DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD IN BEWEGTEN ANISOTROPEN MEDIEN

Von

G. MARX

INSTITUT FÜR PHYSIK DER ROLAND EÖTVÖS UNIVERSITÄT IN BUDAPEST

(Vorgelegt von K. F. Novobátzky. — Eingegangen 11. III. 1953)

Es werden die Gleichungen, welche die Polarisierbarkeit anisotroper Medien ausdrücken in relativistischer Form aufgestellt. Auf diese Weise sind sie auch im Falle bewegter Dielektrika anwendbar. Auf Grund dieser Gleichungen wird dann die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes angegeben, aus der dann die Feldgleichungen, die kanonischen Funktionen und der Energie-Impuls-Tensor abgeleitet werden können.

1. Die relativistische Form der Maxwellschen Gleichungen im Dielektrikum

In den letzten Jahren haben sich verschiedene Verfasser wiederholt mit der relativistischen Behandlung der phänomenologischen Elektrodynamik von bewegten dielektrischen Medien befasst. In erster Linie stand hierbei der Energie-Impuls-Tensor im Mittelpunkt des Interesses [1—6]. Sowohl die älteren als auch die neueren Untersuchungen beschränkten sich indessen auf die Ausarbeitung einer relativistischen Theorie von bewegten *isotropen* Medien. Im nachstehenden sollen nun jene Gesetze erörtert werden, die für den Fall der *anisotropen* Dielektrika des elektromagnetischen Feldes Gültigkeit besitzen.

Zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes werden in der üblichen Weise zwei antisymmetrische Tensoren herangezogen, deren Komponenten sich aus der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ und aus der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$, sowie aus dem Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung und dem magnetischen Induktionsvektor $\mathfrak{B}$ in folgender Anordnung ergeben:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B}_z & -\mathfrak{B}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{B}_z & 0 & \mathfrak{B}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{B}_y & -\mathfrak{B}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{pmatrix}, G_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -i\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -i\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -i\mathfrak{B}_z \\ i\mathfrak{D}_x & i\mathfrak{D}_y & i\mathfrak{D}_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten der beiden Tensoren befriedigen die Maxwellschen Gleichungen in jedem Medium:

$$\partial_k G_{ik} = 4\pi s_i, \tag{1}$$

$$\partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} + \partial_l F_{ik} = 0. \tag{2}$$

Wie aus Gleichung (2) hervorgeht, kann der Tensor F_{ik} als Rotation eines Vierervektors (des Viererpotentials φ_i) angesetzt werden :

$$F_{ik} = \partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i. \tag{3}$$

Vom Gesichspunkt der weiteren Behandlung erscheint die Einführung gewisser aus den Tensorkomponenten F_{ik} und G_{ik} gebildeten neuen Grössen angebracht. Es möge also δ^*_{ikrs} den folgenden, von *Levi-Civita* eingeführten (Pseudo-) Tensor bezeichnen :

$$\delta^*_{ikrs} = \begin{cases} \;\;0, & \text{wenn die Indizes } (ikrs) \text{ nicht alle voneinander verschieden sind.} \\ +1, & \text{wenn } (ikrs) \text{ die gerade Permutation von (1234) ist.} \\ -1, & \text{wenn } (ikrs) \text{ die ungerade Permutation von (1234) ist.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Grösse können die folgenden zwei (Pseudo-) Tensoren definiert werden :

$$F^*_{ik} = -\frac{i}{2}\,\delta^*_{ikrs}\,F_{rs}, \qquad G^*_{ik} = -\frac{i}{2}\,\delta^*_{ikrs}\,G_{rs}\,. \tag{4}$$

Bei Berücksichtigung der Definition von δ^*_{ikrs} sind die Komponenten von F^*_{ik} und G^*_{ik} folgende :

$$F^*_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{E}_z & \mathfrak{E}_y & -i\mathfrak{B}_x \\ \mathfrak{E}_z & 0 & -\mathfrak{E}_x & -i\mathfrak{B}_y \\ -\mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_x & 0 & -i\mathfrak{B}_z \\ i\mathfrak{B}_x & i\mathfrak{B}_y & i\mathfrak{B}_z & 0 \end{pmatrix}, \quad G^*_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{D}_z & \mathfrak{D}_y & -i\mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{D}_z & 0 & -\mathfrak{D}_x & -i\mathfrak{H}_y \\ -\mathfrak{D}_y & \mathfrak{D}_x & 0 & -i\mathfrak{H}_z \\ i\mathfrak{H}_z & i\mathfrak{H}_y & i\mathfrak{H}_z & 0 \end{pmatrix}$$

Es bezeichne u_k die in Vakuumlichtgeschwindigkeit-Einheiten ausgedrückte (konstante) Vierergeschwindigkeit des dielektrischen Mediums :

$$u_k = \frac{1}{c}\frac{dx_k}{d\tau}.$$

Es ist bekannt, dass die Vierergeschwindigkeit folgenden Zusammenhang befriedigt :

$$u_k\,u_k = -1. \tag{5}$$

Mit Hilfe der Vierergeschwindigkeit des Mediums lassen sich folgende Vierervektoren (bzw. Pseudovektoren) bilden :

$$E_i = F_{ik}\,u_k\,, \quad D_i = G_{ik}\,u_k\,, \quad B_i = F^*_{ik}\,u_k, \quad H_i = G^*_{ik}\,u_k\,. \tag{6}$$

Die hier verwendeten Bezeichnungen erklären sich aus dem Umstand, dass im Falle eines im Vergleich zum Beobachter ruhenden Dielektrikums ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = i$) die Komponenten dieser Vektoren folgenderweise lauten:

$$\begin{aligned} E_i &= (\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z, 0), & D_i &= (\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y, \mathfrak{D}_z, 0), \\ H_i &= (\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z, 0), & B_i &= (\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z, 0). \end{aligned} \tag{7}$$

Da die Tensoren F_{ik}, G_{ik}, F^*_{ik}, G^*_{ik} antisymmetrisch sind, so folgt aus der Definition, dass alle vier eingeführten Vierervektoren senkrecht zur Vierergeschwindigkeit sind:

$$E_i u_i = 0, \quad D_i u_i = 0, \quad B_i u_i = 0, \quad H_i u_i = 0. \tag{8}$$

Die Vektoren E_i, D_i, H_i, B_i können ebenso zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes verwendet werden wie die Tensoren F_{ik} und G_{ik}. Dies geht auch daraus hervor, dass mit Hilfe der aus F_{ik} gebildeten Vektoren E_i und B_k bzw. der aus G_{ik} gebildeten Vektoren H_i und D_k auch die Tensorkomponenten selbst ausgedrückt werden können

$$\begin{aligned} F_{ik} &= u_i E_k - u_k E_i + i\delta^*_{ikrs} u_r B_s, \\ G_{ik} &= u_i D_k - u_k D_i + i\delta^*_{ikrs} u_r H_s. \end{aligned} \tag{9}$$

(Die Richtigkeit dieser Tensorgleichungen kann am einfachsten in jenem Koordinatensystem verifiziert werden, in welchem das Dielektrikum ruht. Die Tensorform gewährleistet die Gültigkeit des Zusammenhangs auch in jedem anderen Inertialsystem.)

Als Folge der Maxwellschen Gleichungen (1) und (2) lassen sich zwischen den Komponenten der Vektoren E_i, D_i, H_i, B_i die nachstehenden Zusammenhänge aufstellen:

$$\begin{aligned} \partial_k D_k &= 4\pi\varrho_0, & \partial_i H_k - \partial_k H_i + u_r \partial_r G^*_{ik} &= 4\pi i \delta^*_{ikrs} u_r j_s, \\ \partial_k B_k &= 0, & \partial_i E_k - \partial_k E_i + u_r \partial_r F_{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Hier sei

$$\varrho_0 = -u_k s_k$$

die Ruheladungsdichte und

$$j_i = s_i - \varrho_0 u_i = \sigma_{ik} E_k$$

die Dichte des konduktiven Stromes (σ_{ik} ist die Leitfähigkeit). Die jetzt erhaltenen Feldgleichungen weisen eine starke formelle Ähnlichkeit mit der dreidimensionalen Gestalt der Maxwellschen Gleichungen auf und zeigen die Wirkung des konduktiven bzw. konvektiven Stromes in kovarianter Weise getrennt an.

Die Zahl der zu bestimmenden Feldstärkekomponenten beträgt zwölf, und zwar die zwölf voneinander unabhängigen Komponenten von F_{ik} und G_{ik}. Die acht Gleichungen des Maxwellschen Gleichungssystems genügen aber allein nicht, um diese ermitteln zu können, es müssen auch noch die *materiellen Gleichungen* bekannt sein, welche die Polarisierbarkeit des dielektrischen Mediums ausdrükken und dadurch eine Beziehung zwischen den Tensoren F_{ik} und G_{ik} herstellen. Wenn die durch das Feld hervorgerufene Polarisation eine homogene lineare Funktion der Feldstärkekomponenten ist, so haben die materiellen Gleichungen folgende allgemeine Gestalt :

$$G_{ik} = \gamma_{ikuv} F_{uv}.$$

Im Vakuum lautet die Gleichung einfach :

$$G_{ik} = F_{ik}.$$

In einem isotropen (homogenen oder inhomogenen) Medium, das sich im Vergleich zum Beobachter mit einer Vierergeschwindigkeit u_i bewegt, ist die relativistische Gestalt der materiellen Gleichungen wie folgt [2] :

$$G_{ik} = \frac{1}{\mu}(F_{ik} - u_i E_k + u_k E_i) + \varepsilon(u_i E_k - u_k E_i). \tag{10}$$

Im folgenden soll nunmehr versucht werden, relativistische Gleichungen aufzustellen, welche die Beziehung der Tensoren G_{ik} und F_{ik} zueinander in einem *anisotropen* Medium angeben.

2. *Die materiellen Gleichungen in einem anisotropen Medium*

Die Form der materiellen Gleichungen in einem ruhenden anisotropen Medium ist bekannt :

$$\mathfrak{D}_x = \varepsilon_{xx}\mathfrak{E}_x + \varepsilon_{xy}\mathfrak{E}_y + \varepsilon_{xz}\mathfrak{E}_z \tag{11}$$

(ähnlich auch für $\mathfrak{D}_y$ und $\mathfrak{D}_z$),

$$\mathfrak{B}_x = \mu_{xx}\mathfrak{H}_x + \mu_{xy}\mathfrak{H}_y + \mu_{xz}\mathfrak{H}_z \tag{12}$$

(ähnlich auch für $\mathfrak{B}_y$ und $\mathfrak{B}_z$). Da die Determinante $|\mu|$ nicht Null ist, können aus Gl. (12) die untenstehenden Zusammenhänge gebildet werden

$$\mathfrak{H}_x = \varkappa_{xx}\mathfrak{B}_x + \varkappa_{xy}\mathfrak{B}_y + \varkappa_{xz}\mathfrak{B}_z \tag{13}$$

(ähnlich auch für $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$).

Die im Falle von bewegten Medium gültigen Gleichungen lassen sich (wenn man den Transformationscharakter von ε und μ kennt) aus den für die ruhenden Medien aufgestellten Gleichungen durch Lorentz-Transformation bestimmen. Im folgenden soll statt der umständlichen Ausführung der Transformation ein einfacheres Verfahren gewählt werden.

Zur Charakterisierung der elektrischen Polarisierbarkeit sei der Tensor ε_{ik}, zu der der magnetischen Polarisierbarkeit der Tensor $\varkappa_{ik}$ wie folgt eingeführt: in dem an das Dielektrikum fixierten Koordinatensystem mögen die Komponenten von ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$ folgendermassen lauten:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} & 0 \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varkappa_{ik} = \begin{pmatrix} \varkappa_{xx} & \varkappa_{xy} & \varkappa_{xz} & 0 \\ \varkappa_{yx} & \varkappa_{yy} & \varkappa_{yz} & 0 \\ \varkappa_{zx} & \varkappa_{zy} & \varkappa_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In einem Koordinatensystem, in welchem sich das Dielektrikum (mit einer konstanten Geschwindigkeit) bewegt, werden die Komponenten von ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$ aus den obigen Komponenten durch die Transformation bestimmt. (Dies bedeutet die Annahme der Tatsache, dass die Grössen, welche zur Charakterisierung der dielektrischen und magnetischen Polarisierbarkeit in der nichtrelativistischen Theorie verwendet wurden, die Komponenten eines Vierertensors bilden.)

In dem Ruhesystem und infolgedessen auch in jedem anderen Inertialsystem haben folgende Vektorgleichungen Gültigkeit:

$$\varepsilon_{ik}\, u_i = 0, \qquad \varepsilon_{ik}\, u_k = 0, \tag{14}$$

$$\varkappa_{ik}\, u_i = 0, \qquad \varkappa_{ik}\, u_k = 0. \tag{15}$$

Der im Falle eines ruhenden Mediums gültige Zusammenhang (11) soll nun mit den eingeführten relativistischen Grössen D_i, ε_{ik} und E_k ausgedrückt werden. Die Umschreibung auf Vektor- und Tensorkomponenten führt zu folgender Gestalt der materiellen Gleichung:

$$D_i = \varepsilon_{ik}\, E_k. \tag{16}$$

Die mit den Komponenten H_i, $\varkappa_{ik}$ und B_k geschriebene Form der gleichfalls in einem ruhenden Medium gültigen materiellen Gleichung (13) ist:

$$H_i = \varkappa_{ik}\, B_k. \tag{17}$$

Die jetzt erhaltenen Zusammenhänge bestehen zwischen Vektoren und Tensoren, sie besitzen also nicht nur in einem speziellen Koordinatensystem (in dem das Dielekrtikum ruht) Gültigkeit, sondern auch in jedem Inertialsystem. Dies bedeutet demnach, dass in der Form der Gleichungen (16) und (17) die relativistische, auch für den Fall eines bewegten, anisotropen Mediums gültige Gestalt der materiellen Gleichungen gefunden wurde, welche die Polarisierbarkeit des Mediums ausdrückt.

Es ist leicht einzusehen, dass das unter (16) und (17) aufgestellte Gleichungssystem nur je drei unabhängige Gleichungen enthält. Zwischen den zweimal vier Gleichungskomponenten ($i = 1, 2, 3, 4$) besteht immer folgende Identität:

$$(D_i - \varepsilon_{ik} E_k) u_i \equiv 0, \qquad (H_i - \varkappa_{ik} B_k) u_i \equiv 0.$$

Die sechs unabhängigen Gleichungskomponenten genügen eben, um bei Kenntnis von F_{ik} die sechs Komponenten von G_{ik} bestimmen zu können.

Die Gleichungen (16) und (17) enthalten implizite die zu ermittelnden Komponenten von G_{ik}. Nun wäre es aber von mehreren Gesichtspunkten aus wünschenswert, auch im anisotropen Medium die der Gl. (10) ähnliche explizite Form der materiellen Gleichungen zu kennen. (Dies ist z. B. die Voraussetzung der Ableitbarkeit der Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip.) Zum Ansetzen des expliziten Zusammenhanges bietet der Ausdruck (9) Möglichkeit. Wenn man in diese Gleichung die in (16) bzw. (17) ausgedrückte Form von D_i und H_i einsetzt, erhält man:

$$G_{ik} = (u_i \varepsilon_{kr} - u_k \varepsilon_{ir}) E_r + (i\delta^*_{ikrs} u_r \varkappa_{st}) B_t \tag{18}$$

oder bei Berücksichtigung der Definition von E_r und B_t:

$$G_{ik} = \left(u_i \varepsilon_{ku} u_v - u_k \varepsilon_{iu} u_v + \frac{1}{2} \delta^*_{ikrs} u_r \varkappa_{sm} u_n \delta^*_{mnuv} \right) F_{uv}, \tag{19}$$

was gerade der gesuchte Zusammenhang ist.

Bei Anwendung der Gestalt (18) der materiellen Gleichung soll noch die durch die F_{ik}-Komponenten (durch E_i und B_i) ausgedrückte Form des Tensors G^*_k geschrieben werden

$$G^*_{ik} = \frac{i}{2} \delta^*_{ikab} G_{ab} = -\frac{i}{2} \delta^*_{ikab} (u_a \varepsilon_{br} - u_b \varepsilon_{ar}) E_r + \frac{1}{2} \delta^*_{ikab} \delta^*_{abrs} u_r \varkappa_{st} B_t. \tag{20}$$

Hierbei möge folgende Gleichheit berücksichtigt werden:

$$\frac{1}{2} \delta^*_{ikab} \delta^*_{abrs} = \delta_{ir} \delta_{ks} - \delta_{is} \delta_{kr}.$$

Wenn man noch in Betracht zieht, dass δ^*_{ikab} in jedem Indexpaar antisymmetrisch ist, so lässt sich der Ausdruck von G^*_{ik} auf folgende Gestalt bringen:

$$G^*_{ik} = (u_i \varkappa_{kr} - u_k \varkappa_{ir}) B_r - (i\delta^*_{ikrs} u_r \varepsilon_{st}) E_t. \tag{21}$$

Der jetzt erhaltene Zusammenhang ist der Gleichung (18) vollständig äquivalent.

Zu der unter (19) angegebenen expliziten Form der materiellen Gleichung war man auf Grund der Gleichungen (16) und (17) gelangt. Es soll nun gezeigt werden, dass man auch umgekehrt vorgehen kann : die Gleichungen (16) und (17) lassen sich auch aus dem Zusammenhang (18) herleiten. Es ist nämlich

$$D_i = G_{ik}\, u_k = (u_i\, u_k\, \varepsilon_{kr} - u_k\, u_k\, \varepsilon_{ir})\, E_r + (i\delta^*_{ikrs}\, u_k\, u_r\, \varkappa_{st})\, B_t\,,$$
$$H_i = G^*_{ik}\, u_k = (u_i\, u_k\, \varkappa_{kr} - u_k\, u_k\, \varkappa_{ir}) B_r - (i\delta^*_{ikrs}\, u_k\, u_r\, \varepsilon_{st})\, E_t.$$

Infolge von (14) und (15) beträgt das erste Glied der rechten Seiten Null. Auf Grund von

$$\delta^*_{ikrs} = -\,\delta^*_{irks}$$

ergibt auch das dritte Glied Null. Wenn man auch den Zusammenhang (5) berücksichtigt, erhält man schliesslich :

$$D_i = \varepsilon_{ir}\, E_r, \qquad H_i = \varkappa_{ir}\, B_r,$$

was zu beweisen war.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass die unter (16) — (17), (19), (18) bzw. (21) geschriebenen Formen der materiellen Gleichungen vollständig äquivalent sind. Bei den nachfolgenden Berechnungen kann also immer jene gewählt werden, die dem Zweck am besten entspricht.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die jetzt aufgestellte Gleichung der anisotropen Medien die für isotrope Medien gültige, von *Novobátzky* aufgestellte Gleichung (10) als Spezialfall beinhaltet. Man muss hierbei nur berücksichtigen, dass in einem isotropen Medium die elektrische und magnetische Polarisierbarkeit des Dielektrikums mit je einer skalaren Grösse ausgedrückt werden können :

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon\,(\delta_{ik} + u_i\, u_k), \qquad \varkappa_{ik} = \frac{1}{\mu}\,(\delta_{ik} + u_i\, u_k)\,.$$

In der Praxis hat man es meistens mit Dielektrika zu tun, die von Gesichtspunkt der elektrischen Polarisierbarkeit mehr oder minder anisotrop sind, deren magnetische Polarisierbarkeit jedoch im allgemeinen unbedeutend ist (die magnetische Permeabilität beträgt in guter Näherung $\mu = 1$). In diesem Falle können die materiellen Gleichungen in folgender einfachen Form geschrieben werden :

$$G_{ik} = F_{ik} - u_i\,(E_k - \varepsilon_{kn}\, E_n) + u_k\,(E_i - \varepsilon_{in}\, E_n). \tag{22}$$

3. *Beispiel für die Polarisation eines bewegten Kristallkörpers*

Die Anwendung der Gleichung, welche die Polarisierbarkeit eines bewegten anisotropen Dielektrikums ausdrückt, soll an einem einfachen Beispiel vorgeführt werden. Es sei ein ziegelförmiges kristallisches Dielektrikum angenommen, wobei aber die Kanten des Ziegelkörpers nicht mit den Hauptachsen der Kristallisation zusammenfallen sollen. Wenn man das Koordinatensystem x, y, z so annimmt, dass die Koordinatenachsen parallel mit den Kanten des Ziegelkörpers verlaufen, so bildet die Kristallachse A mit der x-Achse und die Kristallachse B mit der y-Achse einen Winkel φ. Die Kristallachse C sei parallel zur z-Achse.

Die Polarisierbarkeit des Kristallmaterials in der Richtung der Kristallachsen A, B und C (die im rechten Winkel zueinander stehen) wird durch die Suszeptibilitäten α_A, α_B und α_C bzw. durch die Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon_A = 1 + 4\pi\alpha_A, \qquad \varepsilon_B = 1 + 4\pi\alpha_B, \qquad \varepsilon_C = 1 + 4\pi\alpha_C \tag{23}$$

ausgedrückt. In diesem Falle sind die Komponenten des Tensors ε_{ik} in dem mitbewegten Bezugssystem:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_A\cos^2\varphi + \varepsilon_B\sin^2\varphi & (\varepsilon_A - \varepsilon_B)\cos\varphi\,\sin\varphi & 0 & 0 \\ (\varepsilon_A - \varepsilon_\beta)\cos\varphi\,\sin\varphi & \varepsilon_A\sin^2\varphi + \varepsilon_B\cos^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, dass die magnetische Suszeptibilität des Kristalles Null ($\mu = 1$) beträgt.

Es bewege sich der Kristall in der Richtung der negativen x-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit $v = c\beta$ durch das homogene magnetische Feld von Richtung z. Es sei kein elektrisches Feld vorhanden. In diesem Falle sind die von Null verschiedenen Komponenten des Tensors F_{ik}:

$$F_{12} = - F_{21} = \mathfrak{B}_z = B$$

und die Komponenten der Vierergeschwindigkeit des Kristallkörpers

$$u_1 = \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = 0, \qquad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

In diesem Koordinatensystem, in welchem sich der Kristall mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, können die Komponenten des Tensors ε_{ik} durch die Lorentz-Transformation der im ruhenden Koordinatensystem bekannten Komponenten ermittelt werden:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 & -i\beta\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 & -i\beta\varepsilon_{12} \\ 0 & 0 & \varepsilon_C & 0 \\ -i\beta\varepsilon_{11} & -i\beta\varepsilon_{12} & 0 & -\beta^2\varepsilon_{11} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1-\beta^2}(\varepsilon_A\cos^2\varphi + \varepsilon_B\sin^2\varphi), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\varepsilon_A - \varepsilon_B)\cos\varphi\sin\varphi, \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_A\sin^2\varphi + \varepsilon_B\cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Nachdem F_{ik}, ε_{ik} und u_k bekannt sind, sei nun auf Grund der materiellen Gleichung (22) der Tensor G_{ik}, d. h. der Wert der magnetischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung im Inneren der bewegten Kristallmaterie berechnet.

$$\mathfrak{H}_x = G_{23} = 0, \qquad \mathfrak{H}_y = G_{31} = 0, \qquad \mathfrak{H}_z = G_{12} = \frac{1-\varepsilon_{22}\beta^2}{1-\beta^2} B,$$

$$\mathfrak{D}_x = iG_{14} = \varepsilon_{12}\beta B, \quad \mathfrak{D}_y = iG_{24} = \frac{-1+\varepsilon_{22}}{1-\beta^2}\beta B, \quad \mathfrak{D}_z = iG_{34} = 0.$$

Auch bei den maximal erreichbaren Geschwindigkeiten können die Glieder von der Grössenordnung $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ vernachlässigt werden. Wenn man auch die konkrete Form der Tensorkomponenten ε_{ik} in Betracht zieht, erhält man:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{D}_x = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)\cos\varphi \sin\varphi \beta B, \quad \mathfrak{D}_y = (\varepsilon_A \sin^2\varphi + \varepsilon_B \cos^2\varphi - 1)\beta B, \quad \mathfrak{D}_z = 0.$$

Es ist ersichtlich, dass das bewegte kristallische Dielektrikum (bei den angenommenen Bedingungen) das magnetische Feld nicht beeinflusst, B kann daher mit der ausserhalb des Kristalls hervorgerufenen magnetischen Feldstärke identifiziert werden. Im Inneren des Kristalls ist indessen der Vektor $\mathfrak{D}$ der elektrischen Verschiebung von Null verschieden. Da

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$$

ist und die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ Null beträgt, ergibt sich $\mathfrak{D}$ vollständig aus der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}$, welche durch die Bewegung im magnetischen Feld verursacht wird. Wenn man auf Grund der Gleichung (23) an Stelle der Dielektrizitätskonstante die elektrische Suszeptibilität einführt, so erhält man folgende Polarisationkomponenten:

$$\mathfrak{P}_x = (\alpha_A - \alpha_B)\cos\varphi \sin\varphi\beta B, \quad \mathfrak{P}_y = (\alpha_A \sin^2\varphi + \alpha_B\cos^2\varphi)\beta B, \quad \mathfrak{P}_z = 0.$$

Der absolute Wert der ohne irgendein elektrisches Feld hervorgerufenen Polarisation beträgt

$$|\mathfrak{P}| = \sqrt{\mathfrak{P}_x^2 + \mathfrak{P}_y^2 + \mathfrak{P}_z^2} = \beta B \sqrt{\alpha_A^2 \sin^2\varphi + \alpha_B^2 \cos^2\varphi}. \tag{24}$$

Die Richtung des Polarisationsvektors stimmt nicht mit der Richtung der auf die molekular gebundenen Ladungen wirkenden, in der Richtung y (senkrecht zur Bewegungsgeschwindigkeit und zur magnetischen Feldstärke) verlaufenden

Lorentzschen Kraft überein, sondern weicht von dieser Richtung um den Winkel

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{P}_y} = \operatorname{arc\,tg} \frac{(\alpha_A - \alpha_B) \sin\varphi \cos\varphi}{\alpha_A \sin^2\varphi + \alpha_B \cos^2\varphi}$$

ab (Abb. 1.). Die Richtigkeit des aus der relativistischen Gleichung gewonnenen Resultats wird durch die Tatsache bestätigt, dass man zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt, wenn man die Grösse und Richtung der durch das magnetische Feld herforgerufenen Polarisation in einem mitbewegten Koordinatensystem bei Verwendung der *bekannten* materiellen Gleichungen der *ruhenden* Medien bestimmt.

Das Ergebnis der Berechnungen zeigt, dass infolge des Durchquerens des

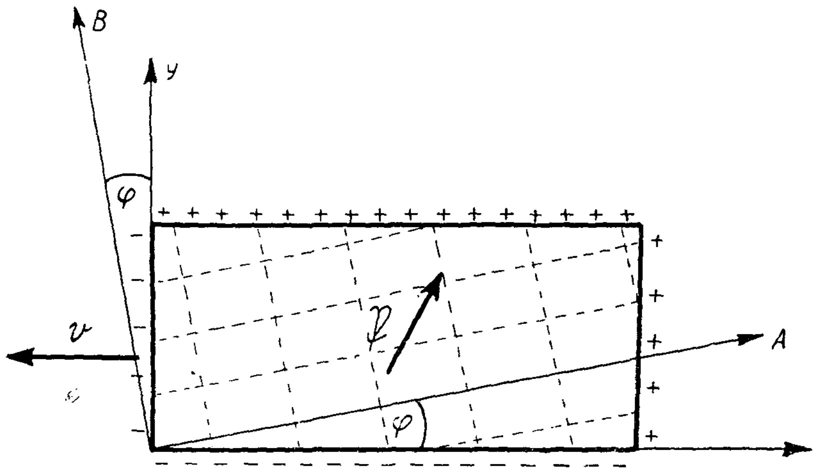

Abb. 1.

magnetischen Feldes an der senkrecht zur x-Achse gelengenen Fläche des Kristalls freie Oberflächenladungen von einer Dichte $\mathfrak{P}_x$ und an der senkrecht zur y-Achse gelegenen Fläche von einer Dichte $\mathfrak{P}_y$ erscheinen, u. zw. mit entgegengesetztem Vorzeichen an den gegenüberbefindlichen Flächen. Die Dichte der Oberflächenladungen hängt dabei von dem durch die Kristallachsen und die Kanten des ziegelförmigen Körpers eingeschlossenen Winkel ab. (Bei Bewegung im magnetischen Feld von isotropen Dielektrika bleibt die senkrecht zur x-Achse gelegene Fläche bei ähnlicher Anordnung immer ungeladen.)

Wenn man den bewegten Kristallkörper um die die Richtung des magnetischen Feldes angebende z-Achse dreht, so kommt es einmal dazu, dass nur noch einander gegenüber liegende Flächen entgegengesetzt gleiche Oberflächenladungen aufweisen. Dies wird dann eintreten, wenn der Polarisationsvektor gerade zu diesen Flächen senkrecht ist (Abb. 2). Die Lage des Kristallkörpers, welche beschriebene Erscheinung hervorruft, ist unabhängig von der Translationsgeschwindigkeit des Kristalles.

Der experimentelle Nachweis der hier behandelten Erscheinungen scheint technisch nicht undurchführbar zu sein, obzwar die Versuchsverhältnisse

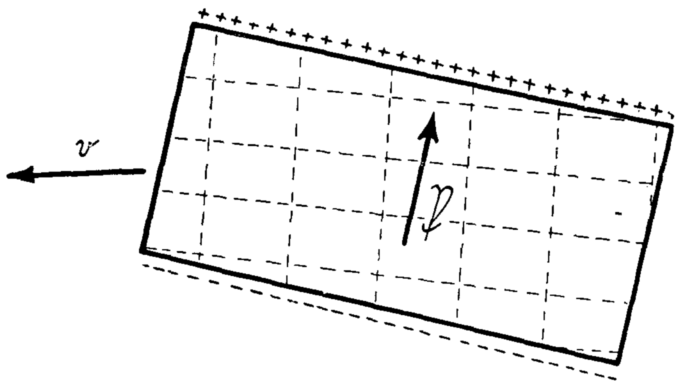

Abb. 2.

verwickelter sind als bei dem auf isotrope Dielektrika bezüglichen analogen Versuch von *Wilson*.

4. *Die Lagrange-Funktion*

Da man die explizite Gestalt der materiellen Gleichungen kennt, ist es leicht verständlich, dass die Gleichungen (1), (3) und (19) — wenn s_i, u_i, ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$ gegeben sind — zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes angewandt werden können. Man setze Gleichung (3) in (19) ein, und sodann lezteren Zusammenhang in (1). Das Resultat ist

$$\partial_k \left[\left(u_i \varepsilon_{ku} u_v - u_k \varepsilon_{iu} u_v + \tfrac{1}{2} \delta^{*}_{ikrs} u_r \varkappa_{sm} u_n \delta^{*}_{mnur}\right) \left(\partial_u \varphi_v - \partial_v \varphi_u\right) \right] = 4 \pi s_i. \tag{25}$$

Diese Gleichung ist im Falle von $i = 1, 2, 3, 4$ gültig. Die vier Potentialkomponenten φ_i werden durch die vier Gleichungskomponenten bestimmt, worauf dann die Komponenten der Feldstärken auf die beschriebene Weise gebildet werden können.

Die durch Potentiale ausgedrückte Gestalt (25) der Feldgleichungen kann aus der Lagrange-Funktion abgeleitet werden. Hierzu muss man nur voraussetzen, dass in dem im Vergleich zum Dielektrikum ruhenden Bezugssystem die folgenden Zusammenhänge bestehen:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}, \\ \varkappa_{xy} = \varkappa_{yx}, \quad \varkappa_{yz} = \varkappa_{zy}, \quad \varkappa_{zx} = \varkappa_{xz}. \end{gathered} \tag{26}$$

(Diese Zusammenhänge bilden auch die Vorbedingung, dass man im Inneren des Dielektrikums von der Energie des elektromagnetischen Feldes als von einer durch den augenblicklichen Zustand des Kraftfeldes bestimmten, von der Art der Entstehung des Feldes unabhängigen Zustandsfunktion sprechen kann*. Aus der Gleichung (26) sowie aus der Definition von ε_{ik} und $\varkappa_{ik}$ folgt, dass in jeglichem Inertialsystem

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \qquad \varkappa_{ik} = \varkappa_{ki} \tag{27}$$

ist.

Die das elektromagnetische Feld charakterisierende Gleichung (25) kann aus folgender Lagrange-Funktion abgeleitet werden:

$$L = \frac{1}{16\pi} F_{ab} G_{ab} - s_n \varphi_n = \frac{1}{8\pi} F_{ab} \left(u_a \varepsilon_{bu} u_v + \frac{1}{2} \overset{*}{\delta}_{abns} u_n \varkappa_{sm} u_n \overset{*}{\delta}_{mnuv} \right) F_{uv} - s_n \varphi_n. \tag{28}$$

(Den Tensor F_{ik} denke man sich durch das Potential φ_i ausgedrückt.) Die Euler-Langrangesche Gleichung lautet nämlich:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \partial_k \frac{\partial L}{\partial \partial_k \varphi_i} = \partial_k \left(2 \frac{\partial L}{\partial F_{ik}} \right) - s_i = 0. \tag{29}$$

Doch ist

$$2 \frac{\partial L}{\partial F_{ik}} = \frac{1}{8\pi} \left(u_i \varepsilon_{ku} u_v - u_k \varepsilon_{iu} u_v + \frac{1}{2} \overset{*}{\delta}_{ikrs} u_r \varkappa_{sm} u_n \overset{*}{\delta}_{mnuv} \right) F_{uv} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi} \left(u_a \varepsilon_{bi} u_k - u_k \varepsilon_{\cdot k} u_i + \frac{1}{2} \overset{*}{\delta}_{aabvs} u_r \varkappa_{sm} u_n \overset{*}{\delta}_{mnik} \right) F_{ab} = \frac{1}{4\pi} G_{ik}.$$

(Es wurde hier der Zusammenhang (27) berücksichtigt.) Wenn man dies in Gleichung (29) einsetzt, so erhält man die abzuleitende Gleichung (1) bzw. (25).

Die Kenntnis der Lagrange-Funktion bietet die Möglichkeit, auch die Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes in anisotropen Dielektrika auszuarbeiten. Die zum Potential φ_i kanonisch konjugierten Funktionen sind:

$$\pi_i = c \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{1}{i} \frac{\partial L}{\partial \partial_4 \varphi_i} = \frac{2}{i} \frac{\partial L}{\partial F_{4i}} = \frac{1}{4\pi i} G_{4i}.$$

Die zum Vektorpotential $\mathfrak{A}$ kanonisch konjugierte Funktion ist also das $^1/_4\pi$-fache des Verschiebungsvektors $\mathfrak{D}$, genau so wie im isotropen Medium [2]. (Die kanonisch Konjugierte des skalaren Potentials Φ ist auch jetzt Null. Wenn man von der Vertauschungsrelation ausgeht, die zwischen den den kanonischen Variablenpaaren zugeordneten Operatoren besteht, so kann auch die quantentheoretische Behandlung durchgeführt werden.

* Siehe z. B. *J. Frenkel*, loc. cit. [7], S. 55.

5. *Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes*

Die genaue Gestalt des Energie-Impuls-Tensors von isotropen Dielektrika ist eine auch heute noch umstrittene Frage [1—6]. Es ist wahrscheinlich, dass der von *Abraham* eingeführte symmetrische Tensor

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[F_{ir}F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs} + (\varepsilon\mu - 1)(u_i u_k E_r E_r - E_i E_k + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\delta_{ik}E_r E_r)\right] = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right] + \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi\mu}(u_i E_r - F_{ir})u_k E_r,$$

oder aber der von *Minkowski* aufgestellte asymmetrische, jedoch einfachere Tensor

$$t_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right],$$

die dynamischen Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes in einem isotropen Dielektrikum beschreibt. Der *Abraham*sche Energie-Impuls-Tensor kann, wie dies von *Novobátzky* gezeigt wurde, zusammen mit den Feldgleichungen aus einer Lagrange-Funktion abgeleitet werden [2]. Im nachstehenden sei kurz untersucht, in welcher Weise die Energie-Impuls-Tensoren und die mit ihnen zusammenhängenden Grössen sich im Falle von anisotropen Dielektrika modifizieren, die mit der skalaren Dielektrizitätskonstante ε und der skalaren Permeabilität μ nicht charakterisiert werden können.

In einem anisotropen Medium ist die eine Möglichkeit, die für die Angabe des Energie-Impuls-Tensors des Kraftfeldes in Betracht kommt, der *Minkowski*sche asymmetrische Ausdruck:

$$t_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}G_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}G_{rs}\right].$$

Dieser Tensor kann nicht abgeleitet werden, es lässt sich nur sagen, dass er im Vakuum, wo $\varepsilon = \mu = 1$ ist, zusammen mit dem *Abraham*schen Tensor in den aus der Elektronentheorie bekannten Energie-Impuls-Tensor

$$T^0_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{ir}F_{kr} - \frac{1}{4}\delta_{ik}F_{rs}F_{rs}\right]$$

übergeht. Die sich als einzelne Komponenten des *Minkowski*schen Tensors ergebende Spannung (die Kraft, die auf die durch den Normalvektor $\mathfrak{n}$ gekennzeichnete Flächeneinheit wirkt), die Dichte des Feldimpulses, der im Felde fliessenden Energieströmung und der Feldenergie haben in jedem Inertialsystem folgende Form:

$$\mathfrak{t}^M = -t_{**} = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) - \frac{1}{2}\mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B})\right],$$

$$\mathfrak{G}^M = \frac{1}{ic}t_{*4} = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{D}\times\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{i}t_{4*} = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}\times\mathfrak{H},$$

$$u = -t_{44} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}).$$

(Der Stern * bedeutet hier die räumlichen Indizes 1, 2, 3.) Die Dichte der ponderomotorischen Kraft, die sich als negative Divergenz des von *Minkowski* angenommenen Energie-Impuls-Tensors ergibt, ist ähnlich wie im isotropen Dielektrikum:

$$k_i = -\partial_k t_{ik} = F_{ik}s_k - \frac{1}{16\pi}(G_{rs}\,\partial_i F_{rs} - F_{rs}\,\partial_i G_{rs}). \tag{31}$$

Das erste Glied gibt über die auf die Ladungen wirkende Lorentzsche Kraft, der zweite, in Klammern stehende Ausdruck über den an der Grenzfläche der Dielektrika auftretenden ponderomotorischen Druck Aufschluss.

Kennt man die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes (Abschnitt 4), so kann auch die Variationsmethode der allgemeinen Relativitätstheorie zur Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors des Kraftfeldes angewandt werden. Die Variation der Lagrange-Funktion gemäss dem metrischen Tensor g^{ik} führt zu folgendem Energie-Impuls-Tensor:

$$\begin{aligned} T_{ik} = &-\frac{1}{8\pi}(E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i) + \frac{1}{4\pi}(F^*_{ir} - u_i B_r)\,u_k H_r + \\ &+ \frac{1}{4\pi}(F^*_{kr} - u_k B_r)\,u_i H_r + \frac{1}{8\pi}(g_{ik} + 2u_i u_k)(E_r D_r + H_r B_r). \end{aligned} \tag{32}$$

(Die Herleitung des Tensors aus der Lagrange-Funktion wird im Anhang angegeben.) Der jetzt erhaltene Tensor kann als die Verallgemeinerung des von *Abraham* eingeführten Energie-Impuls-Tensors angesehen werden. Der Tensor ist symmetrisch, wie dies ja bei jedem Tensor der Fall ist, der von einem Variationsprinzip abgeleitet wurde. Auf diese Weise besitzt der *Planck*sche Satz über die Trägheit der Energie auch gesondert für die Energie des elektromagnetischen Feldes Gültigkeit, und auch das durch das Feld auf das Dielektrikum ausgeübte Drehmoment lässt sich stets auf ponderomotorische Kräfte zurückführen.

In einem im Vergleich zum Medium ruhenden Bezugssystem ergeben sich die als einzelne Komponenten des *Abraham*schen Tensors erhaltenen Maxwellschen Spannungen, die Feldimpulsdichte, die Energieströmungsdichte (der Poyntingsche Vektor) und die Feldenergiedichte aus dem ersten, zweiten, dritten, bzw. vierten (eingeklammerten) Glied des Ausdruckes von T_{ik}, u. zw. folgenderweise:

$$\mathfrak{t}^A = -T_{**} = \frac{1}{8\pi}\left[\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\mathfrak{n}) + \mathfrak{D}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) - \frac{1}{2}\mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B})\right].$$

$$\mathfrak{G}^A = \frac{1}{ic} T_{*4} = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E}\times\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{i} T_{4*} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E}\times\mathfrak{H},$$

$$u = -T_{44} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}+\mathfrak{H}\mathfrak{B}).$$

(Im Falle eines bewegten Dielektrikums wird der durch dreidimensionale Vektoren ausgedrückte Zusammenhang obiger Grössen komplizierter.) Es ist ersichtlich, dass die durch Dreiervektoren ausgedrückte Gestalt der *Minkowski*schen bzw. *Abraham*schen Tensorkomponenten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ sich in anisotropen Medien nicht von den in isotropen Medien bekannten Ausdrücken unterscheidet.

Der Ausdruck der sich aus dem *Abraham*schen symmetrischen Tensor ergebenden ponderomotorischen Kraft soll der besseren Übersichtlichkeit halber für jenen speziellen, aber praktisch wichtigsten Fall angesetzt werden, wo die magnetische Polarisierbarkeit des Mediums vernachlässigt werden kann. [Gleichung (22).] In diesem Spezialfall ist auch die Ableitung des symmetrischen Tensors aus der Lagrange-Funktion einfacher (siehe Anhang). Das erhaltene Ergebnis lautet:

$$T_{ik} = \frac{1}{2\pi}\left[F_{ir}F_{kr} + E_i E_k - \frac{1}{2}(E_i D_k + E_k D_i) - u_i u_k E_r (E_r - D_r) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\delta_{ik} F_{rs} G_{rs}\right]. \tag{33}$$

Wenn man die unter (30) geschriebene Gestalt des *Minkowski*schen Tensors t_{ik} in Betracht zieht und zur Charakterisierung der elektrischen Polarisation den Vektor

$$P_i = \frac{1}{4\pi}(D_i - E_i)$$

einführt, kann man zu folgender Form von T_{ik} gelangen :

$$T_{ik} = t_{ik} - (F_{ir} - u_i E_r) u_k P_r + \frac{1}{2} (E_i P_k - E_k P_i)$$
$$= t_{ik} + i\delta^*_{iruv} u_k u_r P_u B_v + \frac{1}{2} (E_i P_k - E_k P_i).$$

Die sich als negative Divergenz des jetzt hingeschriebenen *Abraham*schen Tensors ergebende Kraftdichte unterscheidet sich in zwei Gliedern von dem *Minkowski*schen Ausdruck (31) :

$$K_i = -\partial_k T_{ik} = F_{ik} s_k + \frac{1}{16\pi} (G_{rs} \partial_i F_{rs} - F_{rs} \partial_i G_{rs}) - iu_k \partial_k (\delta^*_{iruv} u_r P_u B_v) +$$
$$-\frac{1}{2} \partial_k (E_i P_k - E_k P_i) .$$

Das vorletzte Glied ist der von *Abraham* eingeführte und in ruhendem (isotropem) Medium in der Gestalt von

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B}\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{B}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{B} + \frac{1}{c} \mathfrak{P} \times \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

bekannte Kraftdichteausdruck. Dieser Ausdruck enthält u. a. die auf den Polarisationsstrom $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$ durch das magnetische Feld ausgeübte Lorentzsche Kraft. Das letzte neue Glied tritt nur in einem anisotropen Medium auf und steht mit dem Drehmoment in Zusammenhang, das von $\mathfrak{E}$ auf das damit nicht parallele $\mathfrak{P}$ ausgeübt wird.

Von einer ausführlicheren Untersuchung, ob der *Minkowski*sche oder aber der symmetrische Energie-Impuls-Tensor die im dielektrischen Medium sich abspielenden Vorgänge richtiger beschreibt, soll hier abgesehen werden.

6. *Zusammenfassung*

Aus dem hier Gesagten ist ersichtlich, dass in einem anisotropen Medium die relativistische Theorie des elektromagnetischen Feldes, wenn man von der nichtrelativistischen phänomenologischen Theorie ausgeht, genau so eindeutig entwickelt werden kann, wie dies von *Minkowski* im Falle von isotropen Medien durchgeführt wurde. Hierbei bleiben die Maxwellschen Gleichungen unverändert, nur die die Polarisierbarkeit des Feldes ausdrückenden materiellen

Gleichungen verändern sich im Falle eines bewegten Mediums. Der genaue Ausdruck des Energie-Impuls-Tensors des Kraftfeldes und der ponderomotorischen Kraft bleibt zwar problematisch, doch ist dies selbst in der nicht-relativistischen Theorie bzw. in der relativistischen Elektrodynamik von isotropen Dielektrika eine umstrittene Frage. Auf die Untersuchung des letzteren Problems soll in einer späteren Abhandlung zurückgekommen werden.

**

Es sei hier Herrn Prof. *K. F. Novobátzky* für seine wertvollen Anleitungen und meinem Mitarbeiter *G. Györgyi* für einige Literaturhinweise der beste Dank ausgesprochen.

ANHANG

Die Ableitung des Abrahamschen Tensors und der Lagrange-Funktion

Für den Fall eines anisotropen Mediums wurde die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes unter (28) aufgestellt. In nichteuklidischer Metrik, bei der man einen Unterschied zwischen kovariantem und kontravariantem Tensor macht, hat die Lagrange-Funktion folgende Gestalt :

$$L = \frac{1}{16\pi} F_{ab}\, G^{ab} - \varphi_r\, s^r .$$

Die Variation des Integrals der Lagrange-Funktion auf Vierervolumen gemäss dem metrischen Tensor g^{ik} bestimmt den Energie-Impuls-Tensor :

$$\delta S = \delta \int L \sqrt{g}\, dx = \frac{1}{2} \int T_{ik}\, \delta g^{ik} \sqrt{g}\, dx. \tag{34}$$

(Hier bezeichnet $dx = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$.) Wenn man die Form von G_{ab} berücksichtigt, so lautet das zu variierende Integral im Falle nichteuklidischer Metrik

$$S = \int \Bigg[\frac{1}{32\pi} F_{ab} \frac{\delta^{*abrs}}{\sqrt{g}} \frac{\delta^{*mnuv}}{\sqrt{g}} u_r \varkappa_{sm} u_n F_{uv} -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{rs} E_r E_s - \varphi_r \frac{\mathfrak{s}^r}{\sqrt{g}} \Bigg] \sqrt{g}\, dx .$$

Bei der Schreibung des Integrals wurde in Betracht gezogen, dass die in Abschnitt 1 eingeführte Grösse δ^{*ikrs} sich im Laufe der allgemeinen Koordinatentransformationen wie eine kontravariante Tensordichte verhält, also mit $\sqrt{g}$ dividiert einen Tensor ergibt. Dasselbe bezieht sich auf die Stromdichte $\mathfrak{s}^i$.

Um die Variation gemäss dem metrischen Tensor ausführen zu können, ist es zweckmässig, den Integranden als Kombination der metrischen Tensorkomponenten g^{ik} und der von der Metrik unabhängigen Grössen zu schreiben. Es ist bekannt, dass φ_i, F_{ik}, $\mathfrak{s}^r$, u_k, $F_i = F_{ik}u^k$ den Tensor g^{ik} nicht enthalten. Daraus folgt, dass auch die Tensordichte

$$\mathfrak{F}^{*ik} = -\frac{i}{2}\,\delta^{*ikrs}\,F_{rs}$$

von g^{ik} unabhängig ist. (Fraglich bleibt, in welcher Weise $\varkappa_{ns}$ und ε_{rs} von g^{ik} abhängen.) Wenn man dies alles berücksichtigt, so kann man die Abhängigkeit der grösse S von g^{ik} durch folgenden Ansatz zum Ausdruck bringen :

$$S = \int \left[\frac{-1}{8\pi\sqrt{g}}\,\mathfrak{F}^{*rs}\,\mathfrak{F}^{*mn}\,u^a u^b\,\varkappa_{sm}(g^{ik})\,g_{ar}\,g_{bn} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{8\pi}\,\varepsilon^{rs}(g^{ik})\,E_r E_s\sqrt{g} - \varphi_r\,\mathfrak{s}^r \right] dx\,.$$

Nun soll die Variation gemäss g^{ik} ausgeführt werden. Wenn man nach dem bekannten Verfahren vorgeht, gelangt man zu folgendem Ergebnis :

$$\delta S = \int \frac{1}{8\pi}\left[F^*_{ir}\,u_k H^r + F^*_{kr}\,u_i H^r + B_r\,B_s\,\frac{\partial\varkappa_{rs}}{\partial g^{ik}} - \right.$$
$$\left. - E_r E_s\frac{\partial\varepsilon^{rs}}{\partial g^{ik}} + \frac{1}{2}\,g_{ik}\,(E_r D^r + H_r B^r)\right]\delta g^{ik}\sqrt{g}\,dx\,.$$

Hieraus kann die Form des gesuchten Energie-Impuls-Tensors wie folgt gefunden werden :

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[F^*_{ir}\,u_k H^r + F^*_{kr}\,u_i H^r + B^r B^s\,\frac{\partial\varkappa_{rs}}{\partial g^{ik}} - \right.$$
$$\left. - E_r E_s\frac{\partial\varepsilon^{rs}}{\partial g^{ik}} + \frac{1}{2}\,g_{ik}\,(E_r D^r + H_r B^r)\right].$$

Ungelöst bleibt noch der Ausdruck $\varkappa_{rs}$ und ε^{rs}. Bei Bestimmung dieser Grössen kann man vom bekannten Umstand ausgehen, dass die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes in einem im Vergleich zum Medium ruhenden Bezugssystem den Wert

$$u = -T_{44} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\,\mathfrak{B})$$

und der Poyntingsche Vektor den Wert

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{i} T_{4*} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}$$

aufweisen muss. Ähnlich wie bei dem von *Novobátzky* im isotropen Dielektrikum angewandten Verfahren sei die Form von $\varkappa_{rs}$ und ε^{rs} folgendermassen angenommen [2]:

$$\varkappa_{rs} = \varkappa_r^t g_{ts} (2 + g_{mn} u^m u^n) , \quad \varepsilon^{rs} = \varepsilon_t^r \; g^{ts} (2 + g_{mn} u^m u^n) ,$$

wo nunmehr $\varkappa_r^t$ und ε_t^r unabhängig von der Metrik sind. Auf Grund dieser Zusammenhänge erhält man:

$$B^r B^s \frac{\partial \varkappa_{rs}}{\partial g^{ik}} = - u_i u_k B_r H^r - \frac{1}{2} (B_i H_k + B_k H_i) ,$$

$$E^r E^s \frac{\partial \varepsilon^{rs}}{\partial g^{ik}} = - u_i u_k E_r D^r + \frac{1}{2} (E_i D_k + E_k D_i) .$$

Wenn nun alle diese Werte entsprechend eingesetzt werden, ergibt sich folgende Gestalt des Energie-Impuls-Tensors:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \Big[- \frac{1}{2} (E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i) + (F^*_{ir} - u_i B_r) u_k H^r +$$
$$+ (F^*_{kr} - u_k B_r) u_i H^r + \left(\frac{1}{2} g_{ik} + u_i u_k \right) (E_r D^r + H_r B^r) .$$

Dieser symmetrische Tensor kann als die auch im anisotropen Medium gültige Form des *Abraham*schen Energie-Impuls-Tensors angesehen werden, auf diese Form wurde auch in (32) Bezug genommen.

Wenn das Medium magnetisch unpolarisierbar ist, so ist die Ableitung des Energie-Impuls-Tensors wesentlich einfacher. Bei Verwendung der Gleichung (22) kann die Lagrange-Funktion folgenderweise geschrieben werden:

$$L = \frac{1}{16\pi} F_{ab} [G^{ab} - \varphi_r s^r =]$$

$$= \frac{1}{16\pi} F_{ab} F_{uv} g^{au} g^{bv} + \frac{1}{8\pi} (2 + g_{mn} u^m u^n) E_r E_s (g^{rs} - \varepsilon_t^r g^{ts}) - \varphi_r \frac{\mathfrak{s}^r}{\sqrt{g}}$$

Ausser den Komponenten von g^{ik} kommen lauter von der Metrik unabhängige

Ausdrücke vor. Wenn man der Energie-Impuls-Tensor auf die durch (34) gegebene Methode bildet, so gelangt man zu folgendem Ergebnis :

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\Big[F_{ir}F_k^r + E_iE_k - \frac{1}{2}(E_iD_k + E_kD_i) - \\ - u_iu_kE_r(E^r - D^r) - \frac{1}{4}g_{ik}F_{rs}G^{rs}\Big].$$

Darauf wurde in (33) Bezug genommen.

LITERATUR

1. *I. E. Tamm*, Journ. of Phys. USSR. **1**, 439, 1939. — *I. E. Tamm*, Основы теории электричества, гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949. — Da die erste Mitteilung dem Verfasser nicht erreichbar war, wurde das zitierte Lehrbuch berücksichtigt.
2. *K. F. Novobátzky*, Hung. Act. Phys. **1**, Nr. 5, 1949.
3. *M. v. Laue*, Z. Phys. **128**, 387, 1950.
4. *G. Rosenberg*, Успехи физ. наук, **44**, 463, 1951.
5. *H. Ott*, Ann. Phys. VI, **11**, 33, 1952.
6. *F. Beck*, Z. Phys. **166**, 580, 1953.
7. *J. Frenkel*, Lehrbuch der Elektrodynamik, Springer, 1928. S. 37.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДВИЖУЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Дь. Маркс

Резюме

Уравнения, выражающие поляризуемость анизотропных сред, записываются в релятивистской форме. В таком виде они могут быть применены также в случае диэлектриков, движущихся с постоянной скоростью. На основе этого дается функция Лагранжа для электромагнитного поля, из которой можно расчитать уравнения поля, канонические величины и тензор импульс — энергия.