L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE RISOLVENTE DELL'EQUAZIONE TRINOMIA.

Nota di **Giuseppe Belardinelli** (Bologna).

Adunanza del 23 luglio 1922.

Il Sig. RICHARD BIRKELAND ha dato, in recenti note [1]), gli sviluppi in serie delle radici di un'equazione algebrica mostrando come queste radici possono esprimersi mediante funzioni ipergeometriche di più variabili [2]); in una recente nota [3]) ho indicato però come detti risultati siano contenuti in alcune note [4]) del compianto prof. CAPELLI, completate in una mia memoria [5]). Il Sig. MELLIN ha inoltre dimostrato [6]) come i risultati del BIRKELAND si deducono da quelli da lui dati in un lavoro sulle equazioni algebriche [7]).

---

[1]) R. BIRKELAND, *Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CLXXI (2nd semestre 1920), pp. 1370-1372; t CLXXII (1er semestre 1921), pp. 309-311].

R. BIRKELAND, *Sur la convergence des dévéloppements qui expriment les racines de l'équation algébrique par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CLXXII (1er semestre 1921), pp. 1155-1158].

[2]) P. APPELL, *Sur les fonction hypergéométriques de deux variables* [Journal de mathématiques pures et appliquées, série 3, t. VIII (1880), pp. 173-216].

[3]) G. BELARDINELLI, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante le funzioni ipergeometriche* [Rendiconti della R Accademia dei Lincei, serie 5a, vol. XXX, 2° semestre 1921, pp. 208-211].

[4]) A. CAPELLI, *Sulla risoluzione generale delle equazioni per mezzo di sviluppi in serie* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 3a, vol. XIII (1907), pp. 192-199, 289-294, 342-347].

[5]) G. BELARDINELLI, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie* [Annali di matematica pura ed applicata, serie 3a, t. XXIX (1920), pp. 251-270].

[6]) HJ. MELLIN, *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 172 (1er semestre 1921), pp. 658-661].

[7]) HJ. MELLIN, *Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen* [Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, serie A, tom. VII, N° 8 (1915), pp. 1-44].

Per mostrare la maggiore perspicuità del metodo semplice e naturale del CAPELLI e degli svolgimenti che ne ho dati nella ricordata memoria, tratterò quì il caso dell'equazione trinomia, considerato a parte dai ricordati autori [8]), [9]). Inoltre mostrerò come la radice di un'equazione trinomia può esprimersi mediante la somma di funzioni ipergeometriche generalizzate nel senso di GOURSAT [10]), chiamandosi con tal nome una funzione che è l'integrale regolare nell'intorno dell'origine dell'equazione differenziale lineare:

$$(1)\qquad x^n(x-1)\frac{d^n y}{dx^n}+(Ax+B)x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(Cx+D)x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots$$
$$\cdots+(Lx-M)\frac{dy}{dx}+Ny=0.$$

I coefficienti della serie $y=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$, che rappresenta questo integrale, sono legati dalla relazione

$$[m(m-1)(m-2)...(m-n+1)+A(m-1)(m-2)...(m-n+2)+\cdots+mL+N]c_m$$
$$-[(m+1)m(m-1)...(m-n+2)+B(m+1)(m-1)...(m-n+3)+\cdots+(m+1)M]c_{m+1}=0,$$

cioè, il rapporto fra un coefficiente ed il precedente è una funzione razionale dell'indice; il grado dei termini essendo n, come due è per la serie di GAUSS. Per modo che

$$\frac{c_{m+1}}{c_m}=\frac{(a_1+m)(a_2+m)\ldots(a_n+m)}{(m+1)(b_1+m)\ldots(b_{n-1}+m)},$$

essendo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ numeri fissi. Indicando con (λ, k) il prodotto $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\ldots(\lambda-k+1)$ e se $c_0=1$, si ha:

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_1, m)(a_2, m)(a_3, m)\ldots(a_n, m)}{(m+1)(b_1, m)(b_2, m)\ldots(b_{n-1}, m)}x^m,$$

che si indica anche simbolicamente con

$$y=F\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n\\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_{n-1}, & x\end{pmatrix}.$$

1. Sia data l'equazione trinomia della forma

$$(2)\qquad f(z)=z^n+az^p-b=0,$$

---

[8]) R. BIRKELAND, *Résolution de l'équation algébriqne trinome par des fonctions hypergéométriques supérieures* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 171 (2nd semestre 1920), pp. 778-781].

[9]) HJ. MELLIN, *Zur Theorie der trinomischen Gleichungen.* [Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, serie A., t. VII, n° 7 (1915), pp. 1-32].

[10]) E. GOURSAT, *Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* [Annales scientifique de l'École Normale Supérieure, serie 2ª, t. XII (1883), pp. 261-286, pp. 395-430].

che mediante la trasformazione $z = b^{\frac{1}{n}} y$, si trasforma nell'equazione

(3) $$f(y) = y^n + x y^p - 1 = 0,$$

ove $x = a b^{\frac{p}{n} - 1}$ e che per $x = 0$ si riduce all'equazione binomia

(4) $$\theta(y) = y^n - 1 = 0.$$

Indicando con $y = y(x)$ la radice dell'equazione (3) che per $x = 0$ assume il valore 1 e con y^s la potenza s-esima, si ha che:

$$y^s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} c_\alpha x^\alpha.$$

Per la teoria dei residui si ha anche che

$$y^s = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^s f'(z)}{f(z)} dz,$$

dove l'integrale è esteso ad un cerchietto circondante la radice uno e percorso nel senso positivo.

Ora

$$y^s = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^s \left(\theta'(z) + p x z^{p-1}\right)}{\theta(z)\left(1 + [\theta(z)]^{-1} x z^p\right)} dz,$$

e potendosi scegliere il modulo di $x\left(\theta(z)\right)^{-1}$ minore d'uno, si ha essendo

$$\frac{1}{1 + [\theta(z)]^{-1} x z^p} = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(-\theta(z)\right)^{-\alpha} z^{p\alpha} x^\alpha$$

e per la sua uniforme convergenza, mediante semplice calcolo, che:

$$y^s = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left[\frac{(-1)^\alpha}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_c z^{p\alpha+s} \left(\theta(z)\right)^{-\alpha} dz\right] x^\alpha$$

ed

(5) $$y^s = 1 + \frac{s}{n} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha} \binom{\frac{p\alpha + s}{n} - 1}{\alpha - 1} x^\alpha.$$

Osservando che

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!, \quad \Gamma\left(\frac{p\alpha+s}{n}\right) = \left(\frac{p\alpha+s}{n} - 1\right)\left(\frac{p\alpha+s}{n} - 2\right) \cdots \left(\frac{p\alpha+s}{n} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{p\alpha+s}{n} - \alpha\right)$$

e che ponendo $q = n - p$

$$\Gamma\left(\frac{s + p\alpha}{n} + 1 - \alpha\right) = \Gamma\left(1 + \frac{s - q\alpha}{n}\right) = \left(\frac{p\alpha + s}{n} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{p\alpha + s}{n} - \alpha\right)$$

si ha che la (5) può anche scriversi

(6) $$y^s = \frac{s}{n} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} (-1)^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{p\alpha + s}{n}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma\left(1 + \frac{s - q\alpha}{n}\right)} x^\alpha,$$

serie ritrovata dal MELLIN nella memoria citata [11]). Precisamente questi parte dall'integrale

$$\int_0^\infty y^s x^{z-1} dz = \frac{s}{n} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{s-pz}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+qz}{n}+1\right)}$$

e mediante l'operazione d'inversione degli integrali definiti [12]) ed applicando la teoria dei residui determina la serie (6).

Le altre $n-1$ radici dell'equazione (3) si possono ottenere osservando che se $y=y(x)$ è la detta radice dell'equazione trinomia (3) anche $t=\varepsilon y(\varepsilon^p x)$ è una radice, ove $\varepsilon^n=1$, perchè

$$\big(\varepsilon y(x)\big)^n + \varepsilon^{-p} x \big(\varepsilon y(x)\big)^p - 1 = 0.$$

Inoltre le radici dell'equazione trinomia

$$y^n + xy^p + 1 = 0,$$

a cui possono ridursi tutte quelle della forma

$$y^n + ay^p + b = 0,$$

possono farsi dipendere dalla $y=y(x)$ considerata; sostituendo infatti ad y nella (3) $y = e^{\frac{\pi i}{n}} y(-xe^{\frac{p\pi i}{n}})$, si ha:

$$e^{\pi i}\{y(-xe^{\frac{p\pi i}{n}})\}^n + xe^{\frac{p\pi i}{n}}\{y(-xe^{\frac{p\pi i}{n}})\}^p - 1 = 0$$

ed

$$\{y(-xe^{\frac{p\pi i}{n}})\}^n + (-xe^{\frac{p\pi i}{n}})\{y(-xe^{\frac{p\pi i}{n}})\}^p + 1 = 0,$$

si può dunque limitarsi alla radice $y=y(x)$ della (3) ed analogamente si otterrebbe quanto segue per le altre radici.

Indicando la (6) con $y^s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} c_\alpha x^\alpha$, si avrà:

$$c_{\alpha+n} = \frac{(-1)^{\alpha+n}}{\alpha+n} \binom{\frac{p(\alpha+n)+s}{n}-1}{\alpha+n-1},$$

che può scriversi

$$(-1)^{\alpha+n}(\alpha+n)!\,c_{\alpha+n} = \prod_{r=1}^{r=\alpha+n-1}{}' \left(\frac{p\alpha+s}{n} - r + p\right) \tag{7}$$

---

[11]) Loc. cit. [9]), pag. 22.

[12]) S. PINCHERLE, *Sull'inversione degli integrali definiti* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, t. XV (1908), pp. 3-43].

e per c_α si avrà

$$\alpha!(-1)^\alpha c_\alpha = \prod_{r=1}^{r=\alpha-1}\left(\frac{p\alpha+s}{n}-r\right);$$

ed entrando i fattori che compongono c_α anche in $c_{\alpha+n}$ si ha che

$$(-1)^{\alpha+n}(\alpha+n)!\,c_{\alpha+n} = (-1)^\alpha\alpha!\,c_\alpha\prod_{k=1}^{k=p}\left(\frac{p\alpha+s}{n}+k-1\right)\prod_{h=1}^{h=q}\left(\frac{s-q\alpha}{n}-h+1\right),$$

essendo come sopra $q = n - p$, come risulta dallo sviluppo (7).

Si consideri l'operazione

$$\left(x\frac{d}{dx}+\rho\right),$$

ove

$$\rho = \frac{s-nv}{p}, \qquad (v = 0, 1, \ldots, p-1)$$

applicata a $c_\alpha x^\alpha$, si ottiene:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\rho\right)c_\alpha x^\alpha = \left(\frac{p\alpha+s}{n}+v\right)c_\alpha x^\alpha$$

e

$$\frac{p}{n}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{s+nv}{p}\right)c_\alpha x^\alpha = \left(\frac{p\alpha+s}{n}+v\right)c_\alpha x^\alpha \qquad (v = 0, 1, \ldots, p-1)$$

e

$$-\frac{q}{n}\left(x\frac{d}{dx}-\frac{s-nv}{p}\right)c_\alpha x^\alpha = \left(\frac{s-q\alpha}{n}-v\right)c_\alpha x^\alpha, \qquad (v = 0, 1, \ldots, q-1)$$

per modo che

$$(-1)^{\alpha+n}(\alpha+n)!\,c_{\alpha+n}x^\alpha$$
$$= (-1)^\alpha\alpha!\frac{(-1)^p p^p q^q}{n^n}\prod_{v=0}^{v=p-1}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{s-nv}{p}\right)\prod_{v=0}^{v=q-1}\left(x\frac{d}{dx}-\frac{s-nv}{q}\right)c_\alpha x^\alpha,$$

od anche

$$\frac{d^n c_{\alpha+n}x^{\alpha+n}}{dx^n} = (-1)^p\frac{p^p q^q}{n^n}\prod_{v=0}^{v=p-1}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{s-nv}{p}\right)\prod_{v=0}^{v=q-1}\left(x\frac{d}{dx}-\frac{s-nv}{q}\right)c_\alpha x^\alpha$$

e quindi otteniamo l'equazione differenziale, per la $y^s = [y(x)]^s$,

$$(8) \quad \frac{d^n[y(x)]^s}{dx^n} = (-1)^p\frac{p^p q^q}{n^n}\prod_{v=0}^{v=p-1}\left(x\frac{d}{dx}+\frac{s-nv}{p}\right)\prod_{v=0}^{v=q-1}\left(x\frac{d}{dx}-\frac{s-nv}{q}\right)[y(x)]^s,$$

equazione differenziale che da alcuni autori viene chiamata equazione differenziale risolvente dell'equazione trinomia, e fu determinata per primo da HARLEY [13]) e poi da

---

[13]) R. HARLEY, *On the Theory of the Trascendental Solution of Algebraic Equations* [Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, vol. V (1862), pp. 152-170].

HEYMANN [14]) mediante induzione. Ora si ha:

$$x^n \frac{d^n y^s}{dx^n} = (-1)^p \frac{p^p q^q}{n^n} x^n \prod_{v=0}^{v=p-1} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{s-nv}{p}\right) \prod_{v=0}^{v=q-1} \left(x \frac{d}{dx} - \frac{s-nv}{q}\right) y^s$$

e ponendo

$$x^n = t \frac{(-1)^p n^n}{p^p q^q},$$

si ha:

$$t^{n-1} \frac{d^n y^s}{dt^n} = \prod_{v=0}^{v=p-1} \left(t \frac{d}{dt} + \frac{s-nv}{pn}\right) \prod_{v=0}^{v=q-1} \left(t \frac{d}{dt} - \frac{s-nv}{qn}\right) y^s, \tag{9}$$

equazione del tipo (1), studiato da GOURSAT come tipo generale di un'equazione differenziale ipergeometrica d'ordine n.

Quindi la $y^s = [y(x)]^s$, considerata come funzione di t, essendo $x^n = \frac{(-1)^p n^n}{p^p q^q} t$, è una funzione ipergeometrica e rientra quindi nello studio di queste funzioni.

Essendo

$$y^s = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{m=0}^{m=\infty} c_{mn+r} x^{mn+r},$$

e risultando che

$$\frac{c_{(m+1)n+r}}{c_{mn+r}} = \frac{(-1)^p p^p q^q}{n^n} \frac{\prod_{v=0}^{v=p-1} \left(mn + r + \frac{s+nv}{p}\right) \prod_{r=0}^{v=q-1} \left(mn + r - \frac{s-nv}{q}\right)}{(mn+r+1)(mn+r+2)\dots(mn+r+n)},$$

si ha anche che:

$$\frac{c_{(m+1)n+r}}{c_{mn+r}} = \frac{\prod_{v=0}^{v=p-1} \left(m + \frac{r}{n} + \frac{s+nv}{pn}\right) \prod_{v=0}^{v=q-1} \left(m + \frac{r}{n} - \frac{s-nv}{qn}\right)}{\left(m+\frac{r+1}{n}\right)\left(m+\frac{r+2}{n}\right)\dots\left(m+\frac{n-1}{n}\right)(m+1)\left(m+\frac{n+1}{n}\right)\dots\left(m+\frac{r+n}{n}\right)},$$

si ha dunque ponendo $c_0 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y^s = \sum_{r=0}^{r=n-1} c_r x^r \times \\ \times F\left(\begin{array}{l} \frac{r}{n} + \frac{s}{pn}, \frac{r}{n} + \frac{s+n}{pn}, \dots, \frac{r}{n} + \frac{s+n(p-1)}{pn}, \frac{r}{n} - \frac{s}{qn}, \dots, \frac{r}{n} - \frac{s-n(q-1)}{qn} \\ \frac{r+1}{n}, \frac{r+2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{r+n}{n}, \qquad t \end{array}\right). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Cioè la radice di un'equazione trinomia si può esprimere mediante una funzione

---

[14]) W. HEYMANN, *Studien über die Transformation und Integration der Differential und Differenzengleichungen* (Leipzig, Foch, 1891).

ipergeometrica generalizzata da GOURSAT come dall'equazione differenziale o mediante una somma di funzioni ipergeometriche.

2. Il Sig. BIRKELAND, considerando l'equazione

$$\alpha f(y) - y + 1 = 0, \tag{11}$$

ottiene lo sviluppo in serie delle radici di questa equazione applicando il classico sviluppo di LAGRANGE.

Nel caso dell'equazione trinomia pone $f(y) = y^{\frac{n}{n-1}}$ e $z = y^{-\frac{1}{n-1}}$ ed $x = \alpha$ ed ottiene l'equazione

$$z^n = z - x,$$

ricavando le radici in serie di potenze di x.

È chiaro come ogni equazione trinomia si possa trasformare nella forma

$$y^n + y + x = 0$$

ed inoltre che per la risoluzione si può limitarsi alle soluzioni dell'equazione

$$y^n - y + x = 0$$

e precisamente a quella che per $x = 0$ assume il valore uno.

Infatti, essendo $\varepsilon^{n-1} = 1$, si ha:

$$(\varepsilon^{n-1} z)^n - \varepsilon^{1-n}(\varepsilon^{n-1} z) + x = 0$$

e ponendo $\varepsilon^{n-1} z = \varepsilon^{-1} y$ si ha anche

$$\varepsilon^{-n} y^n - \varepsilon^{1-n}(\varepsilon^{-1} y) + x = 0$$

ed

$$y^n - y + x\varepsilon^n = 0,$$

cioè, $y = y(x\varepsilon^{-n})$ darà le $n - 1$ radici richieste, la rimanente si otterrà osservando che la loro somma è uguale allo zero.

Inoltre, le radici dell'equazione

$$y^n + y + x = 0,$$

si ottengono da quelle della $y^n - y + x = 0$ osservando che, se $y = y(x)$ è una radice di questa equazione, mediante la trasformazione $y = e^{\frac{\pi i}{n-1}} z$, questa equazione si trasforma in

$$z^n + e^{\frac{\pi i}{n}} z - x = 0,$$

e ponendo $z = e^{\frac{\pi i}{n(n-1)}} t$, si ha che l'equazione si trasforma in

$$t^n + t - x e^{-\frac{\pi i}{n-1}} = 0$$

e quindi $t = t(-e^{\frac{\pi i}{n-1}} x)$ darà le radici dell'equazione in discorso.

Dunque anzichè determinare per ogni radice uno sviluppo in serie basta considerare lo sviluppo in serie della radice dell'equazione

$$f(z) = z^n - z + x = 0$$

che per $x = 0$ assume il valore uno, analogamente al caso trattato precedentemente.

Ed applicando il metodo tenuto nella prima parte possiamo determinare anche lo sviluppo in serie di potenze di x per una potenza s-esima di questa radice.

Si ha infatti

$$y^s = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z^s f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

essendo c un cerchietto che circonda la radice uguale ad uno, per modo che non vi cada internamente nessun'altra radice dell'equazione $y^n - y = 0$, e l'integrale esteso a questo cerchietto percorso in senso positivo. Si avrà con calcolo analogo a quello fatto nella prima parte

$$y^s = 1 + s\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left[\frac{(-1)^\alpha}{\alpha}\,\frac{1}{2\pi i}\int_c z^{s-1-\alpha}(z^{n-1} - 1)^{-\alpha}\, dz\right]x^\alpha,$$

da cui

$$y^s = 1 + \frac{s}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha}\binom{\frac{s-\alpha}{n-1} - 1}{\alpha - 1}x^\alpha,$$

od anche

$$y^s = 1 + \frac{s}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\frac{-1}{\alpha}\binom{\frac{n(\alpha-1) - s + 1}{n-1}}{\alpha - 1}x^\alpha. \tag{12}$$

E scrivendo brevemente $y^s = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} c_\alpha x^\alpha$, si ha che:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{c_{(m+1)(n-1)+r}}{c_{m(n-1)+r}} = \frac{(-1)^n n^n}{(n-1)^{n-1}}\,\frac{m + \frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n-1} + \frac{1}{n}}{m+1}\,\cdot \\ &\cdot\frac{m + \frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n-1} + \frac{2}{n}}{m + \frac{r+1}{n-1}} \cdots \frac{m + \frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-1}{n}}{m + \frac{n-1+r}{n-1}}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

onde ponendo

$$\frac{(-1)^n n^n}{(n-1)^{n-1}}x^{n-1} = t,$$

si ha anche

$$y^s = \sum_{r=0}^{r=n-2} c_r x^r F\left(\begin{matrix}\frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n-1} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \\ \frac{r+1}{n-1}, \ldots, \frac{n-1+r}{n-1}, t\end{matrix}\right), \tag{14}$$

da cui per $s = 1$ si ottengono gli sviluppi ottenuti dal Sig. BIRKELAND e dal rapporto (13) si formerebbe facilmente l'equazione differenziale risolvente.

Infine, si può osservare che per la risoluzione di un'equazione generale, sia il Sig. BIRKELAND che il sig. MELLIN, considerano l'equazione nella forma

$$(15) \qquad y^n + x_{n-1} y^{n-1} + x_{n-2} y^{n-2} + \cdots + x y^n - 1 = 0$$

ed ottengono le radici di questa equazione in serie di potenze di $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Per detta equazione col metodo tenuto per l'equazione trinomia si avrebbe, per la potenza s-esima della radice, che per $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 0$ assume il valore uno,

$$(16) \qquad \begin{cases} y^s = 1 + \sum_{\alpha > 0} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \\ = 1 + \frac{s}{n} \sum_{\alpha > 0} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{\beta + s}{n} - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \end{cases}$$

ove $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} = \alpha$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}$ e la sommatoria è estesa a tutti i valori di α interi positivi o nulli qualsivogliano, da questa serie inoltre possono dedursi le serie per le altre radici.

Definendo, come si fa da molti autori [15]), funzioni ipergeometriche di più variabili quelle che sviluppate in serie come la (16) hanno i rapporti

$$\frac{C_{\alpha_1+1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}}}{C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}}}, \quad \frac{C_{\alpha_1, \alpha_2+1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}}}{C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}}}, \ldots, \frac{C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}+1}}{C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}}}$$

funzioni razionali dell'indice n, si vede che può la y^s porsi sotto la forma di somma di funzioni ipergeometriche di più variabili.

Non solo ma il CAPELLI ha dato gli sviluppi in serie delle radici di un'equazione

$$(a_n + p_n) y^n + (a_{n-1} + p_{n-1}) y^{n-1} + \cdots + (a_0 + p_0) = 0$$

[15]) I. KAMPÉ DE FÉRIET, *a) Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie de sciences, t. 172 (1er semestre 1921), pp. 1634-1636]; *b) Sur certaines systèmes associés d'équations aux differences finies et d'équations aux derivées partielles linéaires* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 173 (2nd semestre 1921), pp. 285-288]; *c) Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 173 (2nd semestre 1921), pp. 401-404]; *d) Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 173 (2nd semestre 1921), pp 489-491]; *e) Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux derivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t 173 (2nd semestre), pp. 900-902], e vedasi anche APPELL, memoria citata [2]).

in serie di potenze di $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_0$, conoscendo le radici dell'equazione

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

i coefficienti di questi sviluppi in serie sono funzioni ipergeometriche generalizzate nel senso di POCHHAMMER [16]), come ho mostrato nella mia memoria [17]), da cui discende la loro formazione particolare per l'equazione trinomia e per l'equazione (15).

Jesi, gennaio 1922.

GIUSEPPE BELARDINELLI.

[16]) L. POCHHAMMER, *Ueber hypergeometrische Functionen* n^{ter} *Ordnung* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 71 (1870), pp. 316-352].

[17]) Loc. cit. [5]), pag. 262.