SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'UNICITÀ DEGLI INTEGRALI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

Memoria di **Giuseppe Scorza-Dragoni** (Napoli).

Adunanza del 10 novembre 1929.

PREFAZIONE.

Un'equazione differenziale del primo ordine determina un legame analitico tra una funzione incognita e la sua derivata prima.

Se l'equazione è di tipo normale, si conoscono condizioni, larghissime, sufficienti perchè esista almeno una soluzione, che assuma un valore iniziale fissato ad arbitrio. Ma esse non sono senz'altro sufficienti a stabilire se la soluzione in esame sia unica. Perchè ciò accada, occorre che il legame che passa, in virtù dell'equazione differenziale, fra le soluzioni e le loro derivate prime conservi, per così dire, l'ordine degli infinitesimi almeno in modo globale.

Questo affermano in sostanza i criterî dati da OSGOOD [1]) e da CARATHÉODORY [2]), che si presentano come generalizzazioni spontanee del criterio classico basato sulla condizione di LIPSCHITZ.

Accanto a questi criterî stanno alcuni teoremi di ROSENBLATT [3]) e TONELLI [4]),

---

[1]) In una Nota pubblicata nei *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1898, pp. 331-345.

[2]) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Leipzig, Teubner, 1918), pp. 673-675.

[3]) A. ROSENBLATT, *Ueber die Existenz von Integralen gewönlicher Differentialgleichungen* [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1908, t. 5]. ROSENBLATT ha ripreso e precisato le sue considerazioni in una Nota pubblicata nei Comptes rendus (giugno 1928, pp. 1797-1799), e ha formulato il suo criterio in modo più ampio, comprendendo anche alcuni teoremi enunciati da NAGUMO e da PERRON (cfr. il § 4 del presente lavoro). Vedi anche: ROSENBLATT, *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie VI^a, vol. VIII (2^o semestre 1928), pp. 41-45].

[4]) L. TONELLI, *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie VI^a, vol. I (1^o semestre 1925), pp. 272-277].

I criterî enunciati in questa Nota sono due. Il primo è quello cui mi riferisco nel testo. Quanto sufficienti a stabilire l'unicità per la soluzione del problema in esame nel caso di singolarità che si presentano in punti distribuiti su curve, senza riempire una regione del piano [5]).

Ora, mentre le proposizioni di CARATHÉODORY e di OSGOOD rientrano facilmente in un unico criterio generale, che si desume dal lavoro di TONELLI già citato, non si conosce un teorema che comprenda i criterî dello stesso TONELLI e di ROSENBLATT. Mi è sorto perciò il desiderio di formulare un teorema che li comprendesse entrambi, o almeno di riconoscere se fra di essi passi o no un intimo legame.

Ampliare in modo notevole il criterio di TONELLI non mi è stato difficile [6]). Ma il caso contemplato da ROSENBLATT sfuggiva sempre ai teoremi che avevo trovati, quando mi è venuto fatto d'osservare che nelle condizioni in cui ROSENBLATT aveva formulato il suo criterio, era implicitamente contenuto che il secondo membro dell'equazione fosse uniformemente continuo rispetto alla coppia (x, y) e, in particolare, rispetto alla y. Ho quindi ritenuto fosse essenziale il tener conto di questa circostanza; e dopo di ciò mi è stato agevole raggiungere il mio scopo.

In questa Memoria espongo i teoremi a cui son pervenuto.

Il primo comprende il criterio di ROSENBLATT [7]) e ne fornisce una generalizzazione che ha la stessa portata di quella che del teorema di OSGOOD ha dato TONELLI. Altri comprendono il criterio di TONELLI, nella sua forma più ricca di applicazioni concrete e nella forma assolutamente generale in cui è stato considerato da questo autore.

Di questi, quello enunciato nell'ultimo paragrafo è il più ampio; esso riassume tutti i risultati esposti nella presente Memoria.

Chiudo queste righe col far osservare che non è difficile estendere il mio criterio

---

al secondo, esso generalizza un notevole teorema di BOMPIANI: E. BOMPIANI, *Un teorema di confronto e un teorema d'unicità per l'equazione differenziale* $y' = f(x, y)$ [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie VI^a, vol. I, (1° semestre 1925), pp. 298-302]. Vedi anche: O. PERRON, *Ueber Ein-und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Differentialgleichungen* [Mathematische Annalen, B. 95 (1925), pp. 98-101].

[5]) Questo non è vero per il criterio di TONELLI, a patto di limitarsi a stabilire l'unicità solo in un intorno destro o sinistro del punto in cui la soluzione assume il valore prefissato.

[6]) Vedi il teorema enunciato alla fine del n° 3 di questa Memoria. Cfr. anche G. SCORZA-DRAGONI, *Sugli integrali dell'equazione* $y' = f(x, y)$ [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie VI, vol. IX (1° semestre 1929), pp. 378-382]. Da questa Nota appare come io sia in possesso di molti dei teoremi che vado a esporre fin dal marzo 1929.

[7]) Almeno nella prima forma che gli ha dato questo autore, e in uno dei casi più precisi in cui è stato enunciato, sempre da ROSENBLATT, nella Nota dei Comptes rendus. Caso in cui rientrano senz'altro i criterî di NAGUMO e di PERRON.

alle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Ma a ciò intendo dedicare un altro lavoro [8]).

§ 1.

Il criterio d'unicità di TONELLI e il teorema d'esistenza di CARATHÉODORY.

1. Enuncio fedelmente il criterio d'unicità dovuto al TONELLI.

Sia $f(x, y)$ una funzione reale definita nel rettangolo

$$R: \quad x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1,$$

e limitata in ogni insieme del tipo

$$R': \quad x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1, \qquad (0 < \delta < x_1 - x_0).$$

Supponiamo che ogni qual volta si abbia $x_0 < x \leqq x_1$, $y_0 \leqq \bar{y}_2 < \bar{y}_1 \leqq y_1$, sia verificata la disuguaglianza

$$f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2) \leqq \varphi(x)\omega(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \tag{1}$$

diseguaglianza nella quale $\varphi(x)$ è una funzione definita nell'intervallo $x_0 < x \leqq x_1$, sommabile in ogni segmento del tipo $x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1$, e tale che esista, e sia finito, il limite

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{x_0+\delta}^{x_1} \varphi(x)\, dx, \qquad (\delta > 0), \tag{2}$$

ed $\omega(u)$ è una funzione continua e positiva, definita per ogni $u > 0$, e tale che sia

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty, \tag{3}$$

se u_0 è un numero positivo fissato a piacere, ed ε tende a zero per valori positivi.

Allora:

Se esistono soluzioni della

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

---

[8]) Una buona monografia sull'argomento è il lavoro di MÜLLER, *Neuere Untersuchungen über den Fundamentalsatz in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* [Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, t. 37 (1928), pp. 33-48].

Attraverso la lettura di questa Memoria io son venuto a conoscenza di un criterio di YOSIE, che caratterizza le equazioni del tipo $y' = f$, a secondo membro continuo, i cui integrali sono determinati in modo unico dai valori iniziali (T. YOSIE, *Über die Unität der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Japanese Journal of Mathematics, 1926, pp. 161-173).

Sul criterio di YOSIE avrò occasione di ritornare altrove.

definite in un intorno destro del punto x_0, *queste sono determinate in modo unico dal valore che hanno per* $x = x_0$ [9]).

2. Il criterio di TONELLI si riferisce di necessità a soluzioni eventuali della (4), poichè in esso non viene fatta alcuna ipotesi sulla struttura della $f(x, y)$. Per dare una base più concreta alla mia ricerca, accompagnando il mio criterio d'unicità con un teorema d'esistenza, io farò sulla $f(x, y)$ delle ipotesi restrittive, riserbandomi di indicare in seguito come vada modificato il mio criterio, ove si voglia che esso comprenda i casi di discontinuità contemplati da TONELLI.

Considero dunque una funzione $f(x, y)$, definita nella striscia

$$S: \quad x_2 \leqq x \leqq x_1, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

che gode delle seguenti proprietà:

se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di S, fissato a piacere, le due funzioni di una variabile $f(\bar{x}, y)$, $f(x, \bar{y})$ sono, rispettivamente, continue e misurabili nella variabile indipendente;

esiste una funzione non negativa $M(x)$, sommabile nell'intervallo

$$i: \quad x_2 \leqq x \leqq x_1,$$

per la quale è sempre

$$|f(x, y)| \leqq M(x).$$

In queste ipotesi, CARATHÉODORY ha dimostrato [10]) che

Se (x_0, y_0) *è un punto di* S, *esiste una funzione assolutamente continua*, $y(x)$, *definita in tutto* i, *che verifica l'uguaglianza*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{5}$$

vale a dire che assume il valore y_0 *per* $x = x_0$, *e che in quasi tutti i punti di* i [11]) *ha come derivata prima la* $f(x, y(x))$.

§ 2.

I nuovi criterî d'unicità per le soluzioni di un'equazione differenziale.

3. Conservando le ipotesi di discontinuità in cui CARATHÉODORY ha dimostrato il suo teorema, e detto x_0 un punto interno di i, supponiamo che $f(x, y)$ soddisfaccia

---

9) Questo criterio continua a sussistere se all'ipotesi che la $f(x, y)$ sia limitata nei rettangoli quali R', si sostituisce l'altra, più generale, che ogni soluzione della (4), definita in un intorno destro di x_0, risulti assolutamente continua [Cfr. TONELLI, loc. cit. [4])].

10) Loc. cit. [2]), pp. 665-672.

11) Cioè in tutti i punti di i, a meno di quelli di un insieme di misura nulla.

ancora alla disuguaglianza

$$(1) \qquad f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqq \varphi_1(x)\omega_1(y_1 - y_2) \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1;\ y_1 > y_2),$$

— dove $\varphi_1(x)$ è una funzione definita nel segmento

$$i_1:\ x_0 \leqq x \leqq x_1,$$

sommabile in ogni intervallo del tipo $x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1$, $(x_0 < x_0 + \delta < x_1)$, ed $\omega_1(u)$ è una funzione continua e positiva definita per ogni $u > 0$ —, ma sostituiamo la (2) e la (3) con le ipotesi che seguono.

Supponiamo precisamente che, fissato a piacere il numero positivo u_0, si possano determinare i due numeri δ e u_1, maggiori di zero, in modo tale che sia

$$(2) \qquad x_0 + \delta < x_1, \qquad \delta u_1 < u_0$$

e che si abbia

$$(3) \qquad \int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)}$$

per tutte le coppie di punti a_1, a_2, $(a_1 < a_2)$ del segmento $x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1$.

Allora:

Se queste relazioni sono soddisfatte per S *e per tutti i numeri positivi minori di* δ [12]), *e se* $f(x, y)$ *è uniformemente continua rispetto alla* y *nella striscia*

$$S_1:\ x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

---

[12]) Le condizioni indicate nel testo portano che in questo caso si può sempre ritenere valida la relazione di limite

$$(3') \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad (\varepsilon > 0).$$

Infatti, per le due funzioni $\varphi_1(x)$ e $\omega_1(u)$ valgano le condizioni scritte, senza che sussista la (3′). Avremo allora, in virtù della (3) e del fatto che questa è verificata per tutti i numeri positivi non superiori a δ, $\varphi_1(x) \leqq 0$ in quasi tutti i punti di i_1; vale a dire avremo che $f(x, y)$ è costante o decrescente rispetto alla y per tutti i punti di i_1, a meno di quelli di un insieme di misura nulla, e. Ma allora, posto $\bar{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x)$ in $i_1 - e$, $\bar{\varphi}_1(x) = +\infty$ in e ed $\omega_1(u) = u$, abbiamo che sono verificate le (1), (2) e (3) quando vi si ponga $\bar{\varphi}_1(x)$ in luogo di $\varphi_1(x)$ ed u in luogo di $\omega_1(u)$, nel mentre che è

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{u} = +\infty \qquad (u_0 > 0;\ \varepsilon > 0);$$

dunque ecc...

in i_1 *esiste una sola funzione,* $y_0(x)$, *che verifichi la*

(4) $$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_0(t))\, dt \quad {}^{13)} \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1).$$

Se $f(x, y)$ non è uniformemente continua rispetto alla y, si perviene alla medesima conseguenza purchè:

Si possa scegliere il numero δ *in modo che le* (2) *e le* (3) *siano soddisfatte quando vi si ponga*

(5) $$u_1 = 1 + \frac{2}{\delta} \int_{x_0}^{x_0+\delta} M(x)\, dx \quad {}^{14)}.$$

4. Incominciamo col giustificare il secondo di questi teoremi, la dimostrazione riuscendo formalmente più semplice.

Sia ε un numero positivo arbitrario; dico che nelle ipotesi poste:

Si può scegliere il numero δ, *maggior di zero, in modo tale, che se è*

(6) $$|y_1 - y_0| < \delta,$$

e

(7) $$y_1(x) = y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_1(t))\, dt,$$

si abbia

(8) $$|y_0(x) - y_1(x)| \leqq \varepsilon$$

in tutto il segmento i_1: $x_0 \leqq x \leqq x_1$.

Infatti scegliamo δ in modo che sia $x_0 + \delta < x_1$, $\delta u_1 < \varepsilon$, e

(9) $$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)\, dx \leqq \int_{\delta u_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega_1(u)}, \qquad (x_0 + \delta \leqq a_1 < a_2 \leqq x_1),$$

---

[13]) Faccio osservare che per la validità del teorema qui enunciato basta che, fissato a piacere y_0, la $f(x, y)$ risulti uniformemente continua rispetto alla y quando x varia in un intorno destro di x_0 e y in un segmento che contenga y_0 nel suo interno.

[14]) In questa formula $M(x)$ ha il significato chiarito al n° 2.

Osservo poi che l'unità può esser sostituita da una costante h, positiva e piccola a piacere.

Notiamo che anche in questo caso vale un'osservazione analoga a quella fatta nella nota [12]).

Infatti, per la seconda delle (2) il prodotto

$$\delta u_1 = \delta h + 2 \int_{x_0}^{x_0+\delta} M(x)\, dx$$

deve essere infinitesimo; e ciò può accadere solo a patto che δ sia infinitesimo.

Ma allora, dato che la (3) si può soddisfare per u_0 e δ piccoli a piacere, si ha che anche in questo caso o è verificata la (3') ovvero $\varphi_1(x)$ è positiva solo in una porzione di i_1 di misura nulla; ecc...

dove u_1 è il numero dato dalla (5); e mostriamo che se $y_1(x)$ è una funzione che verifichi la (6) e la (7) per questo particolare valor di δ, $y_1(x)$ soddisfa alla (8).

Supponiamo che ciò non accada, e sia z_0 un punto di i_1 in cui risulti

(10) $$|y_0(z_0) - y_1(z_0)| > \varepsilon.$$

Dico che $x_0 + \delta$ *è minore di* z_0.

Infatti, posto
$$u(x) = y_0(x) - y_1(x),$$

— di guisa che $u(x_0)$ è in modulo minore di δ, mentre si ha

$$|u'(x)| = |y'_0(x) - y'_1(x)| \leqq |f(x, y_0(x))| + |f(x, y_1(x))| \leqq 2M(x)$$

in quasi tutti i punti di i_1 —, nell'intervallo $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta$ risulta

(11) $$|u(x)| \leqq |u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |u'(t)|dt\ ^{15)} < \delta + 2\int_{x_0}^{x_0+\delta} M(x)dx = \delta u_1 < \varepsilon.$$

Di qui e dalla (10) segue senz'altro che z_0 supera $x_0 + \delta$ e (quindi) che non è vuoto e non si riduce ad un punto il segmento $i' : x_0 + \delta \leqq x \leqq z_0$. In z_0 sarà poi o $y_0(z_0) > y_1(z_0)$, oppure $y_0(z_0) < y_1(z_0)$; per fissar le idee supponiamo verificata la prima alternativa; si abbia, cioè,

(12) $$u(z_0) = y_0(z_0) - y_1(z_0) > \varepsilon.$$

Allora, se non esistono punti di i' nei quali sia $y_0(x) = y_1(x)$, poniamo $z_1 = x_0 + \delta$. Se esistono dei punti di i' in cui la differenza $y_0(x) - y_1(x)$ si annulla, indichiamo con z_1 il massimo di questi punti.

Sarà evidentemente $x_0 + \delta \leqq z_1 < z_0$; inoltre risulta $u(x) > 0$ nell'intervallo semiaperto $z_1 < x \leqq z_0$; e si ha

(13) $$u(z_1) < \delta u_1.$$

Infatti o è $z_1 = x_0 + \delta$, oppure è $z_1 > x_0 + \delta$. Nella prima alternativa la (13) segue dalla (11), nella seconda è $u(z_1) = 0$ per costruzione; dunque, ecc....

Indichiamo adesso con z_2 un punto dell'intervallo aperto $z_1 < x < z_0$.

Nel segmento $z_2 \leqq x \leqq z_0$ sarà, da per tutto, $u(x) > 0$ e, quasi da per tutto, $u'(x) = y'_0(x) - y'_1(x) = f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))$; cioè, per la (1),

$$u'(x) \leqq \varphi_1(x)\omega_1(u(x))$$

[15]) Si intende posto $u'(x) = 0$ nei punti in cui $u(x)$ non è derivabile.

in quasi tutti i punti di $\zeta_2 \leqq x \leqq \zeta_0$, e quindi

$$\int_{\zeta_2}^{\zeta_0} \frac{u'\,dx}{\omega(u)} \leqq \int_{\zeta_2}^{\zeta_0} \varphi_1(x)\,dx \quad {}^{16)}. \tag{14}$$

Per le ipotesi fatte $u(x)$ è assolutamente continua. Quindi, in virtù di un noto teorema di cambiamento di variabile sotto il segno di integrale, è

$$\int_{u(\zeta_2)}^{u(\zeta_0)} \frac{du}{\omega(u)} \leqq \int_{\zeta_2}^{\zeta_0} \varphi_1(x)\,dx. \tag{15}$$

Ma ζ_2 è un punto arbitrario dell'intervallo $\zeta_1 < x < \zeta_0$ e $u(x)$ è una funzione continua, perciò in virtù della (13) possiamo determinare ζ_2 in modo da aversi $u(\zeta_2) < \delta u_1$; e siccome è $\omega(u) > 0$, $u(\zeta_0) > \varepsilon$ [17]), sarà anche

$$\int_{\delta u_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} < \int_{u(\zeta_2)}^{u(\zeta_0)} \frac{du}{\omega(u)}\,.$$

Di qui e dalla (15) si trae

$$\int_{\delta u_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} < \int_{\zeta_2}^{\zeta_0} \varphi_1(x)\,dx \qquad (x_0 + \delta < \zeta_2 < \zeta_0 \leqq x_1);$$

il che è contro le ipotesi fatte.

Dunque, fissato ε e scelto δ in modo da soddisfare alla (9), dalla (6) e dalla (7) segue senz'altro la (8). Ma ε è un numero positivo arbitrario; quindi ciò basta per dedurre che in i_1 esiste una sola funzione che verifichi la (4) [18]).

5. Dimostriamo adesso il primo dei teoremi enunciati.

Faremo vedere, ragionando per assurdo, che anche in questo caso:

Se ε è un numero positivo piccolo a piacere, si può scegliere il numero $\delta > 0$ in modo tale, che da

$$|y_1 - y_0| < \delta \tag{16}$$

segua

$$|y_0(x) - y_1(x)| \leqq \varepsilon, \tag{17}$$

---

[16]) Anche qui ho posto $u'(x) = 0$ nei punti in cui $u(x)$ non è derivabile.

Osservo poi che l'esistenza dell'integrale a secondo membro (e quindi anche quella dell'integrale a primo membro) segue dalle ipotesi fatte al n° 3.

[17]) Cfr. la (12).

[18]) Cfr. G. Scorza-Dragoni, loc. cit. [6]), n° 3.

In virtù di un noto teorema di Carathéodory [loc. cit. [2]), p. 678] la conclusione a cui siamo arrivati permette di asserire che le soluzioni della (4) variano con continuità al variare di y_0, a destra di x_0.

Che ciò accada nel caso preso in esame è implicitamente contenuto nel ragionamento svolto.

nel segmento $i_1: x_0 \leqq x \leqq x_1$, *se* $y_0(x)$ *e* $y_1(x)$ *sono due funzioni per le quali sia*

$$(18) \quad y_0(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt, \qquad y_1(x)=y_1+\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt, \quad (x_0 \leqq x \leqq x_1).$$

Fissato a piacere un numero positivo ε, determiniamo due numeri maggiori di zero, $\bar{\delta}$ e u_1, in modo che per ogni $\delta > 0$ e $\leqq \bar{\delta}$ si abbia

$$x_0 + \delta < x_1, \qquad \delta u_1 < \varepsilon.$$

e

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)\,dx \leqq \int_{\delta u_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega_1(u)}, \qquad (x_0 + \delta \leqq a_1 < a_2 \leqq x_1).$$

Dopo di ciò si scelga un numero positivo σ tale, che da

$$|y_2 - y_3| < \sigma$$

segua

$$|f(x, y_2) - f(x, y_3)| < \frac{u_1}{2} \quad [19]),$$

e si determini δ_1 in modo che sia

$$2\delta_1 + 2\int_{x_0}^{x_0+\delta_1} M(x)\,dx < \sigma \qquad \text{e} \qquad 0 < \delta_1 \leqq \bar{\delta},$$

di guisa che sarà anche $x_0 + \delta_1 < x_1$, $\delta_1 u_1 < \varepsilon$ e

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)\,dx \leqq \int_{\delta_1 u_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)},$$

per tutte le coppie di punti a_1, a_2 $(a_1 < a_2)$ del segmento $x_0 + \delta_1 \leqq x \leqq x_1$.

Sia adesso δ^* un numero positivo minore di δ_1 e $\frac{\delta_1 u_1}{2}$,

$$\delta^* < \delta_1, \qquad \delta^* < \frac{\delta_1 u_1}{2},$$

ed indichiamo con $y_0(x)$ e $y_1(x)$ due funzioni che verifichino le (18) e la (16) per $\delta = \delta^*$.

Allora è anche $|y_0(x) - y_1(x)| \leqq \varepsilon$ *in tutto il segmento* i_1.

Supponiamo che ciò non accada e sia z_0 un punto di i_1 in cui vale la disuguaglianza

$$|y_0(z_0) - y_1(z_0)| > \varepsilon.$$

Sarà allora $x_0 + \delta_1 < z_0$.

---

[19]) Ciò può sempre farsi, perchè $f(x, y)$ è uniformemente continua rispetto alla y.

Infatti, posto

$$u(x) = y_0(x) - y_1(x),$$

in quasi tutti i punti del segmento $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta_1$ è

$$|u'(x)| = |y'_0(x) - y'_1(x)| \leqq |f(x, y_0(x))| + |f(x, y_1(x))| \leqq 2M(x),$$

e di qui si trae [20])

$$|u(x)| \leqq |u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |u'(t)|\,dt \leqq \delta^* + 2\int_{x_0}^{x_0+\delta_1} M(x)\,dx <$$

$$< 2\delta_1 + 2\int_{x_0}^{x_0+\delta_1} M(x)\,dx < \sigma, \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta_1).$$

Per il modo con cui è stato scelto σ ne segue

$$|u'(x)| = |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| < \frac{u_1}{2}$$

in quasi tutti i punti del segmento chiuso $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta_1$. Indi si ha [20])

$$|u(x)| \leqq |u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |u'(t)|\,dt \leqq |u(x_0)| + \int_{x_0}^{x_0+\delta_1} |u'(t)|\,dt <$$

$$< \delta^* + \frac{\delta_1 u_1}{2} < \delta_1 u_1 < \varepsilon, \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta_1).$$

Di qui e dall'ipotesi fatta su ζ_0 segue che è $x_0 + \delta_1 < \zeta_0$.

Supponiamo adesso, per fissar le idee, che in ζ_0 si abbia $u(\zeta_0) = y_0(\zeta_0) - y_1(\zeta_0) > \varepsilon$.

Allora, se in nessun punto di $i' : x_0 + \delta_1 \leqq x \leqq \zeta_0$ è $y_0(x) = y_1(x)$, poniamo $\zeta_1 = x_0 + \delta_1$.

Se esistono dei punti di i' in cui si annulla la differenza $y_0(x) - y_1(x)$, indichiamo con ζ_1 il massimo di questi punti.

Sarà in ogni caso

$$x_0 + \delta_1 \leqq \zeta_1 < \zeta_0, \qquad u(\zeta_1) < \delta_1 u_1$$

e

$$u(x) > 0$$

nel segmento semiaperto a sinistra $\zeta_1 < x \leqq \zeta_0$.

Indichiamo adesso con ζ_2 un punto dell'intervallo aperto $\zeta_1 < x < \zeta_0$.

In quasi tutti i punti del segmento $\zeta_2 \leqq x \leqq \zeta_1$ sarà, per la (1),

$$u'(x) \leqq \varphi_1(x)\,\omega_1(u(x));$$

ecc. . . .

6. Mostriamo come vada modificato il nostro criterio se si vuol stabilire l'unicità

---

[20]) Cfr. le note [15]) e [16]).

delle funzioni, definite nel segmento

$$i_2: \quad x_2 \leqq x \leqq x_0$$

che giungono sulla retta $x = x_0$ con un valore assegnato, y_0, e verificano la

$$(19) \qquad y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt.$$

Ferme restando le ipotesi di regolarità in cui CARATHÉODORY ha stabilito il suo teorema d'esistenza, supponiamo che per ogni x contenuto nel segmento i_2 e per ogni coppia di numeri reali $y_1 < y_2$ si abbia

$$(20) \qquad f(x, y_1) - f(x, y_2) \geqq \varphi_2(x)\omega_2(y_1 - y_2),$$

con φ_2 definita in i_2 e sommabile in ogni intervallo del tipo

$$x_2 \leqq x \leqq x_0 - \delta_1 \qquad (x_2 < x_0 - \delta < x_0),$$

e $\omega_2(u)$ continua e positiva per ogni $u > 0$.

Supponiamo inoltre che, fissato ad arbitrio il numero positivo u_0, si possano determinare δ e u_1 in modo da aversi

$$(21) \qquad \delta > 0, \qquad u_1 > 0, \qquad x_2 < x_0 - \delta, \qquad \delta u_1 < u_0$$

e

$$(22) \qquad \int_{a_1}^{a_2} \varphi_2(x)\, dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega_2(u)}$$

per tutte le coppie di punti a_1, $a_2 (a_1 > a_2)$ del segmento $x_2 \leqq x \leqq x_0 - \delta$ [21]).

Allora:

Se queste relazioni sono soddisfatte per δ e per tutti i numeri positivi minori di δ

---

[21]) Colgo l'occasione per rettificare un errore di stampa che mi son lasciato sfuggire nel mio lavoro citato nella nota [6]).

A pag. 382, nella diseguaglianza

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)\, dx > M, \qquad (M = \text{cost.};\ x_1 > x_2)$$

bisogna sostituire il segno $>$ col segno $<$.

Nel lavoro ricordato ho anche commesso la seguente svista. In tre delle formule di pag. 381 compare l'espressione

$$\lim_{x_3 \to x_2} \int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x)\, dx.$$

Ora la variabile $\int_{x_3}^{x_1} \varphi_1(x)\, dx$ non è sempre regolare; in quelle formule doveva comparire il suo limite massimo e non il suo limite.

e se $f(x, y)$ è uniformemente continua rispetto alla y nella striscia

$$S_2:\quad x_2 \leqq x \leqq x_0, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

esiste una sola funzione, definita in i_2, che verifichi la (19).

Questa circostanza si presenta anche

se le (21) *e la* (22) *si possono soddisfare ponendo*

$$(23) \qquad u_1 = 1 + \frac{2}{\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0} M(x)\,dx.$$

7. Infatti poniamo

$$f_1(x, y) = -f(-\bar{x}, y), \qquad (x = -\bar{x};\ x_2 \leqq \bar{x} \leqq x_1),$$

nella striscia

$$S':\quad -x_1 \leqq x \leqq -x_2, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

e

$$M_1(x) = M(-\bar{x})$$

nel segmento $-x_1 \leqq x \leqq -x_2$; di guisa che sarà $|f_1(x, y)| \leqq M_1(x)$.

Con ciò le soluzioni della (19) definite in $i_2 : x_2 \leqq x \leqq x_0$ si mutano nelle soluzioni della

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt,$$

definite nel segmento $-x_0 \leqq x \leqq -x_2$.

Inoltre la (20) equivale alla

$$-f(x, y_1) + f(x, y_2) \leqq -\varphi_2(x)\,\omega_2(y_1 - y_2),$$

che, posto

$$\varphi_1(x) = -\varphi_2(-\bar{x}), \qquad (x = -\bar{x};\ x_2 \leqq \bar{x} \leqq x_0),$$

diventa

$$f_1(x, y_1) - f_1(x, y_2) \leqq \varphi_1(x)\,\omega_2(y_1 - y_2),$$

mentre le (21) e la (22) esprimono che, fissato u_0 positivo e piccolo a piacere, si possono determinare $\delta > 0$ e $u_1 > 0$ in modo da aversi

$$(24) \qquad -x_0 + \delta < -x_2, \qquad \delta u_1 < u_0$$

e

$$(25) \qquad \int_{-a_1}^{-a_2} \varphi_1(x)\,dx \leqq \int_{a_1}^{a_2} \varphi_2(x)\,dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega_2(u)} \qquad (-x_0 + \delta \leqq -a_1 < -a_2 \leqq -x_2).$$

Ma allora il primo dei criterî enunciati segue immediatamente dai teoremi del n° 3. E lo stesso accade per il secondo: infatti, se le (21) e la (22) sono verificate quando vi si ponga per u_1 il valore dato dalla (23), le (24) e (25) sono valide per

$$u_1 = 1 + \frac{2}{\delta} \int_{-x_0}^{-x_0+\delta} M_1(x)\,dx;$$

ma allora, ecc....

§ 3.

Altri teoremi.

8. Incominciamo con l'osservare che l'ipotesi, fatta nei numeri precedenti, che la $f(x, y)$ sia definita in tutta una striscia, non è affatto essenziale.

Se la $f(x, y)$ soddisfa alle condizioni di regolarità indicate nel rettangolo

$$R:\quad x_2 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_2 \leqq y \leqq y_1,$$

per l'equazione

$$(1)\qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt, \qquad (x_2 < x_0 < x_1;\ y_2 < y_0 < y_1),$$

valgono evidentemente tutte le considerazioni già svolte.

Però la forma ultima dei risultati sarà leggermente diversa, perchè in questo caso non si presenta sempre la circostanza che le soluzioni della (1) si possano definire in tutto il segmento $x_2 \leqq x \leqq x_1$.

9. Supponiamo, per es., che la $f(x, y)$ verifichi le condizioni indicate al n° 3 nel rettangolo

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_2 \leqq y \leqq y_1 \qquad (x_2 < x_0 < x_1).$$

Allora:

Le soluzioni della (1), *definite in un intorno destro di* x_0, *sono determinate in modo unico dal valore che hanno in* x_0.

Inoltre:

Se ε *è un numero positivo arbitrario, si può scegliere un numero* $\delta > 0$ *tale, che, se per le due funzioni* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *è*

$$(2)\qquad y_1(x) = \bar{y}_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt, \qquad y_2(x) = \bar{y}_2 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt,$$

e

$$(3)\qquad |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| < \delta,$$

sia anche

$$(4)\qquad |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$$

in tutto l'intorno destro di x_0 *in cui si possono definire tanto* $y_1(x)$ *quanto* $y_2(x)$.

Quest'ultima proposizione può esser precisata in modo notevole.

Supponiamo che $y_1(x)$ si possa definire in tutto il segmento chiuso

$$i' : x_0 \leqq x \leqq x' (\leqq x_1),$$

e che in i' si abbia

$$(5)\qquad y_2 < y_1(x) < y_1.$$

Siccome $y_1(x)$ è una funzione continua ed i' è un intervallo chiuso, la (5) è perfettamente equivalente alla

$$y_2 + 2\varepsilon < y_1(x) < y_1 - 2\varepsilon, \tag{6}$$

se ε è un numero positivo conveniente.

Scegliamo adesso δ in modo che dalle (2) e dalla (3) segna la (4) per questo particolare valor di ε.

Ciò posto, prolunghiamo la f oltre il rettangolo R, — e indichiamo con f_1 la nuova funzione —, ponendo

$$f_1(x, y) = f(x, y_2), \qquad \text{se} \qquad y < y_2,$$
$$f_1(x, y) = f(x, y_1), \qquad \text{se} \qquad y > y_1;$$

e consideriamo una funzione, $y_2^*(x)$ per la quale sia soddisfatta la

$$y_2^*(x) = \bar{y}_2 + \int_{x_0}^{x} f_1\big(t, y_2^*(t)\big)\,dt, \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1),$$

di guisa che in tutto l'intorno destro di x_0, in cui $y_2^*(x)$ è compresa fra y_2 e y_1, sarà anche

$$y_2^*(x) = \bar{y}_2 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_2^*(t)\big) = y_2(x), \tag{7}$$

per il primo dei teoremi contenuti in questo numero.

La funzione $y_2^*(x)$ si può definire in tutto il segmento $x_0 \leqq x \leqq x_1$ (n° 2); ebbene io dico che

In tutto i' è $y_2 < y_2^*(x) < y_1$, vale a dire, per la (7), che $y_2(x)$ si può definire in tutto il segmento $x_0 \leqq x \leqq x'$.

Supponiamo infatti che esistano dei punti di i' in cui è o $y_2^*(x) = y_1$ o $y_2^*(x) = y_2$; e sia x'' il primo di questi punti.

Siccome $y_2^*(x_0)$ è uguale a $\bar{y}_2$ e questo numero è compreso, per le ipotesi fatte, fra y_2 e y_1, sarà $x_0 < x''$. Inoltre nell'intervallo semiaperto $x_0 \leqq x < x''$ è $y_2 < y_2^*(x) < y_1$; vale a dire, è $y_2^*(x) = y_2(x)$.

Ma allora, poichè $\bar{y}_2$ è stato scelto in modo da aversi $|y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$ in tutto l'intorno destro di x_0 in cui si possono definire $y_1(x)$ e $y_2(x)$, sarà $|y_1(x) - y_2^*(x)| < \varepsilon$ in tutto $x_0 \leqq x < x''$. E passando al limite si ricava

$$|y_1(x'') - y_2^*(x'')| < \varepsilon.$$

Di qui e dalla (6) si trae $y_2 < y_2^*(x'') < y_1$; ma ciò è contro l'ipotesi fatta su x'', dunque, ecc....

Nel ragionamento svolto è contenuto che, fatte le solite ipotesi sulla $f(x, y)$:

Se la funzione $y_1(x)$ verifica la prima delle (2) e la (5) nel segmento $i': x_0 \leqq x \leqq x'$, si può scegliere il numero $\delta > 0$ in modo che dalla (3) segua che la funzione $y_2(x)$, data dalla seconda delle (2), si possa definire in tutto l'intervallo chiuso [22]).

§ 4.

I criterî di Rosenblatt, di Nagumo e di Perron.

10. Determiniamo una forma particolare che assumono alcuni teoremi indicati ai n^i. 3 e 6, quando $f(x, y)$ è una funzione (uniformemente) continua nel rettangolo chiuso e limitato

$$R: x_2 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_2 \leqq y \leqq y_1.$$

Dico che

L'equazione

(1) $$y' = f(x, y)$$

ammette uno e un solo integrale, $y(x)$, che verifichi la condizione

(2) $$y(x_0) = y_0, \qquad (x_2 < x_0 < x_1;\ y_2 < y_0 < y_1),$$

se è valida la disuguaglianza

(3) $$|f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2)| \leqq \varphi(x)\,\omega(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \qquad (x_2 \leqq x \leqq x_1;\ y_2 \leqq \bar{y}_2 < \bar{y}_1 \leqq y_1),$$

— dove $\varphi(x)$ è una funzione non negativa e sommabile in ogni intervallo del tipo

$$x_2 \leqq x \leqq x_0 - \delta, \qquad x_0 + \delta \leqq x \leqq x_1, \quad (\delta > 0;\ x_2 < x_0 - \delta < x_0 + \delta < x_1),$$

ed $\omega(u)$ è una funzione continua e positiva per ogni $u > 0$ —, *e se ad ogni numero $u_0 > 0$ si possono far corrispondere i numeri positivi $\bar{\delta}$ e u_1 in modo da aversi*

$$x_2 < x_0 - \bar{\delta}, \qquad x_0 + \bar{\delta} < x_1, \qquad \bar{\delta} u_1 < u_0$$

e

(4) $$\int_{x_2}^{x_0-\delta} \varphi(x)\,dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)}, \qquad \int_{x_0+\delta}^{x_1} \varphi(x)\,dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)},$$

per tutti i numeri δ, positivi e non superiori a $\bar{\delta}$.

---

[22]) Questo teorema rientra in una proposizione generale che rispetto alle equazioni studiate da Carathéodory ha lo stesso ufficio che una proposizione dovuta al Kambe ha per le equazioni differenziali a secondo membro continuo. E. Kambe, *Zur Theorie der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ [Acta Mathematica, t. 52 (1928-1929), pp. 327-336], p. 336.

Infatti la (1) e la (2) equivalgono a

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt,$$

inoltre la (3) si spezza nelle due diseguaglianze

$$f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2) \leqq \varphi(x)\omega(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1),$$

$$f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2) \geqq - \varphi(x)\omega(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \qquad (x_2 \leqq x \leqq x_0);$$

e dalle (4) e da $\varphi(x) \geqq 0$ segue che è

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\, dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)}, \qquad (x_0 + \delta \leqq a_1 < a_2 \leqq x_1),$$

$$\int_{a'_1}^{a'_2} - \varphi(x)\, dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)}, \qquad (x_2 \leqq a'_2 < a'_1 \leqq x_0 - \delta).$$

Ma allora nelle nostre ipotesi sono soddisfatte tutte le condizioni indicate nei primi teoremi dei n[i]. 3 e 6, salvo quella che la $f(x, y)$ sia definita in tutta la striscia $x_2 \leqq x \leqq x_1$, $-\infty < y < +\infty$; e poichè questa condizione non è essenziale, (n° 8), possiamo ritenere come dimostrato che la funzione $y(x)$ è determinata in modo unico dalla (2) tanto a destra quanto a sinistra di x_0.

11. Supponiamo che:

La funzione continua $f(x, y)$ sia definita nel rettangolo

$$x_0 - d \leqq x \leqq x + d, \qquad y_2 \leqq y \leqq y_1, \qquad (d > 0)$$

e che si abbia

$$(5) \qquad |f(x, \bar{y}_1) - f(x, \bar{y}_2)| \leqq \frac{k}{|x - x_0|}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \quad (k = \text{cost} \leqq 1,\ |x - x_0| \leqq d,\ y_2 \leqq \bar{y}_2 < \bar{y}_1 \leqq y_1).$$

Allora esiste un solo integrale della

$$(6) \qquad y' = f(x, y)$$

che per $x = x_0$ assuma il valore $y_0 (y_2 < y_0 < y_1)$.

Perchè ciò accada, basta (n° prec.), che, fissato $u_0 > 0$ a piacere, si possano scegliere i due numeri positivi $\bar{\delta}$ e u_1 in modo da aversi, per tutti i $\delta > 0$ e $\leqq \bar{\delta}$, $\delta < d$, $\delta u_1 < u_0$ e

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0+\delta}^{x_0+d} \frac{dx}{x - x_0} \leqq k \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u} \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u}, \\[2ex] \displaystyle\int_{x_0-d}^{x_0-\delta} \frac{dx}{x_0 - x} \leqq k \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u} \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u}. \end{cases}$$

Ora le (7) equivalgono entrambe a $\log d - \log \delta \leqq \log u_0 - \log \delta - \log u_1$; e, perchè siano soddisfatte tutte le condizioni che vogliamo, basta porre $u_1 < \frac{u_0}{d}$, $\bar{\delta} < d$.

12. Il teorema precedente è dovuto a ROSENBLATT nell'ipotesi che la costante k che figura nella (5) sia minore di 1 [23]). NAGUMO ha ritrovato il criterio di ROSENBLATT, dimostrando che si può porre anche $k = 1$, purchè la (5) sia soddisfatta nel senso forte [24]). PERRON ha riconosciuto che quest'ultima condizione non è essenziale, e ha anche dimostrato che nella (5) non si può supporre $k > 1$, senza che il criterio venga a mancare [25]).

Tutte queste condizioni sono state precisate dallo stesso ROSENBLATT, il quale ha mostrato che si può sostituire la costante k con una funzione, $\mathfrak{z}(x)$, non negativa, sommabile e tale da aversi

$$\mathfrak{z}_1(x) = \int_{x_0}^{x} \mathfrak{z}(t)\,dt \leqq x - x_0 \qquad (|x - x_0| \leqq d). \tag{8}$$

Anche questa forma più precisa del criterio di ROSENBLATT rientra nel teorema enunciato al n° 10 [26]).

---

[23]) *Ueber die Existenz,* ... loc. cit. [3]).

[24]) *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung* [Japanese Journal of Mathematics, t. 3 (1926), pp. 107-112].

[25]) *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung* [Mathematische Zeitschrift, t. 28 (1928), pp. 216-219].

[26]) Come ho già detto [vedi la nota [7])], non è questa la forma definitiva che ROSENBLATT ha dato al suo criterio. Inoltre egli lo ha esteso ai sistemi di più equazioni differenziali del primo ordine [*Sull'unicità,* ... loc. cit. [3])]. Per un sistema di due equazioni il teorema assume la veste che segue:

Se $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sono due funzioni continue nell'insieme

$$R:\ 0 \leqq x \leqq a, \qquad -b \leqq y \leqq b, \qquad -b \leqq z \leqq b,$$

e se M è un numero che supera $|f(x, y, z)|$ e $|g(x, y, z)|$, il sistema

$$y' = f, \qquad z' = g$$

ammette, nell'intervallo $0 \leqq x \leqq \alpha$, $\left(\alpha \leqq a,\ \alpha \leqq \frac{b}{M}\right)$, una ed una sola coppia di funzioni, $y(x)$ e $z(x)$, che lo risolvano e che verifichino la condizione di annullarsi nel punto zero, non appena nell'insieme R sussista la disuguaglianza

$$|y_2 - y_1|\,|f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| + |z_2 - z_1|\,|g(x, y_2, z_2) - g(x, y_1, z_1)| \leqq$$
$$\leqq \mathfrak{z}(x)\frac{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{x}\left(1 + \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\varepsilon - 1}\right), \qquad (\varepsilon < 0),$$

Bisogna dimostrare che, fissato $u_0 > 0$, si possono scegliere i due numeri positivi $\bar{\delta}$ e u_1 in modo che per ogni $\delta > 0$ e $\leqq \bar{\delta}$ si abbia

$$(9) \qquad \delta < d, \qquad \delta u_1 < u_0$$

e

$$(10) \qquad \int_{x_0+\delta}^{x_0+d} \frac{\mathfrak{z}(x)}{x - x_0} dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u}, \qquad \int_{x_0-d}^{x_0-\delta} \frac{\mathfrak{z}(x)}{x_0 - x} dx \leqq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u}.$$

Integrando per parti, si riconosce che i primi membri delle (10) sono eguali a

$$\frac{\mathfrak{z}_1(x_0 + d)}{d} - \frac{\mathfrak{z}_1(x_0 + \delta)}{\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_0+d} \frac{\mathfrak{z}_1(x)}{(x - x_0)^2} du,$$

$$\frac{\mathfrak{z}_1(x_0 - d)}{d} - \frac{\mathfrak{z}_1(x_0 - \delta)}{\delta} - \int_{x_0-d}^{x_0-\delta} \frac{\mathfrak{z}_1(x)}{(x_0 - x)^2} dx;$$

e quindi si ha, se si tien presente la (8),

$$\int_{x_0+\delta}^{x_0+d} \frac{\mathfrak{z}(x)}{x - x_0} dx \leqq 2 + \int_{x_0+\delta}^{x_0+d} \frac{dx}{x - x_0} = 2 + \log d - \log \delta,$$

$$\int_{x_0-d}^{x_0-\delta} \frac{\mathfrak{z}(x)}{x_0 - x} dx \leqq 2 + \int_{x_0-d}^{x_0-\delta} \frac{dx}{x_0 - x} dx = 2 + \log d - \log \delta.$$

Ma allora, se poniamo

$$\bar{\delta} < d, \qquad u_1 < u_0 d^{-1} e^{-2} < u_0 d^{-1},$$

le (9) e le (10) sono senz'altro verificate.

§ 4.

Un ultimo criterio di unicità.

13. Si consideri l'equazione

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

---

la funzione positiva $\mathfrak{z}(x)$ *essendo integrabile nell'intervallo* $0 \leqq x \leqq a$, *e avendosi*

$$\int_0^x \mathfrak{z}(t)\, dt \leqq x.$$

Il criterio di ROSENBLATT relativo a un'equazione differenziale [Comptes rendus, loc. cit. [3])] si può dedurre da questo teorema ponendovi $g \equiv 0$.

dove $f(x, y)$ è una funzione reale definita nella striscia $S: x_0 \leqq x \leqq x_1, \; -\infty < y < +\infty$; ed *i suoi integrali siano funzioni assolutamente continue.*

Dico che le soluzioni della (1) *sono determinate in modo unico del valore che hanno in* x_0, *e ne dipendono con continuità, tutte le volte che si presentano queste circostanze:*

la $f(x, y)$ *verifica la disuguaglianza*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqq \varphi_1(x) \omega_1(y_1 - y_2), \qquad (y_1 > y_2),$$

dove $\varphi_1(x)$ *e* $\omega_1(u)$ *hanno il significato chiarito al* n° 3;

se ε *è un numero positivo arbitrario, si possono determinare i numeri* $\delta \geqq 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *in modo da aversi*

$$x_0 + \delta < x_1, \qquad \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon;$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_1(x)\,dx \leqq \int_{\delta_1}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega_1(u)}, \qquad (x_0 + \delta < a_1 < a_2 \leqq x_1);$$

$$|y_0(x) - y_1(x)| < \delta_1 \tag{2}$$

per ogni $x \geqq x_0$ *e* $\leqq x_0 + \delta$ [27]), *se* $y_0(x)$ *e* $y_1(x)$ *sono due integrali della* (1) *per i quali si abbia*

$$|y_0(x_0) - y_1(x_0)| < \delta_2.$$

Questo teorema si dimostra col solito ragionamento. Credo di potermi esimere dal verificare che esso comprende tutti i criterî enunciati in questo lavoro.

Napoli, Settembre 1929.

GIUSEPPE SCORZA-DRAGONI.

[27]) La (2) va intesa soddisfatta nella porzione del segmento $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \delta$ in cui si possono definire tutt'e due le funzioni $y_0(x)$ e $y_1(x)$.