\right)^{4/3} A c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (154)$$

Den Faktor $(2Z/A)^{4/3}$ kann man nach n/A in eine Reihe entwickeln. Mit Rücksicht auf den Zusammenhang (152) ergibt sich

$$\left(\frac{2Z}{A}\right)^{4/3} = 1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2 + \dots \quad (155)$$

Wenn man diese Reihe nach dem dritten Glied abbricht und den so gewonnenen Ausdruck in (154) einsetzt, so folgt

$$\begin{aligned} E_R &= -\frac{27}{2048 \cdot 3^{1/2} \cdot \pi} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2 \right] A c \varepsilon_0 = \\ &= -0,002423 \left[1 - \frac{4}{3} \frac{n}{A} + \frac{2}{9} \left(\frac{n}{A}\right)^2 \right] A c \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (156)$$

Wir haben nun noch die Austauschenergien E_A^{np} , E_A^{nn} und E_A^{pp} als Funktionen von c zu berechnen, was etwas umständlicher ist. Aus (109), (110) und (111) ergibt sich mit Rücksicht auf (78) mit den Bezeichnungen (138)–(142)

$$\begin{aligned} E_A^{np} &= -16 \cdot 3^{3/2} \pi \frac{\gamma}{r_0} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_n, \omega_p) x^2 dx = \\ &= -\frac{24}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left\{ \frac{3\pi^{1/2}}{512} (c_n^3 c_p + c_n c_p^3) - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_n c_p + \right. \\ &+ \frac{1}{4} [L(c_s) - L(c_d)] + \frac{3}{8} (c_n^2 + c_p^2) [K(c_s) - K(c_d)] - \\ &- \frac{3}{64} (c_n^4 - 2c_n^2 c_p^2 + c_p^4) [H(c_s) - H(c_d)] - \\ &\left. - \frac{1}{2} (c_n^3 + c_p^3) M(c_s) + \frac{1}{2} (c_n^3 - c_p^3) M(c_d) \right\}, \end{aligned} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} E_A^{nn} &= -4 \cdot 3^{3/2} \pi \frac{\gamma}{r_0} \frac{s}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_n, \omega_n) x^2 dx = \\ &= -\frac{6}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} s A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} c_n^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_n^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} L(c_n) + \frac{3}{4} c_n^2 K(c_n) - c_n^3 M(c_n) \right], \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} E_A^{pp} &= -4 \cdot 3^{3/2} \pi \frac{\gamma}{r_0} \frac{s}{a^3} \int_0^\infty f(\omega_p, \omega_p) x^2 dx = \\ &= -\frac{6}{\pi} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} s A \lambda \varepsilon_0 \frac{1}{c^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} c_p^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} c_p^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} L(c_p) + \frac{3}{8} c_p^2 K(c_p) - c_p^3 M(c_p) \right], \end{aligned} \quad (159)$$

wo L , K , H und M die folgenden Integrale

$$L(q) = \int_0^{\infty} x^2 \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (160)$$

$$K(q) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (161)$$

$$H(q) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx, \quad (162)$$

$$M(q) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} \operatorname{arctg}(1 + qe^{-x^2}) dx \quad (163)$$

bezeichnen und der Parameter q statt c_s , c_d , c_n und c_p steht.

Für $q > 1$ kann man diese Integrale geschlossen nicht auswerten, sondern man muss zu ihrer Auswertung numerische oder graphische Methoden anwenden.

Wir haben die Integrale $L(q)$, $K(q)$ und $M(q)$ in dem für unsere Berechnungen wichtigen Intervall $1,3 < q < 11$ für 18 verschiedene q -Werte und das Integral $H(q)$, das — wie wir sehen werden — in dem Ausdruck (157) nur eine untergeordnete Bedeutung besitzt, für 8 verschiedene q -Werte auf numerischen Wege sehr genau bestimmt. Die Resultate sind im mathematischen Anhang in der Tabelle 4 dargestellt. Für die Integrale $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$ kann man einfache Näherungsformeln herleiten, für die in dem für die Rechnungen wichtigsten q -Intervall der maximale Fehler 0,7% beträgt; das Integral $L(q)$ lässt sich durch einen brauchbaren Näherungsausdruck darstellen. Wir kommen hierauf ebenfalls im Anhang zu sprechen.

Für $q \cong 1$ kann man die Integrale durch die folgenden Reihen darstellen

$$L(q) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k)^{5/2}} q^{2k}, \quad (164)$$

$$K(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(2k+2)^{3/2}} q^{2k}, \quad (165)$$

$$H(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(2k+4)^{3/2}} q^{2k}, \quad (166)$$

$$M(q) = \frac{\pi^{1/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+2)^{3/2}} q^{2k-1}. \quad (167)$$

Wir kehren nun zu den Ausdrücken (157)—(159) zurück. Unser Ziel ist diese Ausdrücke umzuformen und E_A^{np} , E_A^{nn} , sowie E_A^{pp} als Funktionen von c darzustellen. Dies kann schrittweise folgendermassen geschehen.

Wir befassen uns zuerst mit E_A^{np} und wollen im Ausdruck von E_A^{np} statt c_n und c_p zunächst die Parameter c_s und c_d einführen. Mit Rücksicht auf (138), (139), (141) und (142) bestehen die Beziehungen

$$c_n = c_s + c_d \quad \text{und} \quad c_p = c_s - c_d \quad (168)$$

mit denen man die in (157) vorkommenden nachstehenden Ausdrücke folgendermassen umformen kann

$$\left. \begin{aligned} c_n^3 c_p + c_n c_p^3 &= 2c_s^4 - 2c_d^4, \\ c_n c_p &= c_s^2 - c_d^2, \\ c_n^2 + c_p^2 &= 2c_s^2 + 2c_d^2, \\ c_n^4 + c_p^4 - 2c_n^2 c_p^2 &= 16c_s^2 c_d^2, \\ c_n^3 + c_p^3 &= 2c_s^3 + 6c_s c_d^2, \\ c_n^3 - c_p^3 &= 6c_s^2 c_d + 2c_d^3. \end{aligned} \right\} (169)$$

Wenn man zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$F(q) = \frac{36}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q^3} \left[\frac{6\pi^{1/2}}{512} q^4 - \frac{1}{32} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} q^2 + \frac{1}{4} L(q) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} q^2 K(q) - q^3 M(q) \right], \quad (170)$$

$$S(q) = \frac{72}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{q^3} \left[\frac{1}{4} q^4 H(q) + q^3 M(q) - \frac{1}{4} q^2 K(q) \right] \quad (171)$$

einführt, so kann man E_A^{np} mit den Zusammenhängen (169) wie folgt schreiben

$$E_A^{np} = - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) - \frac{2}{3} \left(\frac{c_d}{c} \right)^3 F(c_d) \frac{c_s}{c} \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 S(c_s) + \right. \\ \left. + \frac{c_d}{c} \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 S(c_d) \right] A \lambda \varepsilon_0. \quad (172)$$

Eine wesentliche Vereinfachung dieses Ausdruckes kann mit Rücksicht auf die folgenden beiden Umstände erfolgen. Erstens ist von den in diesen Ausdruck eingehenden Parametern c , c_s und c_d der Parameter c_d von kleinerer Grössenordnung als c_s und c , die von gleicher Grössenordnung sind;²⁰ und zwar ist durchweg $c_d/c < 1/10$; für $N = Z$ verschwindet c_d . Zweitens ist in dem für die weiteren Berechnungen wichtigen Bereich ($c \cong 6,5$) der Parameter c_d stets kleiner als 1. Mit Rücksicht auf all' das lässt sich E_A^{np} nach Potenzen von c_d/c in eine rasch konvergierende Reihe entwickeln, die man, wie sich zeigt, ohne einen merklichen Fehler zu begehen schon nach dem Glied mit $(c_d/c)^2$ abbrechen kann.

Wie man sich leicht überzeugt, ist das wesentliche Glied in (172) das erste Glied, die drei nachstehenden Glieder sind Korrektionsglieder.²¹ Wir wollen nun zunächst diese Korrektionsglieder nach c_d/c entwickeln.

Beim zweiten Glied in (172) geht die Entwicklung von $F(c_d)$ auf die Entwicklung von $L(c_d)$, $K(c_d)$ und $M(c_d)$ zurück, die an Hand der Formeln (164), (165) und (167) vorgenommen werden kann. Es ergibt sich, dass in $F(c_d)$ das erste nicht verschwindende Glied von der Grössenordnung c_d^3 ist. Mit Rücksicht hierauf wird das zweite Glied in (172) von der Grössenordnung $c_d^3(c_d/c)^3$ und ist neben dem ersten Glied gänzlich unbedeutend, kann also gestrichen werden.

Das dritte Glied in (172) muss nicht eigenst nach c_d/c entwickelt werden, da es c_d nur in dem Faktor $(c_d/c)^2$ enthält. Man kann aber hier — da es sich nur um ein Korrektionsglied handelt — noch die Vereinfachung durchführen, dass man in diesem Glied statt c_s überall c setzt. Die Differenz von c_s und c ist nämlich im wesentlichen zu c_d^2 proportional,²² der Unterschied zwischen c_s und c würde sich also in diesem Korrektionsglied nur in einer zu $(c_d/c)^4$ proportionalen Korrektion äussern, die vernachlässigt werden kann. Wir haben also

$$\frac{c_s}{c} \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 S(c_s) = \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 S(c). \quad (173)$$

Im vierten Glied in (172) kann man die Integrale $K(c_d)$, $H(c_d)$ und $M(c_d)$ wieder mit Hilfe der Formeln (165)—(167) nach c_d entwickeln. Mit Rücksicht darauf, dass man auch hier, gerade so wie im dritten Glied in (172) $c_s = c$ setzen kann, ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\frac{c_d}{c} \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 S(c_d) = \tau c \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 \quad (174)$$

mit

$$\tau = \frac{72}{\pi} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{3\pi^{1/2}}{128} = \frac{27 \cdot 3^{1/2}}{16\pi} = 0,93037. \quad (175)$$

Das nächste nicht verschwindende Glied in der Entwicklung des auf der linken Seite von (174) stehenden Ausdruckes wäre das Glied mit $(c_d/c)^4$, das aber neben dem auf der rechten Seite von (174) stehenden Glied unbedeutend ist.

Mit Berücksichtigung all' dieser Resultate ergibt sich also aus (172)

$$E_A^{np} = -\frac{2}{3} \left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) A \lambda \varepsilon_0 + [S(c) - \tau c] \left(\frac{c_d}{c} \right)^2 A \lambda \varepsilon_0. \quad (176)$$

Bevor wir in diesem Ausdruck $F(c_s)$ von der Variable c_s auf die Variable c transformieren, ist es zweckmässig auch die Energieanteile E_A^{nn} und E_A^{pp} in Betracht zu ziehen und diese Transformation dann im Ausdruck der gesamten Austauschenergie durchzuführen.

Die durch (158) und (159) definierten Energieausdrücke E_A^{nn} und E_A^{pp} lassen sich mit der Bezeichnung (170) in folgender Form schreiben

$$E_A^{nn} = -\frac{s}{6} \left(\frac{c_n}{c}\right)^3 F(c_n) A \lambda \varepsilon_0, \quad E_A^{pp} = -\frac{s}{6} \left(\frac{c_p}{c}\right)^3 F(c_p) A \lambda \varepsilon_0. \quad (177)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (168) kann man diese Ausdrücke von den Variablen c_n und c_p auf die Variable c_s transformieren und zugleich E_A^{nn} und E_A^{pp} nach c_d/c in eine Reihe entwickeln, die wir wieder nach dem Glied mit $(c_d/c)^2$ abbrechen. Nach einfacher Rechnung folgt

$$E_A^{nn} + E_A^{pp} = -\frac{s}{3} \left(\frac{c_s}{c}\right)^3 F(c_s) A \lambda \varepsilon_0 - [F(c) + cF'(c) + \frac{1}{6} c^2 F''(c)] \left(\frac{c_d}{c}\right)^2 A \lambda \varepsilon_0; \quad (178)$$

hier ist wieder das erste Glied das wesentliche und das zweite das Korrektionsglied, in dem geradeso wie in (173) und (174) wieder $c_s = c$ gesetzt wurde; F' und F'' bezeichnet die erste bzw. zweite Ableitung von $F(c)$ nach c . Im Korrektionsglied wurde der Korrektionsfaktor s mit 1 gleichgesetzt.

Mit (176) und (178) können wir nun die gesamte Austauschenergie folgendermassen darstellen

$$E_A = E_A^{np} + E_A^{nn} + E_A^{pp} = -\left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right) \left(\frac{c_s}{c}\right)^3 F(c_s) A \lambda \varepsilon_0 + \left\{ S(c) - \tau c - [F(c) + cF'(c) + \frac{1}{6} c^2 F''(c)] \right\} \left(\frac{c_d}{c}\right)^2 A \lambda \varepsilon_0. \quad (179)$$

Wir müssen also das erste Glied noch von der Variable c_s auf die Variable c transformieren.

Bevor wir diesen letzten Schritt tun und mit Hilfe der Identität $c_s = c + (c_s - c)$ das erste Glied auf der rechten Seite in (179) nach der kleinen Grösse $(c_s - c)/c$ in eine Reihe entwickeln und zugleich statt c_s die Variable c einführen, ist es zweckmässig c_d/c und $(c_s - c)/c$ mit dem Neutronenüberschuss $n = N - Z$ und der Massenzahl $A = N + Z$ darzustellen, was in einer sehr einfachen Form geschehen kann.

Hierzu drücken wir N und Z durch n und A aus; man hat

$$N = \frac{1}{2} (A + n), \quad Z = \frac{1}{2} (A - n). \quad (180)$$

Wenn man diese Ausdrücke in (138) bzw. (139) einsetzt, $N^{1/3}$ bzw. $Z^{1/3}$ nach n/A in eine Reihe entwickelt und die Reihe nach dem in n/A linearen Glied abbricht, so folgt für c_d/c

$$\frac{c_d}{c} = \frac{c_n - c_p}{2c} = \frac{1}{3} \frac{n}{A}. \quad (181)$$

Das nächste nichtverschwindende Glied der Entwicklung wäre von der Grössenordnung $(n/A)^3$ und kann vernachlässigt werden.

Zur Berechnung von $(c_s - c)/c$ entwickeln wir ganz ähnlich wie zuvor c_s nach n/A in eine Reihe. Wenn man die Reihe nach dem Glied mit $(n/A)^2$ abbricht, so hat man

$$c_s = \frac{1}{2} (c_n + c_p) = c - c \frac{1}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2, \quad (182)$$

$$\frac{c_s - c}{c} = -\frac{1}{9} \left(\frac{n}{A} \right)^2 = -\left(\frac{c_d}{c} \right)^2. \quad (183)$$

Das nächste nichtverschwindende Glied der Entwicklung ist zu $(n/A)^4$ proportional und kann vernachlässigt werden. Während also c_d/c zu n/A proportional ist, erweist sich $(c_s - c)/c$ zu $(n/A)^2$ proportional.

Mit Rücksicht hierauf und auf unsere Festsetzung, dass wir im Energieausdruck Glieder von kleinerer Grössenordnung als $(c_d/c)^2 \sim \frac{1}{10} (n/A)^2$ vernachlässigen, können wir die Entwicklung des Energieausdruckes (179) nach $c_s - c$ nach dem in $c_s - c$ linearen Glied abbrechen. Es lässt sich also der von c_s abhängige Anteil des ersten Gliedes in (179) folgendermassen darstellen

$$\left(\frac{c_s}{c} \right)^3 F(c_s) = F(c) - \frac{1}{3} F'(c) \left(\frac{n}{A} \right)^2 - \frac{1}{9} c F''(c) \left(\frac{n}{A} \right)^2. \quad (184)$$

In diesem Ausdruck ist das erste Glied das wesentliche, die Glieder, die $(n/A)^2$ enthalten, sind Korrektionsglieder.

Nach Einsetzen dieses Ausdruckes in (179) kann man im Korrektionsglied wieder den Korrektionsfaktor s mit 1 gleichsetzen. Wenn man weiterhin in dem so gewonnenen Ausdruck c_d/c mit Hilfe von (181) durch n/A ausdrückt, so erhält man schliesslich für E_A als Funktion von c den Ausdruck

$$E_A = - \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3} \right) F(c) A \lambda \varepsilon_0 + \frac{1}{9} \left[S(c) - \tau c + 2F(c) - \frac{1}{6} c^2 F''(c) \right] \left(\frac{n}{A} \right)^2 A \lambda \varepsilon_0. \quad (185)$$

Die für diese Energie ausschlaggebende Funktion $F(c)$ ist für 18 verschiedene c -Werte bis zu 4 Stellen genau in der Tabelle 4 im Anhang angegeben.

Durch einige orientierende Berechnungen lässt sich leicht feststellen, dass die aus der Minimumforderung der Energie zu bestimmenden c -Werte von den ganz leichten bis zu den schwersten Kernen alle in das Intervall

$$5,4 < c < 7,5 \quad (186)$$

fallen; wir können uns also im folgenden auf die c -Werte dieses Intervalles beschränken. Zur Vereinfachung der Rechnungen kann man nun so vorgehen,

dass man die Funktionen $F(c)$ und $S(c)$, die die Integrale (160)—(163) enthalten, in diesem Intervall durch möglichst einfache Funktionen approximiert. Die Approximation von $F(c)$ hat man mit besonderer Sorgfalt durchzuführen, denn durch $F(c)$ wird der wesentliche Anteil von E_A dargestellt. Es zeigt sich nun, dass gerade diese Approximation sehr einfach durchzuführen ist; da $F(c)$ im Intervall (186) angenähert linear verläuft. Man vgl. hierzu Fig. 2, in der

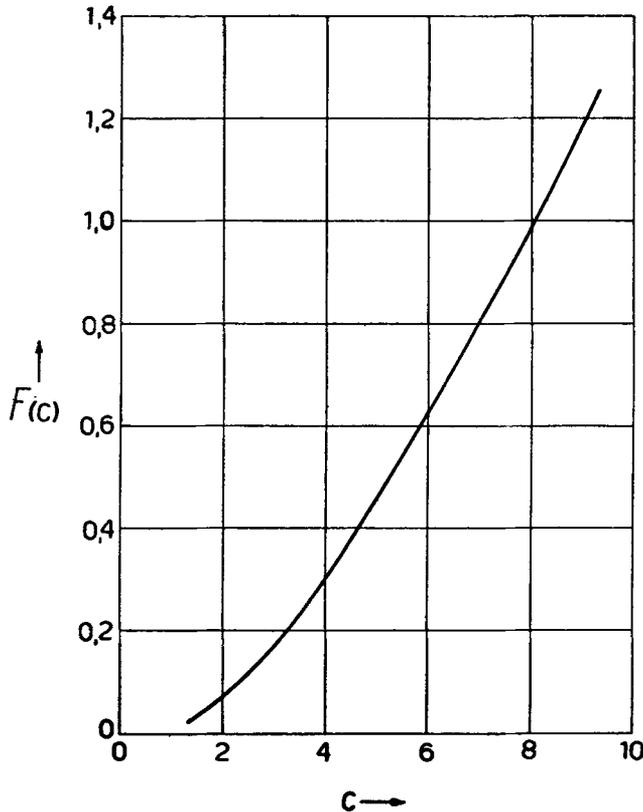


Fig. 2. Verlauf der Funktion $F(c)$.

$F(c)$ graphisch dargestellt ist. Man findet, dass man — ohne einen merklichen Fehler in den Resultaten zu begehen — die beiden Funktionen in folgender Form darstellen kann

$$F(c) = a_1 c^2 + a_2 c + a_3, \quad (187)$$

$$S(c) = b_1 c^2 + b_2 c. \quad (188)$$

Für die Koeffizienten ergibt sich mit der Methode der kleinsten Quadrate

$$\left. \begin{array}{ll} a_1 = 0,006238, & b_1 = 0,05375, \\ a_2 = 0,09723, & b_2 = 0,93456. \\ a_3 = -0,1858, & \end{array} \right\} (189)$$

Mit dieser Wahl der Koeffizienten approximieren im Intervall (186) beide Polynome die exakten Funktionen ganz ausgezeichnet;²³ der maximale Fehler ist in beiden Fällen kleiner als 0,2%. Es sei noch erwähnt, dass im Korrektionsglied von E_A die zweite Ableitung von $F(c)$ eingeht, und für diese die Approximation naturgemäss schlechter ist als für $F(c)$. Dies ist jedoch — da es sich nur um ein Korrektionsglied handelt — nicht von Bedeutung.

Mit den Funktionen (187) und (188) und nach Einsetzen des Wertes $s = 1 - \frac{2}{A}$ für den Korrektionsfaktor ergibt sich nun E_A im Intervall (186) in folgender endgültiger Form

$$\begin{aligned}
 E_A = & - \left\{ \left(1 - \frac{2}{3A} \right) (a_1 c^2 + a_2 c + a_3) - \frac{1}{9} \left[\left(\frac{5}{3} a_1 + b_1 \right) c^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2a_2 + b_2 - \tau) c + 2a_3 \right] \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right\} A \lambda \varepsilon_n = \\
 = & - \left[\left(1 - \frac{2}{3A} \right) (0,006238 c^2 + 0,09723 c - 0,1858) - \right. \\
 & \left. - (0,007127 c^2 + 0,02208 c - 0,04129 \left(\frac{n}{A} \right)^2) \right] A \lambda \varepsilon_0.
 \end{aligned} \tag{190}$$

Durch Summation der Energieausdrücke (149), (150), (153), (156) und (190) kann man die Gesamtenergie E des Kerns als Funktion von c in folgender Form darstellen

$$E = E_K + E_J + E_A + E_C + E_R = (P_1 c^2 - P_2 c + P_3) A \varepsilon_0, \tag{191}$$

wo P_1 , P_2 und P_3 nur von der Massenzahl A und vom Verhältnis n/A abhängige Konstanten von der folgenden Form sind

$$P_1 = \alpha_0 + \alpha_2 \left(\frac{n}{A} \right)^2, \quad P_2 = \beta_0 + \beta_1 \frac{n}{A} + \beta_2 \left(\frac{n}{A} \right)^2, \quad P_3 = \gamma_0 + \gamma_2 \left(\frac{n}{A} \right)^2, \tag{192}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_0 &= 0,04630 - 0,0062380 \lambda + 0,1297 \frac{1}{A^{2/3}} - (0,1852 - 0,004159 \lambda) \frac{1}{A}, \\
 \alpha_2 &= 0,02572 + 0,007127 \lambda - 0,1029 \frac{1}{A}, \\
 \beta_0 &= 0,09723 \lambda + 0,002423 - 0,002250 A^{2/3} - 0,06482 \lambda \frac{1}{A}, \\
 \beta_1 &= -0,003231 + 0,004500 A^{2/3}, \\
 \beta_2 &= -0,02208 \lambda + 0,00054 - 0,002250 A^{2/3}, \\
 \gamma_0 &= 0,1858 \lambda - 0,1239 \lambda \frac{1}{A}, \\
 \gamma_2 &= 0,04129 \lambda,
 \end{aligned} \right\} \tag{193}$$

wobei bemerkt sei, dass wir für den Korrektionsfaktor k den Wert $k = 1 - \frac{4}{A}$ einsetzen. Die Grössen $\alpha_0, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0$ und γ_2 sind also Funktionen von A allein. In den Ausdrücken P_1, P_2 und P_3 sind die Glieder, die n/A oder $(n/A)^2$ enthalten, wieder Korrektionsgrössen, die mit verschwindendem Neutronenüberschuss verschwinden.

Die Bestimmung des Variationsparameters c geschieht aus der Minumumsforderung von E also aus der Gleichung

$$\frac{dE}{dc} = 2P_1c - P_2 = 0, \quad (194)$$

aus der

$$c_0 = \frac{P_2}{2P_1} \quad (195)$$

folgt.

Mit diesem Wert von c erhält man für das Minimum von E den Ausdruck

$$E_0 = - \left(\frac{P_2^2}{4P_1} - P_3 \right) A \varepsilon_0, \quad (196)$$

der geradeso wie c_0 noch eine Funktion von A und n/A ist.

§ 10. Resultate für die Kernenergie und für die Dichteverteilung im Kern

Die Energie des Kerns wird durch E_0 dargestellt. Nach Einsetzen der Ausdrücke (192) und (193) in (196) erhält man E_0 als Funktion der Massenzahl $A = N + Z$ und des Neutronenüberschusses $n = N - Z$. Für ein vorgegebenes A ist also die Kernenergie immer noch eine Funktion von n , die die Energie der Isobaren mit der Massenzahl A darstellt. Das Minimum dieser Funktion entspricht dem stabilsten Isobar mit der Massenzahl A .

Die Reihe dieser stabilsten Kerne, d. h. diejenigen n - oder Z -Werte, bei denen für die vorgegebenen A -Werte das Minimum der Energie liegt, erhält man aus der Forderung

$$\left(\frac{\partial E_0}{\partial n} \right)_A = 0. \quad (197)$$

Um hieraus Z als Funktion von A zu berechnen, entwickeln wir E_0 nach n/A in eine Reihe, die wir nach dem Glied mit $(n/A)^2$ abbrechen. Es ergibt sich

$$E_0 = - \left[\frac{1}{4} \frac{\beta_0^2}{\alpha_0} - \gamma_0 + \frac{1}{2} \frac{\beta_0 \beta_1}{\alpha_0} \frac{n}{A} + \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha_0} (\beta_1^2 + 2\beta_0 \beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \beta_0^2 - 4\alpha_0 \gamma_2) \left(\frac{n}{A} \right)^2 \right] A \varepsilon_0. \quad (198)$$

Wenn man diesen Ausdruck in (197) einsetzt, die Differentiation nach n ausführt und nachher statt n definitionsgemäss $N-Z$ setzt, so erhält man für die Ordnungszahl der stabilsten Kerne den Ausdruck

$$Z_{eff} = \left(1 + \frac{\alpha_0 \beta_0 \beta_1}{\alpha_0 \beta_1^2 + 2\alpha_0 \beta_0 \beta_2 - \alpha_2 \beta_0^2 - 4\alpha_0^2 \gamma_2} \right) \frac{A}{2}. \quad (199)$$

Da die so berechnete Ordnungszahl Z_{eff} nicht ganzzahlig ist, wird man als Ordnungszahl Z des stabilsten Kerns mit der Messenzahl A die zu dieser Zahl am nächsten liegende ganze Zahl und als Neutronenüberschuss den mit diesem ganzzahligen Z aus der Beziehung $n = A - 2Z$ berechneten n -Wert betrachten.

Mit Hilfe dieses Zusammenhanges können wir für jeden A -Wert für den stabilsten Kern die Ordnungszahl Z oder den Neutronenüberschuss $n = A - 2Z$ berechnen. Die Energie E_{00} der stabilsten Kerne erhält man, wenn man für jedes vorgegebene A die Energie mit den so bestimmten auf ganze Zahlen abgerundeten n -Werten aus (196) mit Hilfe von (192) und (193) berechnet.

Allerdings kann man diese Berechnungen nur dann durchführen, wenn man die noch immer unbestimmte Konstante λ festlegt. Wir haben diese so gewählt, dass die berechneten Energien der stabilsten Kerne von den ganz leichten Kernen bis zu den schwersten die möglichst kleinste Abweichung von den entsprechenden empirischen Werten zeigten. Wir wählten für λ den Wert

$$\lambda = 4,140 \quad (200)$$

mit dem unsere Forderung in sehr befriedigender Weise erfüllt wird. Dass der hier erhaltene λ -Wert grösser ist, als der für das Kernmodell mit konstanter Dichte im § 8 erhaltene, ist eine Folge dessen, dass dort die Abstossungsenergien E_J und E_C vernachlässigt wurden, während diese bei der hier durchgeführten genaueren Berechnung in Betracht gezogen sind, demzufolge man diese durch eine grössere Anziehungsenergie, d.h. einen grösseren λ -Wert kompensieren muss.

Die auf ein Teilchen entfallenden berechneten mittleren Energien E_{00}/A der Kerne, die für ein vorgegebenes A die tiefste Energie besitzen (stabilste Isobare), sowie die entsprechenden empirischen Werte,²⁴ weiterhin die c_0 -Werte für diese Kerne, die wir mit c_{00} bezeichnen, sind in der Tabelle I zusammengestellt; E_{00}/A als Funktion von A ist ausserdem in Fig. 3 zusammen mit den empirischen Werten auch graphisch dargestellt. Als empirische mittlere Kernenergie für ein vorgegebenes A haben wir die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie des stabilen Kerns mit tiefster Energie angegeben; für solch' einen A -Wert, für den keine stabilen Kerne existieren, ist die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie des instabilen Kerns mit tiefster Energie angeführt. Wie man aus einem Vergleich sieht, stimmen die berechneten Energien mit den empirischen sehr gut überein. Für die mittelschweren und schweren Kerne

ist die maximale Abweichung der berechneten Energie von der empirischen durchweg kleiner als 7% ; für die leichten Kerne kann die statistische Theorie naturgemäss nur einen Mittelwert der stark schwankenden empirischen Resultate liefern, was von der Theorie auch tatsächlich vorzüglich geleistet wird. Durch die weiter oben erwähnte Abrundung der aus (199) berechneten Z_{eff} -Werte machen sich im Energieverlauf bei den ganz leichten Kernen — wo die Energiedifferenz zwischen den einzelnen Gliedern einer Isobarenreihe relativ

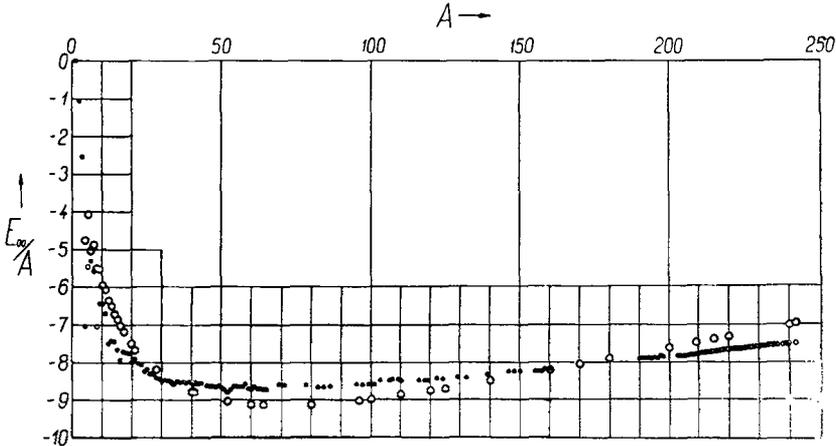


Fig. 3. Die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie E_{00}/A als Funktion von A , für die Kerne die für ein vorgegebenes A die tiefste Energie besitzen.

- berechnete Werte,
- empirische Werte für stabile Kerne,
- ⊗ empirische Werte für instabile Kerne.

gross ist — Schwankungen bemerkbar, und zwar liegen die auf ein Teilchen entfallenden mittleren Energien E_{00}/A der stabilsten Isobare mit nacheinander folgenden A -Werten auf keiner glatten Kurve, sondern sie liegen für gerade Massenzahlen etwas tiefer und für ungerade etwas höher als es dem glatten Verlauf entsprechen würde.

Die Ursache dessen, dass die Theorie auch für leichte Kerne zu so guten Resultaten führt, ist im wesentlichen darin zu suchen, dass wir einerseits den Ausdruck der kinetischen Energie korrigierten, wodurch dieser für $A \leq 4$ in den exakten wellenmechanischen Ausdruck übergeht und andererseits auch an der Austauschenergie gleicher Teilchen eine Korrektur anbrachten, die den Selbsttausch der Teilchen eliminiert.

Bei der Beurteilung der Resultate ist hervorzuheben, dass wir diese mit Hilfe nur eines einzigen empirischen Parameters, des Parameters λ , erzielten.

Mit den Ausdrücken (193) hat die Energieformel (196) nur für $A \geq 4$ Gültigkeit. Man kann nun, mehr zur Orientierung die Berechnungen auch auf

TABELLE 1

Vergleich der berechneten Kernladungszahlen und Kernenergien mit den empirischen Werten für die Kerne, die für ein vorgegebenes A die tiefste Energie besitzen. Sofern für ein vorgegebenes A der Kern mit der empirisch tiefsten Energie mangels experimenteller Daten nicht festzustellen ist, sind die Kernladungszahlen aller stabilen Isobare angeführt; die Kernladungszahlen der instabilen Kerne sind eingeklammert. Die Energien sind in MeV-Einheiten angegeben.

A	Theoretisch				Empirisch	
	c_{00}	Z_{eff}	Z	$-E_{00}/A$	Z	$-E_{00}/A$
4	5,546	1,97	2	4,769	2	7,05
5	5,254	2,45	2	4,098	(2)	5,48
6	5,556	2,94	3	5,039	3	5,32
7	5,470	3,42	3	4,891	3	5,59
8	5,680	3,91	4	5,516	(4)	7,039
9	5,660 ₅	4,39	4	5,542	4	6,442
10	5,814	4,87	5	5,972	5	6,443
11	5,822	5,35	5	6,072	5	6,709
12	5,938	5,83	6	6,372	6	7,515
13	5,959	6,30	6	6,506	6	7,435
14	6,050	6,78	7	6,718	7	7,477
15	6,077	7,26	7	6,871	7	7,671
16	6,149	7,73	8	7,015	8	7,948
17	6,180	8,21	8	7,177	8	7,724
20	6,316	9,62	10	7,498	10	7,999
21	6,350	10,09	10	7,663	10	7,933
28	6,540	13,37	13	8,203	14	8,426
40	6,803	18,89	19	8,788	18	8,556
41	6,796	19,35	19	8,804	19	8,551
52	6,928	24,33	24	9,040	24	8,830
60	7,010	27,90	28	9,126	28	8,752
64	7,042	29,67	30	9,141	28	8,760
80	7,113	36,67	37	9,130	34; 36	—
96	7,150	43,52	44	9,019	40; 42; 44	—
100	7,134	45,21	45	8,984	42; 44	—
110	7,132	49,40	49	8,873	46; 48	—
120	7,157	53,53	54	8,759	50; 52	—
125	7,153	55,58	56	8,697	52	—
140	7,135	61,64	62	8,494	58	—
160	7,105	69,52	70	8,209	64; 66	8,202
170	7,059	73,39	73	8,051	68; 70	—
180	7,042	77,19	77	7,907	72; 74	—
200	7,005	84,63	85	7,610	80	—
209	6,972	87,90	88	7,473	83	7,799
215	6,951	90,05	90	7,384	(85)	7,719
220	6,941	91,83	92	7,308	(86)	7,669
240	6,879	98,78	99	7,014	(96)	7,496
242	6,854	99,46	99	6,973	(96)	7,488

die Kerne $A < 4$ ausdehnen, wobei man zu berücksichtigen hat, dass für $A < 4$ der durch (103) und (104) definierte Korrektionsfaktor k gleich Null zu setzen ist. Bemerkenswerterweise führen diese Berechnungen zu keinesfalls unsinnigen Resultaten, was den weiter oben erwähnten beiden Korrekturen zuzuschreiben ist.

In der Tabelle 1 haben wir auch die mit Hilfe von (199) für die stabilsten Kerne berechneten Z_{eff} -Werte angeführt, die — wie schon erwähnt wurde — im allgemeinen keine ganzen Zahlen sind. Die theoretischen Z -Werte, d. h. die zu Z_{eff} am nächsten stehenden ganzen Zahlen sind in der vierten Spalte der Tabelle zu finden. Zum Vergleich haben wir in der Tabelle auch die empirischen Ordnungszahlen²⁵ der stabilsten Isobare angegeben; sofern das stabilste Isobar mangels experimenteller Daten nicht festzustellen ist, sind die Ordnungszahlen aller stabilen Isobare angeführt. Ein Vergleich der theoretischen Z -Werte mit den empirischen führt auch hier zu einem sehr befriedigenden Resultat; die maximale Abweichung der berechneten Ordnungszahlen von den empirischen beträgt weniger als 8%.

Ausser den hier angegebenen Resultaten ist noch die Grösse der einzelnen Energieanteile von Interesse, aus denen sich die Energie der Kerne zusammensetzt. Diese sind ebenfalls für die stabilsten Isobare in der Tabelle 2 zusammengestellt. Wie aus diesen Daten zu sehen ist, sind mit Ausnahme der leichtesten Kerne die wesentlichsten Energieanteile E_A und E_K , die Energieanteile E_J , E_C und besonders E_R fallen im Verhältnis zu diesen bedeutend geringer ins Gewicht. Eine Ausnahme bilden nur die ganz leichten Kerne, für die neben E_A nicht E_K , sondern E_J das wesentlichste Glied darstellt. Es sei noch bemerkt, dass von den Energieanteilen E_J und E_C , der erstere für leichte und der letztere für schwere

TABELLE 2

Die Gesamtenergie der Kerne und die Anteile, aus denen sich diese zusammensetzt für verschiedene Kerne. Alle Energien in MeV-Einheiten.

A	Z	$-E_A$	E_K	E_J	E_C	$-E_R$	$-E_{00}$
4	2	128,012	0	107,726	2,140	0,914	19,060
5	2	147,935	22,227	104,155	1,882	0,804	20,475
6	3	205,457	48,629	123,770	4,213	1,374	30,219
7	3	234,623	71,490	126,266	3,940	1,285	34,212
8	4	293,192	101,638	142,359	6,957	1,873	44,111
9	4	328,799	127,038	147,039	6,666	1,794	49,850
10	5	388,030	159,736	160,673	10,328	2,396	59,689
12	6	488,073	222,170	178,107	14,295	2,937	76,438
16	8	699,63	357,33	210,20	23,91	4,05	112,24
20	10	922,27	502,90	239,00	35,63	5,21	149,95
40	19	2113,87	1313,80	349,14	109,93	10,47	351,47
60	28	3343,73	2172,66	424,43	214,92	15,81	547,53
80	37	4573,39	3037,24	480,87	345,95	21,14	730,47
100	45	5739,13	3868,94	521,12	476,45	25,78	898,40
120	54	6930,5	4705,1	557,4	647,7	30,8	1051,1
140	62	8038,4	5492,4	583,2	808,6	35,0	1189,2
160	70	9116,0	6255,7	604,6	981,7	39,2	1313,2
180	77	10083,0	6953,0	617,7	1132,0	42,4	1422,7
200	85	11102,7	7668,8	633,1	1324,9	46,5	1522,4
220	92	12006,3	8316,8	641,6	1489,8	49,6	1607,7
240	99	12883,4	8943,8	648,7	1660,8	52,6	1682,7

Kerne eine relativ grössere Bedeutung besitzt, wie dies auch aus den Formeln (150) und (151) unmittelbar zu sehen ist, da hiernach wegen des praktisch konstanten Wertes von c die Energie E_J zu $A^{1/3}$ und die Energie E_C zu $A^{5/3}$ proportional ist.

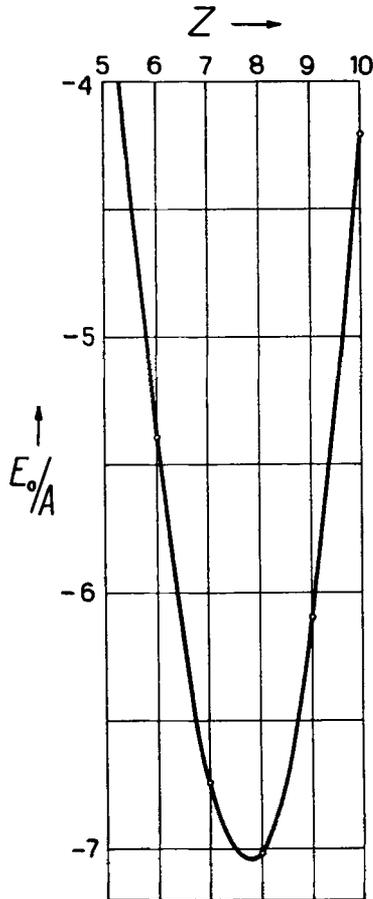


Fig. 4. Die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie E_0/A als Funktion von Z für die Isobare $A = 16$.

Man kann natürlich diese Berechnungen, die wir hier für die stabilsten Isobare durchführten, auf beliebige andere Kerne ausdehnen. Wir können z. B. die Energie der Glieder einer Isobarenreihe berechnen, indem wir A konstant halten und die Energie für verschiedene vorgegebene Werte von Z bestimmen. Wir haben dies für eine kleine, eine mittlere und eine grosse Massenzahl und zwar für $A = 16$, $A = 80$ und $A = 200$ durchgeführt und die Energiekurven in den Figuren 4, 5 und 6 dargestellt. Wie aus einem Vergleich der Kurven zu sehen ist, verläuft die Energiekurve der schweren Isobare bedeutend flacher als die der leichten. Das Minimum der Energie liegt für die Isobare

$A = 16$ bei $Z = 8$ für die Isobare $A = 80$ bei $Z = 37$ und für die Isobare $A = 200$ bei $Z = 86$. Dass der letztere Z -Wert von dem aus der Formel (199) bestimmten Z -Wert — der in der Tabelle 1 angegeben ist — um rund 1% abweicht, ist eine Folge dessen, dass die Formel (199) aus der Entwicklung (198) des Ener-

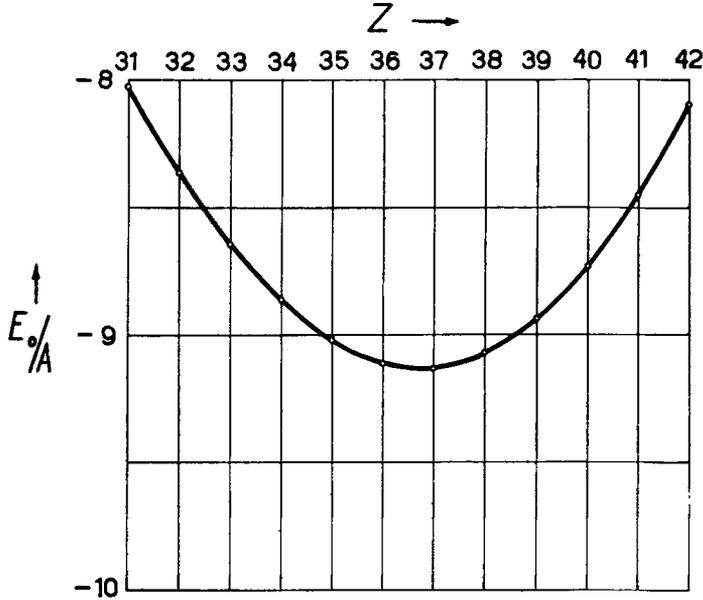


Fig. 5. Die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie E_0/A als Funktion von A für die Isobare $A = 80$.

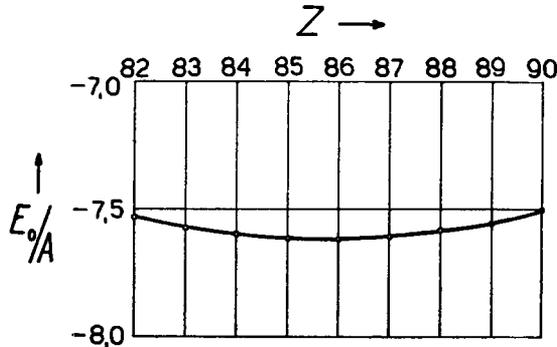


Fig. 6. Die auf ein Teilchen entfallende mittlere Energie E_0/A als Funktion von A für die Isobare $A = 200$.

gieausdruckes (196) hergeleitet wurde, während den hier durchgeführten Berechnungen der vollständige Energieausdruck (196) zugrunde liegt.

Wir kommen nun auf die Dichteverteilung der Nucleonen im Kern zu sprechen. Mit den Gleichungen (144) und (145) und mit Rücksicht auf die

Beziehungen (138)—(140) lässt sich die Dichteverteilung aller Nucleonen (Neutronen + Protonen) folgendermassen darstellen

$$\varrho = \varrho_n + \varrho_p = \varrho_0 e^{-3x^2} = \varrho_0 e^{-a^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}, \quad (201)$$

wo

$$\varrho_0 = \frac{c_n^3 + c_p^3}{24\pi^2 r_0^3} = \frac{c^3}{12\pi^2 r_0^3} \quad (202)$$

die Nucleonendichte im Kernmittelpunkt ist. Für die Parameter c und a sind die dem Energieminimum entsprechenden Werte dieser Parameter c_0 und a_0 einzusetzen, wo zwischen a_0 und c_0 gemäss (140) der Zusammenhang

$$a_0 = \frac{2^{1/3}}{2(9\pi)^{1/6}} \frac{c_0}{A^{1/3}} \quad (203)$$

besteht. Nach (202) ist also ϱ_0 zu c^3 proportional und zwar mit einem von A unabhängigen universalen Proportionalitätsfaktor.

Die Werte von c_{00} sind für mehrere stabilste Isobare in der Tabelle 1 zusammengestellt. Wie man sieht, ist c_{00} für die mittelschweren und schweren Kerne, d. h. etwa für $A > 50$ von A praktisch unabhängig und zwar zeigt c_{00} für diese Kerne von dem Wert $c_{00} \cong 7,0$ eine maximale relative Abweichung von nur cca. $\pm 2\%$. Zufolge dieses Verhaltens von c_{00} für $A > 50$ ergibt sich, dass für diese Kerne auch die Nucleonendichte im Kernmittelpunkt, ϱ_0 , praktisch konstant ist und von dem Wert

$$\varrho_0 = \frac{7^3}{12\pi^2 r_0^3} = 2,90 \frac{1}{r_0^3} = 1,16 \cdot 10^{39} \text{ cm}^{-3} \quad (204)$$

eine maximale relative Abweichung von nur cca. $\pm 6\%$ aufweist. In dem Gebiet $A > 50$ weist ϱ_0 ein sehr flaches Maximum bei $A \cong 120$ auf. Von $A = 50$ bis $A = 4$ ist die Abhängigkeit der Nucleonendichte im Kernmittelpunkt von der Massenzahl bedeutend stärker und zwar fällt ϱ_0 in Richtung kleinerer Massenzahlen monoton ab und erreicht bei $A = 4$ cca. die Hälfte des Wertes (204). Man vgl. hierzu die in der Tabelle 3 angegebenen Werte von ϱ_0 . Für ganz leichte Kerne machen sich im Verlauf von ϱ_0 als Funktion von A Schwankungen bemerkbar, und zwar liegen die Werte von ϱ_0 für gerade A etwas höher und für ungerade etwas tiefer als es dem glatten Verlauf entsprechen würde. Der Grund hierfür ist derselbe, wie im Falle der auf S. 374 besprochenen Schwankungen der mittleren Energien.

In der weitgehenden Konstanz der Nucleonendichte im Kernmittelpunkt für mittelschwere und schwere Kerne kommt das bekannte empirische Kerngesetz zum Ausdruck, dass für diese Kerne die Nucleonendichte im Kerninneren von der Massenzahl unabhängig ist.

Nach diesen Feststellungen wollen wir uns mit dem Dichteverlauf der Nucleonen in verschiedenen Kernen und in Zusammenhang damit mit der Berechnung der Kernradien befassen. Die Dichte ρ als Funktion von r haben wir für einen leichten, einen mittelschweren und einen schweren Kern und zwar für die Kerne mit den Massenzahlen 16, 80 und 200 in Fig. 7 dargestellt.

Ausser der Dichte ρ ist noch die radiale Dichteverteilung

$$D = 4\pi r^2 \rho \quad (205)$$

von Wichtigkeit, die wir ebenfalls für die Kerne mit den Massenzahlen 16, 80 und 200 in Fig. 8 dargestellt haben. Während ρ die Anzahl der Nucleonen in der

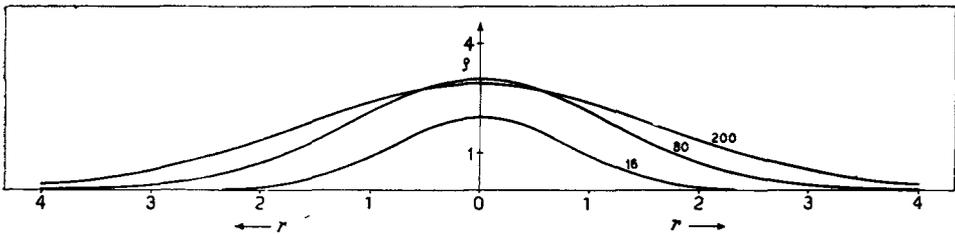


Fig. 7. Die Nucleondichte ρ als Funktion von r für die Kerne $A = 16, Z = 8$; $A = 80, Z = 37$; $A = 200, Z = 85$. Die neben den Kurven stehenden Zahlen sind die Massenzahlen der betreffenden Kerne.

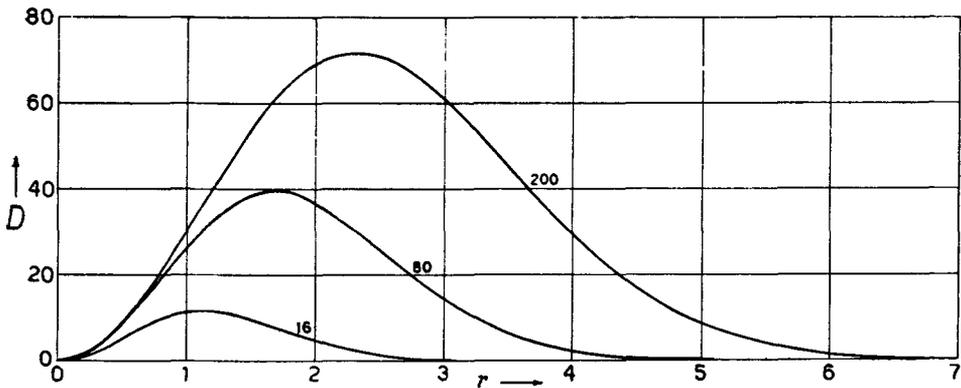


Fig. 8. Die radiale Nucleondichte D als Funktion von r für die Kerne $A = 16, Z = 8$; $A = 80, Z = 37$; $A = 200, Z = 85$. Die neben den Kurven stehenden Zahlen sind die Massenzahlen der betreffenden Kerne.

Volumeneinheit ist, gibt Ddr die Anzahl der Nucleonen, die sich zwischen den Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$ befinden.

Nachdem wir uns über den Dichteverlauf und die radiale Dichteverteilung der Nucleonen in leichten, mittelschweren und schweren Kernen orientiert haben, kommen wir auf den Kernradius zu sprechen, dessen Definition bei weitem nicht so einfach ist, wie dies in einigen Arbeiten angenommen wird.

Im Falle einer vollkommen konstanten Kerndichte pflegt man als Kernradius denjenigen Radius zu definieren, bis zu welchem die konstante Kerndichte ausläuft und der sich nach (133) zu $A^{1/3}$ als proportional erweist. In diesem Fall ist also der Kernradius der Radius der mit Nucleonen homogen gefüllten Kugel. Wenn wir von dieser Definition ausgehend als Kernradius ganz allgemein denjenigen r -Wert definieren, für welchen — bei Annäherung an den Kern — die Kerndichte beträchtliche Werte anzunehmen beginnt, so bieten sich in unserem Falle, wo die Nucleondichte — im Gegensatz zum eben erwähnten Fall der konstanten Dichte — nicht unstetig, sondern stetig auf Null abfällt zur Definition eines Kernradius mehrere Möglichkeiten, von denen wir zwei, die uns am besten begründet erscheinen, besprechen wollen.

Die eine Möglichkeit besteht in der Annahme, dass der Kernradius R zu dem statistischen Mittelwert von r proportional ist. Für den statistischen Mittelwert von r ergibt sich mit Rücksicht auf (201), (202) und (140)

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r \varrho \, dv = \frac{4\pi}{A} \int_0^\infty \varrho r^3 \, dr = \frac{4\pi \varrho_0}{A} \int_0^\infty r^3 e^{-a^2 r^2 / r_0^2} \, dr = 4 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{c_0} A^{1/3} r_0. \quad (206)$$

Wenn wir uns auf die stabilsten mittelschweren und schweren Kerne beschränken, so können wir hier für c_0 mit einem maximalen Fehler von 2% den Wert $c_{00} = 7,0$ einsetzen, mit dem sich

$$\bar{r} = 0,447 A^{1/3} r_0 \quad (207)$$

ergibt. Für $A = 80$ und $A = 200$ erhält man hieraus $\bar{r} = 1,92 r_0$ bzw. $\bar{r} = 2,61 r_0$. Wie man sich an Hand der Fig. 7 überzeugt, ist bei diesen Entfernungen die radiale Nucleondichte bei weitem noch nicht abgeklungen, sondern besitzt noch einen beträchtlichen Wert, demzufolge \bar{r} unserer Definition des Kernradius nicht entspricht. Wie man ebenfalls aus der Fig. 7 sieht, würde aber unsere Definition des Kernradius eine zu \bar{r} proportionale Länge, etwa das 2-fache von \bar{r} , sehr gut entsprechen. Man hätte dann also

$$R = 2\bar{r} = 8 \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{c_0} A^{1/3} r_0, \quad (208)$$

woraus man für mittelschwere und schwere Kerne mit $c_0 = c_{00} \cong 7,0$ den Ausdruck

$$R = 0,894 A^{1/3} r_0 \quad (209)$$

erhält. Mit Ausnahme der leichten Kerne würde sich also der Kernradius zu $A^{1/3}$ proportional ergeben. Für leichte Kerne besteht aber diese Proportionalität nicht, da man dort c_{00} nicht mehr als konstant betrachten kann; man vgl. hierzu die in der vierten Spalte der Tabelle 3 zusammengestellten R -Werte, die aus (208) mit den in der Tabelle 1 angegebenen c_{00} -Werten berechnet wurden.

Die andere Möglichkeit einen Kernradius im oben erwähnten Sinne zu definieren, besteht darin, dass man diesen als den Radius derjenigen Kugel

definiert, ausserhalb der sich eine für alle Kerne konstante Nucleonenmenge η von der Grössenordnung eines Nucleons befindet. Es ist also dann R durch folgende Gleichung definiert

$$\int_R^{\infty} D dr = \eta. \quad (210)$$

Wegen des sehr steilen Abfalls von D bei grösseren r -Werten ist R gegenüber einer Änderung von η nicht sehr empfindlich. Man erhält z. B. für den in der Tabelle 1 angegebenen Kern $A = 120$, $Z = 54$ ($c_{00} = 7,157$) mit $\eta = 1$ den Wert $R = 4,63 r_0$ und mit $\eta = 1/2$ den Wert $R = 4,88 r_0$. Wir haben $\eta = 1/2$ gesetzt und erhielten so die in der fünften Spalte der Tabelle 3 angeführten Resultate, wobei für c_{00} und Z die in der zweiten bzw. vierten Spalte der Tabelle 1 angegebenen Werte benutzt wurden.

Bei einem Vergleich der auf diese Weise hergeleiteten Kernradien mit den empirischen stösst man auf eine Schwierigkeit, die nicht nur hier, sondern immer auftritt, wenn man den Kernradius in der allgemein üblichen Weise als denjenigen Wert von r definiert, für welchen — bei Annäherung an den Kern — die Nucleonendichte beträchtliche Werte anzunehmen beginnt. Die Schwierigkeit entsteht dadurch, dass die empirischen Kernradien aus Streuversuchen mit α -Teilchen und Neutronen, sowie aus dem α -Zerfall in der Weise abgeleitet sind, dass man als Kernradius denjenigen r -Wert betrachtet, bei welchem sich die zwischen den Nucleonen wirkenden nicht Coulombschen Kräfte bemerkbar machen. Die so definierten Kernradien werden natürlich wegen der sehr kurzen

TABELLE 3

Kernradien und Nucleonendichte im Kernmittelpunkt. R in r_0 -Einheiten, ρ_0 in $1/r_0^3$ -Einheiten.

A	Theoretisch				R empirisch
	Z	ρ_0	R aus (208) berechnet	R aus (210) berechnet	
4	2	1,44	1,79	1,34	1,67
5	2	1,22	2,04	1,59	1,80
6	3	1,45	2,04	1,65	1,91
8	4	1,55	2,20	1,87	2,10
10	5	1,66	2,32	2,03	2,26
12	6	1,77	2,41	2,16	2,40
16	8	1,96	2,56	2,39	2,65
20	10	2,13	2,69	2,56	2,85
40	19	2,66	3,14	3,26	3,59
60	28	2,91	3,49	3,74	4,11
80	37	3,04	3,79	4,17	4,52
100	45	3,07	4,07	4,55	4,87
120	54	3,10	4,31	4,88	5,18
140	62	3,07	4,55	5,21	5,45
160	70	3,03	4,78	5,54	5,70
180	77	2,95	5,01	5,85	5,93
200	85	2,90	5,22	6,13	6,14
220	92	2,82	5,44	6,46	6,34
240	99	2,75	5,65	6,76	6,53

Reichweite der Kernkräfte mit den weiter oben definierten theoretischen grössenordnungsmässig übereinstimmen, eine genauere Übereinstimmung ist aber nicht zu erwarten. Man kann jedoch erwarten, dass die theoretischen Kernradien denselben Gang mit A aufweisen, wie die empirischen. Um zu Kernradien zu gelangen, die auf die gleiche Weise definiert sind, wie die empirischen, hätte man das Streuvermögen einer Nucleonengaskugel mit der hier bestimmten Dichteverteilung gegenüber α -Teilchen, Protonen oder Neutronen zu berechnen, was in einer späteren Untersuchung durchgeführt werden soll.

Hier begnügen wir uns mit einem Vergleich der hier berechneten Kernradien mit den empirischen, welche letztere zu $A^{1/3}$ proportional sind und durch die Formel

$$R = 1,42 A^{1/3} 10^{-13} \text{ cm} = 1,05 A^{1/3} r_0 \quad (211)$$

dargestellt werden können.²⁶ Die aus dieser Formel für mehrere A -Werte berechneten Kernradien sind in der sechsten Spalte der Tabelle 3 eingetragen. Wie zu sehen ist, stimmen die hier erhaltenen theoretischen Werte mit diesen gut überein. Im Hinblick auf das weiter oben Gesagte, ist es nicht so sehr die gute zahlenmässige Übereinstimmung auf die es hier ankommt, sondern der Umstand, dass die theoretischen Kernradien praktisch denselben Gang mit A zeigen, wie die empirischen. Ein in dieser Richtung besonders befriedigendes Verhalten zeigen die aus der Formel (210) berechneten Kernradien, die in der fünften Spalte der Tabelle 3 angegeben sind. Dies ist umsomehr befriedigend, als die der Formel (210) zugrunde liegende Definition des Kernradius, wegen der verhältnismässig starken Unempfindlichkeit von η , als physikalisch sehr plausibel erscheint.

§ 11. Vergleich mit der wellenmechanischen Berechnung des Deuterons

Es ist noch von Interesse den im Vorangehenden erhaltenen Parameterwert λ mit demjenigen zu vergleichen, den man auf Grund der Wellenmechanik für einen ganz leichten Kern, z. B. für das Deuteron erhält. Hierzu berechnen wir mit dem Ansatz (47) die Schrödingersche Energie des Deuterons. Es ergibt sich

$$E = 4\pi \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M_r} \int_0^\infty P'^2 dr + 4\pi \int_0^\infty J(r) P^2 dr, \quad (212)$$

wo $M_r = \frac{1}{2} M$ ist, weiterhin P das r -fache der auf 1 normierten Eigenfunktion und P' die Ableitung von P nach r bezeichnet.

Wir bestimmen auch hier E , bzw. den Parameterwert λ mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens und machen für P den Ansatz

$$P = \left(\frac{a}{2r_0}\right)^{3,2} \frac{1}{\pi^{1/2}} r e^{-a \frac{r}{2r_0}}, \quad (213)$$

wo a einen Variationsparameter bezeichnet.

Mit diesem Ausdruck von P lässt sich mit Rücksicht auf (47), (19), (114) und (102) die Energie in folgender Form darstellen.

$$E = 2\kappa_J \frac{1}{r_0^2} a^2 - \frac{\gamma}{2r_0} \frac{a^3}{(1+a)^2} = \left[2\mu_K a^2 - \frac{\lambda}{2} \frac{a^3}{(1+a)^2} \right] \varepsilon_0. \quad (214)$$

Man hat nun denjenigen Wert von a zu bestimmen, für den E ein Minimum aufweist und den frei verfügbaren Parameter so zu wählen, dass dieses Minimum mit dem empirischen Wert der Bindungsenergie des Deuterons $E_0 = -2,19$ MeV übereinstimmt. Man erhält

$$a = 1,67 \quad \text{und} \quad \lambda = 3,228. \quad (215)$$

Dieser λ -Wert ist nur um weniger als 3% kleiner als derjenige, den wir für das statistische Kernmodell mit konstanter Dichte im § 8 erhielten. Im Verhältnis zu dem mit dem vollständigen Energieausdruck erhaltenen λ -Wert (200) ist der Unterschied grösser, beträgt aber auch für diesen nur rund 22% dieses Wertes. Dieser Unterschied wird sich jedoch in der nächsten Näherung des statistischen Modells, bei der die Neutronen- und Protonendichte voneinander unabhängig variiert werden, und die Korrelation der Nucleonen berücksichtigt wird (man vgl. § 10), noch verringern, da hieraus zusätzliche Anziehungen resultieren, was zu einer Verkleinerung des im § 10 erhaltenen λ -Wertes führt.

§ 12. Diskussion der Resultate und der möglichen Erweiterungen

Die mit der hier entwickelten ersten Näherung des Variationsverfahrens erhaltenen Resultate für die Kernenergien und Kernradien kann man als sehr befriedigend bezeichnen, insbesondere wenn man berücksichtigt, dass nur ein empirischer Parameter benutzt wird und das Verfahren von willkürlichen Annahmen frei ist. Bemerkenswert ist weiterhin, dass sich der empirische Parameterwert λ für das statistische Modell und für das wellenmechanische Modell des Deuterons nur wenig unterscheidet, und der Unterschied sich in den weiteren Näherungen noch verringert.

Es fragt sich nun, wie sich die weiteren Näherungen gestalten und was man von diesen erwarten kann? Der nächste Schritt wäre eine voneinander unabhängige Variation der Neutronen- und Protonendichte, woraus ein Herabsinken der Coulombschen Abstossungsenergie resultiert. Dieses Herabsinken der Energie macht sich hauptsächlich für schwere Kerne — bei welchen die Coulombsche Energie relativ gross ist — bemerkbar. Bei dieser zweiten Näherung kann man also eine kleine Vertiefung der Energie erwarten und zwar in einem mit

wachsendem A steigendem Masse. Es wird also der Anstieg der Energiekurve von den mittelschweren Kernen bis zu den schwersten Kernen etwas kleiner. Wenn man die so erhaltene Energiekurve in Richtung wachsender Energie verschiebt — was durch eine Verkleinerung des Parameterwertes λ erreicht werden kann — so wird die neue Energiekurve die empirischen Werte noch besser approximieren.

Eine weitere Verbesserung des Dichteverlaufes in den höheren Näherungen des Variationsverfahrens wird durch die Erweiterung des Variationsansatzes (136) erreicht, indem man im Ansatz (135) in der Summe noch weitere Glieder berücksichtigt und hierdurch der Dichtefunktion die bessere Anpassungsmöglichkeit an den tatsächlichen Verlauf verschafft.

Eine andere Weiterentwicklung der hier gegebenen Ansätze besteht in einer Korrektur der Anziehungsenergie, indem man diese mit der aus der Korrelation der Nucleonen resultierenden Energie erweitert,²⁷ woraus eine zusätzliche Anziehung resultiert.

Man könnte auch noch an der kinetischen Energie durch die Unterteilung der Nucleonen nach der Nebenquantenzahl eine Verbesserung anbringen.²⁸

Weiterhin könnte man noch versuchen einen Teil der Nucleonen als fertige α -Teilchen in den Kern einzubauen und den Prozentsatz dieser Nucleonen ebenfalls aus dem Minimumprinzip bestimmen.

Abschliessend sei nun noch erwähnt, dass man nach *Heisenberg*²⁹ annehmen muss, dass die Kernkräfte höchstwahrscheinlich nicht durch eine einzige Teilchensorte, sondern durch ein ganzes Spektrum schwerer Teilchen (Mesonen) verschiedenster Masse und Eigenschaften hervorgerufen werden, von denen die π -Mesonen sich nur dadurch auszeichnen, dass sie die leichtesten und somit die durch sie hervorgerufenen Kräfte diejenigen von grösster Reichweite sind, wodurch der Ansatz (47) für nicht zu kleine gegenseitige Abstände der Teilchen gerechtfertigt wird. Eine Erweiterung der Theorie durch Berücksichtigung dieser zusätzlichen Kräfte mit sehr kurzer Reichweite wird allerdings erst dann möglich sein, wenn man über die Eigenschaften dieser Kräfte näher orientiert ist.

Auf die weiter oben besprochenen höheren Näherungen bzw. Erweiterungen der Theorie, die ohne Weiteres durchgeführt werden können, möchte ich in einigen demnächst folgenden Arbeiten zurückkommen.

Mathematischer Anhang

Berechnung der Integrale $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$

Die Integrale $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$ sind durch (160)—(163) definiert. Für $q < 1$ kann man sie geschlossen nicht auswerten. Wir haben die Integrale $L(q)$, $K(q)$ und $M(q)$ für 18 verschiedene q -Werte ($q > 1$) und das Integral

$H(q)$ für 8 verschiedene q -Werte ($q > 1$) auf numerischem Wege bis auf 4 Stellen genau bestimmt, und die Integralwerte, sowie die mit diesen berechnete Funktion $F(q)$ in der Tabelle 4 zusammengestellt. Die im § 10 angegebenen Resultate haben wir mit diesen Integralwerten erhalten.

Für die Integrale $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$ kann man Näherungsformeln herleiten, die die exakten Integrale in dem für die Berechnungen wichtigsten Intervall von q ($5 < q < 8$) ausgezeichnet annähern. Wenn wir uns auf dieses Intervall von q beschränken, so sind die Integranden in allen drei Integralen Produkte einer Funktion mit einem schmalen und steilen Maximum vom Typ $f(x) = x^2 e^{-nx^2}$ ($n = 2, 3, 4$), die mit Ausnahme der Umgebung des Maximums praktisch Null ist und einer in der Umgebung des Maximums von $f(x)$ sich verhältnismässig langsam veränderlichen Funktion $\ln(1 + q^2 e^{-2x^2})$ oder $\arctg(1 + q e^{-x^2})$, für die wir zur Abkürzung die gemeinsame Bezeichnung $g(x)$ einführen. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man im Integral $\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx$ die eine Funktion, z. B. die flach verlaufende Funktion $g(x)$ durch einen entsprechend gewählten konstanten Wert ersetzen. Wegen des schon beschriebenen Verlaufes von $f(x)$ erhält man für das Integral einen guten Näherungswert, wenn man für den konstanten Wert von $g(x)$ denjenigen

TABELLE 4

Die auf numerischem Wege bis auf 4 Stellen genau berechneten Werte der Integrale $L(q)$, $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$, sowie die mit diesen Integralwerten ebenfalls bis auf 4 Stellen genau berechnete Funktion $F(q)$. Die mit* bezeichneten $H(q)$ -Werte sind mit der Näherungsformel (222) berechnet; diese Näherungswerte sind um cca 0,7% grösser als die exakten.

q	$L(q)$	$K(q)$	$H(q)$	$M(q)$	$F(q)$
1,3355	0,2228	0,07044	0,03619	0,05908	0,02530
1,8951	0,3889	0,1149	0,05735	0,07302	0,06126
2,8427	0,6930	0,1857	0,08901	0,08818	0,1526
3,6000	0,9392	0,2357	0,1111*	0,09602	0,2464
4,0998	1,099	0,2656	0,1227	0,09991	0,3164
4,7378	1,300	0,3006	0,1369	0,1039	0,4131
5,4000	1,503	0,3336	0,1510*	0,1071	0,5205
6,0000	1,682	0,3611	0,1619*	0,1096	0,6229
6,6329	1,865	0,3879	0,1714	0,1117	0,7349
7,1000	1,997	0,4064	0,1794*	0,1130	0,8203
7,5000	2,107	0,4215	0,1852*	0,1141	0,8945
7,7500	2,176	0,4306	0,1888*	0,1147	0,9416
8,0000	2,242	0,4394	0,1921*	0,1152	0,9891
8,2500	2,310	0,4481	0,1954*	0,1158	1,037
8,5280	2,384	0,4574	0,1990*	0,1163	1,091
9,0000	2,505	0,4727	0,2048*	0,1172	1,183
9,3636	2,601	0,4840	0,2079	0,1178	1,255
11,9173	3,216	0,5540	0,2340	0,1211	1,774

Wert von $g(x)$ wählt, den $g(x)$ an der Stelle x_m des steilen Maximums von $f(x)$ annimmt. Es ergibt sich so

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x) dx = g(x_m) \int_0^{\infty} f(x) dx = g(x_m) \frac{\pi^{1/2}}{4n^{3/2}} \quad (216)$$

mit

$$x_m = \frac{1}{n^{1/2}}. \quad (217)$$

Die Genauigkeit dieser Näherung reicht für unsere Zwecke noch nicht aus. Man gelangt jedoch sofort zu einer Näherungsformel mit ausreichender Genauigkeit, wenn man in der Formel (216) $g(x_m)$ durch $\frac{1}{2}[g(x_1) + g(x_2)]$ ersetzt, wo x_1 und x_2 diejenigen Abszissenwerte sind, bei denen $f(x)$ den halben Wert des Maximums, d. h. den Wert $\frac{1}{2}f(x_m)$ annimmt. Man hat dann also

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} [g(x_1) + g(x_2)] \frac{\pi^{1/2}}{4n^{3/2}}, \quad (218)$$

wo x_1 und x_2 die beiden Lösungen der transzendenten Gleichung

$$f(x) = x^2 e^{-nx^2} = \frac{1}{2} f(x_m) = \frac{1}{2n} e^{-1} \quad (219)$$

bezeichnen, für die sich

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{n}\right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{n}\right)^{1/2} \quad (220)$$

ergibt.

Wenn man in (216) für $f(x)$ und $g(x)$ die ursprünglichen Funktionen wieder einsetzt, so gelangt man für die Integrale $K(q)$, $H(q)$ und $M(q)$ zu folgenden sehr guten Näherungsformeln

$$\left. \begin{aligned} K(q) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx = \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} [\ln(1 + q^2 e^{-2x_1^2}) + \ln(1 + q^2 e^{-2x_2^2})] \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

mit

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{2}\right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{2}\right)^{1/2};$$

$$\left. \begin{aligned} H(q) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x^2} \ln(1 + q^2 e^{-2x^2}) dx = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{64} [\ln(1 + q^2 e^{-2x_1^2}) + \ln(1 + q^2 e^{-2x_2^2})] \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

mit

$$x_1 = \left(\frac{0,2320}{4}\right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{4}\right)^{1/2};$$

$$\left. \begin{aligned}
 M(q) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} \operatorname{arctg} (1 + qe^{-x^2}) dx = \\
 &= \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} [\operatorname{arctg} (1 + qe^{-x_1^2}) + \operatorname{arctg} (1 + qe^{-x_2^2})] \\
 x_1 &= \left(\frac{0,2320}{3}\right)^{1/2}, \quad x_2 = \left(\frac{2,678}{3}\right)^{1/2}.
 \end{aligned} \right\} (223)$$

Für die Näherungsformel für $K(q)$ ist die maximale Abweichung vom exakten Wert im Intervall $5,4 < q < 10$ kleiner als 0,6% und im Intervall $4 < q < 5,4$ kleiner als 1,2%. Bei der Näherungsformel für $H(q)$ ist der maximale Fehler im Intervall $4 < q < 10$ kleiner als 0,7%. Die beste Approximation gibt die Näherungsformel für $M(q)$, bei welcher der maximale Fehler im Intervall $1,5 < q < 10$ kleiner ist als 0,4%.

Da das Integral $H(q)$ in den Energieausdruck des Kerns nur in ein Glied von untergeordneter Bedeutung eingeht, kann man für $H(q)$, statt der exakten Werte, die aus der Näherungsformel (222) berechneten Werte gebrauchen. Einige mit dieser Näherungsformel berechnete Werte sind in der Tabelle 4 angegeben.

Für das Integral $L(q)$ lässt sich die hier durchgeführte Näherung natürlich nicht anwenden, da bei $L(q)$ im Integranden der Faktor e^{-nx^2} fehlt, der das für unsere Näherung wesentliche rasche Verschwinden von $f(x)$ mit wachsendem x bedingt. Da $L(q)$ im eingangs angegebenen Intervall als Funktion von q angenähert linear verläuft, lässt sich $L(q)$ in diesem Intervall sehr gut durch eine einfache Formel approximieren, deren Koeffizienten man mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen kann. Man findet, dass im Intervall $5 < q < 10$ die Näherungsformel

$$L(q) = -0,0051755 q^2 + 0,35220 q - 0,24814 \quad (224)$$

die exakten Integralwerte mit einem kleineren Fehler als 1% darstellt. Da dieses Integral bei der Berechnung von $F(q)$ neben den übrigen Gliedern in $F(q)$ nur eine untergeordnete Bedeutung besitzt, reicht diese Genauigkeit vollkommen aus.

Wir haben die Näherungsformeln für $K(q)$, $H(q)$, $M(q)$ und $L(q)$ hier einerseits wegen ihrer Einfachheit und andererseits aus dem Grunde angegeben um zu zeigen, dass das ganze Variationsverfahren mit geringer Mühe durchführbar ist, was für die Weiterentwicklung des Verfahrens wesentlich ist.

Die numerischen Rechnungen wurden von meinen Assistenten Fr. O. *Kunvári*, Fr. E. *Mágori*, Herrn B. *Molnár* und Fr. E. *Szabó* durchgeführt; die Figuren wurden von den Herrn Assistenten G. *Knapecz* und L. *Zelenka* gezeichnet. Ich möchte Ihnen allen auch an dieser Stelle für Ihre Arbeit meinen Dank aussprechen.

LITERATURANGABEN UND HINWEISE

1. *E. Majorana*, Zs. f. Phys. **82**, 137, 1933.
2. *W. Heisenberg*, Rapport du VII-ième Congrès Solvay, Paris, 1934.
3. *C. F. v. Weizsäcker*, ZS. f. Phys. **96**, 431, 1935.
4. *C. F. v. Weizsäcker*, ZS. f. Phys. **96**, 431, 1935.; *G. C. Wick*, Nuovo Cimento Nr. 4, 1934; Rend. Accad. Lincei **19**, 319, 1934; **21**, 170, 1935; *K. Nakabayasi*, ZS. f. Phys. **97**, 211, 1935; *S. Flüge*, ZS. f. Phys. **96**, 459, 1935; *F. S. Wang*, ZS. f. Phys. **100**, 736, 1936. Bezüglich weiterer Literaturangaben vgl. man z. B. *H. A. Bethe* und *R. F. Bacher*, Rev. Mod. Phys. **8**, 82, 1936, weiterhin *C. F. v. Weizsäcker*, Die Atomkerne, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen Bd. II., Akad. Verlagsges., Leipzig, 1937, sowie *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.
5. Man vgl. z. B. *C. F. v. Weizsäcker*, l.c.
6. Man vgl. z. B. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 7, Springer, Wien, 1949.
7. *C. F. v. Weizsäcker*, l. c.; man vgl. weiterhin *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 110. ff., wo auch die weitere diesbezügliche Literatur angegeben ist.
8. Man vgl. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 116, Springer, Wien, 1949.
9. Man vgl. z. B. *P. Gombás*, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik, S. 80 ff., Birkhäuser, Basel, 1950.
10. Man vgl. z. B. *P. Gombás*, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik, S. 80 ff., Birkhäuser, Basel, 1950.
11. Näheres über die verschiedenen Typen der Kernkräfte findet man z. B. bei *C. F. v. Weizsäcker*, Die Atomkerne, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen Band II, S. 58 ff., Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1937, oder *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.
12. S ist das Doppelte des Spinmoments eines Nucleons in der Einheit $\hbar/(2\pi)$ gemessen. Mit Rücksicht darauf, dass der Eigenwert des Quadrates des Spinmoments in der Einheit $\hbar/(2\pi)$ gemessen $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}$ beträgt, ergibt sich, dass $S^2 = 3$ ist.
13. *W. Heisenberg*, Theorie des Atomkerns, S. 161, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, 1951.
14. Falls die Anzahl der Neutronen A_n , oder die der Protonen ungerade sein sollte, so wird der energetisch höchste unter den zu besetzenden Neutronen- oder Protonen-Bewegungszuständen nur je durch ein Teilchen besetzt, was aber im folgenden wegen der voraussetzungsgemäss grossen Anzahl der Teilchen keine Rolle spielt.
15. *H. A. Bethe* und *R. F. Bacher*, Rev. Mod. Phys. **8**, 155, 1936.
16. Bezüglich des Ausdruckes von e_{ik}^{pp} vgl. man S. 347 und 348.
17. Man vgl. z. B. *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 23 ff., Springer, Wien, 1949.
18. Man vgl. hierzu auch *W. Heisenberg*, Theorie des Atomkerns, S. 72 ff., Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, 1951.
19. Der Faktor $1/3^{1/2}$ wurde nur aus dem Grunde eingeführt, da mit diesem Faktor im Falle des Ansatzes (135) die Dichtefunktionen (144) und (145) frei von lästigen Faktoren werden.
20. Diesbezüglich vgl. man die Definitionsgleichungen (140) — (142), sowie die Gleichungen (182) und (183).
21. Bezüglich F und S vgl. man die weiter unten angegebenen Ausdrücke (187), (188) mit den Daten (189).
22. Wir kommen hierauf weiter unten zu sprechen, man vgl. (182) und (183).
23. Man könnte auch so vorgehen, dass man in $F(c)$ für die Integrale L , K und M die im Anhang angegebenen Näherungsausdrücke einsetzt, der so erhaltene Näherungsausdruck für $F(c)$ ist aber weniger genau als der Ausdruck (187).
24. Bezüglich der empirischen Werte vgl. man *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I, S. 501—528, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

25. Aus einer Zusammenstellung von *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I. S. 501—528, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

26. *L. Rosenfeld*, Nuclear Forces, Monographs on Theoretical and Applied Physics Vol. I S. 22 ff., North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1948.

27. *E. Wigner*, Phys. Rev. (2) **46**, 1002, 1934 und Trans. Faraday Soc. **34**, 678, 1938. Man vgl. auch *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 27 ff., Springer, Wien, 1949.

28. Dies kann auf ähnliche Weise geschehen wie bei Atomen. Man vgl. hierzu *P. Gombás*, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, S. 117, Springer, Wien, 1949; weiterhin *P. Gombás*, Acta Phys. Hung. Vol. I, No. 3, 1952.

29. *W. Heisenberg*, Die Theorie des Atomkerns, S. 161, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, 1951.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР

П. Гомбаш

Резюме

§ 1. Введение. § 2. Основы статистической трактовки нуклеонов. § 3. Кинетическая энергия нуклеонов. § 4. О взаимодействии нуклеонов вообще. § 5. Энергия взаимодействия нуклеонов. § 6. Характер насыщения сил, происходящих из обменного взаимодействия. § 7. Статистическая модель атомного ядра. § 8. Статистическое ядро с постоянной плотностью нуклеонов. § 9. Определение распределения плотности и энергии методом Ритца. § 10. Результаты, относящиеся к энергии и распределению плотности ядра. § 11. Сравнение результатов с результатами волновой механики, относящихся к деутерию. § 12. Обсуждение результатов и дальнейших возможностей. — Математическое приложение.