SULLE V_k PER CUI LA VARIETÀ DEGLI S_h $(h+1)$-SEGANTI HA DIMENSIONE MINORE DELL'ORDINARIO.

Nota di **Alessandro Terracini** (Torino).

Adunanza del 12 marzo 1911.

1. È noto [1]) che la sola V_2, non cono, di S_r, i cui S_2 tangenti si incontrano a due a due, è, se $r \geq 5$, la superficie di VERONESE; e che questa superficie [2]) è pure caratterizzata dall'essere, in un tale S_r, la sola, non cono, le cui corde riempiono una V_4. Recentemente lo SCORZA [3]) disse di aver ragione di credere, sebbene non gli fosse venuto fatto di darne una dimostrazione, che le V_3 di S_7, o di uno spazio più ampio, le cui corde non riempiono una V_7 « rientrino » fra le V_3 a spazî tangenti mutuamente secantisi. Ora si può dimostrare, più precisamente, che queste due categorie di V_3 coincidono, anzi, più in generale, che:

Se una V_k di $S_r (r > 2k)$ gode di una delle due proprietà, che le corde riempiano una varietà di dimensione $2k-i$ $(i \geq 0)$, o che due qualsiansi S_k tangenti si seghino in uno S_i, gode pure dell'altra.

Questo teorema, a sua volta, non è se non un caso particolare di un teorema più generale che ora dimostreremo, teorema che pone in relazione l'eventuale abbassamento di dimensione della varietà degli S_h $(h+1)$-seganti di una V_k immersa in uno spazio di dimensione $r \geq (h+1)k+h$, coll'esistenza di $h+1$ qualsiansi suoi S_k tangenti in uno spazio di dimensione minore dell'ordinario.

Sia infatti in uno S_r $[r \geq (h+1)k+h]$, dove assumiamo coordinate proiettive omogenee $x_0, x_1, \ldots, x_r$, una V_k, luogo di un punto X funzione di k parametri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. Posto $X^{(i)} = \frac{\partial X}{\partial \tau_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$, un punto generico dello S_k tangente alla V_k in X è dato da

$$X(\tau) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X^{(i)}(\tau).$$

1) DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'n^o ordine immerse nello spazio di n dimensioni* [questi Rendiconti, t. I (1887), pp. 241-271], n° 12.

2) SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* [questi Rendiconti, t. XV (1901), pp. 33-51], n° 8.

3) SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XV (1908), pp. 217-273], pag. 265.

Ora consideriamo $h+1$ punti della V_k corrispondenti rispettivamente ai sistemi di valori

$$\begin{matrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 & \ldots & \tau_k^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \ldots & \tau_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{h+1} & \tau_2^{h+1} & \ldots & \tau_k^{h+1} \end{matrix}$$

dei parametri τ; il supporre che gli S_k in essi tangenti alla V_k stiano in uno $[(h+1)k+h-i]$, dove $i>0$, equivale a supporre che la matrice

$$\| x(\tau^1),\ x^{(1)}(\tau^1),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^1),\quad x(\tau^2),\quad x^{(1)}(\tau^2),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^2),\ \ldots,\ x(\tau^{h+1}),$$
$$x^{(1)}(\tau^{h+1}),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^{h+1}) \|$$

(nelle $r+1$ linee della quale bisogna apporre ad x ordinatamente gli indici $0, 1, \ldots, r$) abbia caratteristica $(h+1)(k+1)-i$.

D'altra parte, questa condizione è pure necessaria e sufficiente affinchè gli S_h $(h+1)$-seganti della data V_k riempiano una $M_{(h+1)k+h-i}$ [4]). Infatti un punto generico dello S_h determinato da $h+1$ punti generici della V_k, come quelli sopra considerati, è dato da

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i x(\tau^i) + x(\tau^{h+1}).$$

Esso dipende dunque dagli $(h+1)k$ parametri $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots, \tau_k^1, \ldots, \tau_1^{h+1}, \ldots, \tau_k^{h+1}$ e dagli h parametri λ: la condizione necessaria e sufficiente, affinchè essi non siano essenziali, così che le coordinate di un punto della M si possano tutte esprimere in funzione di soli $(h+1)k+h-i$ parametri indipendenti, è [5]) che sia $(h+1)(k+1)-i$

[4]) Intorno alle v_k che godono di tale proprietà cfr.: PALATINI, *Sulle varietà algebriche per le quali sono di dimensione minore dell'ordinario, senza riempire lo spazio ambiente, una o alcune delle varietà formate da spazi seganti* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLIV (1908-1909), pp. 362-375], dove si trovano citate altre Note dello stesso autore.

[5]) Questo in virtù del seguente teorema: *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè tra $m+1$ funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_m$ di n variabili $x_1, \ldots, x_n$ siano identicamente soddisfatte $m-\mu$ relazioni omogenee indipendenti, è che la caratteristica della matrice*

$$(1)\qquad \left\| \begin{matrix} u_0 & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_m & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

sia $\mu+1$.

Questo teorema, per $m=n$ e $\mu=m-1$, si trova enunciato esplicitamente (e dimostrato direttamente) nella Memoria del CASORATI, *Sui determinanti di funzioni* [Memorie del Reale Istituto Lombardo, t. XIII (1877) (la Memoria è però del 1874), pp. 181-187], n° 3. Esso è una conseguenza di un teorema dato da JACOBI: *De binis quibuslibet Functionibus homogeneis*, etc. [Werke, t. III, pp. 193-268], la caratteristica della matrice

$$\left\| \sum_{i=1}^{h} \lambda_i x(\tau^i) + x(\tau^{h+1}),\ x^{(1)}(\tau^{h+1}),\ x^{(2)}(\tau^{h+1}),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^{h+1}),\ x(\tau^1),\right.$$
$$\left. \lambda_1 x^{(1)}(\tau^1),\ \ldots,\ \lambda_1 x^k(\tau^1),\ \ldots,\ x(\tau^h),\ \lambda_h x^{(1)}(\tau_h),\ \ldots,\ \lambda_h x^{(k)}(\tau^h) \right\|.$$

E poichè la caratteristica di questa matrice coincide ovviamente con quella della matrice sopra considerata, ricadiamo ancora sulla medesima condizione di sopra. Conchiudiamo dunque:

Se una V_k di S_r $[r \geq (h+1)k+h]$ è tale che i suoi S_h $(h+1)$-seganti riempiano una varietà di dimensione $(h+1)k+h-i(i>0)$, $h+1$ qualsiansi suoi S_k tangenti stanno in uno $S_{(h+1)k+h-i}$ e viceversa.

Vedremo più avanti come il nesso tra le due proprietà, che abbiamo dimostrato essere equivalenti per una V_k, sia anche più intimo.

2. Lo Scorza ha dimostrato [6]) che, se una V_3, immersa in S_7 o in uno spazio più ampio, è tale, che i suoi S_3 tangenti si incontrino a due a due, lo S_6 determinato da due S_3 tangenti qualsiansi è tangente alla V_3 almeno lungo una linea (contiene cioè gli S_3 tangenti alla V_3 almeno lungo una linea); e un'analoga proposizione [7]) ha dimostrato per le V_4 immerse in spazio di dimensione almeno uguale a 9, con un procedimento che si può estendere a tutte le V_k che godono di un'analoga proprietà. Ora noi dimostreremo analiticamente una proposizione in cui questo risultato è incluso come caso particolare.

Sia una V_k di S_r $[r \geq (h+1)k+h]$ i cui S_h $(h+1)$-seganti riempiono una $M_{(h+1)k+h-i}$. Riferendoci alle notazioni del numero precedente, un punto di questa M

---

n° 20. Infatti, secondo questo teorema,

$$(2) \qquad \frac{\partial\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}, \ldots, \frac{u_r}{u_0}\right)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{1}{u_0^{r+1}} \begin{vmatrix} u_0 & \frac{\partial u_0}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_0}{\partial x_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_r & \frac{\partial u_r}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \end{vmatrix};$$

quindi, se la caratteristica della matrice (1) è $\mu+1$, in virtù della (2), quella della matrice jacobiana di $\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_m}{u_0}$ è al massimo uguale a μ, anzi, come mostra l'ultima parte della dimostrazione, è proprio uguale a μ; cosicchè tra $\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_m}{u_0}$ passano $m-\mu$ relazioni, che si tradurranno in altrettante relazioni omogenee fra le u. Viceversa, se tra le u passano $m-\mu$ relazioni omogenee, la caratteristica della matrice jacobiana considerata è μ: sono dunque nulli, ancora in virtù della (2), i determinanti di ordine $\mu+2$ estratti dalla (1) e contenenti elementi della prima colonna: se da questo fatto non seguisse che la caratteristica della (1) è $\mu+1$, questo vorrebbe dire che sarebbero nulli tutti i determinanti di ordine $\mu+1$ estratti dalla (1) e contenenti elementi della prima colonna, cosicchè passerebbe tra le u almeno una relazione omogenea in più di quelle supposte esistenti.

[6]) Scorza, *Determinazione delle varietà a 3 dimensioni di S_r $(r \geq 7)$ i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due* [questi Rendiconti, t. XXV (1° semestre 1908), pp. 193-204], n° 4.

[7]) Scorza, *Sulle varietà a 4 dimensioni di S_r $(r \geq 9)$ i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due* [questi Rendiconti, t. XXVII (1° semestre 1909), pp. 148-178], n° 2.

è dato da

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i x(\tau^i) + x(\tau^{h+1}).$$

Lo $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente alla M in un tal punto è lo $S_{(h+1)k+h-i}$ in cui sta quel punto insieme coi suoi primi derivati rispetto alle λ e alle $\tau_1^1, \tau_2^1, \ldots, \tau_k^1, \ldots, \tau_1^{h+1}, \tau_2^{h+1}, \ldots, \tau_k^{h+1}$, cioè lo $S_{(h+1)k+h-i}$ dei punti

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i x(\tau^i) + x(\tau^{h+1}),\quad x^{(1)}(\tau^{h+1}),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^{h+1}),\quad x(\tau^1),$$
$$\lambda_1 x^{(1)}(\tau^1),\ \ldots,\ \lambda_1 x^{(k)}(\tau^1),\ \ldots,\ x(\tau^h),\quad \lambda_h x^{(1)}(\tau^h),\ \ldots,\ \lambda_h x^{(k)}(\tau^h),$$

ossia ancora lo $S_{(h+1)k+h-i}$ dei punti

$$x(\tau^1),\quad x^{(1)}(\tau^1),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^1),\ \ldots,\ x(\tau^h),\quad x^{(1)}(\tau^h),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^h),$$
$$x(\tau^{h+1}),\quad x^{(1)}(\tau^{h+1}),\ \ldots,\ x^{(k)}(\tau^{h+1}).$$

E siccome questo $S_{(h+1)k+h-i}$ non dipende dalle λ, conchiudiamo che la M è toccata da uno stesso $S_{(h+1)k+h-i}$ in tutti i punti di ciascun S_h $(h+1)$-segante della V_k. Ora per un punto generico della M passano ∞^i S_h $(h+1)$-seganti della V_k, i quali riempiranno una certa varietà la cui dimensione δ potrà essere minore di $h+i$, ma sarà certo maggiore di $\frac{i}{h}+h$ (poichè per h punti generici di quella varietà, o non passerà nessuno S_h della ∞^i, o ne passerà uno solo, cosicchè $i \leqq h\delta - h^2$): sarà dunque

$$\frac{i}{h} + h \leqq \delta \leqq h + i. \tag{1}$$

Quindi gli $S_{(h+1)k+h-i}$ tangenti della M saranno al massimo $\infty^{(h+1)+k-i-\delta}$. E poichè, se una V_k è toccata da ogni suo S_k tangente in più di un punto, è toccata da un S_k tangente generico in tutti i punti di uno spazio [8]), la M è toccata da uno $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente generico almeno lungo uno S_δ; più precisamente, se gli $S_{(h+1)k+h-i}$ tangenti della M sono $\infty^{(h+1)k+h-i-\delta-j}$ $(j \geqq 0)$, la M è toccata da uno $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente generico in tutti i punti di uno $S_{\delta+j}$.

Quindi:

Se una V_k di S_r $[r \geqq (h+1)k+h]$ è tale che i suoi S_h $(h+1)$-seganti riempiano una $M_{(h+1)k+h-i}$ $(i>0)$, la M in generale si compone di $\infty^{(h+1)k+h-i-\delta-j}$ $S_{\delta+j}$ $(j \geqq 0)$, tali che lungo ciascuno di essi vi è uno $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente fisso, dove δ soddisfa alla relazione (1).

Ricordando la condizione trovata nel n° 1 per la matrice che ivi compariva, condizione caratteristica per le V_k che consideriamo, appare senz'altro, che gli S_k tangenti alla V_k in ciascuno degli $h+1$ punti che corrispondono ai sistemi di valori $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^{h+1}$ dei parametri τ, stanno nello $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente alla M lungo lo S_h contenente quegli $h+1$ punti; anzi in tale $S_{(h+1)k+h-i}$ stanno gli S_k tangenti alla V_k in tutti i punti

---

[8]) SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* [questi Rendiconti, t. XXX (2° semestre 1910), pp. 87-121], n° 20.

della V_k situati su uno S_h $(h+1)$-segante, giacente in quello $S_{(h+1)k+h-i}$ tangente alla M (cioè nel suo $S_{\delta+j}$ di contatto), S_h $(h+1)$-seganti che sono, come si riscontra facilmente $\infty^{i+\delta+j-h}$ (dove j ha lo stesso significato di sopra). Tali punti della V_k formano su essa una varietà di dimensione d, dove d soddisfa alla disuguaglianza:

$$(2) \qquad (h+1)d \geqq i+\delta+j-h$$

che, paragonata colla (1), porge

$$(3) \qquad d \geqq \frac{i+\dfrac{i}{h}}{h+1}.$$

Possiamo dunque completare il teorema del n° 1 e il precedente col seguente enunciato:

Se una V_k di S_r $[r \geqq (h+1)k+h]$ è tale che $h+1$ qualsiansi dei suoi S_k tangenti stiano in uno $S_{(h+1)k+h-i}$ $(i>0)$, un tale spazio è tangente alla V_k in tutti i punti di una certa varietà, la cui dimensione d soddisfa alla (3)*: quello $S_{(h+1)k+h-i}$ è tangente alla varietà degli S_h $(h+1)$-seganti della V_k, varietà che ha attualmente dimensione $(h+1)k+h-i$, lungo $\infty^{i+\delta+j-h}$ S_h seganti la V_k in $h+1$ punti di quella varietà di dimensione d [dove $j \geqq 0$ e δ soddisfa alla disuguaglianza* (1)*], i quali S_h costituiscono uno $S_{\delta+j}$.*

È chiaro che questo teorema include i risultati ai quali alludevamo nel principio di questo n°.

Torino, 24 febbrajo 1911.

ALESSANDRO TERRACINI.

ERRATA-CORRIGE

AVVERTENZA. — Le linee si contano dall'alto della pagina escludendovi la intestatura.

I. — Errori sfuggiti agli Autori nella revisione delle bozze di stampa:

TOMO	PAGINA	LINEA	IN LUOGO DI:	LEGGERE:
XXX	392	6	$2+S(p)$	$2-S(p)$
»	405	20	$C(\pi)$	$C(-\pi)$
XXXI	58	22	$\int^b$	$\int_a^b$
»	133	32	Pelermo	Palermo
»	354	29	La série	*La série*
»	388	2	$\int_2^\infty$	$\int_\varepsilon^\infty$

II. — Errori tipografici:

TOMO	PAGINA	LINEA	IN LUOGO DI:	LEGGERE:
XXX	254	3	,I	Γ'