N. M. GÜNTER: **Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf die Grundaufgaben der mathematischen Physik.** B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957, X + 341 Seiten.

Die vorliegende Monographie der Potentialtheorie wurde erst in französischer Sprache, in der Collection Borel, im Jahre 1934 unter dem Titel: »La théorie du potentiel et ses applications aux problème fondamentaux de la physique mathématique« publiziert. Seitdem wurde sie eine der Standardwerke der modernen mathematischen Physik. Diese Ausgabe ist eine Übersetzung der russischen, welche noch mit Ergänzungen und Erweiterungen durch W. I. SMIRNOW sowie mit einer kurzen Bibliographie des im Jahre 1941 verstorbenen Verfassers veröffentlicht wurde.

Die Potentialtheorie und die damit zusammenhängenden Probleme der mathematischen Physik standen seit Beginn des 19. Jahrhunderts im Mittelpunkt des Interesses der Mathematiker. Einer strengen Untersuchung wurden die Eigenschaften der verschiedenen Potentiale jedoch zunächst nicht unterworfen, weshalb es bei der Anwendung der Potentialtheorie auf Randwertprobleme der mathematischen Physik verschiedene unbegründete Momente gab. Anderseits existierten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts keine einigermassen bestimmten und tiefliegenden Ergebnisse über die Eigenschaften der Lösungen dieser Probleme bei Annäherung an den Rand. GÜNTER, als Schüler von der Lösungen dieser Probleme bei Annäherung an den Rand. GÜNTER, als Schüler von A. M. LJAPUNOV, stellte sich — in dem er im wesentlichen von den Arbeiten seines Lehrers ausging — die Aufgabe, die ganze Potentialtheorie systematisch und mathematisch streng darzustellen.

In dem ersten, einleitenden Kapitel werden erst die LJAPUNOVschen Bedingungen der zu betrachtenden Gebiete, wichtige existenzielle Sätze der berücksichtigten Funktionen, die auf einer Fläche definiert sind und ihre Differentiation, dann die bekannten grundlegenden Sätze von OSTROGRADSKI und STOKES, von GREEN und von GAUSS ausfürlich besprochen.

Das zweite Kapitel wurde einer systematischen Entwicklung der Potentialtheorie gewidmet. Es werden erst das Potential der einfachen Schicht, seine Stetigkeit, einige Sätze über das Potential der Doppelschicht, die Stetigkeit der Normalableitung der einfachen bzw. der Doppelschicht, die Konvergenz der wichtigsten Integrale behandelt. Dann beschäftigt sich der Verfasser mit dem NEWTONschen Potential, mit der Existenz seiner beiden ersten zwei Ableitungen, mit dem POISSONschen Satz sowie mit den Ableitungen des NEWTONschen Potentials mit differenzierbarer Dichte. Weiterhin wird die Funktionenklasse $H(l, A, \lambda)$ definiert, die aus solchen in einem Gebiet (D) definierten Funktionen $f(x, y, z) = f(M)$ ensteht, die beschränkte und stetige Ableitungen bis zur Ordnung $l\ (l \geqq 0)$ besitzen, d. h. für die

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^{p_1} \partial x^{p_2} \partial x^{p_3}} \right| < A$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 = p, p = 0, 1, 2, \ldots, l)$$

sind und deren Ableitungen für ein beliebiges Paar von Punkten M_1 und M_2 von (D), deren Abstand r_{12} kleiner als eine gewisse Zahl $r_0 \leqq 1$ ist, der Ungleichung

$$\left| \left(\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial x^{l_2} \partial x^{l_3}} \right)_{M_1} - \left(\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial x^{l_2} \partial x^{l_3}} \right)_{M_2} \right| <$$

$$< A\, r_{12}^{\lambda}\ (\sigma \leqq \lambda \leqq 1, l_1 + l_2 + l_3 = l)$$

genügen, wobei die Zahlen A und λ von der Wahl der Punkte unabhängig sind. Diese Funktionenklasse spielt in den letzten Paragraphen des Kapitels sowie in der ganzen Monographie eine ausgezeichnete Rolle. Nämlich, um die verschiedenen Probleme der Potentialtheorie mathematisch streng formulieren zu können, soll weitgehend berücksichtigt werden, welchen Funktionenklassen die Belegungsdichte der einfachen und der Doppelschicht angehören müssen. Es ist weiterhin ein sehr wichtiger Sonderfall, wenn die Potentiale selbst Elemente der Funktionenklasse $C^{(k)}$ sind, die sich folgenderweise definieren lässt: eine in dem Gebiet (D) definierte Funktion $f(x, y, z) = f(M)$ gehöre der Klasse $C^{(k)}$ an, wenn f in (D) stetige und beschränkte Ableitungen der Ordnung k $(\geqq 1)$ besitzt, und wenn diese Ableitungen und die Funktionen selbst dem Betrage nach nicht grösser als $A > 0$ sind. Endlich wird das Potential der einfachen und der Doppelschicht sowie das NEWTONsche Potential mit summierbarer Dichte besprochen.

Hinsichtlich der Form der durch die Flächen (S) begrenzten Gebiete werden die folgenden Fälle unterschieden: (1°) In dem Falle, der als der gewöhnliche bezeichnet wird, existiert nur eine einzige Fläche, die ein zusammenhängendes Gebiet begrenzt. Von den beiden Gebieten, die durch (S) voneinander abgegrenzt werden, wird das äussere Gebiet, das den unendlich fernen Punkt enthält, mit (D_e) und das innere Gebiet mit (D_i) bezeichnet. (2°) »Der Fall (J)« soll darauf hinweisen, dass mehrere innere Ränder existieren. Dann wird durch (D_i) das zusammenhängende Gebiet, das durch alle Flächen begrenzt wird und den unendlich fernen Punkt nicht enthält, bezeichnet, während unter (D_e) das aus dem ganzen übrigen Raum bestehende Gebiet bezeichnet wird. (3°) Schliesslich »im Falle (E)« sind mehrere zusammenhängende Gebiete vorhanden.

Es sei nun (D_i) ein endlicher Bereich des dreidimensionalen Raumes. Das DIRICHLETsche Problem für das Innengebiet besteht bekanntlich darin, diejenige Funktion zu ermitteln, die im Innern von (S) harmonisch (d. h. die LAPLACEsche Gleichung erfüllt) und in dem abgeschlossenen Bereich (D_i) stetig ist und auf (S) vorgegebene Randwerte annimmt, die eine auf (S) stetige Funktion bilden. Beim NEUMANNschen Problem ist auf der Randfläche nicht die Funktion selbst, sondern die Randwerte ihrer Normalableitung vorgegeben, wobei diese Normalableitung regulär ist. Das dritte fundamentale Randwertproblem für die LAPLACEsche Differentialgleichung besteht in der Ermittlung einer im Innern von (D_i) harmonischen Funktion, bei der auf der Randfläche des Bereiches eine Linearkombination der Normalableitung und der Funktion selbst vorgegeben ist. Die entsprechenden, sog. äusseren Probleme bestehen darin, jede Funktion v zu bestimmen, die in dem äusseren Gebiete (D_e) von (S) harmonisch ist und im Unendlichen verschwindet, sowie die Eigenschaft besitzt, dass die Produkte Rv, $R^2(\partial v/\partial x)$, $R^2(\partial v/\partial y)$, $R^2(\partial v/\partial z)$ beim Grenzübergang $R \to \infty$ beschränkt bleiben. Diese Probleme, sowie die entsprechenden Eigenwertprobleme werden in den dritten und vierten Kapiteln behandelt. Die dargelegten Hilfsätze, die Eindeutigkeitsbeweise, die Methode der Integralgleichungen sowie die exakte, doch elegante und übersichtliche Formulierung des Materials charakterisieren auch diesen Teil der Monographie. In dem dritten Kapitel wird z. B. das sog. — von dem Standpunkte der Elektrostatik aus bemerkungswerte — ROBINsche Problem diskutiert, das sich folgendermassen formulieren lässt: Es ist auf einer Fläche diejenige Elektrizitätsverteilung zu finden, die auf keinen der Punkte im Innern des von (S) umschlossenen Gebietes eine Kraft ausübt.

In dem letzten Kapitel wird die Methode der Greenschen Funktion und ihre Anwendungen im Falle der Wärmeleitung sowie bei der Integration der Wellengleichung eingehend behandelt. Hier werden schliesslich wichtige Bemerkungen über die Lösung der POISSONschen Gleichung und über die Eigenfunktionen angegeben.

In dem Anhang werden noch einige Ergänzungen bzw. Hilfsätze hinzugefügt.

Wie man aus der Inhaltsübersicht der vorliegenden Monographie der Potentialtheorie sehen kann, wurde das vorliegende Buch in erster Linie für Mathematiker geschrieben, es ist aber unzweifelhaft, dass es auch für Physiker, insbesonders für solche, die sich für die moderne Darlegung der mathematischen Physik interessieren, nützlich sein kann.

J. I. HORVÁTH

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1959. IV. 9. — Terjedelem: 11 (A/5) ív, 37 ábra, 1 melléklet

Akadémiai Nyomda, Budapest — 1959/48576 — Felelős vezető: Bernát György