

## SUL PRINCIPIO DI DIRICHLET \*).

Memoria di **Beppo Levi** (Torino).

Adunanza del 24 giugno 1906.

È merito recente del signor HILBERT \*\*) di aver richiamata l'attenzione dei matematici sul procedimento induttivo che, sull'esempio del RIEMANN, si usa ricordare col nome di *principio di DIRICHLET*; principio pel quale, dall'esistenza di un limite inferiore dei valori di un integrale contenente una funzione indeterminata, soggetta solo a date condizioni al contorno del campo di integrazione, dovrebbe concludersi l'esistenza di una funzione limite la quale soddisfa alle nominate condizioni e che, sostituita alla funzione indeterminata, faccia assumere all'integrale considerato precisamente il valore di quel limite inferiore.

L'insufficienza del *principio* fu rilevata con particolare evidenza dal WEIERSTRASS \*\*\*), e dopo d'allora gli sforzi dei matematici rimpetto ai problemi che esso era destinato a risolvere si rivolsero a *costruire* le funzioni richieste come soluzioni di equazioni, in cui, sotto convenienti ipotesi di continuità e di derivabilità, si traducevano le condizioni di minimo. Eppure il *principio* non solo conserva una particolare forza suggestiva, ma un larghissimo valore di capacità deduttiva non si potrà disconoscergli per le dimostrazioni d'esistenza, ove appena si rifletta che in esso si assume come fondamento l'intuizione a priori dell'aggregato di tutte le funzioni, mentre ogni procedimento costruttivo poggia di necessità sulla base più ristretta formata dall'intuizione dell'aggregato dei numeri.

Come si possa concludere in forma rigorosa sulla base di questi concetti hanno mostrato il signor HILBERT e la sua scuola colla trattazione di alcuni problemi partico-

\*) Mio fratello EUGENIO, in un esame critico del Festschrift del signor HILBERT, *Über das DIRICHLET'sche Prinzip*, che sarà tosto citato, era giunto a proposizioni di cui quelle dei n° 30-33 non sono che ulteriori sviluppi agli scopi precisi del presente lavoro. Furono quelle prime osservazioni a suscitare in me i pensieri che nel presente lavoro si troveranno sviluppati.

\*\*) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII (1900), pp. 184-188.

\*\*\*) *Über d. sogenannte DIRICHLET'sche Prinzip*. Werke, II, p. 49.

lari: il problema delle geodetiche \*) ed un caso particolare del cosiddetto problema di DIRICHLET \*\*). Ma le difficoltà del procedimento sono ancora tutt'altro che comuni: basti osservare che le condizioni particolarissime in cui l'HILBERT tratta il problema di DIRICHLET appaiono elemento integrante delle sue deduzioni e pare lascino ben poca speranza che con ragionamenti analoghi possa trattarsi, senza profonde modificazioni, il problema generale.

Con ragionamenti che si dilungano completamente da quelli or ricordati dell'HILBERT e dei suoi discepoli — e, oso sperare, anche di maggior portata come metodo generale — io tratto qui per l'appunto, secondo il nominato concetto, il problema di DIRICHLET nella sua forma più generale:

*Assegnata sul piano  $(x, y)$  una curva semplice  $c$ , ed assegnata su di essa una funzione continua dell'arco, mostrare l'esistenza di una funzione  $u$ , la quale — fra quelle definite in ogni punto del campo  $\Gamma$  interno a  $c$ , continue in  $\Gamma$  e sul contorno, e derivabili in  $\Gamma$  e che su  $c$  coincidono colla funzione assegnata — renda minimo l'integrale*

$$(I) \quad I(u) = \int_{\Gamma} \int \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Ragioni di semplicità inducono qui ad assoggettare la curva  $c$  ad una condizione analoga alla convessità — ma assai più larga — che sarà precisata in seguito. Sulla rimozione di tal restrizione e su altre applicazioni del metodo a questo medesimo problema e ad altri affini mi riservo di ritornare in seguito. Mi sia però concesso di rilevare che l'essenza del lavoro non può ridursi a una quistion di metodo: risultati essenzialmente nuovi vi sono ottenuti, sia riguardo al carattere generale della curva  $c$  — cui non si suppone l'esistenza della tangente —, sia riguardo all'amplessissimo campo funzionale considerato — perchè alle funzioni  $u$  per cui si considera l'integrale non si impongono altre condizioni che l'esistenza delle derivate necessarie per la formazione dell'integrale medesimo, e cionondimeno si ottiene l'analiticità della funzione minimizzante —, sia per qualche risultato particolare, fra cui mi piace ricordare la dimostrazione della formola di GREEN come conseguenza della proprietà di minimo e senza supporre, come d'ordinario avviene, l'esistenza delle derivate seconde.

\*) NOBLE, *Eine neue Methode in der Variationsrechnung* (Inaug.-Diss., Göttingen 1901). V. pure BOLZA, *Lectures on the calculus of Variations* (Chicago, 1904), p. 253 e seg. Per un integrale doppio analogo all'integrale di DIRICHLET di cui si parlerà tosto, il sig. HEDRICK nella sua tesi *Über den analytischen Charakter der Lösungen v. Differentialgleichungen* (Göttingen 1901), cap. V, espone considerazioni analoghe a quelle dell'HILBERT nella Nota sopracitata, che vorrebbero esserne il completamento, ma sono lungi non solo dal rigore necessario ma, oserei dire, da ogni indizio della via per cui tal rigore potrebbe introdursi.

\*\*\*) HILBERT, *Über das DIRICHLET'sche Prinzip* [Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901; Math. Ann., LIX (1904), pp. 161-186]. Vi si tratta il problema di DIRICHLET per una superficie di RIEMANN, ove alla funzione incognita si imponga la sola condizione di subire il salto 1 lungo una linea chiusa che non spezzi la superficie, mentre del resto la si suppone continua e derivabile sopra l'intera superficie.

Necessità di cose, non ingiustificato amore di generalità, mi ha indotto ad adottare per l'integrale la nozione recentemente proposta e sviluppata dal sig. LEBESGUE \*) anzichè quella comune del RIEMANN; e se il lettore vorrà concedermi tal necessità, ne risulterà forse un esempio dell'utilità che i nuovi concetti, apparentemente talora troppo complessi e ricercati, possono avere in ricerche comuni.

## § I.

## Concetti direttivi del procedimento.

Le considerazioni di questo primo paragrafo non hanno in generale alcun carattere di rigore; esse sono piuttosto intuizioni, atte, spero, a guidare il lettore nella concezione e nella giustificazione del metodo seguito. Particolarmente le considerazioni del n° 1 non hanno altro scopo preciso che di facilitare una concezione geometrica: esse non troveranno però applicazione nei successivi sviluppi analitici.

I. Nel piano numerico  $(x, y)$  sia data una curva  $c$  semplice chiusa (giacente interamente al finito); sopra di essa sia distesa una funzione continua limitata  $u(s)$  del suo arco  $s$ ; ponendo  $\zeta = u(s) = u(xy)$ , il sistema della curva  $c$  e della funzione  $u(s)$  risulterà rappresentato da una curva  $\bar{c}$  dello spazio  $(xy\zeta)$ . Per tutte le superficie  $\zeta = u(xy)$  definite pei valori di  $(xy)$  interni al campo  $\Gamma$  limitato da  $c$ , ed aventi per contorno la curva  $\bar{c}$ , s'immagini costruito l'integrale

$$(1) \quad I(u) = \int_{\Gamma} \int \Delta u(xy) dx dy$$

e si chiami  $d$  il limite inferiore dei valori di questo  $\int \int$ : sarà chiaramente  $d \geq 0$ . Si immagini poi dall'aggregato delle funzioni  $\zeta = u(xy)$  estratta una semplice infinità

$$(a) \quad u_1, u_2, u_3, \dots$$

tale che

$$I(u_{i+1}) < I(u_i), \quad \lim_{i=\infty} I(u_i) = d.$$

Alcune ipotesi possono tosto farsi circa le  $u$ :

Si osservi anzitutto che per la funzione  $\zeta = ax + by + c$  è  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \Delta^2 \zeta = 0$ ,

onde, per una nota proprietà delle funzioni armoniche, l' $\int \int \Delta \zeta dx dy$ , calcolato per questa funzione  $\zeta$ , è minimo qualunque sia il campo d'integrazione. Se quindi un piano  $\zeta = ax + by + c$  taglia una superficie  $\zeta = u_i(xy)$  secondo una linea chiusa, e

\*) Vedi: LEBESGUE, *Intégrale, Longueur, Aire*. Thèse. [Annali di Matematica, serie III, t. VII (1902), pp. 231-359] e *Leçons sur l'intégration*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1904) od anche BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1905). Per gli integrali d'area, vedi particolarmente la memoria degli Annali.

se si chiama  $\bar{z} = \bar{u}_i(x, y)$  la superficie che si ottiene sostituendo alla parte di  $z = u_i$  interna a questa linea l'area piana limitata dalla medesima, sarà evidentemente

$$I(\bar{u}_i) \leq I(u_i).$$

Si può quindi, nella serie delle  $u$ , sostituire la  $\bar{u}_i$  alla  $u_i$ , eventualmente attribuendole un indice più avanzato. Per tal modo si può supporre che nessuna superficie  $z = u_i$  sia tagliata da un piano secondo una linea chiusa. In particolare, considerando i piani  $z = \text{cost.}$ , si può supporre che esse superficie non abbiano entro  $\Gamma$  alcun punto di massimo o di minimo, ed in particolare possono suppersi tutte contenute nello strato fra i piani  $z = \text{cost.}$ , tangenti a  $\bar{c}$  nei punti di ordinata massima e minima \*).

Si supponga ancora che le due superficie  $z = u_b$ ,  $z = u_k$  ( $k > b$ ) si attraversino in un punto  $A$ ; per ragioni di continuità esse si taglieranno secondo una linea  $l$  passante per  $A$ , chiusa ovvero facente capo a due punti  $M, N$  di  $\bar{c}$ : in ogni caso spezzante ciascuna delle due superficie in due parti. Chiameremo rispettivamente  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  le due parti corrispondenti di  $\Gamma$ ;  $u'_b, u''_b, u'_k, u''_k$  le parti delle due superficie, attribuendo lo stesso apice alle parti i cui punti hanno lo stesso  $(x, y)$ . Si verificherà almeno una delle disuguaglianze

$$\int_{\Gamma'} \int \Delta u'_b dx dy > \int_{\Gamma'} \int \Delta u'_k dx dy, \quad \int_{\Gamma''} \int \Delta u''_b dx dy > \int_{\Gamma''} \int \Delta u''_k dx dy.$$

Si supponga verificata la prima, e si formi la funzione  $\bar{u}_b$  uguale a  $u'_b$  in  $\Gamma'$  e a  $u''_k$  in  $\Gamma''$ : sarà  $I(u_b) > I(\bar{u}_b) > I(u_k)$  e nella serie (a) si potrà sostituire la  $\bar{u}_b$  alla  $u_b$  (sempre, eventualmente, attribuendole un indice  $> b$ , ma certo  $< k$ ) e le due superficie  $z = \bar{u}_b$ ,  $z = u_k$  non si attraverseranno più lungo la linea  $l$ , nè si attraverseranno lungo linee nuove che non appartenessero all'intersezione di  $u_b$  e di  $u_k$ . Ora, finchè si ammettono intersezioni di due superficie della serie (a), questo ragionamento si può ripetere; si può quindi completare una intuizione della serie di superficie  $z = u_i$  ammettendo che esse non si attraversino mai.

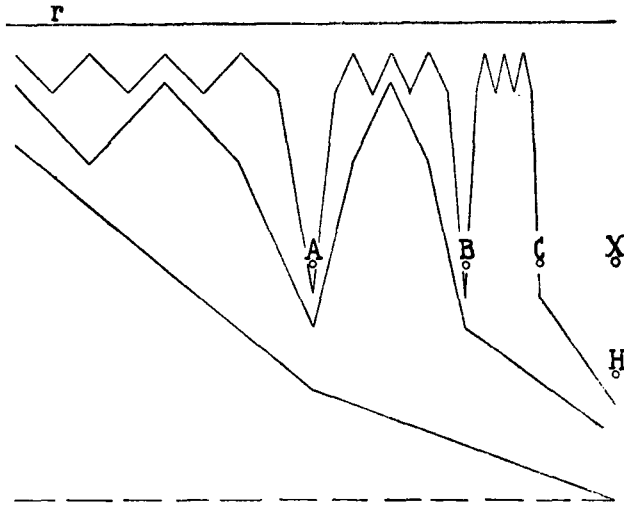
Si consideri ancora l'aggregato delle intersezioni delle superficie  $u_i$  con una retta  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$  fissata arbitrariamente per un punto interno a  $\Gamma$ , e sia  $K$  uno dei suoi punti limiti: da questo aggregato si estraiga una successione di punti avente  $K$  per limite e seguentisi in un ordine determinato, e tali che ciascuno appartenga sempre ad una superficie  $u_i$  di indice più elevato dei precedenti; si chiami

$$(b) \quad \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots$$

la successione delle funzioni  $u_i$  che determinano le superficie passanti per questi punti. Sopra ogni retta  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$  per un punto interno a  $\Gamma$ , questa successione di superficie determina una successione di punti, seguentisi tutti nello stesso senso — per

\*) È appena da osservare che, se l'illazione precedente presta il fianco a qualche dubbio per la necessità di ripetere infinite volte la sostituzione di una faccia piana a una regione della superficie e di respingere eventualmente la superficie ottenuta ad un posto più avanzato della serie (a), completamente rigorosa è l'ultima osservazione per la quale basta considerare due piani perfettamente definiti.

es., per fissare le idee, nel senso delle  $\zeta$  crescenti — e non sorpassante mai il punto d'intersezione della retta col piano  $\zeta = \max. u(s)$ ; ciascuna di queste serie di punti avrà dunque un punto limite unico e ben determinato e la serie delle superficie rappresentanti le funzioni (b) tenderà ad un aggregato limite avente uno ed un solo punto su ciascuna retta  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$ , che incontri  $\Gamma$ . Tale aggregato sarà esso una superficie avente la linea  $\bar{c}$  per contorno, ed avente derivate, per cui si possa considerare l'in-



(Fig. 1).

tegrale  $I(u)$ ? La Fig. 1, che si riferisce al caso di una successione di linee anzichè di superficie, mostra in forma intuitiva che la conclusione sarebbe precipitata \*). Generalizzando tale intuizione allo spazio si vede facilmente — e non sarebbe difficile il confortare l'intuizione con più precisi ragionamenti che qui sarebbero totalmente fuor di luogo — che \*\*) l'aggregato limite, previamente chiuso, si potrà comporre d'una superficie (eventualmente composta di pezzi sconnessi) e di un certo aggregato di linee, di punti e di segmenti di cilindri a generatrici parallele all'asse delle  $\zeta$ . Nè ancora sulle diverse parti potrà affermarsi l'esistenza di tangenti e piani tangenti, nè che la superficie abbia per contorno la linea  $\bar{c}$ . \*\*\*).

\*) Sulla figura si vede generarsi la linea  $\bar{c}$  e i punti  $A, B, C, \dots, X, H$ , come limiti di una serie di spezzate rappresentanti altrettante funzioni continue, che soddisfano precisamente alle condizioni della serie (b). Al più si potrà dubitare di dover escludere dall'aggregato limite i punti della linea  $\bar{c}$  che hanno la stessa ascissa dei punti  $A, B, C, \dots$ , e il dubbio non si potrà risolvere se non precisando in qual modo deve essere preso il limite, questione che qui sarebbe oziosa ed intempestiva.

\*\*) se superficie si vuol chiamare un aggregato chiuso di punti tale che su ogni retta  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$  (attraversante il campo  $\Gamma$ ) possieda uno e un sol punto, linea un aggregato analogo che uno e un sol punto abbia su quelle fra queste rette che passano pei punti di una linea piana (e qui mi si conceda, per brevità l'intuizione della linea piana).

\*\*\*) Sull'esempio in una sola variabile rappresentato colla Fig. 1 è da notarsi che l'aggregato dei punti che non appartengono alla linea  $\bar{c}$  non può costituire un'altra linea (segata dalle stesse ordinate della precedente), ma l'aggregato delle loro ordinate non è denso. E, mutatis mutandis, analoga osservazione si applica allo spazio.

Ma queste osservazioni, pur tenendo conto del loro valore di una semplice approssimazione intuitiva, mostrano per l'appunto come l'aggregato di quei punti limiti che non appartengono alla superficie abbia per proiezione sul piano ( $xy$ ) un aggregato non denso in nessuna parte di  $\Gamma^*$ , e che le considerazioni seguenti danno speranza di eliminare.

2. Si riprenda l'integrale  $I(\bar{u}_i)$ : si potrà immaginare nel piano ( $xy$ ) una linea  $d_i$  interna a  $\Gamma$  e sufficientemente prossima a  $c$ , perchè, detto  $\gamma_i$  il campo interno ad essa,  $\int \int_{\gamma_i} \Delta \bar{u}_i dx dy$  differisca di poco quanto si vuole da  $I(\bar{u}_i)$ . Si supponga allora di far subire al campo  $\gamma_i$  una piccola traslazione che lo porti nella nuova posizione  $\gamma'_i$  ancora completamente interna a  $\Gamma$ , e la stessa traslazione di far subire alla parte corrispondente della superficie  $\bar{u}_i$ ; si riattacchi poi il pezzo di superficie spostata alla linea  $\bar{c}$  mediante un conveniente pezzo di superficie continua, e si chiami  $\bar{u}'_i$  la nuova superficie così ottenuta. Poichè per la costruzione fatta,

$$\int \int_{\gamma'_i} \Delta \bar{u}'_i dx dy = \int \int_{\gamma_i} \Delta \bar{u}_i dx dy,$$

$\int \int_{\Gamma} \Delta \bar{u}'_i dx dy$  differirà pochissimo dal valore di  $I(\bar{u}_i)$ . Cosicchè, se a ciascuna  $\bar{u}_i$  si fa corrispondere una  $d_i$  in modo che col crescere di  $i$  vada indefinitamente assottigliandosi la corona limitata dalle curve  $c$  e  $d_i$ , si avrà, nella successione delle  $\bar{u}'_i$  una nuova serie di funzioni cui corrisponde una serie di valori dell'integrale  $I$  tendente al minimo  $d$ . E se alle funzioni  $\bar{u}_i$  e alle loro derivate si suppongono convenienti proprietà di continuità — il che potrà farsi, al bisogno mediante una limitazione del campo funzionale cui si suppongono appartenere le funzioni  $u$  rispetto alle quali si cerca il minimo \*\*) — con ugual diritto alla successione delle  $\bar{u}_i$  e a quella delle  $\bar{u}'_i$  si potrà sostituire quella formata da convenienti medie di funzioni omologhe delle due serie. Ma se avveniva che (per il variare sufficientemente rapido delle derivate in taluni punti) la superficie  $\bar{z} = \bar{u}_i$ , in punti sufficientemente radi del campo  $\Gamma$ , si allontanasse notevolmente dalla superficie limite (onde il prodursi dei punti e linee limiti isolati soprannominati), la traslazione che avrà portato la  $\bar{z} = \bar{u}_i$  nella  $\bar{z} = \bar{u}'_i$  avrà trasportato questi punti in altri, corrispondenti ad altre coordinate ( $xy$ ), cui corrispondono invece sulla

\*) Sugerirebbe il desiderio di dire un aggregato di misura nulla o in qualsiasi modo trascurabile: disgraziatamente un aggregato può essere non denso ed avere misura prossima quanto si vuole alla misura totale del campo! [Cfr.: Encyklopädie, Art. *Mengenlehre* (SCHOENFLIES), n° 15; OSGOOD, *A JORDAN Curve of positive area* [Transactions of the American Mathematical Society, IV (1903), pp. 107-112]. D'altronde è ben naturale che la presente veduta d'insieme non possa portare ad alcun risultato positivo, giacchè quanto è detto qui si può dal più al meno ripetere per ogni problema di variazioni: e non sempre la soluzione esiste. Qui s'intende solo mostrare il filo direttivo del metodo e le ragioni che ne fanno prevedere la riuscita probabile, quando le condizioni del problema lo permettano.

\*\*) Cfr. per es. il § 3, particolarmente il n° 5.

superficie  $\gamma = \bar{u}_i$  punti per cui tal singolarità più non si presenti; onde sulla superficie media che alle due si è voluto sostituire verrà ad attenuarsi, in questi punti eccezionali, la rapida divergenza.

La speranza di giungere effettivamente ad una superficie limite appare notevolmente accresciuta.

Ragioni di simmetria consigliano poi di alterare alcun poco il procedimento di media ora descritto; qual nozione potrà invero guidare la scelta della traslazione cui si assoggetta la  $\bar{u}_i$ ? Non certo la conoscenza a priori della funzione, poichè è nel principio fondamentale della ricerca che di essa non si conosca che il valore che fa assumere all'integrale  $I$ , e le condizioni generali di comportamento al contorno, di continuità, di derivabilità, ecc., — ogni altra conoscenza dovuta ad una *descrizione* della funzione non potendo provenire che da procedimenti costruttivi che qui si escludono. Si sostituirà quindi alla semplice media delle funzioni  $\bar{u}_i, \bar{u}'_i$  una media di tutte quelle funzioni che dalla  $\bar{u}_i$  si ottengono applicandovi tutte le traslazioni di direzione arbitraria e di ampiezza non superiore ad una certa \*). Si dovrà cioè integrare la funzione in una certa area, dividendo intanto per la misura dell'area medesima: una funzione che si otterrà da una funzione data  $u$  mediante un tal procedimento — che nel seguito verrà meglio precisato — si chiamerà *funzione mediatrice* della  $u$ : e ripetendo, al bisogno, anche più volte questo procedimento di media, da una successione prefissata di funzioni  $u_1, u_2, u_3, \dots$  tale che  $\lim_{i \rightarrow \infty} I(u_i) = d$ , si riuscirà a ricavare una successione di funzioni che soddisfano pure a tal condizione, e convergono uniformemente ad una funzione limite (cfr. n° 39). Questa sarà allora continua e avrà la  $\bar{c}$  per contorno; la dimostrazione dell'esistenza delle derivate e la determinazione del valore dell'integrale  $I$  per la funzione ottenuta richiederà ancora qualche attenzione e ancora sovrerà perciò il procedimento di media. *L'integrazione si presenta in questo procedimento come un mezzo per ridurre le increspature della funzione primitiva.*

## § 2.

### L'integrale del Lebesgue.

3. Come si disse nell'introduzione, necessità di cose ci porterà ad adottare la definizione dell'integrale data dal LEBESGUE; ne riassumerò perciò brevemente il concetto. Occorre anzitutto ricordare la nozione di misura di un aggregato.

Sopra un segmento  $S$  di lunghezza  $s$  sia dato un aggregato  $E$  di punti: si consideri una infinità numerabile (necessariamente) di segmenti contenuti nel segmento  $S$  e contenenti, nel loro insieme, l'aggregato  $E$  ed aventi a comune al più gli estremi. La somma delle loro lunghezze si dice la misura dell'aggregato di segmenti: essa sarà minore o al più

\*) La condizione che la traslazione non facesse uscire  $\gamma_i$  fuori di  $\Gamma$  imponeva un limite alla grandezza della traslazione considerata nelle linee precedenti.

uguale ad  $s$ . S'immaginino ora tutti i possibili aggregati di segmenti di  $S$  nelle condizioni enunciate rapporto ad  $E$ ; esisterà un limite inferiore (che può essere nullo) delle loro misure; questo limite si dirà la *misura esterna di  $E$* . Si consideri poi l'aggregato  $C(E)$  dei punti di  $S$  che non appartengono ad  $E$ ; la differenza fra  $s$  e la misura esterna di  $C(E)$  si chiama la *misura interna di  $E$* . La misura interna non è mai maggiore della misura esterna; se le due misure sono eguali, l'aggregato  $E$  si dice *misurabile*, e il valor comune delle due misure si dice la *misura di  $E$* .

La definizione si estende immediatamente ad aggregati superficiali; l'aggregato  $E$  sia contenuto in un campo  $\Gamma$  di area  $\alpha$ : si consideri un'infinità numerabile di aree contenute in  $\Gamma$ , contenenti  $E$  e non aventi parti comuni; la somma delle loro grandezze sarà la misura del loro aggregato, ed il limite inferiore delle misure di tutti gli aggregati analoghi sarà la *misura esterna di  $E$* . Considerando poi l'aggregato  $C(E)$  dei punti di  $\Gamma$  che non appartengono ad  $E$  si potrà definire come sopra la *misura interna di  $E$* ; se le due misure saranno uguali,  $E$  sarà *misurabile* e avrà per misura il valore comune delle due misure. È appena da osservare che alle aree in cui si racchiude  $E$  per determinare la misura si può, senza restringere la definizione, imporre una forma determinata, per es. cerchi o quadrati, il che può talora semplificare la ricerca.

Ciò posto, in un campo  $\Gamma$ , lineare o superficiale, sia definita una funzione  $f(p)$  del punto mobile  $p$ , finita, ma non necessariamente limitata. Si dice che la funzione è *misurabile* quando, comunque si assegnino i due numeri  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ), l'aggregato dei punti per cui  $a < f(p) < b$  è *misurabile*; è allora *misurabile* l'aggregato dei punti per cui  $a = f(p)$  \*).

Se la funzione  $f(p)$  è *misurabile*, si supponga scomposto l'intervallo di variabilità di  $f(p)$  in un aggregato finito od infinito di intervalli di ampiezza  $\leq \varepsilon$ ; si chiami  $l_i \dots l_{i+1}$  uno qualunque di questi intervalli ( $l_i < l_{i+1}$ ; gli indici  $i$  possano anche divenir negativi) e si chiami  $m_i$  la misura dell'aggregato dei punti per cui  $l_i \leq f(p) < l_{i+1}$  e  $M_i$  la misura dell'aggregato dei punti per cui  $l_i < f(p) \leq l_{i+1}$ . Si considerino le somme

$$\sigma_\varepsilon = \sum l_i m_i, \quad \Sigma_\varepsilon = \sum l_{i+1} M_i;$$

esse sono convergenti assolutamente tosto che una di esse è convergente, e qualunque siano  $\varepsilon, \varepsilon'$  è sempre  $\sigma_\varepsilon \leq \Sigma_{\varepsilon'}$  e il limite superiore delle  $\sigma_\varepsilon$  è uguale al limite inferiore delle  $\Sigma_{\varepsilon'}$ ; la funzione  $f(p)$  si dice allora *integrabile* in  $\Gamma$ . Se con  $d\gamma$  si indica il differenziale del campo  $\Gamma$ , il valor comune dei due limiti si dice l'  $\int_{\Gamma} f(p) d\gamma$ .

Quando la funzione  $f(p)$  potesse avere punti d' $\infty$  la definizione dell'integrale diviene sommamente arbitraria, come pure arbitraria è l'estensione a tal caso della definizione di RIEMANN \*\*). Tale arbitrarietà si riduce quasi totalmente quando l'aggregato dei

\*) Cfr. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 111.

\*\*\*) Cfr. SCHOENFLIES, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII, 2 (1900)], pag. 174 e seg.



punti d' $\infty$  abbia misura nulla (in particolare sia numerabile); basterà allora, nella precedente definizione, trascurare tale aggregato.

Ogni funzione integrabile è assolutamente integrabile.

Quando la funzione  $f(p)$  è limitata e misurabile, è anche sempre integrabile nel senso del LEBESGUE, e se è integrabile nel senso dei RIEMANN, i due integrali coincidono \*). Se invece la funzione non è limitata può mancare l'integrale del LEBESGUE; e può mancare precisamente anche quando la funzione sia integrabile nel senso di RIEMANN-CAUCHY, ma non sia assolutamente integrabile \*\*). Anche in questo caso però i due integrali sono uguali quando esistono entrambi \*\*\*).

Appunto lo scopo per cui nella presente ricerca si presentò particolarmente utile la considerazione dell'integrale in questo senso generalizzato fu di evitare le discussioni provenienti dai dubbi di integrabilità: ma le proprietà fondamentali del nuovo integrale non sono diverse da quelle dell'integrale di RIEMANN, onde assai raramente il lettore dovrà preoccuparsi del concetto proprio di esso, poichè, ammessa appena l'integrabilità, i ragionamenti si svolgeranno in generale indipendentemente dalla estensione adottata.

### § 3.

#### Il campo funzionale.

4. Un problema di variazioni non è determinato finchè non sia definito il campo delle funzioni rispetto alle quali si cerca il minimo. Questa definizione daremo dunque nel caso presente:

Si dovrà supporre anzitutto che ciascuna funzione  $u(xy)$  del campo sia continua in  $\Gamma$  e sul contorno †) e per essa esistano le derivate rispetto alla  $x$  e alla  $y$ , e quindi esista la  $\Delta u$ : che inoltre questa funzione sia integrabile nel campo  $\Gamma$  ††). Sono queste le condizioni essenziali affinché esista l'integrale  $I(u)$ . È però da notarsi che nella definizione dell'integrale secondo il LEBESGUE si possono sempre supporre esclusi dal campo d'integrazione i punti di un aggregato di misura nulla: si può quindi ammettere che le funzioni  $u(xy)$  possano, nei punti di un tale aggregato, ma soltanto in essi, mancare di derivata determinata rapporto alla  $x$  o rapporto alla  $y$ . Questa condizione sarà certo soddisfatta se, per esempio, sopra ciascuna retta  $y = \text{cost.}$ , escluse al più quelle di un

\*) LEBESGUE, *Intégrale*, etc., loco citato, pag. 254 (n° 20).

\*\*\*) LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, p. 115.

\*\*\*\*) LEBESGUE, *Intégrale*, etc., loco citato, pag. 270 (n° 33).

†) La condizione di continuità delle funzioni  $u$  è evidentemente necessaria, senza di che l'integrale potrebbe senz'altro assumere valori arbitrari, e ogni senso perderebbe la condizione che la  $u$  assuma determinati valori al contorno.

††) Si noti, in connessione colle ultime linee del n° precedente, che, anche quando  $\Delta u$  non sia limitato, la condizione di integrabilità nel senso del LEBESGUE non è qui più restrittiva che nel senso del RIEMANN, perchè  $\Delta u$  è sempre positivo, onde non vi è distinzione fra il chiedere la semplice integrabilità e l'integrabilità assoluta.

aggregato di misura nulla, la funzione  $u(x, y)$  ha — rapporto alla  $x$  — derivata superiore (o inferiore, a destra o a sinistra) generalmente finita (non necessariamente limitata)\*; ed analoghe condizioni si verifichino sulle rette  $x = \text{cost.}$ , per la derivata rapporto alla  $y$ .

Non sarà fuor di luogo il notare — perchè dovrà essere in seguito richiamato — che, pur soddisfacendo a queste condizioni, alla funzione  $u(x, y)$  potrebbe, almeno in alcuni punti del campo, mancare la derivata secondo un'altra qualsiasi direzione  $\lambda$ , o, pure esistendo, non esser legata alle derivate rapporto a  $x$  e a  $y$  dalla relazione fondamentale\*\*):

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x\lambda) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(y\lambda).$$

\*, Cfr.: LEBESGUE, *Leçons*, p. 123; LEVI, *Ricerche sulle funzioni derivate* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. V, vol. XV (1° sem. 1906), pp. 433-438; 674-684], pp. 437-438 (n° 4); p. 681 (n° 4); LEBESGUE, *Sur les fonctions dérivées*; e LEVI, *Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate* [stessi Rendiconti, s. V, vol. XV (2° sem. 1906)]. In questi luoghi si troverà mostrato che, nelle condizioni enunciate nel testo, ed in altre assai più generali, — per es. se si ammette che, sopra ogni retta  $y = \text{cost.}$  (escluso un aggregato di misura nulla) la derivata considerata possa anche divenire infinita in un aggregato riducibile di punti — la funzione  $u(x, y)$  ha sulle rette  $y = \text{cost.}$  — che non appartengono a quell'aggregato di misura nulla — derivata determinata rapporto alla  $x$ , in ogni punto, fatta eccezione al più per i punti di un aggregato di misura nulla, purchè si sappia che la funzione derivata (superiore o inferiore, a destra o a sinistra) considerata è integrabile. Ora tale ulteriore condizione è soddisfatta senz'altro, nel caso presente, a causa delle ipotesi proprie del problema. In vero dall'ipotesi che esista e sia finito  $\iint \Delta u \, dx \, dy$  segue che esiste pure  $\iint \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \, dy$  (cfr. il LEMMA del n° 27) e quindi  $\int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$  [cfr. la seconda nota a piè di pagina del n° 22, c)] e poichè  $\frac{\partial u}{\partial x}$  è misurabile (cfr. LEBESGUE, LEVI, ll. cc.) esiste anche  $\int \frac{\partial u}{\partial x} dx$  per ogni  $y$ , fatta astrazione per gli  $y$  di un aggregato di misura nulla.

Segue allora che quest'integrale è uguale all'incremento della funzione, vale a dire ch'è pur soddisfatta la condizione (3) di cui si parlerà tosto.

Che poi dalle cose dette e dal verificarsi delle condizioni analoghe collo scambio della  $x$  e della  $y$  risulti che anche ha misura *superficiale* nulla l'aggregato dei punti in cui può mancare la derivata della  $u(x, y)$  rapporto alla  $x$  o rapporto alla  $y$ , discende immediatamente da proposizioni note (Cfr. LEBESGUE, «Thèse» già citata, n° 37).

Si rilevi ad ogni modo che, agli scopi del presente lavoro, l'assegnare condizioni sufficienti perchè la  $u(x, y)$  soddisfi alle condizioni generali enunciate nel testo, è argomento di secondaria importanza. I richiami qui fatti non hanno altro scopo che di illuminare la natura assai poco restrittiva delle limitazioni imposte.

\*\*\*) È noto che questa relazione può solo dimostrarsi nell'ipotesi della continuità delle derivate. Esempi di funzioni per cui essa non è soddisfatta sono facili a formarsi. Non soddisfa ad essa nell'origine la funzione  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Si considerino tutti i punti razionali di un campo  $\Gamma$ , situato tutto al finito, ordinati in una serie semplice, e si chiamino, nell'ordine scelto,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ : sia  $\sum a_i$  una serie convergente a termini positivi: la funzione  $u = \sum a_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  non soddisfa alla relazione (2) in tutti i punti razionali, pur essendo continua e derivabile in tutto il campo  $\Gamma$ ; nessuna difficoltà presenterebbe ancora il considerare le  $a$  variabili.

Le condizioni descritte fin qui sono nella natura medesima del problema trattato. Una dobbiamo aggiungerne di natura meno direttamente contingente al problema, ma relativa piuttosto al concetto in cui ne abbiám dovuto precisare la soluzione, ed al metodo adottato [e la cui importanza sarà tosto discussa (n° 5-8)]: e si è che *sopra ogni retta*  $y = \text{cost.}$ , *escluse al più quelle di un aggregato di misura nulla, valga la relazione*

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx = u(x_1, y) - u(x_0, y)$$

(ed analogamente sulle rette  $x = \text{cost.}$  per l'integrazione rapporto ad  $y$ ). Condizione sufficiente (non necessaria) perciò è \*) *che sopra ciascuna retta*  $y = \text{cost.}$ , *escluse al più quelle di un aggregato di misura nulla, l'aggregato dei punti in cui*  $\frac{\partial u}{\partial x} = \infty$  *sia riducibile, e l'analogia condizione si verifichi nei punti in cui*  $\frac{\partial u}{\partial y} = \infty$  *sopra le rette*  $x = \text{cost.}$

Chiameremo  $\{u\}$  l'aggregato di tutte le funzioni che soddisfano alle condizioni descritte, e, naturalmente, assumono sopra il contorno  $c$  di  $\Gamma$  i valori della funzione assegnata  $u(s)$ .

5. È facile prevedere perchè l'ultima condizione relativa ai punti in cui possono essere infiniti i valori delle derivate  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sia essenziale pel metodo adottato, se si ritorna un istante sulle linee generali del § I (n° 2); poichè, si disse, se i punti in cui le derivate di  $u$  subiscono un rapido incremento sono sufficientemente radi nel campo  $\Gamma$ , si può sperare, col procedimento di media descritto, di ridurne l'influenza sul modo di convergenza delle  $u_i$  ad un limite, senza notevolmente alterare il valore dell'integrale  $I$ . Ma come, coll'accrescersi della misura dell'aggregato dei punti di  $\Gamma$  cui corrispondono tali punti singolari, si accresce anche l'influenza di essi sul comportamento delle derivate della funzione dedotta col procedimento di media, e diminuisce quindi la speranza dell'efficacia del metodo, — ugual effetto potrà produrre, anche col decrescere illimitato della misura di quell'aggregato, il divenire infinite quelle derivate.

Però la restrizione nominata non è senza efficacia nemmeno sulla risoluzione della questione proposta, perchè mostreremo ora che, *suppostala non verificata, esistono funzioni che, soddisfacendo alle condizioni al contorno, rendono l'integrale  $I$  piccolo a piacere; ed infinite ne esistono per cui esso è identicamente nullo; [mentre fra le funzioni limiti di quelle che rendono  $I$  piccolo a piacere ne esistono di quelle che cessano di soddisfare alle condizioni prescritte al contorno] \*\*).*

6. L'HARNACK \*\*\*) ha definito una funzione non soddisfacente alla condizione (3) (ove  $y$  si pensi costante, e quindi  $u$  funzione della sola variabile  $x$ ) nel modo seguente:

Si consideri, per semplicità, l'intervallo di variabilità della  $x$ :  $0 \dots 1$ ; lo si divida

\*) Vedi la 3ª nota del presente numero.

\*\*) A questo riguardo si confronti ancora la nota inserita in fine alla Memoria.

\*\*\*) *Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variablen mit ihren Ableitungen*, II. Theil [Math. Annalen, XXIV (1884), pp. 217-252], p. 225.

in  $n$  intervalli uguali mediante gli  $n - 1$  punti  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ , e sul piano ( $x\zeta$ ) si considerino i punti d'incontro delle ordinate per questi punti colla retta  $(0, 0) (1, 1)$ ; sia in generale  $A_i \equiv \left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n}\right)$ . Si considerino poi i punti  $B_i \equiv \left(\frac{2i-1}{2n}, \frac{i-1}{n}\right)$  e la spezzata  $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \dots B_n A_n$ : si chiami  $\zeta = \psi_1(x)$  la funzione che essa rappresenta.

Si ripeta quindi la stessa costruzione sopra ciascuno degli intervalli  $\frac{2i-1}{2n} \dots \frac{i}{n}$  e dei segmenti  $B_i A_i$  sostituiti all'intervallo  $0 \dots 1$  e al segmento  $A_0 A_n$ . Si otterrà una nuova spezzata  $A_0 B'_{11} A'_{11} B'_{12} A'_{12} \dots A_1 B'_{21} A'_{21} \dots A_2 \dots A_n$ ,

$$A'_{ij} \equiv \left[ \frac{1}{2n} \left( 2i - 1 + \frac{j}{n} \right), \frac{1}{n} \left( i - 1 + \frac{j}{n} \right) \right],$$

$$B'_{ij} \equiv \left[ \frac{1}{2n} \left( 2i - 1 + \frac{2j-1}{2n} \right), \frac{1}{n} \left( i - 1 + \frac{j-1}{n} \right) \right],$$

rappresentante una funzione  $\zeta = \psi_2(x)$ . Si ripeta ancora la costruzione analoga per ciascuno degli intervalli  $\frac{1}{2n} \left( 2i - 1 + \frac{2j-1}{2n} \right) \dots \frac{1}{2n} \left( 2i - 1 + \frac{j}{n} \right)$  e dei segmenti corrispondenti dell'ultima spezzata ottenuta, e così si prosegue indefinitamente; si otterrà una serie di funzioni  $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots$  convergente uniformemente ad una funzione limite che chiameremo  $\psi(x; n)$ . Questa funzione sarà continua e passerà pei punti  $A_i$  sulla retta  $A_0 A_n$ . Di più ogni altro suo punto dista dal punto della retta  $A_0 A_n$  che ha la stessa ascissa per meno di  $\frac{1}{n}$ . La funzione  $\psi(x; n)$  ammetterà in ogni punto una derivata determinata così a destra che a sinistra, e precisamente: nei punti  $A(A_i, A'_{ij}, \dots)$  derivata nulla a destra, infinita a sinistra, nei punti di condensazione di punti  $B(B_i, B'_{ij}, \dots)$  aventi una medesima ascissa derivata nulla a sinistra, infinita a destra, in tutti gli altri punti di condensazione dei punti  $B$  non però in questi punti medesimi) derivate infinite d'ambe le parti, in ogni altro punto dell'intervallo derivate nulle d'ambe le parti.

7. Ciò posto si supponga, per semplicità, che il campo  $\Gamma$  sia il rettangolo di vertici

$$(1,0), \quad (-1,0), \quad (1,1), \quad (-1,1).$$

I valori assegnati al contorno siano

$$\begin{aligned} & \text{o sopra i lati } (1,0)(1,1), (1,1)(-1,1), (-1,1)(-1,0) \\ & \text{1 - } |x| \text{ sul lato } (-1,0)(1,0). \end{aligned}$$

Si fissi arbitrariamente un  $y_1$ , tale che  $0 < y_1 < 1$  e due interi  $m, n$  (uguali o diversi) e si consideri la funzione  $f(xy)$  definita come segue:

$$f(0y) = \psi(1 - y; m)$$

$$f(xy) = f(0y)\psi(1 - |x|; n) \text{ per } y_1 \leq y \leq 1$$

$$f(xy) = [f(xy_1) - 1 + |x|] \frac{f(0y) - 1}{f(0y_1) - 1} + 1 - |x| \text{ per } 0 \leq y \leq y_1.$$

Questa funzione assume al contorno del rettangolo i valori assegnati, è continua

in tutto il campo, e derivabile rispetto ad  $x$  ed  $y$  in tutto il campo fatta eccezione per un aggregato di punti di misura nulla, e precisamente si ha:

$$\frac{df(oy)}{dy} = - \frac{d\psi(I - y; m)}{d(I - y)}$$

$$\frac{df(xy_1)}{dx} = - \frac{d\psi(I - |x|; n)}{d(I - |x|)} \frac{x}{|x|} f(oy_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(xy)}{\partial x} &= -f(oy) \frac{d\psi(I - |x|; n)}{d(I - |x|)} \frac{x}{|x|} \\ \frac{\partial f(xy)}{\partial y} &= - \frac{d\psi(I - y; m)}{d(I - y)} \psi(I - |x|; n) \end{aligned} \right\} \text{ per } y_1 \leq y \leq I$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(xy)}{\partial x} &= - \left\{ \frac{f(oy) - I}{f(oy_1) - I} \left[ f(oy_1) \frac{d\psi(I - |x|; n)}{d(I - |x|)} - I \right] + I \right\} \frac{x}{|x|} \\ \frac{\partial f(xy)}{\partial y} &= - \frac{f(xy_1) - I + |x|}{f(oy_1) - I} \frac{d\psi(I - y; m)}{d(I - y)} \end{aligned} \right\} \text{ per } 0 \leq y \leq y_1.$$

Sopra ogni retta  $x = \text{cost.}$   $\frac{\partial f}{\partial y}$  è nulla in tutti i punti meno che in un aggregato di misura nulla; ha quindi misura superficiale nulla l'aggregato di tutti i punti di  $\Gamma$  in cui  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ . Parimenti ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$  e  $y_1 \leq y \leq I$ . Si ha quindi:

$$\int_{\Gamma} \Delta f dx dy = \int_0^{y_1} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

Ora, per  $0 \leq y \leq y_1$ , si ha

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = I - \frac{f(oy) - I}{f(oy_1) - I} = \frac{f(oy) - f(oy_1)}{I - f(oy_1)}$$

in ogni punto, salvo che nell'aggregato di misura nulla in cui  $\frac{d\psi(I - |x|; n)}{d(I - |x|)} = \infty$ ; e poichè  $I \geq f(oy) \geq 0$  e, per  $y < y_1$ ,  $f(oy) \geq f(oy_1)$ , si ha ancora, fuori di tale aggregato,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq I$ ; onde:

$$\int_{\Gamma} \Delta f dx dy < \int_0^{y_1} \int_{-1}^{+1} dx dy = 2y_1.$$

Rendendo  $y_1$  abbastanza piccolo questo integrale diviene così piccolo a piacere.

8. Basta alterare appena la definizione della funzione  $f$  per ottenere una funzione che, ogni altra condizione restando inalterata, renda precisamente nullo l'integrale  $I$ .

Si consideri cioè, in luogo dell'unico numero  $y_1$ , una successione  $y_1, y_2, \dots$  tale che  $y_i > y_{i+1}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$ , e corrispondentemente una serie di interi  $n_1, n_2, \dots$  tali che  $n_i < n_{i+1}$  (quindi  $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$ ) e si ponga:

$$f(oy) = \psi(1 - y; m)$$

$$f(xy) = f(oy)\psi(1 - |x|; n_i) \text{ per } y_i \leq y \leq 1$$

$$f(xy) = \frac{f(oy) - f(oy_{i+1})}{f(oy_i) - f(oy_{i+1})} [f(oy_i)\psi(1 - |x|; n_i) - f(oy_{i+1})\psi(1 - |x|; n_{i+1})] \\ + f(oy_{i+1})\psi(1 - |x|; n_{i+1}) \text{ per } y_{i+1} \leq y \leq y_i.$$

$$f(xo) = 1 - |x|.$$

Le precedenti espressioni delle derivate resteranno inalterate per  $y_i \leq y \leq 1$ . Si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \left\{ \frac{f(oy) - f(oy_{i+1})}{f(oy_i) - f(oy_{i+1})} \left[ f(oy_i) \frac{d\psi(1 - |x|; n_i)}{d(1 - |x|)} - f(oy_{i+1}) \frac{d\psi(1 - |x|; n_{i+1})}{d(1 - |x|)} \right] \right. \\ \left. + f(oy_{i+1}) \frac{d\psi(1 - |x|; n_{i+1})}{d(1 - |x|)} \right\} \frac{x}{|x|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{d\psi(1 - y; m)}{d(1 - y)} \frac{f(oy_i)\psi(1 - |x|; n_i) - f(oy_{i+1})\psi(1 - |x|; n_{i+1})}{f(oy_i) - f(oy_{i+1})}$$

per  $y_{i+1} \leq y \leq y_i$ .

Su queste espressioni si possono ripetere le osservazioni precedenti, colla sola differenza che i soli valori di  $x$  per cui  $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$  in un qualunque intervallo  $y_i \dots y_{i+1}$  sono quelli dei due aggregati di misura nulla in cui

$$\frac{d\psi(1 - |x|; n_i)}{d(1 - |x|)} = \infty \quad \text{e} \quad \frac{d\psi(1 - |x|; n_{i+1})}{d(1 - |x|)} = \infty.$$

Che la funzione  $f(xy)$  ora definita soddisfi alle condizioni al contorno imposte riesce evidente quando appena si ricordi, ritornando alle notazioni del n° 6, che  $\psi(x; n)$  passa per i punti  $A_0 A_1 \dots A_n$  e col crescere di  $n$  converge uniformemente alla  $\zeta = x$ .

#### § 4.

#### La curva $c$ e il campo $\Gamma$ .

9. Supporremo che la curva  $c$  contorno di  $\Gamma$  sia convessa rispetto ai punti di un campo  $R$  interno a  $\Gamma$ , vale a dire che ogni raggio uscente da un punto di  $R$  tagli  $c$  in un sol punto (se  $c$  fosse assolutamente convessa,  $R$  potrebbe estendersi a tutto il campo  $\Gamma$ ). Potremo sempre, a piacer nostro, restringere  $R$  ad una parte soltanto dell'aggregato dei punti rispetto a cui  $c$  è convessa; si potrà quindi sempre supporre — e così si farà in seguito — che  $R$  sia un cerchio, tale che il suo contorno  $r$  non abbia alcun punto comune con  $c$ , e che  $c$  sia convesso anche rispetto ai punti di  $r$ . Chiameremo  $\rho$  il raggio di  $R$  ed  $a$  la sua area:  $a = \pi \rho^2$ . Indicheremo inoltre con  $O$  il centro di  $R$  e con  $p$  e con  $q$  la distanza minima e massima di  $O$  da  $c$  (sarà  $\rho < p \leq q$ ).

Dimostreremo tosto che  $c$ , senza possedere necessariamente tangente, in ogni punto,

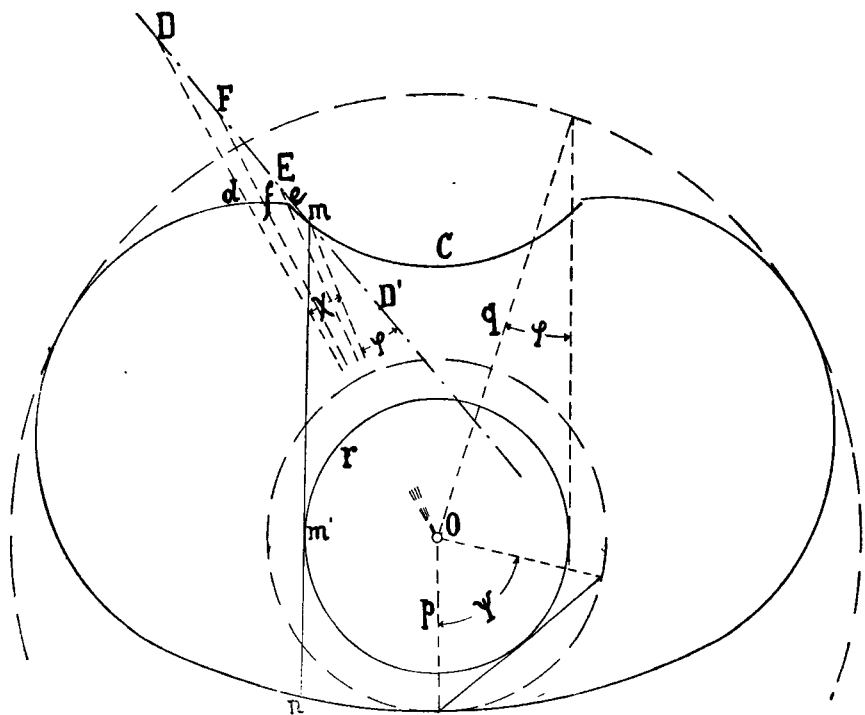
è però rettificabile e quindi quadrabile \*). Ne indicheremo con  $L$  la lunghezza, con  $\Lambda$  la massima corda. Infine indicheremo con  $A$  l'area di  $\Gamma$ .

10. Occorre pel seguito porre in evidenza alcune proprietà che conseguono alla curva  $c$  dalle ipotesi precedenti.

Si ponga ancora

$$\varphi = \text{arc sen } \frac{p}{q}, \quad \psi = 2 \text{ arc cos } \frac{p}{p}.$$

Sia  $m$  un punto qualunque di  $c$ ,  $mm'$  una tangente da  $m$  a  $r$ ,  $m'$  il suo punto di contatto (Fig. 2):  $m'$  appartenendo ad  $r$ , il raggio  $m'm$  non taglia ulteriormente  $c$ ,



(Fig. 2).

ma il suo prolungamento la taglia una ed una sola volta in un punto  $n$ . Sarà

$$m'mO \geq \varphi, \quad mOn \geq \psi$$

e la congiungente  $m$  con un punto di  $c$  interno all'angolo  $mOn$  forma col raggio  $m'm$  un angolo  $> m'mO$  \*\*).

\*) LEBESGUE, *Leçons*, p. 60.

\*\*.) Infatti il raggio  $Om$  esce dal campo  $\Gamma$  in  $m$  e resta in seguito interamente esterno al campo: un raggio che da  $m$  progetti un punto di  $c$  che stia rispetto alla  $mm'$  dalla stessa parte di questo prolungamento di  $Om$  forma quindi col raggio  $m'm$  un angolo maggiore di quello dei raggi  $Om$ ,  $m'm$ , angolo opposto al vertice e quindi uguale a  $m'mO$ .

Si fissi ora un angolo  $\chi$  tale che

$$\chi < \varphi \quad \text{e} \quad \chi \leq \psi.$$

Dimostriamo che ogni arco di  $c$  interno ad un angolo di vertice  $O$  ed uguale a  $\chi$  è rettificabile; ne seguirà che la curva  $c$  si può spezzare in un numero finito  $\left(\leq \left[\frac{2\pi}{\chi}\right] + 1\right)$  di archi rettificabili ed è quindi rettificabile essa stessa.

Sia infatti ancora  $m$  un punto qualunque di  $c$ . Per  $m$  si conduca un raggio  $mD$  tale che  $DmO = \pi - \varphi$ ; il prolungamento  $mD'$  di  $mD$  ha almeno un punto appartenente ad  $R$ ; quindi  $mD$  non taglia ulteriormente la curva  $c$  e tutti i punti di  $c$  che stanno rispetto alla  $mO$  dalla parte di  $mD$  sono interni all'angolo  $DmO$ . Si costruisca quindi, da questa parte di  $mO$ , l'angolo  $mOD = \chi$ ;  $OD$  taglierà  $mD$  in  $D$  e  $c$  in un punto  $d$  fra  $O$  e  $D$ . Siano ora  $e, f$  due punti qualunque dell'arco  $md$  di  $c$ ,  $E, F$  le intersezioni di  $Oe, Of$  con  $mD$ . Poichè  $eOf < \chi < \psi$ , la retta  $ef$  non incontra  $r$ ; perciò gli angoli  $Oef, Ofe$  sono entrambi  $> \varphi$ , mentre quello degli angoli  $OEF, OFE$  che è acuto è  $< \varphi$  (per essere  $OmD' = \varphi$ ): tenendo presente che  $OE > Oe, OF > Of$  si conclude che  $FE > ef$ . Quindi la lunghezza di ogni poligonale inscritta nell'arco  $md$  è  $< MD$  ed è così  $\leq MD$  il limite superiore di queste poligonali. Onde la rettificabilità dell'arco \*).

11. Sia ancora  $e$  un punto qualunque dell'arco  $md$ ; si ha da quanto precede

$$\text{lungh. arco } me \leq mE \leq Om \frac{\text{sen } mOe}{\text{sen}(\varphi - \chi)},$$

d'altronde

$$\text{corda } me \geq Om \text{sen } mOe;$$

quindi

$$\frac{\text{arco } me}{\text{corda } me} \leq \frac{1}{\text{sen}(\varphi - \chi)};$$

e questa relazione avrà luogo tosto che  $mOe \leq \chi$  e quindi certo quando

$$\text{corda } me \leq p \text{sen } \chi.$$

Si può dunque enunciare che per ogni arco di  $c$  la cui corda sia sufficientemente piccola ( $\leq p \text{sen } \chi$ ) il rapporto dell'arco alla corda è sempre minore di un numero fisso

$$h = \frac{1}{\text{sen}(\varphi - \chi)}.$$

12. Non occorre insistere sull'osservazione già fatta (n° 9) che esistono curve  $c$ , convesse rispetto a un campo interno e non aventi tangente in un aggregato denso di punti. Il principio della condensazione delle singolarità dà per es. un modo evidente

\*) Con considerazioni analoghe a quelle del n° 12 questo risultato avrebbe potuto farsi discendere dalle proposizioni del LEBESGUE richiamate in tal n°, o, più direttamente, dalle proposizioni dello SCHEEFFER in *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven* [Acta Mathematica, V (1884), pp. 49-82], part. Teor. IV. Per la sua semplicità, e per ottenerne ancora la proposizione del n° 11 si è creduto utile conservare questa dimostrazione.



di costruirne. Geometricamente si può offrire una semplice costruzione d'una tal curva per es. come segue:

In un cerchio di raggio  $\sigma$  si iscriva un ottagono regolare e per successiva bisezione di archi si considerino ancora i poligoni iscritti di 16, 32, ... lati. Su ogni raggio, a partire dalla circonferenza si porti un segmento uguale alla somma dei segmenti (in numero finito o infinito) intercetti su di esso fra la circonferenza e i lati dei nominati poligoni. Il luogo degli estremi di quei segmenti è una curva  $c$ , convessa certo rispetto a tutti i punti di un cerchio concentrico e di raggio  $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$  e non ammettente tangente nei punti che, rispetto al raggio che dal centro proietta un vertice dell'ottagono, hanno anomalia della forma  $k \frac{\pi}{2^n}$  ( $k$  ed  $n$  interi).

Deve però notarsi che l'aggregato dei punti di  $c$  in cui non esiste la tangente ha misura lineare nulla (cfr. n° 3). Si conducano infatti le tangenti a  $r$  parallele ad una direzione arbitraria  $\mu$ . Esse segheranno sopra  $c$  due archi appartenenti alla striscia compresa fra di essi. Si chiamino  $\mu$  e  $\nu$  un sistema di coordinate ad assi  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$  rispettivamente parallelo e normale alla direzione  $\mu$ : le rette  $\mu = \text{cost.}$  appartenenti alla striscia nominata intersecano uno qualunque di questi archi in uno e in un sol punto: l'arco medesimo rappresenta quindi una funzione  $\nu = f(\mu)$ ; e tal funzione è continua e a numeri derivati limitati ( $< \cot \varphi$ ). Tal funzione ha quindi derivata per ogni  $\mu$  tolti al più quelli di un aggregato di misura nulla \*). È quanto dire che sull'arco considerato l'aggregato dei punti in cui può mancare la tangente corrisponde ad un aggregato di valori di  $\mu$  di misura nulla. In conseguenza della proposizione del n° 11, il rapporto fra la misura di questo aggregato di punti, fatta lungo la curva  $c$ , e la misura dell'aggregato dei  $\mu$  corrispondenti è finito. L'aggregato di quei punti ha dunque misura nulla sull'arco considerato. Ora è chiaro che la curva  $c$  può spezzarsi in un numero finito di archi compresi ciascuno fra due tangenti a  $r$  parallele. Ne segue la proposizione enunciata.

**13.** Se in particolare si considerano i punti comuni a  $c$  e a un'altra curva  $\gamma$ , sarà naturalmente di misura nulla l'aggregato di questi punti, in cui  $c$  non ha tangente. Possiamo aggiungere che se tali punti sono in numero infinito, in essi, esclusi al più quelli di un aggregato di misura nulla,  $c$  e  $\gamma$  hanno la stessa tangente. Supponiamo, per precisare la nozione della curva  $\gamma$ , che questa abbia in ogni punto tangente unica e determinata. (L'ipotesi non ha nulla di essenziale, per es. potrebbe la  $\gamma$  essere della natura medesima della  $c$ ; però sarà quello il solo caso che si presenterà in seguito). I punti comuni a  $c$  e a  $\gamma$  si distingueranno in un aggregato numerabile  $N$  formato dagli estremi di segmenti di  $\gamma$  che non contengono punti di  $c$  e in un aggregato  $P$  formato dai punti limiti di  $N$ .  $P$  a sua volta si distinguerà in un aggregato di misura nulla  $N'$  nei cui punti  $c$  non ha tangente ed in un aggregato residuo  $T$ .  $N$  ha misura nulla, quindi anche  $N + N'$ . La tangente poi a  $c$  in un punto  $m$  qualunque di  $T$  è il limite delle

\*) LEVI, *Ricerche sulle funzioni derivate*, l. c., pag. 437; LEBESGUE, *Leçons*, l. c., p. 123.

congiungenti questo punto con una successione di punti di  $c$  che si avvicinino illimitatamente ad  $m$ . Per determinare queste rette si può quindi scegliere una successione di punti di  $N$ , e si vede, in tal forma, che quel limite sarà pure la tangente a  $\gamma$  in  $m$ . Ne risulta la proposizione enunciata.

14. Si consideri infine per ogni punto comune a  $c$  e a  $\gamma$  una retta che faccia colla tangente a  $\gamma$  in quel punto un angolo  $> \theta$ , ove  $\theta$  si fissi ad arbitrio purchè  $> 0$ ; ciascuna di queste rette potrà incontrare ulteriormente  $c$ . Detto allora  $\tau$  un numero da scegliersi a piacere, si considerino quelle rette che contengono tali altri punti di  $c$  distanti meno di  $\tau$  dal punto comune a  $c$  e a  $\gamma$  per cui passano. Tendendo  $\tau$  a 0, questo aggregato di rette tende all'aggregato di quelle fra le rette considerate che passano per un punto comune a  $c$  e a  $\gamma$  in cui  $c$  non ha tangente od ha per tangente la retta medesima (diversa quindi dalla tangente a  $\gamma$ ); quindi ad un aggregato di misura nulla. *Adunque l'aggregato dei punti comuni a  $c$  e a  $\gamma$  tali che, sopra un determinato sistema di rette per essi, ciascuna delle quali formi con  $\gamma$  angolo  $> \theta$ , esistano punti di  $c$  distanti da questi punti meno di  $\tau$  ha misura piccola a piacere, purchè si prenda  $\tau$  abbastanza piccolo.*

### § 5.

#### Un'operazione funzionale: L'operazione di media.

15. Sia  $u(xy)$  \*) una funzione definita in  $\Gamma$  e sul contorno  $c$ , limitata. Sia  $\mathfrak{M}$  il limite superiore dei suoi valori assoluti. Sul contorno  $c$  si supponga inoltre che  $u(xy)$ , considerata come funzione dell'arco  $s$ , sia continua e derivabile e la derivata sia limitata; sia  $\mathfrak{J}$  il limite superiore di  $\left| \frac{du}{ds} \right|$ . Supponiamo infine che  $u(xy)$  sia integrabile in  $\Gamma$ .

Chiameremo *funzione mediatrice della  $u$ , relativa al numero  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ )* — e la indicheremo generalmente con  $U(xy|\theta)$  — la funzione definita nel modo seguente:

Se  $P(\xi\eta)$  è un punto qualunque di  $R$  o  $r$  \*\*), siano  $\gamma_{\xi\eta\theta}$  e  $c_{\xi\eta\theta}$  le figure omotetiche di  $\Gamma$  e  $c$  rispetto al centro d'omotetia  $P$  e al rapporto  $\frac{1}{1+\theta}$ ;  $\gamma_{\xi\eta\theta}$  sarà totalmente interno a  $\Gamma$ . Si chiami  $u(xy|\xi\eta\theta)$  la funzione che in  $\gamma_{\xi\eta\theta}$  coincide colla

$$u[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)]$$

[vale a dire prende in ciascun punto il valore che  $u(xy)$  ha nel punto corrispondente per l'omotetia] e che, nella regione limitata fra i contorni  $c$  e  $c_{\xi\eta\theta}$ , prende, su ogni raggio

\*) La funzione  $u(xy)$  che qui si considera non deve, necessariamente, essere assoggettata alle condizioni del n° 4. Conserviamo però lo stesso simbolo funzionale perchè a quelle funzioni avranno nel seguito massima applicazione le considerazioni di questo §.

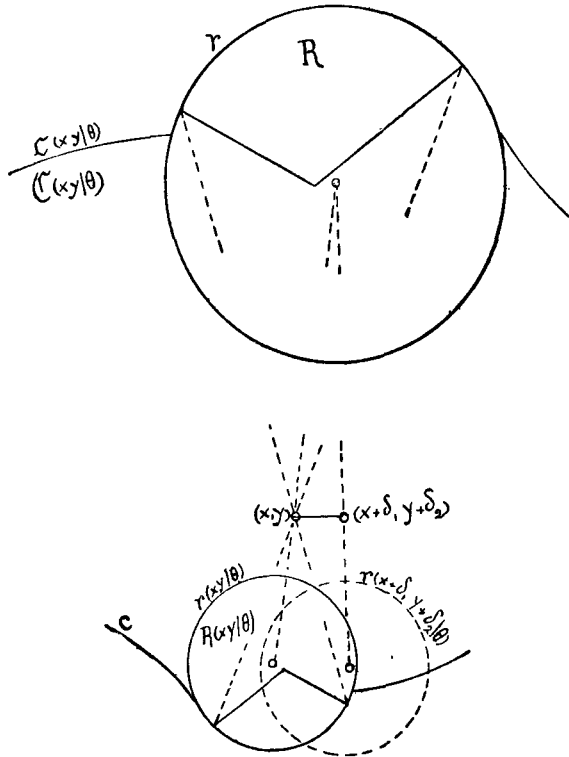
\*\*) Cfr. il n° 9 e seg. e la tavola dei segni in fine della Memoria. Avverto che, salvo dichiarazione contraria i segni conserveranno costantemente il significato che è precisato a volta a volta che si introducono e che è d'altronde ricordato nella detta tavola.

per  $P$ , il valore di  $u$  nel punto in cui questo incontra  $c$ . Si ponga infine

$$(4) \quad U(xy|\theta) = \frac{1}{a} \int_R \int u(xy|\xi\eta\theta) d\xi d\eta.$$

Sarà utile pel seguito trasformare alcun poco questa definizione:

Si consideri (Fig. 3) il campo  $\mathcal{U}(xy|\theta)$  omotetico di  $\Gamma$  rispetto al centro  $(xy)$  e al rapporto  $-\frac{1}{\theta}$ ; a seconda della posizione di  $(xy)$ ,  $R$  potrà essere totalmente interno o totalmente esterno o parte interno e parte esterno a  $\mathcal{U}(xy|\theta)$ : Si chiami generalmente  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$  la parte di  $R$  esterna a  $\mathcal{U}(xy|\theta)$ ,  $\mathfrak{B}'(xy|\theta)$  la parte interna. Se  $P(\xi\eta)$



(Fig. 3).

Per rendere possibile la rappresentazione grafica si son dovuti concretare in due archi gli aggregati dei punti comuni a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$  i quali potrebbero ben essere invece aggregati non densi. L'arco comune a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$  a sinistra rappresenta così l'aggregato che ai n° 22 b) e 22 c) è indicato con  $r_2$ , l'arco analogo a destra  $r_3$ , i due archi che completano  $r(xy|\theta)$  costituiscono  $r_1$ , l'uno interno a  $\Gamma$ , l'altro esterno.

appartiene a  $\mathfrak{B}'(xy|\theta)$ , l'omotetico di  $(xy)$  rispetto a  $P$  e al rapporto  $\frac{1}{1+\theta}$  appartiene a  $\Gamma$ ; si ha quindi

$$[(\xi\eta) \text{ in } \mathfrak{B}'(xy|\theta)], \quad u(xy|\xi\eta\theta) = u[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)].$$

Se invece  $P(\xi\eta)$  appartiene a  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$ ,  $u(xy|\xi\eta\theta)$  è definito (secondo quanto

sopra si disse) dai valori di  $u$  sul contorno; esso non può quindi porsi sotto forma più semplice; ma il punto  $[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)]$  risulta esterno al campo  $\Gamma$ ; se quindi *si conviene di continuare la funzione  $u(xy)$  fuori di  $\Gamma$  con valori nulli*, si potrà porre

$$[(\xi \eta) \text{ in } \mathfrak{B}(xy|\theta)], \quad u(xy|\xi \eta \theta) = u[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)] + u(xy|\xi \eta \theta).$$

Immaginando quindi l'integrazione indicata nella (4) spezzata in due parti, l'una relativa a  $(\xi \eta)$  nel campo  $\mathfrak{B}'(xy|\theta)$ , l'altra relativa a  $(\xi \eta)$  in  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$ , si ha

$$U(xy|\theta) = \frac{1}{a} \left\{ \int_R \int u[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)] d\xi d\eta + \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} u(xy|\xi \eta \theta) d\xi d\eta \right\}.$$

Si chiami ancora  $R(xy|\theta)$  il cerchio omotetico di  $R$  con centro d'omotetia  $(xy)$  e rapporto  $-\theta$ ,  $r(xy|\theta)$  la sua circonferenza; quando  $(\xi \eta)$  percorre  $R$  il punto  $[x + \theta(x - \xi), y + \theta(y - \eta)]$  percorre  $R(xy|\theta)$ . Il primo integrale della somma può allora scriversi

$$\frac{1}{\theta^2} \int \int_{R(xy|\theta)} u(x' y') dx' dy' = \frac{1}{\theta^2} \int \int_{R(xy|\theta)} u(\mu \nu) d\mu d\nu,$$

dove  $x'$  e  $y'$  non sono che nuovi simboli sostituiti ad  $x$  e  $y$  come variabili d'integrazione, e  $\mu, \nu$  rappresentano le variabili relative ad un qualunque sistema di coordinate ortogonali, purchè  $u(\mu \nu)$  rappresenti la trasformata di  $u(xy)$  nelle nuove variabili.

La precedente espressione si scrive quindi ancora

$$(5) \quad U(xy|\theta) = \frac{1}{\theta^2 a} \int \int_{R(xy|\theta)} u(\mu \nu) d\mu d\nu + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} u(xy|\xi \eta \theta) d\xi d\eta.$$

Si chiami  $\Gamma_\theta$  il campo comune a tutti i campi  $\gamma_{\xi \eta \theta}$  quando  $P(\xi \eta)$  percorre  $R$ ; esso non sarà illusorio tosto che  $\theta$  è sufficientemente piccolo e, tendendo  $\theta$  a 0, tende a coincidere con  $\Gamma$ . Il caso in cui  $(xy)$  appartenga a  $\Gamma_\theta$  è perciò particolarmente importante; allora il campo  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$  si annulla e si ha

$$(5, \Gamma_\theta) \quad U(xy|\theta) = \frac{1}{\theta^2 a} \int \int_{R(xy|\theta)} u(\mu \nu) d\mu d\nu.$$

**16.** Dalla formula (4) si ha

$$|U(xy|\theta)| \leq \frac{1}{a} \int \int_R |u(xy|\xi \eta \theta)| d\xi d\eta \leq \frac{\mathfrak{M}}{a} \int \int_R d\xi d\eta = \mathfrak{M},$$

vale a dire *la funzione mediatrice è anch'essa limitata ed il limite superiore del suo modulo è minore o uguale al limite superiore di  $|u|$ .*

Inoltre, quando  $(xy)$  sta su  $c$ ,  $u(xy|\xi \eta \theta) = u(xy)$ ; quindi

$$U(xy|\theta) = \frac{1}{a} u(xy) \int \int_R d\xi d\eta = u(xy),$$

vale a dire *la funzione mediatrice assume sul contorno i valori medesimi della funzione  $u$ .*

Vogliamo aggiungere che la funzione mediatrice  $U(xy|\theta)$  è continua in  $\Gamma$  e su  $c$  quand'anche non sia continua la funzione  $u$ .

17. Per ragione di semplicità considereremo prima i valori di  $(xy)$  interni a  $\Gamma_\theta$ : esiste allora un intorno di  $(xy)$  di cui tutti i punti appartengono a  $\Gamma_\theta$ ; sia  $(x+\delta_1, y+\delta_2)$  un punto di un tale intorno. Le aree  $R(xy|\theta)$ ,  $R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$  sono fra loro congruenti per traslazione secondo il vettore  $[xy] \rightarrow [x+\delta_1(1+\theta), y+\delta_2(1+\theta)]$ . Se  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono sufficientemente piccoli, esse hanno quindi una parte comune, e ciascuna di esse contiene inoltre una parte non comune all'altra; chiameremo  $Z$  e  $Z'$  queste due ultime parti; esse sono congruenti e la loro superficie è evidentemente  $< 2\theta\rho\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}(1+\theta)$ . Se quindi si pone  $\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2} = \delta$ , sarà, per la (5),  $\Gamma_\theta$ ,

$$(a) \left\{ \begin{aligned} |U(xy|\theta) - U(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)| &= \frac{1}{\theta^2 a} \left| \int_Z \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{Z'} \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right| \\ &\leq \frac{2M}{\theta^2 a} \int_Z \int d\mu d\nu < \frac{4M\rho}{a} \frac{1+\theta}{\theta} \delta. \end{aligned} \right.$$

Segue che ( $\theta$  restando fisso)  $|U(xy|\theta) - U(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)|$  tende uniformemente a 0 con  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

18. Un po' meno semplice è il calcolo quando i punti  $(xy)$ ,  $(x+\delta_1, y+\delta_2)$  non appartengono a  $\Gamma_\theta$ . Ricorreremo allora alla formola generale (5) ed avremo

$$\begin{aligned} |U(xy|\theta) - U(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)| &\leq \frac{1}{\theta^2 a} \left| \int_{R(xy|\theta)} \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right| \\ &+ \frac{1}{a} \left| \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} \int u(xy|\xi, \eta\theta) d\xi d\eta - \int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \int u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi, \eta\theta) d\xi d\eta \right|. \end{aligned}$$

La prima differenza è quella stessa che è stata considerata nel n° prec. Si ottiene quindi

$$(b) \quad \frac{1}{\theta^2 a} \left| \int_{R(xy|\theta)} \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \int u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right| < \frac{4M\rho}{a} \frac{1+\theta}{\theta} \delta.$$

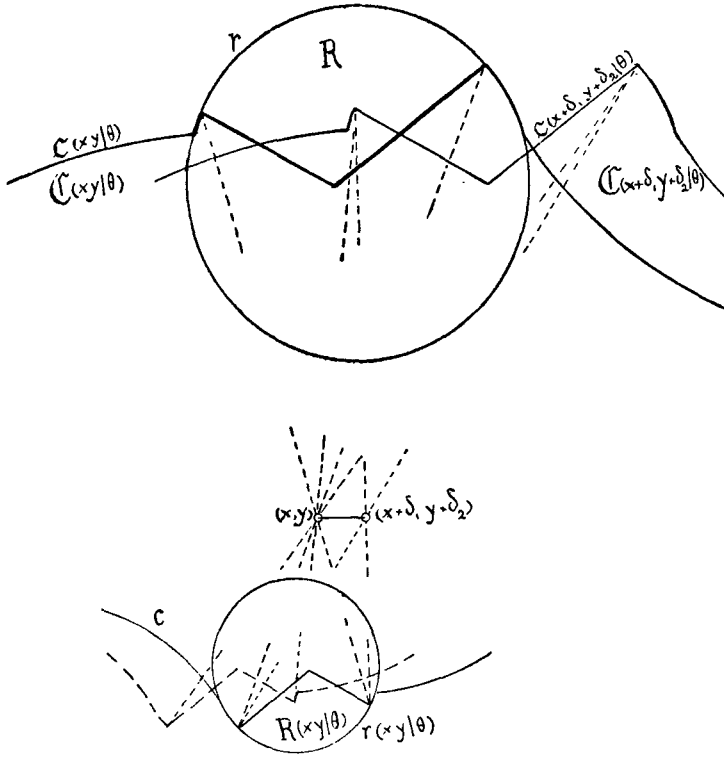
Le aree  $\mathfrak{R}(xy|\theta)$  e  $\mathfrak{R}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$  sono segate in  $R$  da due linee  $c(xy|\theta)$ ,  $c(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$  [omotetiche di  $c$  rispetto ai centri  $(xy)$ ,  $(x+\delta_1, y+\delta_2)$  e al rapporto  $-\frac{1}{\theta}$ ] fra loro congruenti per una traslazione secondo il vettore

$$[xy] \rightarrow \left[ x + \delta_1 \frac{1+\theta}{\theta}, y + \delta_2 \frac{1+\theta}{\theta} \right]$$

(cfr. la Fig. 4) \*); esse hanno quindi una parte comune che chiameremo  $\mathfrak{S}(xy|\theta)$  e una parte non comune; questa seconda si comporrà generalmente di due parti  $K_1$  e  $K_2$  appartenenti l'una a  $\mathfrak{R}(xy|\theta)$  [e a  $\mathfrak{C}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$ ], l'altra a  $\mathfrak{R}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$

\*) In questa figura le lettere  $c$  del testo sono rappresentate da lettere minuscole tedesche.

[e a  $\mathcal{C}(xy|\theta)$ ], e la loro somma sarà minore di un rettangolo di altezza  $\delta \frac{1+\theta}{\theta}$  e di



(Fig. 4).

Si ritrovano in questa figura gli aggregati  $r_2$  e  $r_3$  rappresentati dagli stessi archi che nella Fig. 3, comuni a  $c$  e a  $r(x,y|\theta)$  rispettivamente a sinistra e a destra. Il confronto fra le due figure pone in evidenza il comportamento reciproco dei due aggregati rapporto alle due integrazioni considerate ai n° 22 b) e 22 c).

base la somma delle lunghezze dei segmenti di  $c(x,y|\theta)$  interni ad  $R$  e dei segmenti di  $r$  compresi fra le due curve  $c(x,y|\theta)$  e  $c(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$ . Chiamando  $\lambda$  la parte che appartiene a  $c(x,y|\theta)$ , questa base sarà quindi  $< \lambda + 2\pi\rho$  e il contributo degli integrali estesi a  $K_1$  e  $K_2$  nel valore di  $|U(x,y|\theta) - U(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)|$  è

$$< \frac{\mathfrak{M}(\lambda + 2\pi\rho)}{a} \frac{1+\theta}{\theta} \delta.$$

Sia poi  $(\xi\eta)$  un punto della parte  $\mathfrak{S}(xy|\theta)$ ;  $u(xy|\xi\eta\theta) - u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta\theta)$  è la differenza dei valori di  $u(s)$  nelle proiezioni di  $(xy)$  e di  $(x+\delta_1, y+\delta_2)$  da  $(\xi\eta)$  sopra  $c$ . Tosto che  $\theta$  e  $\delta$  sono abbastanza piccoli, la distanza di queste proiezioni è  $< k\delta(1+\theta)$ , dove  $k$  è una costante che dipende solo dal campo  $\Gamma^*$ ; e, sempre

\*) Chiamati infatti  $A, B, P$  i punti  $(xy), (x+\delta_1, y+\delta_2), (\xi\eta)$ ,  $A'$  e  $B'$  le proiezioni di  $A$  e  $B$  da  $P$  su  $c$ , si ha:  $\text{sen } APB < \frac{AB}{AP}$ ,  $A'B' = \frac{A'P \text{ sen } APB}{\text{sen } PB'A'} < \frac{A'P}{AP} \frac{AB}{\text{sen } PB'A'}$ . Ma poichè  $P$  appartiene a

rendendo  $\delta$  sufficientemente piccolo, si può quindi supporre sufficientemente piccola la distanza di questi punti perchè si possa applicare la proposizione del n° 11, e concludere che la lunghezza dell'arco di  $c$ , compreso fra di essi, sarà  $< bk\delta(1 + \theta)$ . Quindi,

$$\text{poichè } \left| \frac{du}{ds} \right| \leq \mathfrak{A},$$

$$|u(xy|\xi\eta\theta) - u(x + \delta_1, y + \delta_2|\xi\eta\theta)| < \mathfrak{A}bk\delta(1 + \theta);$$

onde, l'area di  $\mathfrak{S}(xy|\theta)$  essendo  $\leq a$ ,

$$\left| \int \int_{\mathfrak{S}(xy|\theta)} u(xy|\xi\eta\theta) d\xi d\eta - \int \int_{\mathfrak{S}(xy|\theta)} u(x + \delta_1, y + \delta_2|\xi\eta\theta) d\xi d\eta \right| < a \mathfrak{A}bk\delta(1 + \theta).$$

Raccogliendo

$$(c) \frac{1}{a} \left| \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} u(xy|\xi\eta\theta) d\xi d\eta - \int \int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta\theta) d\xi d\eta \right| < \left[ \frac{\mathfrak{M}(\lambda + 2\pi\rho)}{a} \frac{1}{\theta} + \mathfrak{A}bk \right] \delta(1 + \theta).$$

Sulle formule (b) e (c) si vede che entrambi gli addendi in cui si è scomposto  $|U(xy|\theta) - U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)|$  tendono a 0 con  $\delta$ ; onde l'enunciata continuità di  $U(xy|\theta)$ .

19. Occorre pel seguito che si fissi un limite superiore al valore di  $\lambda$ . Osserviamo che la parte di  $e(xy|\theta)$  contenuta in  $R$  ha corda  $\leq 2\rho$ ; l'arco di  $c$  che le corrisponde nell'omotetia di centro  $(xy)$  e rapporto  $-\theta$  ha quindi una corda  $\leq 2\theta\rho$ .

Col diminuire di  $\theta$  questa corda diminuisce quindi indefinitamente: onde, per  $\theta$  sufficientemente piccolo, si potrà affermare (ricordando un'osservazione del n° 11) che tale arco di  $c$  ha lunghezza  $< 2\theta h\rho$ . La lunghezza  $\lambda$  è uguale a questa lunghezza moltiplicata per  $\frac{1}{\theta}$ ; quindi

$$\lambda < 2h\rho.$$

Per  $\theta$  sufficientemente piccolo è dunque

$$\lambda + 2\pi\rho < 2\rho(h + \pi).$$

Dopo ciò, raccogliendo i risultati di (b) e (c), si ha

$$(d) |U(xy|\theta) - U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)| < \left[ \frac{2\mathfrak{M}\rho}{a} (2 + \pi + h) \frac{1}{\theta} + \mathfrak{A}bk \right] \delta(1 + \theta).$$

$\mathfrak{B}(xy|\theta)$ ,  $\frac{A'P}{AP} < 1 + \theta$ ; d'altra parte, a causa di questa stessa relazione e dell'analoga  $\frac{B'P}{BP} < 1 + \theta$  il segmento  $AB$  è tutto esterno ad  $R$  tosto che  $\delta$  (lunghezza di  $AB$ ) e  $\theta$  sono sufficientemente piccoli (basterà per es. che  $\theta$  e  $\delta$  siano  $\leq \frac{\rho - \rho}{\rho + 3\rho}$ ), e lo stesso avviene di conseguenza del segmento  $A'B'$ . A causa della convessità di  $c$  rispetto ad ogni punto di  $R$  (compreso il contorno) l'angolo  $A'B'P$  ha perciò un minimo  $\varphi_0 > 0$ . La precedente espressione di  $A'B'$  dà allora  $A'B' < \frac{AB}{\text{sen } \varphi_0} (1 + \theta)$ , espressione identica a quella del testo, ove si ponga  $k = \frac{1}{\text{sen } \varphi_0}$  e si osservi che  $AB = \delta$ .

Tosto che  $\theta \leq \frac{1}{2}$  il moltiplicatore di  $\delta$  è minore di

$$\left[ \frac{3 \mathfrak{M}^{\rho}}{a} (2 + \pi + b) + \mathfrak{M} b k \right] \frac{1}{\theta}$$

e in questo prodotto il primo fattore è una costante numerica dipendente soltanto dal campo  $\Gamma$  e dai massimi valori di  $|u|$  e di  $\left| \frac{du}{ds} \right|$ . Indicandola con  $Q$ , le formule (a) e (d) si raccolgono nell'unica:

$$(6) \quad |U(xy|\theta) - U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)| < Q \frac{\delta}{\theta}$$

(tosto che  $\delta$  e  $\theta$  sono sufficientemente piccoli).

**20.** Se la funzione  $u(xy)$  è continua, la funzione  $U(xy|\theta)$  ha derivate determinate e finite in ogni punto di  $\Gamma$ , esclusi al più i punti del contorno.

Anche qui incominceremo a trattare il caso più semplice in cui il punto  $(xy)$  appartenga a  $\Gamma_0$ . Si riprenda la formola (5,  $\Gamma_0$ ): essa dà

$$(e) \quad \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta) - U(xy|\theta)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} \left\{ \int_{R(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)} \int u(\mu\nu) d\mu d\nu - \int_{R(xy|\theta)} \int u(\mu\nu) d\mu d\nu \right\};$$

e si suppongano le linee coordinate  $\nu = \text{cost.}$  e  $\mu = \text{cost.}$  rispettivamente parallele e perpendicolari alla direzione del vettore  $[xy] \rightarrow [x + \delta_1, y + \delta_2]$ . Ricordando che  $R(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)$  e  $R(xy|\theta)$  sono congruenti per una traslazione secondo questa stessa direzione [e di grandezza  $\delta(1 + \theta)$ ], segue che, nei due integrali doppi i limiti d'integrazione rispetto a  $\nu$  sono gli stessi: li chiameremo  $\nu_1$  e  $\nu_2$ ; e se si chiamano  $\mu_1(\nu_0)$  e  $\mu_2(\nu_0)$  i valori di  $\mu$  nei punti d'intersezione di  $r(xy|\theta)$  colla retta  $\nu = \nu_0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta) - U(xy|\theta)}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \left[ \int_{\mu_1(\nu) + \delta(1 + \theta)}^{\mu_2(\nu) + \delta(1 + \theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{\mu_1(\nu)}^{\mu_2(\nu)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \left[ \int_{\mu_2(\nu)}^{\mu_2(\nu) + \delta(1 + \theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{\mu_1(\nu)}^{\mu_1(\nu) + \delta(1 + \theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right]. \end{aligned}$$

Per la supposta continuità di  $u$  si può applicare il teorema della media: indicando con  $\theta'$  e  $\theta''$  numeri (variabili con  $\nu$  e con  $\delta$ ) compresi fra 0 e  $1 + \theta$ , si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta) - U(xy|\theta)}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [u(\mu_2 + \theta''\delta, \nu) - u(\mu_1 + \theta'\delta, \nu)] \delta(1 + \theta) d\nu \\ &= \frac{1 + \theta}{\theta^2 a} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [u(\mu_2 + \theta''\delta, \nu) - u(\mu_1 + \theta'\delta, \nu)] d\nu; \end{aligned}$$

e poichè, per la continuità della  $u$ , si può passare al limite sotto il segno d'integrazione,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta) - U(xy|\theta)}{\delta} &= \frac{1 + \theta}{\theta^2 a} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [u(\mu_2, \nu) - u(\mu_1, \nu)] d\nu \\ &= \frac{1 + \theta}{\theta^2 a} \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma, \end{aligned}$$



dove  $d\sigma$  è l'elemento d'arco sulla circonferenza  $r(xy|\theta)$ , per una conveniente scelta della direzione positiva su di essa (in modo che  $\frac{dv}{d\sigma}$  sia positivo all'uscita dall'area, negativo all'entrata).

Si ha ancora

$$\frac{dv}{d\sigma} = \frac{dx dy}{d\sigma d\mu} + \frac{dy dx}{d\sigma d\mu};$$

l'uguaglianza trovata può dunque scriversi:

$$(7) \quad \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial \mu} = \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dy}{d\sigma} d\sigma \right\} \frac{dx}{d\mu} + \left[ \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dx}{d\sigma} d\sigma \right] \frac{dy}{d\mu},$$

onde risulta la derivabilità di  $U(xy|\theta)$  rapporto a una qualsiasi direzione  $\mu$  [e la validità inoltre della relazione fondamentale (2)]. L'espressione medesima mostra che le derivate sono finite ove si tenga presente che  $|u(\lambda y)| < \mathfrak{M}$ ; e mostra anzi che, per ogni  $\theta$  fisso, esse sono limitate:

$$\left| \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial \mu} \right| < \frac{2\pi\rho \mathfrak{M}(1+\theta)}{\theta a}.$$

**21.** Meno semplice è la dimostrazione quando il punto  $(xy)$  non appartiene a  $\Gamma_0$ . Si ha allora dalla (5)

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta) - U(xy|\theta)}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{\theta^2 a} \left\{ \int_{R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(\mu\nu) d\mu d\nu - \int_{R(xy|\theta)} u(\mu\nu) d\mu d\nu \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \left\{ \int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta\theta) d\xi d\eta - \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} u(xy|\xi\eta\theta) d\xi d\eta \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Chiamiamo  $\bar{u}(xy|\xi\eta)$  la funzione di  $(\xi\eta)$  che in ogni punto  $(\xi\eta)$  di  $R$  ha il valore assegnato ad  $u$  nel punto in cui il raggio  $(\xi\eta)(xy)$  incontra la curva  $c$ . La funzione  $\bar{u}(xy|\xi\eta)$  non differisce da  $u(xy|\xi\eta\theta)$  — considerata come funzione di  $(\xi\eta)$  — nei punti di  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$  e così  $\bar{u}(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta)$  non differisce da  $u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta\theta)$  — considerata come funzione di  $(\xi\eta)$  — nei punti di  $\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)$ . Si ha allora

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta\theta) d\xi d\eta - \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} u(xy|\xi\eta\theta) d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} [\bar{u}(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta) - \bar{u}(xy|\xi\eta)] d\xi d\eta \\ &\quad + \left[ \int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \bar{u}(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta) d\xi d\eta - \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} \bar{u}(x+\delta_1, y+\delta_2|\xi\eta) d\xi d\eta \right]. \end{aligned} \right.$$

Si ponga

$$(i) \left\{ \begin{aligned} H &= \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} [\bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \zeta \eta) - \bar{u}(xy | \zeta \eta)] d\zeta d\eta, \\ K &= \int \int_{R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int \int_{R(xy|\theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu, \\ J &= \int \int_{\mathfrak{B}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\xi d\eta - \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \right.$$

La (f) diviene

$$(g) \quad \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2 | \theta) - U(xy | \theta)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{1}{\theta^2 a} K + \frac{1}{a} (H + J) \right].$$

Si chiami  $s(xy | \zeta \eta)$  l'arco di  $c$  compreso fra un'origine arbitraria e la proiezione su  $c$  di  $(xy)$  da  $(\zeta \eta)$  e si indichi con  $u(s)$  la funzione  $u$  considerata su  $c$  come funzione di  $s$ . Si ha

$$\bar{u}(xy | \xi \eta) = u[s(xy | \xi \eta)]$$

ed

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - \bar{u}(xy | \xi \eta)}{\delta} \\ &= \frac{u[s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta)] - u[s(xy | \xi \eta)]}{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(xy | \xi \eta)} \cdot \frac{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(xy | \xi \eta)}{\delta}; \end{aligned}$$

quindi, se si ammettono *per un istante* verificate facili condizioni di continuità, per cui si possano scambiare l'integrazione e il passaggio al limite,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} H = \int \int_{R(xy|\theta)} \frac{du[s(xy | \xi \eta)]}{ds} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(xy | \xi \eta)}{\delta} d\xi d\eta *).$$

D'altra parte la differenza  $K$  si trasforma come nel n° prec. fu trasformato il secondo membro della (e), e solo occorrerà qualche avvertenza (su cui tosto ritorneremo) circa la discontinuità che la funzione  $u(\mu, \nu)$  subisce nell'attraversare la curva  $c$  [poichè ora le aree  $R(x + \delta_1, y + \delta_2 | \theta)$ ,  $R(xy | \theta)$  sono parzialmente esterne a  $\Gamma$ ].

Infine, come già al n° 15, si chiamino  $\mathfrak{Q}(xy | \theta)$ ,  $\mathfrak{Q}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \theta)$  le aree omotetiche a  $\Gamma$  con centri  $(xy)$ ,  $(x + \delta_1, y + \delta_2)$  e rapporto d'omotetia  $-\frac{1}{\theta}$  (Fig. 4) e si prolunghi inoltre la funzione  $\bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta)$  nei punti  $(\xi \eta)$  fuori di  $R$  attribuendovi valori nulli; si ottiene

$$(k) \quad J = \int \int_{\mathfrak{Q}(xy|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\xi d\eta - \int \int_{\mathfrak{Q}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\xi d\eta$$

e di nuovo a questa differenza si possono applicare le trasformazioni del n° 20. Si vede

\*) Questo lim sarà completamente calcolato più sotto (n° 22 a).

così come il secondo membro della (g) tenda ad un limite col tendere di  $\delta$  a o, onde segue l'esistenza di  $\frac{\partial U(x, y | \theta)}{\partial \mu}$  (dove  $\mu$ , come al n° 20, indica una coordinata tale che le linee  $\mu = \text{cost.}$  siano le perpendicolari al vettore  $[x, y]^{-1} [x + \delta_1, y + \delta_2]$ ).

Ma, ad eliminare le restrizioni che pur si sono dovute ammettere provvisoriamente per giustificare gli accennati passaggi al limite, e a portare il dovuto rigore nelle precedenti considerazioni, occorre qualche più minuto sviluppo che sarà oggetto del n° seguente.

22 a. Riprendiamo adunque l'espressione

$$\frac{1}{\delta} H = \int \int_{\mathfrak{B}(x, y | \theta)} \frac{u[s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta)] - u[s(x, y | \xi \eta)]}{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)} \cdot \frac{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)}{\delta} d\xi d\eta.$$

Si ha anzitutto

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 = 0} \frac{u[s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta)] - u[s(x, y | \xi \eta)]}{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)} = \frac{du[s(x, y | \xi \eta)]}{ds}.$$

Si ricordi inoltre che la curva  $c$  ha tangente ovunque, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla (n° 12); questo aggregato è proiettato dal punto  $(x, y)$  secondo un'aggregato di rette i cui segmenti contenuti in  $\mathfrak{B}(x, y | \theta)$  costituiscono ancora un aggregato di misura superficiale nulla; e se si chiama  $\mathfrak{B}^*(x, y | \theta)$  ciò che si ottiene da  $\mathfrak{B}(x, y | \theta)$  sopprimendo tale aggregato, si potrà pensare l'integrale  $H$  esteso al solo campo  $\mathfrak{B}^*(x, y | \theta)$  senza alterarne il valore. Se allora si chiama  $\lambda$  la proiezione di  $(x, y)$  da  $(\xi \eta)$  su  $c$ ,  $l$  la direzione  $(x, y) \rightarrow (\xi \eta)$  e  $l_1 = l_1(\xi \eta)$ ,  $l_2 = l_2(\xi \eta)$  le lunghezze dei segmenti  $\lambda \rightarrow (\xi \eta)$  e  $(x, y) \rightarrow (\xi \eta)$  e si chiama  $t(\lambda)$  la direzione della tangente a  $c$  in  $\lambda$ , e se con  $\delta$  si indica, nonchè la lunghezza, anche la direzione del vettore  $[x, y]^{-1} [x + \delta_1, y + \delta_2]$ ,

$$\lim_{\delta_1, \delta_2 = 0} \frac{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)}{\delta} = \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen } l \delta}{\text{sen } l t} = \frac{l_2}{l_1 \text{sen } l t} \left\{ \text{sen } l x \frac{dx}{d\delta} + \cos l x \frac{dy}{d\delta} \right\}.$$

Si noti infine che  $\frac{du}{ds}$  è, per ipotesi, funzione limitata dell'arco e quindi, qualunque siano  $\xi, \eta$ ,  $\frac{u[s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta)] - u[s(x, y | \xi \eta)]}{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)}$  è funzione limitata di  $\delta_1, \delta_2$ ; che del pari, per le ipotesi fatte intorno alla curva  $c$ , il rapporto  $\frac{s(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) - s(x, y | \xi \eta)}{\delta}$  resta compreso, in tutto il campo d'integrazione, fra limiti determinati e finiti: si conclude che il  $\lim_{\delta = 0} \frac{1}{\delta} H$  si può ottenere passando al limite sotto il segno d'integrazione \*).

\*) Infatti mentre  $\delta$  tende a o, la funzione sotto il segno d'integrazione resta costantemente, in valore assoluto, inferiore ad un limite assegnabile; si può quindi applicare la proposizione dimostrata dal LEBESGUE nelle citate *Leçons*, pag. 114.

Onde

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} H &= \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du(\lambda)}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\sin l\delta}{\sin lt} d\xi d\eta \\ &= \left[ \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du(\lambda)}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\sin lx}{\sin lt} d\xi d\eta \right] \frac{dx}{d\delta} + \left[ \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du(\lambda)}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\cos lx}{\sin lt} d\xi d\eta \right] \frac{dy}{d\delta}. \end{aligned} \right.$$

22 b. Passiamo ora a considerare la differenza  $K$ ; come si è osservato al n° 21, si può su di essa operare come sul secondo membro della (e) e, conservando ai simboli i significati analoghi a quelli adottati al n° 20, si giunge così all'uguaglianza

$$\frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} K = \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} \int_{v_1}^{v_2} dv \left[ \int_{\mu_2(v)}^{\mu_2(v)+\delta(1+\theta)} u(\mu, v) d\mu dv - \int_{\mu_1(v)}^{\mu_1(v)+\delta(1+\theta)} u(\mu, v) d\mu dv \right];$$

e la sola difficoltà che si opponga a trasformare ulteriormente il 2° membro come l'espressione analoga del n° 20 consiste in ciò che la funzione  $u(\mu, v)$ , essendo per definizione nulla fuori di  $\Gamma$ , e non generalmente nulla su  $c$  ed in  $\Gamma$ , non è più continua nell'area d'integrazione costituita dalle due lunule comprese fra  $r(xy|\theta)$  e  $r(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)$ , (Fig. 3), ammettendo un salto lungo la linea  $c$ ; onde non si può senz'altro effettuare l'integrazione relativa a  $\mu$  applicando il teorema della media. Le rette  $v = \text{cost.}$  si distinguono allora in due aggregati costituiti l'uno da quelle rette che non tagliano  $c$  entro quell'area, l'altro da quelle rette che tagliano  $c$  entro essa area. Riguardo alle prime rette si ragiona (integrando rispetto a  $\mu$ ) come nel n° 20: dimostreremo che la misura dell'aggregato dei valori di  $v$  cui corrispondono le altre tende a 0 con  $\delta$ . Tale aggregato si può infatti distinguere ancora in due parti: l'una costituita da valori di  $v$  corrispondenti a punti comuni a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$ , l'altra da valori di  $v$  non corrispondenti a tali punti. Fra i primi punti possono eventualmente trovarsi i punti di contatto di  $r(xy|\theta)$  colle tangenti  $v = \text{cost.}$ ; in tale ipotesi si rinchiudano tali due punti entro segmenti di  $r(xy|\theta)$  di lunghezza totale arbitrariamente piccola  $\varepsilon$ . Esiste allora un angolo  $\alpha$  tale che tutte le rette  $v = \text{cost.}$  che incontrano  $r(xy|\theta)$  fuori di tali segmenti formano colla curva angolo  $> \alpha$ : si è mostrato (n° 14) che la misura dell'aggregato dei punti comuni a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$  per cui passano di queste rette, le quali seghino ulteriormente  $c$  ad una distanza  $< \delta$  tende a 0 con  $\delta$ . Osservando allora che  $\varepsilon$  è arbitrariamente piccolo, si conclude che tende a 0 con  $\delta$  la prima parte dell'aggregato. I valori di  $v$  della 2ª parte (cui corrispondono cioè rette  $v = \text{cost.}$  che tagliano  $c$  nel campo d'integrazione ma non passano per punti comuni a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$ ), sono interni ai segmenti complementari all'aggregato dei valori di  $v$  appartenenti ai punti comuni a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$ ; sia  $\zeta$  la lunghezza totale di questi segmenti; esiste un numero finito di essi la cui lunghezza totale è  $\zeta - \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1$ , arbitrariamente piccolo), ed entro ad essi si possono determinare altrettanti segmenti, non aventi con essi estremi comuni, la cui lunghezza totale sia  $\zeta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2$ , ancora arbitrariamente piccolo). Poichè a questi intervalli e ai loro estremi non appartengono punti comuni a  $c$  e ad  $r(xy|\theta)$ , la minima distanza fra i punti d'intersezione di  $c$  e di  $r(xy|\theta)$  colle rette  $v = \text{cost.}$  appar-

tenenti a tali intervalli ha un limite inferiore  $\sigma > 0$ ; e tosto che  $\delta(1 + \theta) < \sigma$  la misura dell'aggregato dei valori di  $v$  costituenti la 2<sup>a</sup> parte è  $< \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ; anche la misura di questa seconda parte tende dunque a 0 con  $\delta$ .

Dopo queste osservazioni il ragionamento del n° 20 permette di scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta^2 a} \left\{ \int_{R(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu - \int_{R(xy|\theta)} u(\mu, \nu) d\mu d\nu \right\} \\ &= \delta \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \int_{v_1}^{v_2} [u(\mu_2 + \theta'' \delta, \nu) - u(\mu_1 + \theta' \delta, \nu)] d\nu + \delta \chi^*), \end{aligned}$$

dove  $\chi$  tende a zero con  $\delta$ ; e tendendo  $\sigma$  a 0, le rette  $v = \text{cost.}$  sulle quali, al variare di  $\delta(1 + \theta)$  fra  $\sigma$  e 0, l'integrando del 2° membro potrebbe eventualmente subire una discontinuità, tendono ad un aggregato di misura nulla, mentre il modulo dell'integrando resta sempre  $\leq 2M$ ; si può quindi passare al limite sotto il segno d'integrazione. Onde si ha:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} K = \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \int_{v_1}^{v_2} \lim_{\delta \rightarrow 0} [u(\mu_2 + \theta'' \delta, \nu) - u(\mu_1 + \theta' \delta, \nu)] d\nu.$$

Per ottenere l'integrale scritto nel 2° membro occorrerà distinguere i punti della circonferenza  $r(xy|\theta)$  che sono interni o esterni a  $\Gamma$  da quelli che appartengono a  $c$ . Sulle rette  $v = \text{cost.}$  passanti pei primi si ha invero  $\lim_{\delta \rightarrow 0} u(\mu + \delta, \nu) = u(\mu, \nu) = u(xy)$ ; sulle rette  $v = \text{cost.}$  passanti per gli altri (da cui si deve già pensare soppresso l'aggregato di misura nulla precedentemente considerato) si ha invece  $\lim_{\delta \rightarrow 0} u(\mu + \delta, \nu) = \begin{cases} u(\mu, \nu) \\ 0 \end{cases}$  a seconda che si tende al punto considerato dall'interno dell'area  $\Gamma$  o dall'esterno. Si indichi con  $r_1$  la prima parte di  $r(xy|\theta)$ , con  $r_2$  l'aggregato dei punti di  $r(xy|\theta)$  che appartengono a  $c$  e nei quali, movendosi nella direzione  $(x + \delta_1, y + \delta_2) \rightarrow (xy)$  si esce dall'area  $\Gamma$ , e con  $r_3$  l'aggregato dei punti di  $r(xy|\theta)$  e di  $c$  nei quali, movendosi secondo tale direzione si entra in  $\Gamma$ . Si ottiene

$$(m) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\theta^2 a} K = \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r_1(xy|\theta)} u(xy) \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma + \int_{r_2(xy|\theta)} u(s) \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma \right\}.$$

\*) L'integrale qui scritto non è cioè che quello che si otterrebbe nell'ipotesi che fosse permesso applicare il teorema della media nell'integrazione rispetto a  $\mu$  su tutte le rette  $v = \text{cost.}$  per cui  $v_1 \leq v \leq v_2$ . Il fatto che per un certo aggregato di queste rette tale ipotesi non corrisponda a verità implica che l'integrale del 2° membro differisce dal primo membro per la differenza fra il contributo in esso integrale delle rette  $v = \text{cost.}$  per cui l'ipotesi non si verifica e il contributo delle stesse rette nel 1° membro. Ora si noti che l'ampiezza dell'intervallo d'integrazione rapporto a  $\mu$  è  $\delta(1 + \theta)$  e la misura (lineare) dell'aggregato dei valori eccezionali di  $v = \text{cost.}$  tende anch'essa a zero con  $\delta$ , come sopra si è dimostrato; che inoltre la funzione integrando è limitata (in valore assoluto sempre  $\leq M$ ): ciascuno di quei due contributi è dunque infinitesimo con  $\delta$  d'ordine  $> 1$ . Questo esprime il termine  $\delta \chi$  del testo.

22 c. Resta infine a considerarsi la differenza  $J$  [n° 21 (i)]:

$$(k) J = \int \int_{\mathcal{C}(xy|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \zeta \eta) d\zeta d\eta - \int \int_{\mathcal{C}(x+\delta_1, y+\delta_2|\theta)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \zeta \eta) d\zeta d\eta.$$

Trasformeremo dapprima ciascuno dei due integrali di cui essa si compone; come già nel n° 17 si chiami  $c \equiv c(xy|\theta)$  il contorno di  $\mathcal{C}(xy|\theta)$ , linea omotetica di  $c$  rispetto al centro  $(xy)$  e al rapporto d'omotetia  $-\frac{1}{\theta}$  (Fig. 3, 4)\*. Si suppongano inoltre trasformate, come negli sviluppi precedenti, le variabili d'integrazione  $\zeta \eta$  nelle nuove  $\mu, \nu$  corrispondenti a linee coordinate parallele e normali alla direzione del vettore  $[xy] \rightarrow [x + \delta_1, y + \delta_2]$ . Ciascuna retta  $\nu = \text{cost.}$  potrà segare  $c$  in un aggregato di punti, anche infinito e non numerabile; e siccome le integrazioni dei due termini della differenza  $J$  debbono estendersi alle sole aree  $\mathcal{C}(xy|\theta)$ ,  $\mathcal{C}(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)$  rispettivamente, qualche dubbio sul concetto di tali integrazioni potrebbe nascere da tali intersezioni; si noti però che, poichè  $c$  e quindi  $c$  sono rettificabili, al più sopra un'aggregato numerabile di queste rette, l'aggregato di quelle intersezioni può aver misura non nulla\*\*). Sopra ogni altra retta tale aggregato sarà chiuso non denso e di misura nulla onde l'integrazione della funzione  $\bar{u}$  rispetto a  $\mu$  si potrà ottenere integrando nei soli segmenti complementari a tale aggregato; e, scegliendo uno  $\zeta$  sufficientemente piccolo, l'integrale esteso alla  $\mu$  differisce di poco quanto si vuole da quello esteso a tutti i segmenti (in numero finito) interni a  $\mathcal{C}(xy|\theta)$  e  $\geq \zeta$ . Ne segue che l'integrale doppio esteso a  $\mathcal{C}(xy|\theta)$  si può ottenere con due successive integrazioni l'una rispetto a  $\mu$ , l'altra rispetto a  $\nu$ \*\*\*) e che, ordinati i segmenti di ciascuna retta  $\nu = \text{cost.}$

\*) Si ricordi che in queste figure il  $c$  del testo è sostituito da un  $c$  minuscolo tedesco.

\*\*) Perchè la somma delle misure di tali aggregati deve essere minore o al più uguale alla lunghezza della curva.

\*\*\*) Una minuta discussione intorno alla integrazione superficiale e alla integrazione doppia, nel senso del RIEMANN, è stata fatta dal PRINGSHEIM [*Zur Theorie des Doppel-Integrals*. München Ber., XXVIII (1898), pp. 59-74. — *Zur Theorie des Doppel-Integrals, des GREEN'schen und CAUCHY'schen Integralsatzes*. München Ber., XXIX (1899), pp. 39-62]. Dalla formula

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} f dx dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{\bar{x}_1} f dx$$

che nella 1ª Nota stabilisce, egli rileva (nella 2ª Nota, § 1) che, dall'esistenza dell'integrale doppio, segue che gli integrali semplici esistono su un aggregato denso di rette  $y = \text{cost.}$  e che gli integrali superiore ed inferiore differiscono per più di un  $\epsilon$  assegnato solo su un aggregato di rette di misura nulla nel senso di JORDAN. La formula succitata del PRINGSHEIM è stata estesa dal sig. LEBESGUE ai suoi integrali [*Intégrale*, etc., loco citato, n° 37-38, pag. 276 e seg.): si potrebbero allora ripetere le stesse osservazioni colla semplificazione che, colla definizione adottata della misura, si potrebbe senz'altro concludere che gli integrali lineari esistono sopra ogni  $y = \text{cost.}$ , tolte al più le rette di un aggregato di misura nulla (v. pure VITALI, *Sulle funzioni ad integrale nullo* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 136-141]). Fatta astrazione dall'aggregato di queste rette (il che è possibile poichè esso ha misura superficiale nulla) l'integrale d'area del LEBESGUE può dunque ottenersi sempre con due integrazioni

interni a  $\mathcal{C}(xy|\theta)$  secondo le loro lunghezze decrescenti, e detti  $\mu'_i(v)$  e  $\mu''_i(v)$  i valori di  $\mu$  negli estremi d'uno qualunque di questi segmenti,

$$\int_{\mathcal{C}(xy|\theta)} \int \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\xi d\eta = \int d\nu \sum_i \int_{\mu'_i(v)}^{\mu''_i(v)} \bar{u}(x + \delta_1, y + \delta_2 | \xi \eta) d\mu.$$

La stessa trasformazione si farà subire all'integrale sottraendo di  $J$ ; ed osservando che le curve  $c(xy|\theta)$  e  $c(x + \delta_1, y + \delta_2|\theta)$  si portano l'una sull'altra mediante una traslazione secondo le rette  $\nu = \text{cost.}$  di ampiezza  $\delta \frac{1+\theta}{\theta}$ , e ripetendo le osservazioni fatte poc'anzi per la differenza  $K$ , si ottiene infine

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} J &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int d\nu \sum_i \left\{ \int_{\mu'_i(v)}^{\mu''_i(v)} \bar{u} d\mu - \int_{\mu'_i(v) + \delta \frac{1+\theta}{\theta}}^{\mu''_i(v)} \bar{u} d\mu \right\} \\ &= \frac{1+\theta}{\theta} \int d\nu \sum_i \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \bar{u} \left( \mu'_i + \theta' \delta \frac{1+\theta}{\theta}, \nu \right) - \bar{u} \left( \mu''_i + \theta'' \delta \frac{1+\theta}{\theta}, \nu \right) \right]. \end{aligned}$$

Si deve ora passare al limite come si fece per l'espressione  $\frac{1}{\delta} K$ ; però occorre notare che, mentre allora ciascuna retta  $\nu = \text{cost.}$  segava la circonferenza  $r(xy|\theta)$  in punti estremi di segmenti interni (e esterni) ad  $R(xy|\theta)$  ed in cui la circonferenza aveva tangente ben determinata, tali condizioni si complicano qui riguardo all'intersezione delle rette  $\nu = \text{cost.}$  colla  $c(xy|\theta)$ , sia per l'eventuale mancanza di tangente determinata alla  $c$  in questi punti, sia per l'esistenza di punti fra essi che non sono estremi di segmenti interni a  $\mathcal{C}(xy|\theta)$ .

La difficoltà è più apparente che reale: si distinguano questi punti in un aggregato  $\mathfrak{A}$  di punti che sono estremi di segmenti  $\nu = \text{cost.}$  interni a  $c(xy|\theta)$  e un aggregato  $\mathfrak{B}$  di punti limiti di punti di  $\mathfrak{A}$  appartenenti alla stessa  $\nu = \text{cost.}$   $\mu'_i$  e  $\mu''_i$  saranno i valori di  $\mu$  nei soli punti di  $\mathfrak{A}$ . Osservando che, fatta al più astrazione da un aggregato di misura nulla, la curva  $c$  ha tangente in ciascuno di questi punti, l'integrale ottenuto come  $\lim_{\delta} \frac{1}{\delta} J$  può dunque scriversi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} J = \frac{1+\theta}{\theta} \int_{\mathfrak{A}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{u} \left( \mu + \delta \frac{1+\theta}{\theta}, \nu \right) \frac{d\nu}{ds} ds.$$

Di  $\mathfrak{B}$  potrà far parte un aggregato  $\mathfrak{B}''$  in cui  $c$  non ha tangente, ma tale aggregato avrà misura nulla (n° 12); nell'aggregato residuo  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}''$  (avente la stessa misura di  $\mathfrak{B}$ ),  $c$  avrà per tangente la retta  $\nu = \text{cost.}$  corrispondente, onde sarà in esso  $\frac{d\nu}{ds} = 0$ . Ne segue che, poichè la funzione  $\bar{u}$  è limitata,  $\int_{\mathfrak{B}''} \frac{d\nu}{ds} ds = 0$ , onde

successive. — Con queste osservazioni d'indole generale si potrebbero parzialmente sostituire quelle del testo, le quali però sono più espresse nel caso speciale, e permettono di restare nei confini della integrazione Riemanniana.

ancora può scriversi

$$\lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} J = \frac{1+\theta}{\theta} \int_{\sigma(xy|\theta)} \lim_{\delta=0} \bar{u} \left( \mu + \varkappa \delta \frac{1+\theta}{\theta}, \nu \right) \frac{d\nu}{ds} ds.$$

Si tenga ancora presente la relazione di omotetia fra  $c$  e  $c$  e si ricordi che  $\bar{u}$  ha nei punti di  $c$  in  $R$  o su  $r$  i medesimi valori che  $u$  nei punti corrispondenti di  $c$  [interni a  $R(xy|\theta)$  o su  $r(xy|\theta)$ ] ed è nulla nei punti rimanenti; e si distinguano i punti di  $c$  in un aggregato  $c_1$ , interno a  $R(xy|\theta)$ , nell'aggregato  $r_2$  \*) comune a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$  e tale che nei punti corrispondenti di  $c$ , muovendo nel senso dell'integrazione, si passa dall'esterno all'interno di  $\mathcal{U}(xy|\theta)$  — e nell'aggregato  $r_3$  comune a  $c$  e a  $r(xy|\theta)$  — e tale che nei punti corrispondenti di  $c$  si esce invece da  $\mathcal{U}(xy|\theta)$ . Passando al limite per  $\delta = 0$ , come già per  $\frac{1}{\delta} K$  — ed osservando che qui, sulle rette  $\nu = \text{cost.}$  passanti pei punti comuni a  $c$  e a  $r$  è  $\lim_{\delta=0} u(\mu + \varkappa \delta, \nu) = \begin{cases} u(s) \\ 0 \end{cases}$  a seconda che quei punti sono omologhi nell'omotetia a punti di  $r_3$  o a punti di  $r_2$  — si conclude allora che

$$(n) \quad \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} J = \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{c_1} u(s) \frac{d\nu}{ds} ds + \int_{r_3(xy|\theta)} u(s) \frac{d\nu}{ds} ds \right\}.$$

**23.** Sostituendo nella (g) (ove si passi al limite per  $\delta = 0$ ) le espressioni (l), (m), (n), si ottiene che, anche quando il punto  $(xy)$  non appartiene a  $\Gamma_\theta$ , esiste il  $\lim_{\delta=0} \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2 | \theta) - U(xy | \theta)}{\delta}$  e si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta=0} \frac{U(x + \delta_1, y + \delta_2 | \theta) - U(xy | \theta)}{\delta} \\ &= \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r_1(xy|\theta)} u(xy) \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u(s) \frac{d\nu}{ds} ds + \int_{r_2(xy|\theta)} u(s) \frac{d\nu}{d\sigma} d\sigma + \int_{r_3(xy|\theta)} u(s) \frac{d\nu}{ds} ds \right\} \\ & \quad + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen } l\delta}{\text{sen } lt} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Si ricordi infine che, se la curva  $c$  ha infiniti punti comuni con una curva  $r$  avente tangente ovunque, essa ha in questi tangente coincidente colla tangente a  $r$ , fatta al più astrazione dai punti di un aggregato di misura nulla (n° 13): ne risulta che nei punti di  $r_3(xy|\theta)$  (a meno di un aggregato di misura nulla)  $\frac{d\nu}{ds} = \frac{d\nu}{d\sigma}$ , onde la pre-

\*) Gli aggregati  $r_2$  e  $r_3$  sono quegli stessi che si sono presentati nella trasformazione di  $\lim_{\delta} \frac{1}{\delta} K$ .



cedente espressione può scriversi

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial \mu} &= \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dy}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u(s) \frac{dy}{ds} ds \right\} + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} l \delta}{\text{sen} l t} d\xi d\eta \\ &= \left[ \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dy}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u(s) \frac{dy}{ds} ds \right\} + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} l x}{\text{sen} l t} d\xi d\eta \right] \frac{dx}{d\mu} \\ &+ \left[ \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \left\{ \int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dx}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u(s) \frac{dx}{ds} ds \right\} + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} l y}{\text{sen} l t} d\xi d\eta \right] \frac{dy}{d\mu}. \end{aligned} \right.$$

Ne risulta, come già dalla formula (7) per il caso in cui  $(xy)$  fosse in  $\Gamma_\theta$ , che la funzione  $U(xy|\theta)$  ammette in ogni punto di  $\Gamma$  le derivate in ogni direzione, legate dalla relazione fondamentale (2). E dall'espressione ottenuta per queste derivate, tenendo presente che si suppone ovunque  $|u| \leq \mathfrak{M}$  e  $\left| \frac{du(s)}{ds} \right| \leq \mathfrak{J}$ , che inoltre

$$\text{lungh. } c_1 = \lambda \theta < 2 \theta h \rho \quad (\text{n}^\circ 19)$$

$$\frac{l_2}{l_1} \leq 1 + \theta \quad [\text{n}^\circ 22 a \text{ e } 18 (2^\circ \text{ nota})]$$

$$\left| \frac{\text{sen } l \delta}{\text{sen } l t} \right| \leq \frac{1}{\text{sen } l t} \leq \frac{1}{\text{sen } \varphi_0} = k \quad [\text{n}^\circ 22, a) \text{ e } 18 (2^\circ \text{ nota})],$$

si deduce immediatamente che queste derivate sono anche finite e, per ogni  $\theta$  fisso, sufficientemente piccolo, limitate; precisamente:

$$(9) \quad \left| \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial \mu} \right| < 2 \frac{(1+\theta) \mathfrak{M} \rho}{\theta a} (\pi + h) + (1+\theta) \mathfrak{J} k.$$

È appena da osservare che la formula (8) comprende la (7) come caso particolare.

**24.** Un'ulteriore trasformazione può ottenersi se si ammette che la funzione  $u$  soddisfi alle condizioni del n° 4, e se si fa coincidere la direzione  $\mu$  colla  $x$  (o colla  $y$ ). Alla formula (7) può allora sostituirsi quest'altra

$$(7') \quad \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} = \frac{1+\theta}{\theta^2 a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} dx' dy'.$$

Infatti per le ipotesi del n° 4, per ogni  $y$  fisso — a meno di un aggregato di misura nulla — esiste  $\int \frac{\partial u}{\partial x} dx$  ed è

$$(3) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = u(x_2, y) - u(x_1, y).$$

Ne segue \*)

$$\int \int \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} [u(x_2, y) - u(x_1, y)] dy.$$

\*) Cfr. LEBESGUE, *Intégrale*, etc., loco citato, n° 37-38, pag. 276 e seg.

Ora nel n° 20 si ottenne precisamente l'espressione del 2° membro come valore di  $\frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x}$ . Risulta così dimostrata la (7').

Si ponga ancora nella formula (7')

$$(p) \quad x' = x + \theta(x - \xi), \quad y' = y + \theta(y - \eta),$$

onde [dovendosi qui considerare  $x$  ed  $y$  fissi, e  $(x'y')$  mobile in  $R(xy|\theta)$  mentre  $(\xi, \eta)$  percorre  $R$ ],

$$dx' = -\theta d\xi, \quad dy' = -\theta d\eta.$$

Si potrà allora scriverla

$$(7'') \quad \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} = \frac{1 + \theta}{a} \int \int_R \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} d\xi d\eta.$$

25. Una trasformazione analoga si può far subire alla formola (8). Infatti, si riconosce immediatamente che

$$\int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dv}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u \frac{dv}{ds} ds = \int dv [u(\mu_2, v) - u(\mu_1, v)],$$

dove  $\mu_1$  e  $\mu_2$  sono i valori di  $\mu$  negli estremi dei segmenti della retta  $v = \text{cost.}$  interni all'area comune a  $R(xy|\theta)$  e a  $\Gamma$  e dove l'integrazione si estende a tutti i valori di  $v$  per cui tali segmenti esistono. Invero, all'infuori di tali estremi, la linea contorno di quest'area può aver comune con la totalità di queste linee solo un aggregato di punti di misura nulla ed un aggregato nei punti del quale  $\frac{dv}{ds} = 0$  [cfr. la fine del n° 22 c].

Se allora, come nel n° prec., si fanno coincidere le direzioni  $\mu$  e  $x$ ,  $v$  e  $y$ , si avrà ancora, in modo simile

$$\int_{r(xy|\theta)} u(xy) \frac{dv}{d\sigma} d\sigma + \int_{c_1} u \frac{dv}{ds} ds = \int \int_{R(xy|\theta)} \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} dx' dy',$$

dove si deve ricordare che nei punti di  $R(xy|\theta)$  esterni a  $\Gamma$  si è convenuto di porre  $u(xy) = 0$  e quindi  $\frac{\partial u(xy)}{\partial x} = 0$ .

La formola (8) diviene allora

$$(8') \quad \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} = \frac{1 + \theta}{\theta^2 a} \int \int_{R(xy|\theta)} \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} dx' dy' + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen } lx}{\text{sen } lt} d\xi d\eta.$$

Il primo integrale si può ancora trasformare come nella formola (7'') mediante la posizione (p). L'integrale trasformato si potrà ancora intendere esteso al campo  $R$ ; ma in  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$  l'integrando sarà nullo, quindi l'effettiva integrazione si estende al solo campo  $R - \mathfrak{B}(xy|\theta)$ . Si ottiene così la formola

$$(8'') \quad \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} = \frac{1 + \theta}{a} \int \int_{R - \mathfrak{B}(xy|\theta)} \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} d\xi d\eta + \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen } lx}{\text{sen } lt} d\xi d\eta.$$

26. Per le successive applicazioni è utile osservare come la formola (7') si ottenga (a meno del fattore  $1 + \theta$ ) mutando nella (5,  $\Gamma_0$ )  $U$  e  $u$  in  $\frac{\partial U}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial x'}$ , ed analogamente la (8') si ottenga dalla (5) — con una lieve differenza nella definizione della funzione che compare nel secondo integrale. Possiamo riassumere queste osservazioni dicendo che, ammessa l'esistenza di  $\frac{\partial u}{\partial x'}$ ,  $\frac{1}{1 + \theta} \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x}$  è una *funzione mediatrice* di  $\frac{\partial u}{\partial x}$  relativa al numero  $\theta$ , e ne è precisamente la *funzione mediatrice definita al n° 15*, almeno entro al campo  $\Gamma_0$ . Si possono adunque applicare ad essa le proposizioni ottenute nei n° prec.; in particolare potremo affermare che  $\frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x}$  è *funzione continua almeno in ogni punto del campo  $\Gamma_0$* . Una minuta analisi del 2° integrale della (8'), analoga alla discussione del n° 18 — ma con qualche maggior particolare — permetterebbe di togliere anche quest'ultima restrizione, sostituendola con: *in ogni punto interno a  $\Gamma$  (non del contorno)*: ma nessuna opportunità essa avrebbe per il seguito.

## § 6.

L'integrale  $I[U(xy|\theta)]$ .

27. LEMMA. — Occorrerà più volte pel seguito la proposizione seguente: *Se  $C$  è un aggregato qualsiasi di misura  $A$ , in cui sia definita una funzione  $f$ , e se  $d\gamma$  è l'elemento differenziale di  $C$ , dall'esistenza di  $\int_C f^2 d\gamma$  segue l'esistenza di  $\int_C |f| d\gamma$  e si ha*

$$\left(\int_C |f| d\gamma\right)^2 \leq A \int_C f^2 d\gamma.$$

Dimostreremo la proposizione per gl'integrali del LEBESGUE che sono qui realmente i più generali \*). Si immagini scomposto l'intervallo di variabilità di  $|f|$  in una serie di intervalli parziali di ampiezza  $\leq \varepsilon$  mediante i numeri  $m_i (\geq 0)$  tali che  $m_i < m_{i+1}$ , e si chiami  $\alpha_i$  la misura dell'aggregato dei punti di  $C$  in cui  $m_i^2 \leq f^2 < m_{i+1}^2$ , e quindi  $m_i \leq |f| < m_{i+1}$ : si ha, per definizione

$$\int_C f^2 d\gamma = \lim_{\varepsilon=0} \sum m_i^2 \alpha_i = \lim_{\varepsilon=0} L_\varepsilon,$$

$$\int_C |f| d\gamma = \lim_{\varepsilon=0} \sum m_i \alpha_i = \lim_{\varepsilon=0} J_\varepsilon,$$

$$\sum \alpha_i = A.$$

Osservando che  $m_i < m_i^2$  tosto che  $m_i > 1$ , si vede che ogni termine della seconda somma è minore del corrispondente della prima ovvero della terza: dalla convergenza di queste segue quindi la convergenza della seconda e l'esistenza dell'integrale  $\int_C |f| d\gamma$ .

\*) Poichè si tratta qui di integrali di funzioni positive, e quindi assolutamente integrabili.

Se poi nelle somme  $L_\varepsilon$ ,  $J_\varepsilon$  si considerano i coefficienti  $\alpha_i$  costanti, si vede, per note regole, che, per un determinato valore di  $L_\varepsilon$ ,  $J_\varepsilon$  è massimo quando  $m_i = \text{cost.} = \sqrt{\frac{L_\varepsilon}{A}}$ . Si ha dunque sempre

$$J_\varepsilon \leq A \sqrt{\frac{L_\varepsilon}{A}} = \sqrt{A L_\varepsilon};$$

onde, passando al limite per  $\varepsilon = 0$ , la proposizione enunciata.

Evidentemente *se anche  $f$  è integrabile in  $C$ , pel che (a causa dell'integrabilità assoluta) basta che sia misurabile \*)*, si ha pure

$$\left( \int_C f d\gamma \right)^2 \leq \left( \int_C |f| d\gamma \right)^2 \leq A \int_C f^2 d\gamma.$$

28. Dalle formole (7''), (8'') si deduce, a causa del LEMMA precedente,

$$(\text{in } \Gamma_\theta) \quad \left[ \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} \right]^2 = \left( \frac{1+\theta}{a} \right)^2 \left[ \int_R \int \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} d\xi d\eta \right]^2 \leq \frac{(1+\theta)^2}{a} \int_R \int \left[ \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} \right]^2 d\xi d\eta,$$

$$(\text{in } \Gamma - \Gamma_\theta) \quad \left[ \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} \right]^2 = \left( \frac{1+\theta}{a} \right)^2 \left[ \int_{R - \mathfrak{B}(xy|\theta)} \int \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} d\xi d\eta + \frac{1}{1+\theta} \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \int \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} lx}{\text{sen} lt} d\xi d\eta \right]^2$$

$$\leq \frac{(1+\theta)^2}{a} \left\{ \int_{R - \mathfrak{B}(xy|\theta)} \int \left[ \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'} \right]^2 d\xi d\eta + \frac{1}{(1+\theta)^2} \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \int \left( \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} lx}{\text{sen} lt} \right)^2 d\xi d\eta \right\} **).$$

Si considerino, con queste, le relazioni analoghe ottenute scambiando  $x$  ed  $y$ ,  $x'$  ed  $y'$ ; si osservi inoltre una volta ancora che il primo integrale della 2<sup>a</sup> formola si può indifferentemente considerare esteso a  $R - \mathfrak{B}(xy|\theta)$  o a tutto  $R$ ; si otterrà

$$(q) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_\Gamma \int \Delta U(xy|\theta) dx dy &= \int_\Gamma \int \left\{ \left[ \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial U(xy|\theta)}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy \\ &\leq \frac{(1+\theta)^2}{a} \int_\Gamma \int dx dy \int_R \int \Delta u(x'y') d\xi d\eta + \frac{1}{a} \int_{\Gamma - \Gamma_\theta} \int dx dy \int_{\mathfrak{B}^*(xy|\theta)} \int \left( \frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^2 lt} d\xi d\eta. \end{aligned} \right.$$

Consideriamo separatamente i due termini del 2° membro.

Nel 1° i limiti dei due integrali sono costanti: si può dunque invertire l'ordine delle due integrazioni. Se allora si osserva che, per  $\xi$ ,  $\eta$  costanti, le (p) danno

$$dx = \frac{1}{1+\theta} dx', \quad dy = \frac{1}{1+\theta} dy'$$

\*) L'ipotesi dell'integrabilità e quindi della misurabilità di  $f^2$  ci dice che è misurabile l'aggregato degli  $x$  per cui  $m_i \leq |f(x)| < m_{i+1}$ , ma non perciò che siano separatamente misurabili i due aggregati di cui esso si compone per cui  $m_i \leq f(x) < m_{i+1}$ , —  $m_i \geq f(x) > -m_{i+1}$ .

\*\*) Per giustificare questo passaggio si osservi che la somma dei due integrali si può considerare come un integrale unico esteso all'area totale  $R$  e relativo a una funzione che in  $R - \mathfrak{B}(xy|\theta)$  assuma i valori di  $\frac{\partial u(x'y')}{\partial x'}$ , in  $\mathfrak{B}^*(xy|\theta)$  assuma i valori di  $\frac{du}{ds} \frac{l_2}{l_1} \frac{\text{sen} lx}{\text{sen} lt}$  e in  $\mathfrak{B}(xy|\theta) - \mathfrak{B}^*(xy|\theta)$  assuma valori finiti arbitrari, per es. zero.

e se si indica con  $\Gamma(\xi \eta)$  l'area trasformata di  $\Gamma$  nel piano  $(x' y')$  per la trasformazione  $(p)$ , si ha

$$\frac{(1 + \theta)^2}{a} \int_{\Gamma} d x d y \int_R \Delta u(x' y') d \xi d \eta = \frac{1}{a} \int_R d \xi d \eta \int_{\Gamma(\xi \eta)} \Delta u(x' y') d x' d y'.$$

Ora nei punti esterni a  $\Gamma$ ,  $\Delta u(x' y') = 0$ . Quindi

$$(r) \quad \int_{\Gamma(\xi \eta)} \Delta u(x' y') d x' d y' \leq \int_{\Gamma} \Delta u(x y) d x d y;$$

così

$$\frac{(1 + \theta)^2}{a} \int_{\Gamma} d x d y \int_R \Delta u(x' y') d \xi d \eta \leq \frac{1}{a} \int_R d \xi d \eta \int_{\Gamma} \Delta u(x y) d x d y,$$

cioè

$$\leq \int_{\Gamma} \Delta u(x y) d x d y.$$

Nel 2° integrale si osservi che

$$\left| \frac{d u}{d s} \right| \leq \mathfrak{A}, \quad \frac{l_2}{l_1} \leq 1 + \theta, \quad \left| \frac{1}{\operatorname{sen} l t} \right| \leq k^*);$$

risulta

$$\int_{\mathfrak{B}^*(x y \theta)} \left( \frac{d u}{d s} \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 l t} d \xi d \eta \leq (1 + \theta)^2 \mathfrak{A}^2 k^2 \int_R d \xi d \eta = (1 + \theta)^2 a \mathfrak{A}^2 k^2.$$

D'altronde  $\Gamma - \Gamma_\theta$  è una corona in cui il contorno di maggior lunghezza è  $c$ , e la cui altezza è  $< \Lambda \theta$ : la sua area è quindi  $< L \Lambda \theta$ . Dunque:

$$(s) \quad \frac{1}{a} \int_{\Gamma - \Gamma_\theta} d x d y \int_{\mathfrak{B}^*(x y \theta)} \left( \frac{d u}{d s} \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 l t} d \xi d \eta < \theta (1 + \theta)^2 L \Lambda \mathfrak{A}^2 k^2.$$

Per brevità, porremo in seguito

$$4 L \Lambda \mathfrak{A}^2 k^2 = T.$$

Poichè  $\theta < 1$ , il secondo membro della (s) sarà  $< \theta T$ , e raccogliendo dalle (q),

(r), (s) si avrà

$$(9) \quad I[U(x y | \theta)] < I[u(x y)] + \theta T.$$

### § 7.

#### Alcune proposizioni ausiliarie.

29. La considerazione delle funzioni mediatrici permette le seguenti osservazioni immediate:

Sul contorno  $c$  di  $\Gamma$  sia assegnata una funzione continua  $u(s)$  dell'arco  $s$ , limitata, derivabile e a derivata limitata: sia cioè  $|u(s)| \leq \mathfrak{M}$ ,  $\left| \frac{d u(s)}{d s} \right| \leq \mathfrak{A}$ . Esistono allora fun-

\*) Cfr. n° 22 a e la definizione di  $k$  al n° 18 (nota 2°).

zioni definite in ogni punto di  $\Gamma$ , limitate e continue in  $\Gamma$  e sul contorno, assumenti al contorno i valori di  $u(s)$ , e derivabili in ogni punto di  $\Gamma$ , con derivata limitata. Per costruire una tal funzione basterà partire da una funzione  $v$  uguale a  $u(s)$  su  $c$  e arbitraria in  $\Gamma$ , purchè limitata, per es. assumente in ogni punto di  $\Gamma$  (non di  $c$ ) un valore costante di modulo  $\leq \mathfrak{M}$ . La funzione mediatrice di  $v$  relativa ad un  $\theta$  arbitrario sarà funzione continua in  $\Gamma$  e sul contorno, assumendo sul contorno i valori di  $u(s)$ , e sarà costantemente in valore assoluto  $\leq \mathfrak{M}$  (n° 16, 18). Della funzione ottenuta si formi ancora la funzione mediatrice relativa ad un  $\theta$  arbitrario; si otterrà così una funzione che, alle nominate proprietà, aggiungerà la derivabilità in ogni direzione e in ogni punto del campo, che avrà derivate limitate (n° 20, 23).

Ha dunque senso la considerazione del campo funzionale  $\{u\}$  definito al n° 4, coi valori assegnati della funzione  $u(s)$ . Si chiami  $d$  il limite inferiore dei valori di  $I(u)$  calcolati per tutte le funzioni di  $\{u\}$ . Per una funzione qualunque del campo potremo porre

$$I(u) = d + \varepsilon \quad \text{e sarà} \quad \varepsilon \geq 0.$$

Ricordando che, se  $\chi = \text{cost.}$ , è  $\int \int_{\Gamma} \Delta \chi dx dy = 0$  in ogni campo, potremo sempre, per un'osservazione fatta al n° 1, supporre le funzioni di  $\{u\}$  limitate, e in valore assoluto costantemente  $\leq \mathfrak{M}$ .

Occorre che sulle funzioni del campo  $\{u\}$  dimostriamo alcune proposizioni preliminari.

**30. LEMMA I.** — *Sia  $u$  una funzione qualunque dell'aggregato  $\{u\}$ , tale quindi che*

$$\int \int_{\Gamma} \Delta u dx dy = d + \varepsilon \quad (\varepsilon \geq 0),$$

*e sia  $\zeta$  una funzione la quale soddisfi alle condizioni di continuità e derivabilità imposte al n° 4 alle funzioni  $u$ , e che si annulli al contorno  $c$  di  $\Gamma$  e sia*

$$\int \int_{\Gamma} \Delta \zeta dx dy = e \quad (e > 0).$$

*Sarà \*)*

$$\left| \int \int_{\Gamma} \nabla(\zeta u) dx dy \right| \leq \sqrt{e\varepsilon}.$$

Se  $g$  è una costante arbitraria, la funzione  $u - g\zeta$  appartiene infatti ancora all'aggregato  $\{u\}$ . Si deve quindi avere

$$\int \int_{\Gamma} \Delta(u - g\zeta) dx dy \geq d,$$

ossia

$$\int \int_{\Gamma} \Delta u dx dy - 2g \int \int_{\Gamma} \nabla(\zeta u) dx dy + g^2 \int \int_{\Gamma} \Delta \zeta dx dy = d + \varepsilon + g^2 e - 2g \int \int_{\Gamma} \nabla(\zeta u) dx dy \geq d.$$

\*) Ponendo, secondo l'uso,  $\nabla(uv) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$ .

Si assuma ora

$$g = \frac{\int_{\Gamma} \int \nabla(\zeta u) dx dy}{\dots}$$

La precedente disuguaglianza diverrà

$$d + \varepsilon - \frac{1}{e} \left( \int_{\Gamma} \int \nabla(\zeta u) dx dy \right)^2 \geq d,$$

onde

$$\left( \int_{\Gamma} \int \nabla(\zeta u) dx dy \right)^2 \leq e \varepsilon,$$

che equivale alla disuguaglianza enunciata.

COROLLARIO. — Se del numero  $e$  si conosce solo un limite superiore  $e'$ , sarà evidentemente  $e \varepsilon \leq e' \varepsilon$ , onde si può affermare che, restando immutate le altre ipotesi, se

$$\int_{\Gamma} \int \Delta \zeta dx dy \leq e',$$

sarà pure

$$\left| \int_{\Gamma} \int \nabla(\zeta u) dx dy \right| \leq \sqrt{e' \varepsilon}.$$

31. LEMMA II. — Se  $u$  ed  $u'$  sono due funzioni dell'aggregato  $\{u\}$  e se precisamente

$$\int_{\Gamma} \int \Delta u dx dy = d + \varepsilon, \quad \int_{\Gamma} \int \Delta u' dx dy = d + \varepsilon', \quad \varepsilon > \varepsilon' > 0,$$

e se si pone indifferentemente

$$m = u - u' \quad \text{ovvero} \quad m = |u - u'|$$

e se  $\eta$  è il maggiore dei numeri  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon - \varepsilon'$ , sarà

$$\int_{\Gamma} \int \Delta m dx dy < 6 \eta.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \int (\Delta u - \Delta u') dx dy &= \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u + u') dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \int \Delta(u - u') dx dy + 2 \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u') dx dy, \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma} \int \Delta(u - u') dx dy = \varepsilon - \varepsilon' - 2 \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u') dx dy \leq \varepsilon - \varepsilon' + 2 \left| \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u') dx dy \right|.$$

Si ponga allora, per brevità,

$$\left| \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u') dx dy \right| = i,$$

onde

$$\int_{\Gamma} \int \Delta(u - u') dx dy \leq \varepsilon - \varepsilon' + 2i,$$

e si osservi che  $u - u'$  soddisfa alle condizioni imposte a  $\zeta$  nel LEMMA precedente: applicando il LEMMA medesimo si avrà

$$\left| \int_{\Gamma} \int \nabla(u - u', u') dx dy \right| \leq \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon' + 2i)\varepsilon'},$$

ossia

$$i^2 \leq (\varepsilon - \varepsilon')\varepsilon' + 2i\varepsilon' \leq \eta^2 + 2i\eta,$$

onde

$$i \leq \eta(\sqrt{2} + 1),$$

e quindi

$$\int_{\Gamma} \int \Delta(u - u') dx dy \leq \eta(3 + 2\sqrt{2}) < 6\eta.$$

Si osservi infine che  $\Delta|u - u'| \leq \Delta(u - u')$  \*). Si concluderà la disuguaglianza affermata.

**32.** Si supponga in particolare che le funzioni,  $u$ ,  $u'$  ammettano derivate in tutte le direzioni, legate alle derivate secondo  $x$  ed  $y$  dalla formola fondamentale

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x\lambda) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(y\lambda);$$

è noto allora che, se  $\mu$  e  $\nu$  sono due direzioni ortogonali qualunque, posto

$$\Delta_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^2,$$

si ha

$$\Delta_{\mu\nu} m = \Delta_{xy} m,$$

onde

$$\int_{\Gamma} \int \Delta_{\mu\nu} m d\mu d\nu = \int_{\Gamma} \int \Delta_{xy} m dx dy.$$

Sarà allora

$$\int_{\Gamma} \int \Delta_{\mu\nu} m d\mu d\nu < 6\eta.$$

Scomponendo l'integrale di  $\Delta_{\mu\nu} m$  nella somma dei due integrali relativi ai due ad-

\*) È anzi costantemente  $\Delta|u - u'| = \Delta(u - u')$  fatta al più astrazione dei punti in cui  $u - u' = 0$ . In questi punti è, rapporto a una qualunque variabile  $\omega$ ,  $\frac{\partial|u - u'|}{\partial \omega} \leq \frac{\partial(u - u')}{\partial \omega}$ , onde  $\Delta|u - u'| \leq \Delta(u - u')$ , il che giustifica l'affermazione del testo. Si può aggiungere che sarà  $\Delta|u - u'| < \Delta(u - u')$  sempre e solo quando non sia  $\Delta(u - u') = 0$ : ma si potrebbe osservare che l'aggregato dei punti in cui  $u - u' = 0$  e  $\Delta(u - u') \neq 0$  ha misura superficiale nulla, onde può esser trascurato nella formazione dell'integrale. Si ha quindi effettivamente  $\int_{\Gamma} \int \Delta|u - u'| dx dy = \int_{\Gamma} \int \Delta(u - u') dx dy$ . È chiaro però che questo ulteriore risultato è privo d'importanza agli scopi del testo.



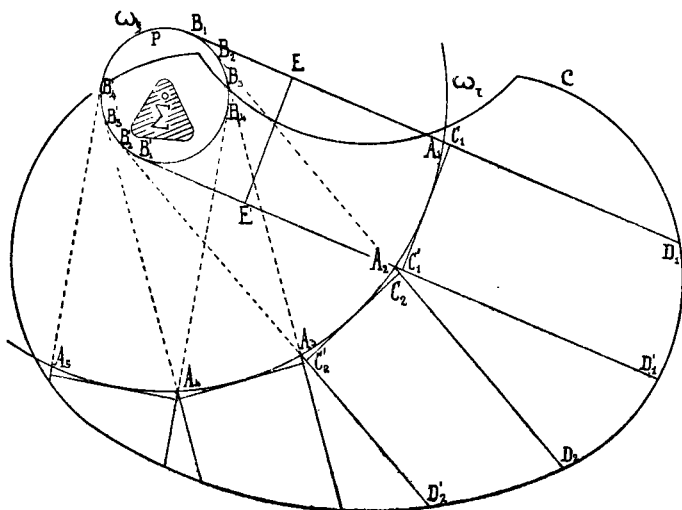
dendi di  $\Delta_{\mu\nu} m$ , entrambi necessariamente positivi, si ottiene quindi ancora

$$(10) \quad \int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu < 6\eta.$$

33. In questo numero e nei due successivi fisseremo per la funzione  $m$  il significato  $|u - u'|$ .

Vogliamo dedurre dal LEMMA precedente una notevole limitazione pel valore di  $\int_{\Sigma} m d\mu d\nu$  dove  $\Sigma$  è un'area contenuta in  $\Gamma$ .

Si chiami  $\xi$  la lunghezza della massima dimensione dell'area  $\Sigma$  (Fig. 5). Centro in



(Fig. 5).

un punto qualunque  $\Omega$  di  $\Sigma$  si descriva una circonferenza  $\omega_{\xi}$  di raggio  $\xi$  ed una seconda circonferenza  $\omega_{\tau}$  di raggio  $\tau = \sqrt[3]{\xi}$ ;  $\Sigma$  è tutta contenuta in  $\omega_{\xi}$ .

Supporremo che sia costantemente

$$(a) \quad \xi < \left( \frac{\rho}{2q} \right)^3 \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{4q^2 - 3\rho^2}{4q^2 + 3\rho^2} \right)^{\frac{3}{2}} < 1 \quad \text{e} \quad \xi < \frac{1}{2\sqrt{2}} \rho^3.$$

Sarà allora

$$\tau > \xi \quad \text{e} \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{2}} \rho,$$

e quindi  $\omega_{\xi}$  sarà interna a  $\omega_{\tau}$  e la circonferenza  $\omega_{\tau}$  possiederà un arco continuo di ampiezza  $\geq 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho}{q}$  tutto interno a  $\Gamma$  e tale che è ancora contenuto in  $\Gamma$  l'arco concentrico e compreso fra gli stessi raggi, avente per raggio  $\sqrt{\tau^2 + \xi^2} < \tau\sqrt{2}$  \*). Chiameremo  $\alpha$  quest'arco di  $\omega_{\tau}$ , e la sua ampiezza.

\*) Si consideri infatti la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $p$  e si chiami  $\varpi$ : essa è tutta interna a  $\Gamma$ . Si supponga anzitutto  $\Omega$  fuori di  $\varpi$  o su  $\varpi$ ; siano  $t_1, t_2$  le due tangenti da  $\Omega$  al cerchio di cen-

Da un estremo  $A_1$  di  $\alpha$  si conduca la tangente  $A_1 B_1$  a  $\omega_\xi$  che lascia  $\omega_\xi$  e  $\alpha$  dalla stessa parte; si conduca la tangente a  $\omega_\xi$  parallela a questa e sia  $B'_1 A_2$ . Avvenendo che essa seghi  $\alpha$  in un punto  $A_2$ , si conduca da  $A_2$  la seconda tangente ad  $\omega_\xi$  e sia  $A_2 B_2$ . Ad essa si conduca ancora la parallela tangente a  $\omega_\xi$  e sia  $B'_2 A_3$ ; e sia  $A_3$  l'eventuale punto d'intersezione di questa con  $\alpha$ . Si prosegua in questa costruzione finchè si ottengono punti  $A_i$  interni ad  $\alpha$ . Sia  $A_{n+1}$  l'ultimo di essi. Siano  $B_1 B_2 B_3 \dots B_n B'_1 B'_2 \dots B'_n$  rispettivamente i punti di contatto delle tangenti considerate con  $\omega_\xi$ . Ciascuno degli archi  $A_i A_{i+1}$  avrà ampiezza  $> \frac{\alpha}{n+1}$  e quindi lunghezza  $> \tau \frac{\alpha}{n+1}$ . Si consideri allora il triangolo isoscele  $\Omega A_i A_{i+1}$  e il triangolo simile limitato dalle  $\Omega A_i$ ,  $\Omega A_{i+1}$  e dalla tangente  $C_i C'_i$  all'arco  $A_i A_{i+1}$  nel suo punto medio: essi sono simili, e se  $b$  è la base del secondo si ha

$$b > \text{lungh. arco } A_i A_{i+1} > \tau \frac{\alpha}{n+1}$$

$$b : \text{corda } A_i A_{i+1} = \tau : \sqrt{\tau^2 - \xi^2}.$$

Ma corda  $A_i A_{i+1} = 2\xi$ ; dunque

$$\frac{2\xi\tau}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} > \tau \frac{\alpha}{n+1} \quad \text{ossia} \quad n > \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\tau^2}{\xi^2} - 1} - 1,$$

e quindi, per la 1<sup>a</sup> delle (a) e ricordando che  $\alpha > \sqrt{3} \frac{\rho}{q}$ ,

$$(b) \quad n > \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{q^2} \sqrt[3]{\frac{1}{\xi^2}}.$$

Le tangenti a  $\omega_\tau$  nei punti medi degli archi  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_3$ ,  $\dots$ ,  $A_n A_{n+1}$  incontrino rispettivamente le  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B'_1$  in  $C_1$ ,  $C'_1$ ;  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B'_2$  in  $C_2$ ,  $C'_2$ ;  $\dots$ . I punti  $C_1 C'_1 C_2 C'_2 \dots$  stanno sopra una circonferenza concentrica a  $\omega_\xi$  e  $\omega_\tau$ , e di raggio  $\sqrt{\tau^2 + \xi^2}$ , e quindi (per le ipotesi fatte relativamente ad  $\alpha$ ) sono interni a  $\Gamma$ . Si chiamino  $D_1 D'_1 D_2 D'_2 \dots$  rispettivamente i punti d'incontro dei raggi  $B_1 C_1$ ,  $B'_1 C'_1$ ,  $B_2 C_2$ ,  $B'_2 C'_2 \dots$  con  $c$ , più prossimi a  $C_1 C'_1 C_2 \dots$  fuori dei segmenti  $B_1 C_1$ ,  $B'_1 C'_1$ ,  $\dots$ , e si chiamino  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\dots$ ,  $\sigma_n$

tro  $O$  e raggio  $\frac{\sqrt{3}}{2} \rho$ ; è  $O\Omega < q$  onde  $\text{ang. } t_1 t_2 > 2 \text{ arc sen } \frac{\rho}{q}$ . Inoltre ciascun raggio  $l$  uscente da  $\Omega$  e appartenente all'angolo  $t_1 t_2$  non può incontrare  $c$  internamente ai segmenti compresi fra  $\Omega$  e le sue intersezioni con  $\omega$ .

Il raggio  $l'$ , uscente da  $O$ , parallelo ed ugualmente diretto a un tale raggio  $l$  di ang.  $t_1 t_2$  incontri  $\omega$  in  $X'$ ; sia  $X$  il punto d'incontro di  $l$  colla parallela per  $X'$  alla  $O\Omega$ . Il punto  $X$  è compreso fra  $\Omega$  e le intersezioni di  $l$  con  $\omega$  e si ha d'altronde  $\Omega X = p$ . Ne segue che un punto di  $l$  distante da  $\Omega$  per un segmento  $\leq \tau\sqrt{2} < p$  è interno a  $\Gamma$ , ed è quindi tutto interno a  $\Gamma$  un arco di centro  $\Omega$  e raggio  $\leq \tau\sqrt{2}$ , contenuto in  $t_1 t_2$ .

Se poi il punto  $\Omega$  è interno a  $\omega$ , le osservazioni ora fatte si potranno ripetere inalterate, purchè alle tangenti  $t_1$ ,  $t_2$  si sostituiscano i raggi uscenti da  $\Omega$  e paralleli ed ugualmente diretti alle tangenti ad  $r$  da un punto  $\Omega'$  del raggio  $O\Omega$  non più interno a  $\omega$ .

le aree  $C_1 D_1 D'_1 C'_1$ ,  $C_2 D_2 D'_2 C'_2$ , ... limitate dai segmenti rettilinei quali  $C_i D_i$ ,  $C'_i D'_i$ ,  $C_i C'_i$ , e dagli archi di  $c$  quale  $D_i D'_i$ . Si chiami infine  $\sigma$  l'area compresa fra la poligonale  $B_1 C_1 C'_1 A_2 C_2 C'_2 A_3 \dots C_n B'_n$  e l'arco  $B_1 P B'_n$  di  $\omega_\xi$ , la quale contiene nel suo interno  $\omega_\xi$  e quindi  $\Sigma$ .

Si ponga infine

$$\int_{\sigma} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu = \zeta, \quad \int_{\sigma_i} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu = \zeta_i,$$

dove  $m$  è la funzione già considerata nei n° precedenti, estesa con valori nulli fuori di  $\Gamma$  qualora l'area  $\sigma$  uscisse di  $\Gamma$ .

In forza della (10) si ha allora

$$\zeta + \sum \zeta_i \leq \int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu < 6\eta,$$

onde

$$\sum \zeta_i < 6\eta - \zeta.$$

Fra le aree  $\sigma_i$  ne esiste quindi una almeno, sia  $\sigma_j$ , tale che

$$\zeta_j \leq \frac{\sum \zeta_i}{n} < \frac{6\eta - \zeta}{n},$$

ossia, per la (b),

$$\int_{\sigma_j} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu < \frac{4}{3} \frac{q^2}{\rho^2} (6\eta - \zeta) \sqrt[3]{\xi^2}.$$

Osservando che l'area di  $\sigma_j$  è  $< 2\Lambda \xi$  segue finalmente (n° 27)

$$\int_{\sigma_j} \int \frac{\partial m}{\partial \mu} d\mu d\nu \leq \sqrt{2\Lambda \xi} \int_{\sigma_j} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu < \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{q}{\rho} \sqrt{6\eta - \zeta} \sqrt{2\Lambda} \sqrt[3]{\xi^2}.$$

Fin qui le coordinate  $\mu$ ,  $\nu$  sono rimaste indeterminate; se ora si assumono le direzioni  $\mu = \text{cost.}$ ,  $\nu = \text{cost.}$  parallele rispettivamente alla retta  $C_j C'_j$  e alle  $B_j C_j$ ,  $B'_j C'_j$ , e si effettua nel 1° membro l'integrazione rispetto a  $\mu$ , tenendo presente che, sull'arco  $D_j D'_j$ ,  $m = 0$ , la precedente disuguaglianza dà

$$(c) \quad \left| \int_{C_j C'_j} m d\nu \right| < \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{q}{\rho} \sqrt{6\eta - \zeta} \sqrt{2\Lambda} \sqrt[3]{\xi^2}.$$

34. Nell'area  $B_j C_j C'_j B'_j P B_j$  compresa fra i segmenti  $B_j C_j$ ,  $C_j C'_j$ ,  $C'_j B'_j$  e l'arco  $B_j P B'_j$  di  $\omega_\xi$ , includente  $\omega_\xi$  nel suo interno, si consideri un segmento  $EE'$  parallelo a  $C_j C'_j$  e limitato al contorno dell'area. Si supponga dapprima che i punti  $E$  ed  $E'$  appartengano ai lati  $B_j C_j$ ,  $B'_j C'_j$ ; il rettangolo  $EC_j C'_j E'$  è interno a  $\sigma$ ; quindi

$$\int_{EC_j C'_j E'} \int \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\nu \leq \zeta,$$

ed osservando che l'area di  $EC_j C'_j E'$  è  $\leq 2\xi\tau < 2\zeta(\tau + \xi) = 2\zeta(\xi + \sqrt[3]{\xi})$ ,

$$\int_{EC_j C'_j E'} \frac{\partial m}{\partial \mu} d\mu d\nu < \sqrt{2\zeta\xi(\xi + \sqrt[3]{\xi})};$$

e supponendo gli assi  $\mu, \nu$  orientati come alla fine del n° precedente, e integrando rispetto a  $\mu$ ,

$$\left| \int_{EE'} m d\nu - \int_{C_j C'_j} m d\nu \right| < \sqrt{2\zeta\xi(\xi + \sqrt[3]{\xi})}.$$

Quindi infine, in forza della (c)

$$\left| \int_{EE'} m d\nu \right| < \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{q}{\rho} \sqrt{6\eta - \zeta} \sqrt{2\Lambda} \sqrt[6]{\xi^5} + \sqrt{2\zeta} \sqrt{\xi(\xi + \sqrt[3]{\xi})}.$$

$\frac{q}{\rho}$ ,  $\Lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  essendo costanti, il secondo membro è massimo quando

$$\sqrt{\frac{6\eta - \zeta}{\zeta}} = \frac{2q\sqrt[6]{\xi^5}\sqrt{\Lambda}}{\rho\sqrt{3\xi(\xi + \sqrt[3]{\xi})}},$$

e tal massimo è

$$2\sqrt{3\eta} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{q^2}{\rho^2} \Lambda \sqrt[3]{\xi^5} + \xi^2 + \sqrt[3]{\xi^7}},$$

e quindi, poichè  $\zeta < 1$ , è in ogni caso

$$\left| \int_{EE'} m d\nu \right| < \frac{2}{\rho} \sqrt{(4q^2\Lambda + 6\rho^2)\eta} \sqrt[3]{\xi^2}.$$

La stessa disuguaglianza sussiste evidentemente qualora i punti  $E, E'$  stiano sull'arco  $B_j P B'_j$ : basterà per es. condurre per  $E$  ed  $E'$  le parallele a  $B_j C_j, B'_j C'_j$  le quali incontreranno  $C_j C'_j$  in due punti  $\gamma, \gamma'$ ; il rettangolo  $E\gamma\gamma'E'$  è interno all'area  $EC_j C'_j E'$ ; l'  $\int_{E\gamma\gamma'E'} \left(\frac{\partial m}{\partial \mu}\right)^2 d\mu d\nu$  è quindi ancora  $< \zeta$ ; e poichè  $m$  è sempre  $\geq 0$ ,

$\left| \int_{\gamma\gamma'} m d\mu \right| \leq \left| \int_{C_j C'_j} m d\mu \right|$ ; si potrà quindi ripetere per il rettangolo  $E\gamma\gamma'E'$  il precedente ragionamento.

Si ponga, per brevità,

$$\frac{2}{\rho} \sqrt{4q^2\Lambda + 6\rho^2} = K$$

costante, dipendente soltanto dal campo d'integrazione; se  $ee'$  è un segmento qualunque contenuto in  $EE'$ , tenendo presente che  $m \geq 0$  si avrà ancora

$$\left| \int_{ee'} m d\nu \right| < K\sqrt{\eta} \sqrt[3]{\xi^2}.$$

Se quindi si pensa di effettuare l'  $\int_{\Sigma} m d\mu d\nu$  integrando dapprima rispetto a  $\nu$  (e

cioè su segmenti analoghi all' $ee'$  ora nominato), poi rispetto a  $\mu$ , e si chiama  $\beta$  il limite inferiore dei valori di  $\mu$  nell'area  $\Sigma$ , si ha:

$$(11) \quad \int \int_{\Sigma} m d\mu d\nu < K\sqrt{\eta} \sqrt[3]{\xi^2} \int_{\beta}^{\beta+\xi} d\mu = K\sqrt{\eta} \sqrt[3]{\xi^3}.$$

35. La limitazione trovata riceve immediata applicazione alla valutazione della differenza  $|U(xy|\theta) - U'(xy|\theta)|$ , dove, conformemente alle notazioni del n° 15,  $U$  e  $U'$  sono le funzioni mediatrici rispettivamente di  $u$  e  $u'$  relative al numero  $\theta$ . La formola (5) (n° 15) dà infatti:

$$\begin{aligned} U(xy|\theta) - U'(xy|\theta) &= \frac{1}{\theta^2 a} \int \int_{R(xy|\theta)} [u(\mu\nu) - u'(\mu\nu)] d\mu d\nu \\ &+ \frac{1}{a} \int \int_{\mathfrak{B}(xy|\theta)} [u(xy|\xi\eta\theta) - u'(xy|\xi\eta\theta)] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Ma per  $(\xi\eta)$  in  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$ ,  $u(xy|\xi\eta\theta) = u'(xy|\xi\eta\theta)$ ; il secondo integrale è dunque nullo. Si ha quindi

$$|U(xy|\theta) - U'(xy|\theta)| \leq \frac{1}{\theta^2 a} \int \int_{R(xy|\theta)} m d\mu d\nu.$$

Per applicare la formola (11) si dovrà considerare l'area  $R(xy|\theta)$  come la  $\Sigma$  dei n° precî; nè alla possibilità di far ciò potrà nascer dubbio per l'eventualità che possa  $R(xy|\theta)$  uscire fuori di  $\Gamma$ , poichè, esternamente a  $\Gamma$ ,  $u(xy) = u'(xy) = m = 0$ , onde l'integrazione si estende di fatto alla sola area contenuta in  $\Gamma$ . Per ottenere un cerchio  $\omega_{\xi}$  in cui  $R(xy|\theta)$  sia contenuto basterà assumere  $\xi \geq \rho\theta$ ; si faccia inoltre in modo che  $\xi \leq 2\rho\theta$ : e le limitazioni (a) saranno allora soddisfatte tosto che

$$\theta < \frac{1}{16} \frac{\rho^2}{q^3} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{4q^2 - 3\rho^2}{4q^2 + 3\rho^2} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ e } \theta < \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\rho^3}{\rho}.$$

In tali ipotesi si ha quindi

$$(12) \quad |U(xy|\theta) - U'(xy|\theta)| < \frac{K}{\theta^2 a} \sqrt{\eta} \sqrt[3]{32\rho^3\theta^3} = \frac{K\sqrt[3]{32\rho^5}}{a} \sqrt{\eta} \sqrt[3]{\frac{1}{\theta}}.$$

## § 8.

### Determinazione di una serie di funzioni avente per limite la funzione minimizzante.

36. Di tutte le funzioni di  $\{u\}$  si immaginino formate tutte le funzioni mediatrici relative a tutti i possibili valori di  $\theta$ ; si otterrà un aggregato di funzioni  $\{U\}$  contenuto in  $\{u\}$  e tale che il limite inferiore dei valori dell'integrale di DIRICHLET esteso a  $\Gamma$ , calcolato per tutte queste funzioni è ancora  $d$ .

La formola (9) (n° 28) mostra infatti che, se  $I(u) = d + \varepsilon$ , e  $\theta$  è sufficiente-

mente piccolo,

$$(a) \quad I[U(xy|\theta)] < d + \varepsilon + T\theta,$$

dove  $T$  è una costante, dipendente soltanto dal campo e dai valori assegnati al contorno. Quindi

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \theta=0}} I[U(xy|\theta)] = d.$$

Tutte le funzioni  $U$  ammettono ( $n^i$  20 e 23) derivate in ogni punto di  $\Gamma$  e rispetto ad ogni direzione, soggette alla relazione fondamentale

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(\lambda x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(\lambda y).$$

Se quindi si scelgono le funzioni  $u, u'$  nell'aggregato  $\{U\}$  saranno valide tutte le conclusioni del § precedente.

Fra le funzioni di  $\{U\}$  se ne scelga una successione  $U_1 U_2 \dots$  tale che  $\lim_{i=\infty} I(U_i) = d$ , e sia

$$I(U_i) = d + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i.$$

A ciascuna funzione  $U_i$  si faccia corrispondere un numero  $\theta_i$ , di cui disporremo in seguito convenientemente, e che assoggettiamo per ora alle sole condizioni

$$\theta_{i+1} < \theta_i, \quad \lim_{i=\infty} \theta_i = 0.$$

Si chiami  $v_i$  la funzione mediatrice di  $U_i$  relativa al numero  $\theta_i$ . Sarà evidentemente ancora  $\lim_{i=\infty} I(v_i) = d$ .

Vogliamo dimostrare, che mediante una scelta conveniente dei numeri  $\theta_i$  la successione delle funzioni  $v_i$  tende uniformemente ad un limite. Mostreremo in seguito (§ 9) che tal limite ammette le derivate prime e che per esso l'integrale di DIRICHLET assume il valor minimo  $d$ .

**37.** Chiameremo ancora, per brevità,  $V_i(xy|\theta_i)$  la funzione mediatrice di  $v_i$  relativa al numero  $\theta_i$ . Si ha evidentemente

$$(b) \quad |v_i(xy) - v_{i+1}(xy)| \leq |v_i(xy) - V_i(xy|\theta_{i+1})| + |V_i(xy|\theta_{i+1}) - v_{i+1}(xy)|.$$

Ora, posto

$$I(v_i) = d + \eta_i,$$

si ha per la (a)

$$\eta_i < \varepsilon_i + \theta_i T.$$

Il numero  $\varepsilon_i + \theta_i T$  è quindi maggiore di ciascuno dei numeri  $\eta_i, \varepsilon_{i+1}, |\eta_i - \varepsilon_{i+1}|$ , onde può fungere come il numero  $\eta$  del § prec., per la (12), applicata alle funzioni mediatrici di  $v_i$  e di  $U_{i+1}$  relative al numero  $\theta_{i+1}$ ; si ha allora

$$(c) \quad |V_i(xy|\theta_{i+1}) - v_{i+1}(xy)| < \frac{K \sqrt[3]{32 \rho^3}}{a} \sqrt[3]{\varepsilon_i + \theta_i T} \sqrt[3]{\frac{1}{\theta_{i+1}}}.$$

Si ha poi

$$v_i(xy) - V_i(xy|\theta_{i+1}) = \frac{1}{a} \int_R \int [v_i(xy) - v_i(xy|\xi \eta \theta_{i+1})] d\xi d\eta.$$

Per ogni valore di  $(\xi \eta)$ ,  $v_i(xy | \xi \eta \theta_{i+1})$  è uguale al valore che  $v_i$  assume in un punto interno a  $\Gamma$  o del contorno che dista da  $(xy)$  per un segmento

$$\leq \theta_{i+1} \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \theta_{i+1} \Lambda.$$

Ricordando che  $v_i$  è una funzione mediatrice relativa al numero  $\theta_i$  si ha quindi per la (6) (n° 19)

$$|v_i(xy) - v_i(xy | \xi \eta \theta_{i+1})| < Q \Lambda \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i},$$

onde

$$(d) \quad |v_i(xy) - V_i(xy | \theta_{i+1})| \leq \frac{1}{a} \int_R \int |v_i(xy) - v_i(xy | \xi \eta \theta_{i+1})| d\xi d\eta < Q \Lambda \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}.$$

Raccogliendo dalle (b), (c), (d) si ha dunque

$$(13) \quad |v_i(xy) - v_{i+1}(xy)| < Q \Lambda \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i} + \frac{K \sqrt[3]{32 \rho^5}}{a} \sqrt{\varepsilon_i + \theta_i T} \sqrt[3]{\frac{1}{\theta_{i+1}}}.$$

38. Si consideri la serie

$$(14) \quad v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots$$

La serie dei moduli convergerà certamente per ogni  $(xy)$ , tosto che convergono le serie

$$\sum_i \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}, \quad \sum_i \sqrt{\varepsilon_i + \theta_i T} \sqrt[3]{\frac{1}{\theta_{i+1}}}$$

e, se si suppone  $\varepsilon_i < \theta_i$ , alla seconda serie può ancora sostituirsi l'altra  $\sum_i \frac{\sqrt{\theta_i}}{\sqrt[3]{\theta_{i+1}}}$ .

Si ponga ora  $\theta_i = \frac{1}{i^{2i}}$ . Sarà

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\theta_{i+1}}{\theta_i} &= \sum \frac{i^{2i}}{(i+1)^{2(i+1)}} = \sum \left(\frac{i}{i+1}\right)^{2i} \left(\frac{1}{i+1}\right)^2 < \sum \left(\frac{1}{i+1}\right)^2 \\ \sum_i \frac{\sqrt{\theta_i}}{\sqrt[3]{\theta_{i+1}}} &= \sum \frac{(i+1)^{\frac{2}{3}(i+1)}}{i^i} = \sum \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\frac{2}{3}(i+1)} \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{i-2}{3}} < 2e^{\frac{2}{3}} \sum \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{i-2}{3}} *). \end{aligned}$$

La prima serie converge notoriamente, e si vede tosto la convergenza della seconda se si osserva che i suoi termini sono minori dei termini della serie  $\sum \left(\frac{1}{i}\right)^2$  tosto che  $i > 8$ .

La serie (14) converge dunque uniformemente ad una funzione

$$(15) \quad v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i.$$

Dalla convergenza uniforme segue immediatamente che la funzione  $v$  assumerà sul contorno  $c$  di  $\Gamma$  i valori  $u(s)$  assegnati comuni a tutte le funzione di  $\{u\}$ .

\*) Perché  $\left(\frac{i+1}{i}\right)^{\frac{2}{3}(i+1)} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\frac{2}{3}i} \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\frac{2}{3}} < 2 \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\frac{2}{3}i} < 2e^{\frac{2}{3}}$ .

## § 9.

**Le derivate prime della funzione  $v$  e il suo integrale di Dirichlet.**

39. Poniamo  $M_i = v_{i+1} - v_i$  e alla funzione  $M_i$  applichiamo il LEMMA II (n° 31). Il numero indicato con  $\eta$  in quel LEMMA è allora minore o uguale al massimo fra i numeri  $|\eta_i - \eta_{i+1}|$ ,  $\eta_i$ ,  $\eta_{i+1}$  (n° 37); quindi  $< \varepsilon_i + \theta_i T$ . Tenendo presente l'ipotesi  $\varepsilon_i < \theta_i$  si ha quindi

$$(a) \quad \int_{\Gamma} \int \Delta M_i dx dy < 6(1 + T)\theta_i.$$

Osserviamo ancora che le  $\frac{\partial M_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial M_i}{\partial y}$  sono continue in  $\Gamma_{\theta_i}$ , tali essendo le derivate di  $v_i$  e di  $v_{i+1}$  (n° 26); si ha quindi, in ogni punto  $(xy)$  di  $\Gamma_{\theta_i}$ ,

$$\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{S(xy\zeta)} \int \int_{\Sigma(xy\zeta)} \left| \frac{\partial M_i'}{\partial x'} \right| dx' dy',$$

dove  $\Sigma(xy\zeta)$  è un campo qualunque convergente con continuità all'unico punto  $(xy)$  mentre  $\zeta$  tende a 0, e  $S(xy\zeta)$  la sua area e dove  $M_i'$  rappresenta la funzione  $M_i$  scritta nelle variabili  $x'$ ,  $y'$  al posto delle  $x$ ,  $y$ .

Alla scelta del campo  $\Sigma(xy\zeta)$  resta una grande arbitrarietà: per fissare le idee e semplificare i calcoli ulteriori noi lo determineremo in una circonferenza di raggio  $\frac{\zeta}{\sqrt{\pi}}$  e di centro  $(xy)$ ; le coordinate del punto  $(x'y')$  mobile in esso possono allora scriversi

$$(b) \quad x' = x + \zeta \xi, \quad y' = y + \zeta \eta,$$

$(\xi \eta)$  essendo un punto mobile nel cerchio  $W$  di centro l'origine e raggio  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  (quindi di area 1). Allora  $S(xy\zeta) = \zeta^2$ . Supporremo inoltre la funzione  $M_i$  continuata fuori di  $\Gamma$  con valori nulli. Sarà, in  $\Gamma_{\theta_i}$ ,

$$(c) \quad \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int \int_W \left| \frac{\partial M_i'}{\partial x'} \right| d\xi d\eta.$$

Poniamo ancora

$$\int \int_{\Sigma(xy\zeta)} \Delta M_i' dx' dy' = \zeta^2 \int \int_W \Delta M_i' d\xi d\eta = \zeta^2 \sigma_i(xy|\zeta).$$

Si ha

$$\int_{\Gamma} \int \sigma_i(xy|\zeta) dx dy = \int_{\Gamma} \int dx dy \int \int_W \Delta M_i' d\xi d\eta = \int \int_W d\xi d\eta \int_{\Gamma} \int \Delta M_i' dx dy$$

e quindi, se si chiama  $\Gamma_{\zeta(\xi\eta)}$  il campo del piano  $(x'y')$  trasformato di  $\Gamma$  per le (b) ove



si considerano le  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  costanti,

$$\int_{\Gamma} \int \sigma_i(xy|\zeta) dx dy = \int_{W'} \int d\xi d\eta \int_{\Gamma_{\zeta}(\xi\eta)} \Delta M_i' dx' dy' \leq \int_{\Gamma} \int \Delta M_i dx dy \cdot \int_{W'} \int d\xi d\eta \\ \leq 6(1+T)\theta_i.$$

Si noti che la funzione  $\sigma_i(xy|\zeta)$  è sempre positiva: l'aggregato dei punti in cui

$$(d) \quad \sigma_i(xy|\zeta) > \theta_i^\alpha$$

(dove  $\alpha$  è un numero arbitrario  $< 1$ ) ha quindi misura  $\leq 6(1+T)\theta_i^{1-\alpha}$ .

In ogni punto poi in cui

$$(e) \quad \sigma_i(xy|\zeta) \leq \theta_i^\alpha,$$

è ancora

$$\int_{W'} \int \left( \frac{\partial M_i'}{\partial x'} \right)^2 d\xi d\eta \leq \theta_i^\alpha,$$

onde (n° 27)

$$(f) \quad \int_{W'} \int \left| \frac{\partial M_i'}{\partial x'} \right| d\xi d\eta \leq \theta_i^{\frac{\alpha}{2}}.$$

I punti di  $\Gamma_{\theta_i}$  possono distinguersi, rispetto al comportamento in essi della funzione  $M_i$ , in due aggregati: l'uno  $\mathfrak{S}_{ix}$  nei punti del quale  $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| > \theta_i^{\frac{\alpha}{2}}$ ; l'altro nei cui punti  $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| \leq \theta_i^{\frac{\alpha}{2}}$ . Per ciascun punto del primo aggregato la formula (c) mostra che esiste uno  $\zeta$  finito tale che, per  $\zeta \leq \zeta$ ,

$$\int_{W'} \int \left| \frac{\partial M_i'}{\partial x'} \right| d\xi d\eta > \theta_i^{\frac{\alpha}{2}},$$

la quale contraddice alla (f); in tali punti e per quei valori di  $\zeta$  sarà dunque soddisfatta la (d). L'aggregato  $\mathfrak{S}_{ix}$  ha dunque misura  $\leq 6(1+T)\theta_i^{1-\alpha}$ . Si chiami  $\mathfrak{S}_{ix}^*$  l'aggregato somma di tutti gli aggregati  $\mathfrak{S}_{ix}$  per cui  $i \geq j$ : la misura di questo aggregato sarà

$$\leq 6(1+T) \sum_{i=j}^{\infty} \theta_i^{1-\alpha} = 6(1+T) \sum_{i=j}^{\infty} \left( \frac{1}{i} \right)^{2i(1-\alpha)}.$$

La serie  $\sum \left( \frac{1}{i} \right)^{2i(1-\alpha)}$  converge più rapidamente della serie  $\sum \left( \frac{1}{i} \right)^2$  tosto che  $i > \frac{1}{1-\alpha}$ : ne segue che la misura dell'aggregato  $\mathfrak{S}_{ix}^*$  si può rendere piccola quanto si vuole prendendo  $j$  sufficientemente grande.

In ogni punto di  $\Gamma_{\theta_j}$ , non appartenente a  $\mathfrak{S}_{ix}^*$  si ha, per  $i \geq j$ :

$$\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| \leq \theta_i^{\frac{\alpha}{2}} = \left( \frac{1}{i} \right)^{i\alpha}.$$

40. Si fissi ora per  $\alpha$  un valore positivo ( $< 1$ ), per es.  $\alpha = \frac{1}{2}$ : la serie  $\sum \left( \frac{1}{i} \right)^{i\alpha} = \sum \left( \frac{1}{i} \right)^{\frac{i}{2}}$  convergerà [più rapidamente che la  $\sum \left( \frac{1}{i} \right)^2$  tosto che  $i > 4$ ];

convergerà quindi uniformemente in  $\Gamma_{\theta_j} - \mathfrak{S}_{jx}^*$  la serie dei moduli delle derivate rapporto ad  $x$  dei termini della serie

$$v = v_i + \sum (v_{i+1} - v_i).$$

Si osservi ancora che, col crescere indefinito di  $j$ ,  $\Gamma_{\theta_j}$  tende a  $\Gamma$ ; si conclude che la serie

$$(16) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)$$

converge in tutti i punti di  $\Gamma$ , esclusi al più quelli di un aggregato  $\mathfrak{S}_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_{jx}^*$  di misura superficiale nulla. Ed assegnato un  $\mu$  arbitrariamente piccolo, esiste un aggregato  $\Gamma - \Gamma_{\theta_j} + \mathfrak{S}_{jx}^*$  di misura  $< \mu$  tale che in tutti i punti di  $\Gamma$  esterni ad esso la serie converge uniformemente.

Porremo, nei punti di  $\Gamma - \mathfrak{S}_x$ ,

$$(17) \quad w_x = \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Le conclusioni analoghe si avranno evidentemente mutando  $x$  in  $y$ , onde si definirà del pari un aggregato  $\mathfrak{S}_y$  di misura nulla, tale che in  $\Gamma - \mathfrak{S}_y$  esiste ed è finita la funzione

$$(18) \quad w_y = \frac{\partial v_i}{\partial y} + \sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial v_i}{\partial y}.$$

**41.** Dimostreremo che, per ogni valore di  $y$ , esclusi al più quelli di un aggregato di misura nulla, si ha

$$\int_{x_0}^{x_1} w_x dx = v(x_1) - v(x_0).$$

Ricordando che l'integrale indefinito d'una funzione ha per derivata la funzione integrando in tutti i punti, fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla \*), ne risulterà che, in ogni punto di  $\Gamma$ , esclusi al più quelli di un aggregato di misura superficiale nulla, la funzione  $v$  ha derivata rapporto ad  $x$  (ed analogamente rapporto ad  $y$ ) e precisamente

$$\frac{\partial v}{\partial x} = w_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = w_y.$$

Riprendiamo perciò le considerazioni precedenti e, per un valore assegnato di  $y$ , chiamiamo  $\mathfrak{J}_{ik}(y)$  l'aggregato degli  $x$  per cui il punto  $(xy)$  appartiene a  $\Gamma_{\theta_i}$  e

$$(g) \quad \theta_i^{-\frac{k-1}{4}} \geq \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| > \theta_i^{-\frac{k-2}{4}},$$

e chiamiamo  $\mathfrak{z}_{ik}(y)$  la sua misura. Tenendo presente che l'aggregato dei punti di  $\Gamma_{\theta_i}$

\*) Cfr. la mia Nota già citata: *Ricerche sopra le funzioni derivate* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. V, vol. XV (1° sem. 1906), pag. 674].

in cui  $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| > \theta_i^{-\frac{k-2}{4}}$  ha misura superficiale  $\leq 6(1+T)\theta_i^{\frac{k}{2}}$  (n° 39), si vede che l'aggregato dei valori di  $y$  per cui

$$(b) \quad \begin{aligned} \varpi_{ik}(y) &> \theta_i^{\frac{k}{3}} \\ \text{ha misura } * & \\ &\leq 6(1+T)\theta_i^{\frac{k}{6}}. \end{aligned}$$

Chiamiamo  $\mathfrak{C}_i$  l'aggregato dei valori di  $y$  per cui è soddisfatta la (b) per qualche valore di  $k$  ( $\geq 1$ ): la sua misura sarà

$$< 6(1+T) \sum_k \theta_i^{\frac{k}{6}},$$

ossia, sostituendo a  $\theta_i$  il suo valore  $\left(\frac{1}{i}\right)^{2i}$ ,

$$< 6(1+T) \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1}{i^{\frac{1}{3}}}\right)^k = 6(1+T) \frac{1}{i^{\frac{1}{3}} - 1} < 6(1+T) \left(\frac{1}{i-1}\right)^{\frac{1}{3}i} \quad (\text{tosto che } i > 3).$$

L'aggregato  $\mathfrak{C}_j^*$  dei valori di  $y$  per cui la (b) è soddisfatta per qualche valore di  $k$  e per qualche valore di  $i \geq j$  ha quindi misura

$$< 6(1+T) \sum_{i \geq j} \left(\frac{1}{i-1}\right)^{\frac{1}{3}i}.$$

Osservando che la serie  $\sum \left(\frac{1}{i-1}\right)^{\frac{1}{3}i}$  converge più rapidamente di  $\sum \left(\frac{1}{i-1}\right)^2$  tosto che  $i > 6$ , si vede che la misura dell'aggregato  $\mathfrak{C}_j^*$  si può rendere piccola a piacere purchè si assuma  $j$  abbastanza grande.

Ciò posto, si fissi per  $y$  un valore non appartenente a  $\mathfrak{C}_j^*$ ; per ogni  $i \geq j$  sarà allora  $\varpi_{ik} < \theta_i^{\frac{k}{3}}$ . Si chiami ancora  $\mathfrak{D}_j^*(y)$  l'aggregato degli  $x$  per cui,  $y$  avendo questo valore e  $(xy)$  appartenendo a  $\Gamma_{\theta_j}^{**}$ ,  $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| > \theta_i^{\frac{1}{4}}$  per qualche  $i \geq j$ , vale a dire l'aggregato dei punti di  $\mathfrak{S}_{j,x}^{***}$  per cui  $y$  ha il valore assegnato e che appartengono a  $\Gamma_{\theta_j}$ ,

$$\left[ \mathfrak{D}_j^*(y) \leq \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{i \geq j} \mathfrak{D}_{ik}(y) \right]^{****};$$

\*) Poichè la misura superficiale di un aggregato del piano  $(xy)$  è l'integrale rapporto alla  $y$  della misura lineare dell'aggregato segnato nell'aggregato totale dalle rette  $y = \text{cost.}$  (cfr. LEBESGUE, *Intégrale*, etc., loco citato, n° 37, pp. 276-278).

\*\*) E quindi ad ogni  $\Gamma_{\theta_i}$  per  $i \geq j$ .

\*\*) Si ricordi che al principio del n° 40 si fissò per  $x$  il valore  $\frac{1}{2}$ .

\*\*\*\*) Il segno  $<$  in questa relazione dipende dal fatto che  $\mathfrak{D}_j^*(y)$  si suppone essere un aggregato di valori di  $x$  corrispondenti a punti di  $\Gamma_{\theta_j}$ , mentre ai  $\mathfrak{D}_{ik}(y)$  si impone solo di essere aggregati di valori di  $x$  corrispondenti a punti di  $\Gamma_{\theta_i}$ : ora, tosto che  $i > j$ ,  $\Gamma_{\theta_i} > \Gamma_{\theta_j}$ ; quindi  $\mathfrak{D}_{ik}(y)$  può comprendere degli  $x$  esclusi da  $\mathfrak{D}_j^*(y)$ . Questa osservazione giustifica pure il segno  $<$  nella relazione successiva.

sarà

$$\int_{\mathfrak{M}_j} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx \leq \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_{\mathfrak{M}_{ik}} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx + \int_{\mathfrak{M}_j - \sum_k \mathfrak{M}_{ik}} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx \quad (i \geq j),$$

dove con  $\mathfrak{M}_j - \sum_k \mathfrak{M}_{ik}$  si rappresenti l'aggregato dei punti che appartengono a  $\mathfrak{M}_j$ , e non ai  $\mathfrak{M}_{ik}$ , pel valore fisso di  $i$  considerato. Quindi per le (g), (h):

$$\int_{\mathfrak{M}_j} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx < \sum_k \theta_i^{-\frac{k-1}{4} + \frac{k}{3}} + \theta_i^{\frac{1}{4}} \int_{\mathfrak{M}_j - \sum_k \mathfrak{M}_{ik}} dx.$$

La sommatoria del 2° membro vale

$$\sum_k \left( \frac{1}{i^6} \right)^{k+3} = \frac{1}{i^2 (i^6 - 1)} < \left( \frac{1}{i-1} \right)^{\frac{2}{3}i} \quad \text{tosto che } i > 1.$$

L'integrale del secondo membro è minore della misura di  $\mathfrak{M}_j$ : indicheremo con  $f$  un numero fissato a piacere maggiore di questa misura (per es.  $f = \Lambda$ ). Sarà quindi

$$\int_{\mathfrak{M}_j} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx < \left( \frac{1}{i-1} \right)^{\frac{2}{3}i} + \left( \frac{1}{i} \right)^{\frac{1}{2}} f \quad (i \geq j),$$

onde finalmente

$$\sum_{i \geq j} \int_{\mathfrak{M}_j} \left| \frac{\partial M_i}{\partial x} \right| dx < \sum_{i \geq j} \left( \frac{1}{i-1} \right)^{\frac{2}{3}i} + f \sum_{i \geq j} \left( \frac{1}{i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le due somme del secondo membro sono convergenti.

42. Ciò posto, si ha

$$\int_{x_0}^{x_1} w_x dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \sum_1^j \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial M_i}{\partial x} dx + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sum_{i \geq j} \frac{\partial M_i}{\partial x} \right\} dx$$

e per  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $y$  assegnati, corrispondenti a punti interni a  $\Gamma$ , si può scegliere  $j$  abbastanza alto perchè questi punti appartengano a  $\Gamma_{\theta_j}$ .

Lo studio si porta interamente sull'ultimo integrale del 2° membro. Tale integrale si spezza in due: l'uno esteso all'aggregato dei punti dell'intervallo  $x_0 \dots x_1$  non appartenenti a  $\mathfrak{M}_j$ , l'altro all'aggregato dei punti che appartengono a  $\mathfrak{M}_j$ . Ora nel n° 40 si è mostrato che fuori di  $\mathfrak{M}_j$  la serie  $\sum \frac{\partial M_i}{\partial x} dx$  converge uniformemente: essa può quindi integrarsi termine a termine. Nel n° prec. si è ancora mostrato che è convergente uniformemente la serie degli integrali dei moduli dei termini della serie, estesi a  $\mathfrak{M}_j$ , e quindi a un qualunque aggregato contenuto in  $\mathfrak{M}_j$ ; ne segue che anche il secondo integrale si può ottenere integrando la serie termine a termine \*). Sommando

\*) Cfr. la mia nota: *Sopra l'integrazione delle serie* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, vol. XXXIX (1906), pp. 777-780], n° 5.

di nuovo le due serie ottenute, si raccoglie infine

$$\int_{x_0}^{x_1} w_i dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \sum \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial M_i}{\partial x} dx = v(x_1) - v(x_0).$$

Fin qui si è supposto  $y$  non appartenente a  $\mathbb{C}_j$ ; ma si è mostrato che, facendo crescere indefinitamente  $j$ , la misura di  $\mathbb{C}_j$  tende a 0. Si ha dunque la proposizione enunciata al principio del n° 41.

Confrontando questo risultato con l'osservazione del n° 4 relativa all'imposizione della condizione (3), segue che, comunque ancora nulla si conosca circa le derivate della  $v$  nei punti dell'aggregato  $\mathbb{S}_x + \mathbb{S}_y$ , si può però fin d'ora considerare la funzione  $v$  come appartenente al campo funzionale  $\{u\}$ .

43. È ora facile dimostrare che l'integrale di DIRICHLET, esteso al campo  $\Gamma$ , calcolato per la funzione  $v$  vale precisamente  $d$ . Richiamando le notazioni del n° 39, si indichi con  $\mathbb{S}_{jy}^*$  l'aggregato analogo a  $\mathbb{S}_{jx}^*$  rispetto alla serie  $\sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)$  e si ponga

$$\mathbb{S}_j = \mathbb{S}_{jx}^* + \mathbb{S}_{jy}^*.$$

In  $\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j$  (qualunque sia  $j$ ) convergono uniformemente (n° 40) a  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e a  $\frac{\partial v}{\partial y}$  le serie

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_i}{\partial y} + \sum \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right),$$

vale a dire le derivate  $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial y}$  tendono uniformemente a  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  col crescere di  $i$ ; e l'aggregato  $\mathbb{S}_j$  può rendersi piccolo a piacere, facendo crescere  $j$  sufficientemente.

D'altra parte si ponga, al solito,  $I(v_i) = d + \varepsilon_i$ ; qualunque sia  $i$ ,  $d + \varepsilon_i$  è inferiore ad un numero finito  $D$  (che si può supporre prossimo quanto si vuole a  $d$ ): ne segue che, assegnato un numero  $\tau$ , arbitrario, si può determinare un numero  $l_i$  ( $< \sqrt{\frac{D}{\tau_i}}$ )

ed un aggregato  $\mathbb{F}_{i\tau}$  di misura superficiale  $< \tau$ , tale che in  $\Gamma - \mathbb{F}_{i\tau}$   $\left| \frac{\partial v_i}{\partial x} \right|$  e  $\left| \frac{\partial v_i}{\partial y} \right|$  siano

$< l_i$ ; e tenendo conto della convergenza uniforme delle  $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial y}$  in  $\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j$ , si può

anzi supporre che l'aggregato comune a  $\mathbb{F}_{i\tau}$  e a  $\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j$  sia il medesimo, almeno per tutti i valori di  $i$  superiori ad un certo. Indicheremo con  $\mathbb{F}_j$  questo aggregato fisso

(con  $j$ ) e supporremo  $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau_j = 0$ . In  $\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j - \mathbb{F}_j$ ,  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2$  e  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2$  convergono

anch'esse uniformemente a  $\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ ,  $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$  onde si ha

$$\int_{\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j - \mathbb{F}_j} \Delta v dx dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\theta_j} - \mathbb{S}_j - \mathbb{F}_j} \Delta v_i dx dy$$

e quindi

$$(i) \left\{ \begin{aligned} d - \int \int_{\Gamma_{\theta_j^-} \mathfrak{S}_j^- \mathfrak{F}_j} \Delta v dx dy &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ d + \varepsilon_i - \int \int_{\Gamma_{\theta_j^-} \mathfrak{S}_j^- \mathfrak{F}_j} \Delta v_i dx dy \right\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \int_{\Gamma - \Gamma_{\theta_j^+} \mathfrak{S}_j^+ \mathfrak{F}_j} \Delta v_i dx dy \\ &= \int \int_{\Gamma - \Gamma_{\theta_j^+} \mathfrak{S}_j^+ \mathfrak{F}_j} \Delta v_n dx dy + \sum_{i=n}^{\infty} \int \int_{\Gamma - \Gamma_{\theta_j^+} \mathfrak{S}_j^+ \mathfrak{F}_j} (\Delta v_{i+1} - \Delta v_i) dx dy, \end{aligned} \right.$$

dove  $n$  è un intero arbitrario.

Ora si ha

$$\begin{aligned} \int \int (\Delta v_{i+1} - \Delta v_i) dx dy &= \int \int \nabla(v_{i+1} - v_i, v_{i+1} + v_i) dx dy \\ &= 2 \int \int \nabla(v_{i+1} - v_i, v_i) dx dy + \int \int \Delta(v_{i+1} - v_i) dx dy; \end{aligned}$$

quindi, applicando al primo integrale la disuguaglianza

$$\left| \int \int \nabla(uv) dx dy \right| \leq \sqrt{\int \int \Delta u dx dy \cdot \int \int \Delta v dx dy}^*),$$

\*) Questa disuguaglianza si deduce agevolmente da quella nota di SCHWARZ. Essa si estende in modo ovvio agli integrali del LEBESGUE. Si decompongano infatti gli intervalli di variabilità di  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  in intervalli parziali di ampiezza  $\leq \varepsilon$  mediante i numeri  $m_i$  ( $i \leq 0$ ,  $m_i < m_{i+1}$ ,  $m_{i+1} - m_i \leq \varepsilon$ ) e si chiami  $\alpha_{ij}$  la misura dell'aggregato in cui

$$m_i \leq \frac{\partial u}{\partial x} < m_{i+1} \quad \text{e} \quad m_j \leq \frac{\partial v}{\partial x} < m_{j+1},$$

e  $\beta_{ij}$  la misura dell'aggregato in cui

$$m_i \leq \frac{\partial u}{\partial y} < m_{i+1} \quad \text{e} \quad m_j \leq \frac{\partial v}{\partial y} < m_{j+1}.$$

Sarà

$$\int \int \nabla(uv) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ij} m_i m_j (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

$$\int \int \Delta u dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ij} m_i^2 (\alpha_{ij} + \beta_{ij}), \quad \int \int \Delta v dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ij} m_j^2 (\alpha_{ij} + \beta_{ij}).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left[ \int \int \nabla(uv) dx dy \right]^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ijrs} m_i m_j m_r m_s (\alpha_{ij} \alpha_{rs} + \beta_{ij} \alpha_{rs} + \alpha_{ij} \beta_{rs} + \beta_{ij} \beta_{rs}) \\ \int \int \Delta u dx dy \cdot \int \int \Delta v dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ijrs} m_i^2 m_s^2 (\alpha_{ij} \alpha_{rs} + \beta_{ij} \alpha_{rs} + \alpha_{ij} \beta_{rs} + \beta_{ij} \beta_{rs}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{ijrs} \frac{1}{2} (m_i^2 m_s^2 + m_r^2 m_j^2) (\alpha_{ij} \alpha_{rs} + \beta_{ij} \alpha_{rs} + \alpha_{ij} \beta_{rs} + \beta_{ij} \beta_{rs}). \end{aligned}$$

Basta allora osservare che, qualunque siano i numeri  $m_i$ ,  $m_j$ ,  $m_r$ ,  $m_s$  si ha sempre,

$$m_i m_j m_r m_s \leq \frac{1}{2} (m_i^2 m_s^2 + m_r^2 m_j^2)$$

per concluderne la disuguaglianza enunciata.

e al secondo il Lemma del n° 31 :

$$\left| \int \int (\Delta v_{i+1} - \Delta v_i) dx dy \right| \leq 2 \sqrt{\int \int \Delta(v_{i+1} - v_i) dx dy} \sqrt{d + \varepsilon_i} + \int \int \Delta(v_{i+1} - v_i) dx dy \\ \leq 2 \sqrt{d + \varepsilon_i} \sqrt{6\theta_i} \sqrt{1 + T} + 6\theta_i (1 + T) \quad [\text{cfr. (a)}]$$

qualunque sia il campo d'integrazione contenuto in  $\Gamma$ .

Tosto che  $n$  è abbastanza elevato, i termini della serie  $\sum_{i=n}^{\infty} (2\sqrt{d+\varepsilon_i} \sqrt{6\theta_i} + 6\theta_i \sqrt{1+T})$  sono minori dei termini della serie  $\sum_{i=n}^{\infty} 5\sqrt{D} \sqrt{\theta_i} = 5\sqrt{D} \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^i$ . La serie stessa è quindi convergente ed anzi, assumendo  $n$  sufficientemente grande, si può rendere la sua somma arbitrariamente piccola. Si può quindi rendere arbitrariamente piccolo

$$\left| \sum_{i=n}^{\infty} \int \int (\Delta v_{i+1} - \Delta v_i) dx dy \right|_{\Gamma - \Gamma_{\theta_j^+} \mathfrak{S}_j^+ \mathfrak{J}_j}$$

assumendo  $n$  maggiore di un numero assegnabile, indipendentemente dal valore di  $j$ .

Si deduce facilmente di qui che

$$d - \int \int \Delta v dx dy_{\Gamma_{\theta_j^-} \mathfrak{S}_j^- \mathfrak{J}_j}$$

tende a 0 mentre  $j$  tende all' $\infty$ . Nell'ipotesi contraria infatti si potrebbe assegnare un numero  $\psi$  tale che esistano valori di  $j$  arbitrariamente grandi pei quali

$$\left| d - \int \int \Delta v dx dy \right|_{\Gamma_{\theta_j^-} \mathfrak{S}_j^- \mathfrak{J}_j} > \psi.$$

Si assuma allora  $n$  abbastanza grande perchè

$$5\sqrt{D} \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^i < \frac{\psi}{2}$$

e poi  $\chi$  abbastanza grande perchè, per  $j \geq \chi$ ,

$$\int \int \Delta v_n dx dy < \frac{\psi}{2}_{\Gamma - \Gamma_{\theta_j^+} \mathfrak{S}_j^+ \mathfrak{J}_j}$$

(il che è possibile perchè, tendendo  $j$  a  $\infty$  la misura di  $\Gamma - \Gamma_{\theta_j} + \mathfrak{S}_j + \mathfrak{J}_j$  tende a 0); il modulo del 2° membro della (i) sarà allora  $< \psi$  per ogni  $j \geq \chi$ , mentre per ipotesi, dovrebbero esistere valori di  $j \geq \chi$  per cui il modulo del primo membro sarebbe  $> \psi$ .

Si ha dunque

$$(19) \quad d = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \int \Delta v dx dy = \int \int \Delta v dx dy_{\Gamma}$$

## § 10.

**La formola di Green e l'analiticità della funzione  $v$ .**

44. La funzione  $v$ , che rende minimo l'integrale di DIRICHLET esteso al campo  $\Gamma$  pei valori assegnati al contorno, renderà evidentemente minimo lo stesso integrale esteso ad un campo  $\Sigma$  (connesso e quadrabile) contenuto in  $\Gamma$ , pei valori che essa stessa assume al contorno di  $\Sigma$ . Perchè, se per tali valori al contorno di  $\Sigma$  un'altra funzione  $v'$  rendesse minore l'integrale di DIRICHLET esteso a  $\Sigma$ , la funzione uguale a  $v$  in  $\Gamma - \Sigma$  e a  $v'$  in  $\Sigma$  farebbe assumere all'integrale esteso a tutto  $\Gamma$  un valore minore che la  $v$ . E questa funzione sarebbe ancora continua in  $\Gamma$ : vero è che al contorno di  $\Sigma$  potrebbe non aver derivate determinate e finite, ma le condizioni fondamentali per cui tali derivate furono richieste sarebbero ugualmente soddisfatte (cfr. le osservazioni fatte a tal riguardo al n° 4). D'altra parte, per un  $\theta$  sufficientemente piccolo, la funzione mediatrice della nuova funzione relativa a  $\theta$  farebbe ancora assumere all'integrale di DIRICHLET esteso a  $\Gamma$  valore minore che la  $v$ , e soddisferebbe inoltre in tutto il campo alle condizioni di derivabilità richieste per le  $u$ .

Ciò posto, insieme colla  $v$  si consideri un'altra funzione qualunque  $v^*$  che soddisfi in  $\Sigma$  alle stesse condizioni di continuità e derivabilità, e sia  $h$  una funzione analoga che si annulli al contorno di  $\Sigma$ ;  $k$  una costante. La funzione  $v + khv^*$  assume sul contorno di  $\Sigma$  gli stessi valori di  $v$ : deve quindi essere, qualunque sia  $k$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \int \Delta(v + khv^*) dx dy &= \int_{\Sigma} \int \Delta v dx dy + 2k \int_{\Sigma} \int \nabla(v, hv^*) dx dy + k^2 \int_{\Sigma} \int \Delta(hv^*) dx dy \\ &\geq \int_{\Sigma} \int \Delta v dx dy. \end{aligned}$$

La disuguaglianza non può esser soddisfatta qualunque sia  $k$  se non è

$$\int_{\Sigma} \int \nabla(v, hv^*) dx dy = 0$$

ossia, sviluppando il primo membro mediante la formola  $d(hv^*) = hdv^* + v^*dh$ ,

$$\int_{\Sigma} \int \nabla(v, v^*) h dx dy = - \int_{\Sigma} \int \nabla(v, h) v^* dx dy.$$

Si supponga ora che anche la funzione  $v^*$  renda minimo l'integrale di DIRICHLET esteso a  $\Sigma$ , pei valori che essa assume al contorno; sarà del pari

$$\int_{\Sigma} \int \nabla(v, v^*) h dx dy = - \int_{\Sigma} \int \nabla(v^*, h) v dx dy.$$

Si ha quindi

$$(20) \quad \int_{\Sigma} \int [\nabla(v, h)v^* - \nabla(v^*, h)v] dx dy = 0.$$



In questa relazione è contenuta, come caso particolare, la formola di GREEN.

45. Noi ci limiteremo a fare tal deduzione per un campo particolare che ci sarà utile in seguito. Siano cioè  $C'$  e  $C''$  due circonferenze interne a  $\Gamma$ , e la seconda interna alla prima; siano  $(x'y')$ ,  $(x''y'')$  i loro centri rispettivi e  $\rho'$ ,  $\rho''$  i loro raggi. Si ponga

$$\begin{aligned}(x-x')^2 + (y-y')^2 &= r'^2, & h' &= \rho'^2 - r'^2, \\ (x-x'')^2 + (y-y'')^2 &= r''^2, & h'' &= \frac{1}{\rho''^2} - \frac{1}{r''^2}, \\ & & h &= h'h''.\end{aligned}$$

Si applichi la formola (20) al campo  $\Sigma$  compreso fra i due cerchi e alla funzione  $h$  ora definita; si otterrà

$$(a) \int_{\Sigma} \int [\nabla(v, h')v^* - \nabla(v^*, h')v] h'' dx dy + \int_{\Sigma} \int [\nabla(v, h'')v^* - \nabla(v^*, h'')v] h' dx dy = 0.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial h'}{\partial x} &= -2r' \cos(xr'), & \frac{\partial h'}{\partial y} &= -2r' \cos(yr'), \\ \frac{\partial h''}{\partial x} &= \frac{2}{r''^3} \cos(xr''), & \frac{\partial h''}{\partial y} &= \frac{2}{r''^3} \cos(yr''),\end{aligned}$$

e quindi, se si suppone per un istante che nell'area  $\Sigma$  esistano le derivate di  $v$  e  $v^*$  secondo tutte le direzioni, e siano legate dalla relazione fondamentale (2),

$$\begin{aligned}\nabla(v, h') &= -2r' \frac{\partial v}{\partial r'}, & \nabla(v^*, h') &= -2r' \frac{\partial v^*}{\partial r'}, \\ \nabla(v, h'') &= \frac{2}{r''^3} \frac{\partial v}{\partial r''}, & \nabla(v^*, h'') &= \frac{2}{r''^3} \frac{\partial v^*}{\partial r''}.\end{aligned}$$

Se allora si trasforma il primo integrale della (a) nelle coordinate polari  $(r'\varphi')$  e il secondo nelle coordinate  $(r''\varphi'')$  si ottiene

$$(b) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Sigma} \int \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) \left( \frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{r'^2} \right) r'^2 dr' d\varphi' \\ & = \int_{\Sigma} \int \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) (\rho'^2 - r'^2) \frac{1}{r''^2} dr'' d\varphi''. \end{aligned} \right.$$

Siano  $D'$  e  $D''$  due cerchi interni a  $\Sigma$  e di centri rispettivi  $(x'y')$ ,  $(x''y'')$ ; si chiamino  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  i loro raggi, e  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  le aree comprese rispettivamente fra  $C''$  e  $D'$  e fra  $C'$  e  $D''$ . La (b) si può scrivere

$$(c) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\gamma'} \int \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) \left( \frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{r'^2} \right) r'^2 dr' d\varphi' \\ & + \int_{\sigma'}^{\rho'} r'^2 dr' \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) \left( \frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{r'^2} \right) d\varphi' \\ & = \int_{\gamma''} \int \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) (\rho'^2 - r'^2) \frac{1}{r''^2} dr'' d\varphi'' \\ & + \int_{\rho''}^{\sigma''} \frac{1}{r''^2} dr'' \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) (\rho'^2 - r'^2) d\varphi''. \end{aligned} \right.$$

La formula vale qualunque siano i raggi  $\rho' > \sigma'$ ,  $\rho'' < \sigma''$ ; derivando i due membri rapporto a  $\rho'$  e a  $\rho''$ , osservando che i primi termini dei due membri han derivata nulla essendo indipendenti l'uno da  $\rho'$ , l'altro da  $\rho''$ , e ponendo poi  $r' = \rho'$ ,  $r'' = \rho''$ , si ottiene

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho' \partial \rho''} \int_{\sigma'}^{\rho'} r'^2 dr' \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) \left( \frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{r'^2} \right) d\varphi' \right]_{\substack{r'=\rho' \\ r''=\rho''}} \\ &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho' \partial \rho''} \int_{\rho''}^{\sigma''} \frac{1}{r''^2} dr'' \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) (\rho'^2 - r'^2) d\varphi'' \right]_{\substack{r'=\rho' \\ r''=\rho''}} \end{aligned}$$

ossia

$$(d) -\frac{\rho'^2}{\rho''^3} \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right)_{r'=\rho'} d\varphi' = -\frac{\rho'}{\rho''^2} \int_0^{2\pi} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right)_{r''=\rho''} d\varphi'';$$

ed infine, chiamando  $ds'$  e  $ds''$  i differenziali dell'arco sulle circonferenze  $C'$ ,  $C''$

$$(ds' = \rho' d\varphi', ds'' = \rho'' d\varphi'');$$

$$(21) \int_{C'} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) ds' - \int_{C''} \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) ds'' = 0.$$

La formula (21) è precisamente la formola di GREEN per l'area  $\Sigma$  compresa fra i cerchi  $C'$  e  $C''$ . Se si conviene di assumere positivi sopra  $C'$  e  $C''$  sempre i versi che lasciano l'area  $\Sigma$  da una stessa parte, il secondo integrale dovrà cambiare di segno, secondo l'uso più invalso.

46. Unica limitazione alla validità di questa formola resta l'ipotesi relativa all'esistenza in  $\Sigma$  delle  $\frac{\partial v}{\partial r'}$ ,  $\frac{\partial v^*}{\partial r'}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial r''}$ ,  $\frac{\partial v^*}{\partial r''}$  e alla loro dipendenza dalle derivate rapporto ad  $x$  ed  $y$ . A tal proposito basta fare l'osservazione seguente.

Ritorniamo alla funzione  $v$  definita nei §§ precedenti:

$$v = \lim_{i=\infty} v_i$$

e immaginiamo riferite le  $v_i$  e la  $v$  alle coordinate polari  $(r' \varphi')$ ; essendo

$$\frac{\partial M_i}{\partial r'} = \frac{\partial M_i}{\partial x} \cos(xr') + \frac{\partial M_i}{\partial y} \cos(yr'),$$

si possono ripetere per la serie  $\sum \frac{\partial M_i}{\partial r'}$  le considerazioni medesime fatte per le serie  $\sum \frac{\partial M_i}{\partial x}$ ,  $\sum \frac{\partial M_i}{\partial y}$ ; essa sarà convergente in tutti i punti di  $\Gamma$  in cui convergono queste ultime, e si avrà in essi

$$\frac{\partial v_i}{\partial r'} + \sum_i \frac{\partial M_i}{\partial r'} = w_x \cos(xr') + w_y \cos(yr').$$

L'aggregato dei valori di  $\varphi'$  cui corrispondono rette in cui l'aggregato dei punti nei quali questa serie non converge ha misura lineare non nulla, ha dunque misura nulla; e per gli altri valori di  $\varphi'$  si dimostra, ragionando come nei n<sup>o</sup> 41 e 42, che in

ogni punto delle rette corrispondenti, fatta astrazione dai punti di un aggregato di misura lineare nulla, la serie medesima converge al valore di  $\frac{\partial v}{\partial r'}$ . Ne segue che l'aggregato di tutti i punti di  $\Gamma$  in cui non si può affermare l'esistenza di qualcuna delle derivate  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial r'}$ , ovvero non si può affermare fra queste derivate la relazione

$\frac{\partial v}{\partial r'} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(xr') + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(yr')$  (somma di tre aggregati di misura nulla), ha misura superficiale nulla. Tenendo conto della validità delle considerazioni analoghe per la funzione  $v^*$ , e parimenti, per l'una e l'altra funzione, per le coordinate  $(r' \varphi')$ , si vede che è pienamente concessa la trasformazione della formola (a) nella (b), purchè s'intenda che nell'integrazione debbano trascurarsi i punti dei detti aggregati di misura nulla.

E varrà pure la (c) coll'unica avvertenza che negli intervalli  $\sigma' \dots \rho'$ ,  $\rho'' \dots \sigma''$  debbano trascurarsi quei valori di  $r'$  e  $r''$  rispettivamente per cui, sulle corrispondenti circonferenze, l'aggregato dei punti in cui non è permessa la trasformazione

$$\nabla(v, b')v^* - \nabla(v^*, b')v = - \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial v^*}{\partial r'} \right) \cdot 2r', \quad \nabla(v, b'')v^* - \nabla(v^*, b'')v = \left( v^* \frac{\partial v}{\partial r''} - v \frac{\partial v^*}{\partial r''} \right) \cdot \frac{2}{r''^3}$$

ha misura (lineare)  $> 0$ . Questi valori di  $r'$  e  $r''$  costituiscono aggregati di misura nulla.

Infine al più per un aggregato di valori di  $\rho'$  e di  $\rho''$  avente misura nulla non è permesso di affermare che la derivata dell'integrale sia il valore dell'integrando \*), e quindi può cadere in dubbio il passaggio dalla formola (c) alla (d).

Riassumendo, la formola (21) ha pieno valore per ogni coppia di cerchi  $C'$  e  $C''$  di centri rispettivamente  $(x' y')$ ,  $(x'' y'')$ , fatta al più eccezione per un aggregato di cerchi i cui raggi costituiscono un aggregato di misura nulla.

47. La formola (21) permette ora, con procedimenti noti, — salvi pochi complementi, — di dimostrare l'esistenza delle derivate prime di  $v$  in tutti i punti di  $\Gamma$ , e poi l'esistenza delle derivate successive, vale a dire l'analiticità di  $v$ .

Si ponga anzitutto in (21)  $v^* = 1$ : si ottiene

$$(e) \quad \int_{C'} \frac{\partial v}{\partial r'} ds' = \int_{C''} \frac{\partial v}{\partial r''} ds''.$$

Il cerchio  $C''$  era, per ipotesi, interno a  $C'$ ; ma si consideri ancora un altro cerchio qualunque  $C'''$  interno a  $C'$ : varrà l'uguaglianza analoga alla (e) ove si mutino gli apici '' in ''': quindi ancora

$$\int_{C''} \frac{\partial v}{\partial r''} ds'' = \int_{C'''} \frac{\partial v}{\partial r'''} ds'''.$$

I cerchi  $C''$  e  $C'''$  non sono più soggetti ad alcun legame: l'integrale  $\int \frac{\partial v}{\partial r} ds$  esteso a una qualunque circonferenza contenuta in  $\Gamma$ , escluse al più fra le circonferenze

\*) v. LEBESGUE, *Leçons*, etc., loco citato, pp. 123-124; LEVI, *Ricerche sopra le funzioni derivate*, loco citato, pag. 674, n° 1.

di determinato centro, quelle di un aggregato di misura nulla, ha dunque un valor costante. Si chiami  $X$  questa costante,  $C$  un cerchio variabile di centro  $(x, y)$  da fissarsi convenientemente,  $r$  il suo raggio; si avrà (trascurando al bisogno, nell'integrazione, i valori di  $r$  dell'intervallo  $0 \dots r$  per cui cade in dubbio l'uguaglianza  $\int_C \frac{\partial v}{\partial r} ds = X$ ):

$$\int_0^{r_0} \int_C \frac{\partial v}{\partial r} ds dr = X r_0 = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r} r dr d\varphi.$$

Inoltre

$$\frac{\partial v}{\partial r} \leq \sqrt{\Delta v}, \quad r dr d\varphi = d\sigma,$$

indicando con  $d\sigma$  l'elemento d'area; quindi, se  $C^*$  è il campo interno al cerchio di centro  $(x, y)$  e raggio  $r_0$ ,

$$\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r} r dr d\varphi \leq \int_{C^*} \int \sqrt{\Delta v} d\sigma \leq \sqrt{\pi r_0^2} \int_{C^*} \Delta v d\sigma.$$

Scegliendo convenientemente il punto  $(x, y)$  si può sempre supporre

$$\int_{C^*} \Delta v d\sigma \leq d \frac{\pi r_0^2}{A};$$

quindi ancora

$$X r_0 < \pi r_0^2 \sqrt{\frac{d}{A}} \quad \text{ossia} \quad X < \pi r_0 \sqrt{\frac{d}{A}}.$$

Ora la costante  $X$  è indipendente da  $r_0$ ; deve dunque essere

$$(22) \quad X = \int_C \frac{\partial v}{\partial r} ds = 0.$$

48. Se allora si pone nella formola (21)  $v^* = \log r''$  e si fa tendere a 0 il cerchio  $C'$  e se, tenendo presente la formola (22), si osserva ancora che, per la convergenza uniforme della serie (14), la funzione  $v$  è continua, si ottiene la formola fondamentale

$$v(x''y'') = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left( \log r'' \frac{\partial v}{\partial r'} - v \frac{\partial \log r''}{\partial r'} \right) ds',$$

e di qui, per vie note, la derivabilità e l'analiticità della  $v$ . Basterà cioè osservare che, muovendo  $(x''y'')$  entro a  $C'$ ,  $\log r''$  e  $\frac{\partial \log r''}{\partial r'}$  sono illimitatamente derivabili e svilup-pabili in serie di forme in  $(x''y'')$ . Segue allora del pari che  $v$  soddisfa all'equazione  $\Delta^2 v = 0$ .

## § II.

### Semplificazione delle condizioni al contorno.

49. Si è supposto fin qui che la funzione  $u(s)$  dei valori assegnati al contorno fosse limitata, ed ammettesse derivata rispetto all'arco  $s$  in ogni punto, limitata. Ma tali condizioni riducono in modo noto all'unica che  $u(s)$  sia funzione continua limitata di  $s$  me-

dianche l'applicazione del teorema dell'HARNACK \*). La funzione  $u(s)$  può infatti esprimersi allora come somma di una serie uniformemente convergente di polinomi di  $s$ . Sia  $u(s) = \sum \pi_i(s)$ . Ciascuno dei polinomi  $\pi_i$  soddisfa evidentemente alle condizioni richieste ad  $u(s)$  nei § precedenti. A ciascuno di essi, per quanto è stato detto fin qui, si può far corrispondere una funzione armonica  $\Pi_i(xy)$  che assuma sul contorno il valore di  $\pi_i(s)$ : ora il teorema dell'HARNACK ci permette d'affermare che la serie  $\sum \Pi_i(xy)$  convergerà uniformemente in tutto  $\Gamma$  e rappresenterà in esso una funzione armonica assumente al contorno i valori di  $u(s)$ . È noto che questa funzione farà assumere all'integrale  $I(u)$  il valor minimo compatibile coi dati valori al contorno, tosto che di tal minimo si possa parlare: basta perciò che tale integrale non risulti infinito per tutte le funzioni del campo \*\*).

Torino, marzo 1906.

BEPPO LEVI.

## NOTA.

### Sul campo funzionale.

• 50. Ritornando con uno sguardo d'insieme, ai risultati del presente studio, possiamo (a parte la questione di metodo ch'è pure scopo precipuo di esso) riassumerli nell'enunciato :

*Dato un campo  $\Gamma$ , limitato da una curva  $c$ , rettificabile, e soddisfacente alle condizioni di convessità relativa definite al § 4, e data una funzione continua finita  $u(s)$  dell'arco  $s$  di  $c$ , esiste una funzione  $u$ , definita nel campo  $\Gamma$ , assumente sopra  $c$  i valori di  $u(s)$  ed appartenente al campo funzionale  $\{u\}$  definito al § 3, e che all'integrale*

$$I(u) = \iint_{\Gamma} \Delta u \, dx \, dy = \iint_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy.$$

*fa assumere il valore, limite inferiore dei valori che l'integrale medesimo assume per tutte le funzioni di  $\{u\}$  che sopra  $c$  assumono i valori di  $u(s)$ .*

*Tale funzione è analitica.*

E si è osservato che il campo funzionale  $\{u\}$  è estesissimo e le condizioni cui deve soddisfare una funzione per appartenere ad esso sono quasi quelle sole che occorrono perchè abbia senso l'integrale  $I(u)$ . In particolare non si richiede alle funzioni del campo

\*) Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktionen, pag. 67. — Vedi pure PICARD, *Traité d'Analyse*, tome II, pp. 56-57.

\*\*) Cfr. HEDRICK, Inaug.-diss. citata, pag. 73.

$\{u\}$  di aver derivate determinate rispetto alla  $x$  e alla  $y$  in ogni punto di  $\Gamma$ , e solo di soddisfare alla relazione

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx = u(x_1, y) - u(x_0, y)$$

sulle rette  $y = \text{cost.}$  convenientemente generiche; e all'analogia, collo scambio delle lettere  $x, y$ .

È questa l'unica condizione in qualche modo inessenziale alla questione.

Ma quando si pone ordinariamente il problema di DIRICHLET, il campo funzionale cui ci si riferisce è assai più ristretto: per lo meno si chiede che *le funzioni del campo ammettano derivata in ogni punto.* Voglio qui rilevare come, quando tal condizione sia imposta al campo funzionale, cui si suppone appartenere la  $u$ , la condizione (3) prende un valore essenziale in quanto:

*Fra le funzioni del campo  $\{u\}$  — che in ogni punto di  $\Gamma$  hanno derivate determinate rapporto ad  $x$  e ad  $y$ , assumono su  $c$  i valori di  $u(s)$ , e per cui ha senso l'integrale  $I(u)$ , ma che non sono legate alla condizione (3) e all'analogia in  $y$  — non ne esiste una che all'integrale  $I(u)$  faccia assumere il valore limite inferiore dei valori ch'esso assume per tutte le funzioni di  $\{u\}$ .*

**51.** Premettiamo un'osservazione: *l'integrale  $I(u)$  non può esser nullo per alcuna funzione di  $\{u\}$  che non sia  $u = \text{cost.}$*  Questa funzione è esclusa evidentemente dal campo funzionale considerato se non è  $u(s) = \text{cost.}$

Invero da  $I(u) = 0$  segue che

$$\int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy = \int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0$$

e quindi che tanto  $\frac{\partial u}{\partial x}$  quanto  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sono nulle in ogni punto di  $\Gamma$ , ad eccezione, al più, per i punti di un aggregato di misura (superficiale) nulla. Di qui ancora, sopra ciascuna retta  $y = \text{cost.}$ , fatta eccezione al più per quelle di un aggregato di misura nulla, è  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  in ogni punto, fatta eccezione al più per un aggregato di punti di misura (lineare) nulla. Analogamente per la  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , previo lo scambio delle lettere  $x, y$ .

Ora, ho dimostrato altrove \*) che se una funzione ha derivata determinata ovunque, e nulla per tutti i valori della variabile ad eccezione al più per quelli di un aggregato di misura nulla, tal derivata è nulla senza eccezione per tutti i valori della variabile. Dunque la nostra funzione  $u$  è costante su tutte le rette  $x = \text{cost.}$  e su tutte le rette  $y = \text{cost.}$ , fatta al più eccezione, rispetto a ciascuno di questi sistemi di rette, per un aggregato di misura nulla. Il dubbio di tale eccezione si elimina subito; sia infatti  $x = x_0$  una retta sulla quale la  $u(x_0, y)$  sia costante,  $x = x_1$  un'altra qualunque retta del primo sistema. Poichè, per tutti gli  $y$  che non appartengono ad un determi-

\*) *Ricerche sulle funzioni derivate*, loco citato, n° 6, p. 682.

nato aggregato di misura nulla  $u(xy)$  è costante, rispetto alla  $x$  variabile, sarà per tutti questi  $y$ ,  $u(x_1 y) = u(x_0 y)$ ; quindi  $u(x_1 y)$  è anch'essa costante rispetto alla  $y$  variabile, fatta al più eccezione per un aggregato di misura nulla di valori di  $y$ . Allora, riapplicando la proposizione ricordata pocanzi si conclude che  $u(x_1 y)$  è costante assolutamente, ed uguale a  $u(x_0 y)$ .

52. Dopo ciò sarà provata la proposizione finale del n° 50 se mostreremo che, mediante funzioni  $u$  di  $\{u\}$  si può far assumere a  $I(u)$  valori arbitrariamente piccoli, il cui limite inferiore è quindi zero. Si riuscirà a ciò modificando leggermente l'esempio dei n° 6 e 7, in modo da sostituire alla  $f(xy)$  del n° 7 una funzione che abbia, rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$ , la derivata in ogni punto.

Si consideri ancora la funzione  $\psi(x; n)$  definita al n° 6. Si chiamino punti  $C$  i punti limiti di successioni di punti  $B$  aventi la stessa ascissa: con tutta precisione, indicato con  $N$  un gruppo qualunque di  $v$  indici formato coi numeri  $1, 2, \dots, n$ , dei quali i due ultimi non siano entrambi  $1$  si ponga

$$C_N^{(v-1)} = \lim (B_N^{(v-1)}, B_{N_1}^{(v)}, B_{N_{11}}^{(v+1)}, \dots).$$

Si indichi inoltre con  $N_0$  il gruppo che risulta da  $N$  diminuendo di un'unità l'ultimo indice, se questo è  $> 1$ , e sopprimendolo se è  $= 1$ ; con  $v_0$  il numero degli indici del gruppo  $N_0$ . I segmenti rettilinei  $A_{N_0}^{(v_0-1)} C_N^{(v-1)}$  rappresentano i tratti di costanza della funzione  $\psi(x; n)$ . Si ponga

$$A_{N_0}^{(v_0-1)} \equiv (x_N \lambda_N), \quad C_N^{(v-1)} \equiv (\bar{x}_N \lambda_N),$$

e si chiami  $\chi_N(x; n)$  una funzione definita nell'intervallo  $x_N \dots \bar{x}_N$ , ed in esso continua e derivabile, con derivata in ogni punto, che può essere ovunque finita, ad eccezione dei due estremi  $x_N, \bar{x}_N$  ove la derivata — rispettivamente derivata a destra e a sinistra, poichè questi punti sono punti d'arresto per la  $\chi_N(x; n)$  — sia  $= \pm \infty$ ; si supponga inoltre che

$$\chi_N(x_N; n) = \chi_N(\bar{x}_N; n) = \lambda_N$$

e che la  $\chi_N(x; n)$  medesima dipenda ancora da un parametro  $\pi_N$  di cui si possa disporre in modo che, in tutto l'intervallo  $x_N \dots \bar{x}_N$ ,  $|\chi_N(x; n) - \lambda_N|$  resti piccolo a piacere, e sia  $\int_{x_N}^{\bar{x}_N} \left( \frac{d\chi_N}{dx} \right)^2 dx < \Pi(n) (\bar{x}_N - x_N)$  dove  $\Pi(n)$  è una costante qualunque (di cui si può disporre arbitrariamente).

Potrà servire a tal uopo per es. la funzione così definita \*):

\* ) Secondo la descrizione precedente delle proprietà essenziali della funzione  $\chi_N(x; n)$ , basta scegliere per essa una tale che la curva rappresentativa si distenda ad  $S$  sufficientemente appiattita fra i punti  $A_{N_0}^{(v_0-1)}, C_N^{(v-1)}$ . L'espressione qui indicata, eccessivamente artificiosa a tale scopo, soddisfa all'ulterior condizione che la funzione  $\varphi(x; n)$  definita, mediante la  $\psi(x; n)$  e le  $\chi_N(x; n)$ , nelle linee seguenti del testo soddisfi in ogni punto, non esclusi i punti di derivata infinita, alla condizione

$$\lim \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{in } x_N \dots \frac{x_N + \bar{x}_N}{2}, \quad \chi_N(x; n) &= \zeta_N + (x - x_N)^{\lambda(n)} \left[ 1 - \left( 2 \frac{x - x_N}{\bar{x}_N - x_N} \right)^{\pi_N} \right], \\ \text{in } \frac{x_N + \bar{x}_N}{2} \dots \bar{x}_N, \quad \chi_N(x; n) &= \zeta_N - (\bar{x}_N - x)^{\lambda(n)} \left[ 1 - \left( 2 \frac{\bar{x}_N - x}{\bar{x}_N - x_N} \right)^{\pi_N} \right], \\ \lambda(n) &= 1 - \frac{\log 2}{\log n + \log 2}. \end{aligned}$$

Si fissi ora arbitrariamente un numero  $\varepsilon$  e si scelga  $\pi_N$  in modo che

$$|\chi_N(x; n) - \zeta_N| < (\bar{x}_N - x_N) \varepsilon$$

e si consideri la funzione  $\varphi(x; n)$  continua, che in ogni intervallo  $x_N \dots \bar{x}_N$  coincide colla corrispondente  $\chi_N(x; n)$  e (conseguentemente) nell'aggregato complementare a questi intervalli coincide colla  $\psi(x; n)$ . La  $\varphi(x; n)$  ammetterà derivata determinata in ogni punto dell'intervallo di definizione  $0 \dots 1$ , e precisamente derivata infinita nei punti  $x_N, \bar{x}_N$  e nei loro punti di condensazione \*). Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d\varphi(x; n)}{dx} dx &= \sum_N \int_{x_N}^{\bar{x}_N} \frac{d\chi_N(x; n)}{dx} dx = 0, \\ \int_0^1 \left[ \frac{d\varphi(x; n)}{dx} \right]^2 dx &= \sum_N \int_{x_N}^{\bar{x}_N} \left[ \frac{d\chi_N(x; n)}{dx} \right]^2 dx < \Pi(n) \sum (\bar{x}_N - x_N) = \Pi(n). \end{aligned}$$

**53.** Ciò posto, si consideri di nuovo, come al n° 7, il campo  $\Gamma$  costituito dal rettangolo  $(1, 0)(-1, 0)(1, 1)(-1, 1)$ , colla medesima distribuzione di valori al contorno e si consideri la funzione  $f(x, y)$  definita in  $\Gamma$  colla stessa legge che al n° 7, ove solo si sostituisca la presente funzione  $\varphi$  alla  $\psi$  d'allora.

condizione che, per molti riguardi, deve considerarsi come completamento necessario all'ipotesi dell'esistenza della derivata in ogni punto. Cfr. in proposito la mia Nota: *Sulle funzioni che hanno derivata in ogni punto* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, s. V, vol. XV (2° sem. 1906)].

Per la  $\chi_N(x; n)$  qui definita si ha

$$\max |\chi_N(x; n) - \zeta_N| < \frac{1}{e} \frac{\pi_N}{\lambda(n)}$$

e quindi costantemente

$$|\chi_N(x; n) - \zeta_N| < \eta_N$$

tosto che si scelga

$$\pi_N < e \lambda(n) \eta_N.$$

Si ha inoltre

$$\int_{x_N}^{\bar{x}_N} \left( \frac{d\chi_N}{dx} \right)^2 dx = 2 \left( \frac{\bar{x}_N - x_N}{2} \right)^{2\lambda(n)-1} \left\{ \frac{\lambda^2(n)}{2\lambda(n) - 1} - \frac{2\lambda(n)[\lambda(n) + \pi_N]}{2\lambda(n) + \pi_N - 1} + \frac{[\lambda(n) + \pi_N]^2}{2\lambda(n) + 2\pi_N - 1} \right\},$$

espressione che tende a zero con continuità con  $\pi_N$  e si può quindi rendere  $< \Pi(n)(\bar{x}_N - x_N)$  scegliendo  $\pi_N$  sufficientemente piccolo.

\*) La limitazione imposta or ora al  $|\chi_N(x; n) - \zeta_N|$  ha precisamente per iscopo di permettere questa affermazione della derivabilità senza eccezione. Per soddisfare nel modo più ovvio alle maggiori condizioni di cui si parlò nella nota precedente, si potrà assegnare, al parametro  $\pi_N$  nella particolare funzione  $\chi_N(x; n)$  sopra definita, il medesimo valore per tutti quegli  $N$  per cui l'intervallo  $x_N \dots \bar{x}_N$  ha la stessa lunghezza.



Sarà:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy &= \int_0^{y_1} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_{y_1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy \\
 &= 2 \left[ \int_0^{y_1} \int_0^1 \left\{ \frac{f(0y) - 1}{f(0y_1) - 1} \left[ f(0y_1) \frac{d\varphi(1-x; n)}{d(1-x)} - 1 \right] + 1 \right\}^2 dx dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y_1}^1 \int_0^1 \left\{ f(0y) \frac{d\varphi(1-x; n)}{d(1-x)} \right\}^2 dx dy \right] \\
 &= 2 \left\{ \int_0^{y_1} \left[ \frac{f(0y) - 1}{f(0y_1) - 1} f(0y_1) \right]^2 dy \int_0^1 \left[ \frac{d\varphi(1-x; n)}{d(1-x)} \right]^2 dx \right. \\
 &\quad - 2 \int_0^{y_1} \frac{[f(0y) - 1][f(0y) - f(0y_1)]f(0y_1)}{[f(0y_1) - 1]^2} dy \int_0^1 \frac{d\varphi(1-x; n)}{d(1-x)} dx \\
 &\quad \left. + \int_0^{y_1} \left[ \frac{f(0y) - f(0y_1)}{f(0y_1) - 1} \right]^2 dy \int_0^1 dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y_1}^1 [f(0y)]^2 dy \int_0^1 \left[ \frac{d\varphi(1-x; n)}{d(1-x)} \right]^2 dx \right\} \\
 &< 2 \Pi(n) \left\{ \int_0^{y_1} \left[ \frac{f(0y) - 1}{f(0y_1) - 1} f(0y_1) \right]^2 dy + \int_{y_1}^1 [f(0y)]^2 dy \right\} \\
 &\quad + 2 \int_0^{y_1} \left[ \frac{f(0y) - f(0y_1)}{f(0y_1) - 1} \right]^2 dy.
 \end{aligned}$$

Tutte le funzioni da integrarsi sono qui  $< 1$ : dunque infine

$$\int_{\Gamma} \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy < 2 \Pi(n) + 2 y_1.$$

Similmente

$$\begin{aligned}
 &\int_1^1 \int \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dx dy \\
 &= 2 \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{f(xy_1) - 1 + x}{f(0y_1) - 1} \right]^2 \int_0^{y_1} \left[ \frac{d\varphi(1-y; m)}{d(1-y)} \right]^2 dy + [\varphi(1-x; n)]^2 \int_{y_1}^1 \left[ \frac{d\varphi(1-y; m)}{d(1-y)} \right]^2 dy \right\} dx \\
 &< 2 \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{f(xy_1) - 1 + x}{f(0y_1) - 1} \right]^2 + [\varphi(1-x; n)]^2 \right\} \Pi(m) dx \\
 &< 2 \int_0^1 \left\{ [f(xy_1) - 1 + x]^2 + [\varphi(1-x; n)]^2 \right\} \frac{\Pi(m)}{[f(0y_1) - 1]^2} dx \\
 &< 4 \frac{\Pi(m)}{[f(0y_1) - 1]^2}.
 \end{aligned}$$

Raccogliendo dunque

$$\int_{\Gamma} \int \Delta f dx dy < 2 \left\{ \Pi(n) + 2 \frac{\Pi(m)}{[f(0y_1) - 1]^2} + y_1 \right\}.$$

Ora si possono scegliere  $m, y_1$  \*) ,  $\Pi(n)$ ,  $\Pi(m)$  per modo che ciascuno degli addendi del 2° membro risulti piccolo a piacere, e risulti quindi arbitrariamente piccolo l'integrale di DIRICHLET calcolato nel campo  $\Gamma$  per la funzione  $f$ .

Torino, 23 agosto 1906.

BEPPO LEVI.

## TAVOLA DEI SEGNI.

Per comodità del lettore raccolgo i principali segni usati nel lavoro col significato con cui essi si ripetono. Osservo però che occasionalmente qualcuno di questi segni assume per brevi tratti del lavoro significato diverso, ma il nuovo significato è allora dichiarato esplicitamente e si conserva solo per numeri immediatamente connessi fra loro per situazione e per continuità di ragionamento.

$A$  area del campo;

$a = \pi r^2$  area del cerchio  $R$ ;

$c$  contorno di  $\Gamma$  (linea sulla quale sono dati i valori della funzione incognita);

$c_{\xi\eta\theta}$  curva omotetica di  $c$  rispetto al centro  $(\xi\eta)$  e al rapporto d'omotetia  $\frac{1}{1+\theta}$  (n° 15);

$c_\theta$  involuppo interno delle curve  $c_{\xi\eta\theta}$ ;

$\mathcal{Q}(xy|\theta)$  area omotetica di  $\Gamma$  rispetto al centro  $(xy)$  e al rapporto d'omotetia  $-\frac{1}{\theta}$  (n° 15);

$c(xy|\theta)$  curva omotetica di  $c$  rispetto al centro  $(xy)$  e al rapporto d'omotetia  $-\frac{1}{\theta}$  (n° 18);

$\Gamma$  campo del piano  $(xy)$  nel quale la funzione incognita deve soddisfare alla proprietà di minimo;

$\gamma_{\xi\eta\theta}$  campo interno a  $c_{\xi\eta\theta}$ ;

$\Gamma_\theta$  campo interno a  $c_\theta$ ;

$d$  limite inferiore di  $I(u)$  pei valori di  $u$  assegnati su  $c$ ;

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;$$

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\nabla(uv) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y};$$

$h$  limite superiore del rapporto fra un arco di  $c$  sufficientemente piccolo e la sua corda (n° 11);

\*) Si può fare in modo che la scelta di  $y_1$  si faccia indipendentemente dal valore di  $\Pi(m)$  prendendo  $y_1$  nell'aggregato di variabilità di  $\psi(1-y; m)$ ; nella contraria ipotesi la scelta di  $y_1$  e quella di  $\Pi(m)$  concorrono nella determinazione di  $f(0y_1) - 1$  e si legano quindi mutuamente.

$k = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_0}$ ,  $\varphi_0$  limite inferiore dell'angolo fra una corda di  $c$  e la tangente a  $r$  da un suo estremo (n° 18, 2ª nota);

$K = \frac{2}{\rho} \sqrt{4q^2 \Lambda + 6\rho^2}$  costante del campo  $\Gamma$  (n° 34);

$$I(u) = \int_{\Gamma} \int \Delta u dx dy;$$

$L$  lunghezza di  $c$ ;

$\Lambda$  corda massima di  $c$ ;

$M_i = v_{i+1} - v_i$  (n° 39);

$\mathfrak{M}$  limite superiore di  $|u(s)|$  e di  $|\mu|$ ;

$\mathfrak{A}$  limite superiore di  $\left| \frac{du(s)}{ds} \right|$ ;

$O$  centro di  $R$ ;

$p$  minima distanza di  $c$  dal centro di  $R$ ;

$q$  massima distanza di  $c$  dal centro di  $R$ ;

$Q = \frac{3\mathfrak{M}\rho}{a}(2 + \pi + h) + \mathfrak{A}hk$ , costante del problema (n° 19);

$R$  cerchio rispetto ai punti del quale  $c$  è convessa;

$r$  circonferenza di  $R$ ;

$\rho$  raggio di  $R$ ;

$R(xy|\theta)$  } figure omotetiche di  $R$  e di  $r$  rispetto al centro  $(xy)$  e al rapporto  $-\theta$  (n° 15);

$\mathfrak{B}'(xy|\theta)$  } area di  $R$  interna a  $\mathfrak{Q}(xy|\theta)$  (n° 15);

$\mathfrak{B}(xy|\theta)$  } area di  $R$  esterna a  $\mathfrak{Q}(xy|\theta)$  (n° 15);

$\mathfrak{B}^*(xy|\theta)$  differisce da  $\mathfrak{B}(xy|\theta)$  per un aggregato di misura superficiale nulla. — Cfr., per la più esatta definizione, n° 22 a.

$T = 4L\Lambda \mathfrak{A}^2 k^2$ , costante del problema (n° 28);

$\{u\}$  campo funzionale (n° 4);

$U(xy|\theta)$  funzione mediatrice di  $u$  rispetto al numero  $\theta$  (n° 15);

$v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$  funzione soddisfacente alla condizione di minimo (n° 38);

$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\rho}{q}$ ,  $\cos \frac{1}{2} \psi = \frac{\rho}{p}$  (n° 10).