RIVENDICAZIONI GIUSTE, PER QUANTO TARDIVE.

Nota di **Michele de Franchis** (Palermo).

Estratto dal tomo LX (1936-XIV) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 24 gennaio 1937 - XV.

1. Nel n° 2 (11 gennaio 1937) del tomo 204 dei Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, a pag. 92, trovo una Nota del sig. MAX EGER, dal titolo: *Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique,* la lettura della quale mi dà finalmente l'impulso a mettere in esecuzione un divisamento che ho fatto da lunghissimo tempo, cioè ogni qualvolta (e ciò è spesso avvenuto) ho trovato in lavori geometrici, in mezzo al dilagare delle citazioni magari sforzate, passare sotto silenzio risultati miei, talvolta più generali. Fin quì, a questo divisamento ho finito sempre col rinunziare, per tante ragioni, tra le quali il convincimento che si trattasse di casi di omissione in buona fede (dovuti al poco rilievo che io ho dato a risultati e metodi, attorno ai quali avrei invece potuto e forse dovuto soffermarmi e tornare, così come suole usarsi).

In principio della predetta Nota, è detto che il suo scopo è di « definire su una varietà algebrica, V_n, a n dimensioni, dei sistemi d'equivalenza di varietà canoniche delle differenti dimensioni... che generalizzano per le superficie la serie canonica ψ di SEVERI, per le V_3 i sistemi $\mathfrak{X}$ ed $\mathfrak{Y}$ introdotti da B. SEGRE, e per una V_n qualunque il classico sistema canonico ad n dimensioni ».

Nel n° 1 intanto l'Autore considera su una varietà V_n a n dimensioni $\lambda+1$ fasci, in mutua posizione generica, le cui curve sian di livello per certe funzioni u_0, $u_1, \ldots, u_\lambda$ del punto di V_n. Considera allora la varietà, che vien designata con $\{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$, luogo dei punti di V_n ove esiste uno spazio comune tangente a $n-\lambda$ dimensioni, e l'Autore ricorda che è evidente che essa si ottiene annullando la matrice jacobiana delle u rispetto a un sistema di n variabili indipendenti uniformizzanti locali di V_h.

Nel cortissimo n° 6 (ed ultimo) della mia troppo breve Nota: *Intorno al significato di alcuni caratteri delle varietà algebriche,* pubblicata l'anno 1932 nel t. LVI dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (pp. 223-227), io dico: « Se invece di considerare superficie, si considerano varietà V_k a k dimensioni, si hanno risultati analoghi: per esempio, se si considerano sulla V_k k fasci lineari di varietà $(C_1), \ldots, (C_k)$ di varietà a $k-1$ dimensioni, che siano cioè gli insiemi delle varietà di livello per k funzioni razionali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, e si denotano con $u_1, u_2, \ldots, u_k$ le variabili indipendenti mediante le quali si esprimono parametricamente i punti di un intorno, la considerazione dell'jacobiano $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(u_1, \ldots, u_k)}$, il quale ha per varietà nulla la varietà $\Omega_{C_1,\ldots,C_k}$, luogo dei punti ove varietà di $(C_1), \ldots, (C_k)$ hanno una medesima retta tangente, e per varietà polari quelle di $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ prese doppiamente, mostra che

$$\Omega_{C_1,\ldots,C_k} = 2(C_1 + \cdots + C_k) + K,$$

essendo K una varietà canonica (varietà nulla di un differenziale k-plo di 1ª specie)».

Ora questo risultato, se non erro, è più generale di quello che pare venga adombrato dell'Autore; Il metodo è poi lo stesso. Che il mio risultato sia più espressivo è senz'altro esplicito per $n = k$, e per $n > k$ non è meno evidente. Basta infatti, per il semplice enunciato del n° 1 della Nota del sig. EGER, considerare sulla V_n un sistema qualunque di V_k. Questo metodo anzi permette di ricavare (oltre risultati molto più generali) quello del n° 2 della Nota del sig. EGER. Questo enuncia che, nel caso che la V_n possieda un'irregolarirà superficiale $a \geqq k+1$, se si prendono per funzioni u $k+1$ integrali semplici di prima specie, la varietà luogo dei punti ove i fasci di varietà di livello costante per gl'integrali u hanno un medesimo spazio tangente ad $n-k$ dimensioni, è una *varietà canonica a k dimensioni*. Ora ciò è una immediata conseguenza dell'equivalenza già riportata testualmente dal n° 6 della mia citata Nota e, se ce ne fosse bisogno (il che non è, perchè evidente), potrebbe servire a provare che $du_1 du_2 \ldots du_k$ è, su tutta V_n, un differenziale $(k+1)$-plo di prima specie. Del resto, è anche conseguenza immediata di quest'ultimo fatto.

2. Consideriamo un'*espressione algebrico-differenziale k-pla sopra una varietà algebrica* V_n, cioè un'espressione del tipo $\sum A_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$, ove le $A_{i_1\ldots i_k}$ sono funzioni razionali delle coordinate cartesiane $x_1, x_2, \ldots$ del punto generico della $V_n (n \geqq k)$.

Se entro la V_n si considera una V_h $(n \geqq h \geqq k)$, sulla quale dunque gli n parametri uniformizzanti un intorno di V_n sono funzioni di h parametri, la nostra espressione si riduce ad un'espressione algebrico-differenziale k-pla su V_h, che diremo la *traccia* della data espressione differenziale U_k su V_h. Se si considera la varietà (algebrica) nulla della data espressione U_k su V_n, cioè la varietà sulla quale si annullano tutti i coefficienti della U_k *espressa però negli n parametri uniformizzanti locali indipendenti,* è evidente che l'intersezione di questa varietà con la varietà V_h contenuta in V_n è contenuta dalla varietà nulla della traccia di U_k su V_h.

In simboli, denotando con $T(U_k)/V_h$ la traccia di U_k su V_h, con $P.Q$ l'intersezione di due varietà P, Q e con $N(E)$ la varietà nulla di un'espressione E, si ha che $N(U_k).V_h$ è contenuta in $N(T(U_k)/V_h)$.

Diremo che le varietà nulle di due espressioni algebrico-differenziali U_k, Y_k sulla varietà V_n sono *semiequivalenti,* se le varietà nulle delle traccie di U_k, Y_k su qualsiasi varietà a k dimensioni contenuta in V_n sono due varietà (a $k-1$ dimensioni) equivalenti (linearmente) sulla V_k su cui si è fatta la traccia.

Si ha subito dalla definizione che

Se le espressioni algebrico-differenziali k-ple U_k, Y_k sono di prima specie (cioè soddisfano alle condizioni d'integrabilità e sono regolari ovunque) le loro varietà nulle sono semiequivalenti.

Una espressione algebrico-differenziale o-pla U_0 è in particolare una funzione razionale e la traccia della sua varietà nulla su una V_h generica contenuta in V_n $(h = 1, 2, \ldots, n)$ è l'intersezione della varietà nulla V_{n-1} con la V_h ed è una V_{h-1}. Per queste varietà, la semiequivalenza coincide con la equivalenza.

Per le varietà nulle di espressioni algebrico-differenziali *semplici,* cioè di espressioni U_1, la semiequivalenza coincide con l'equivalenza [di tipo elementare [1])] se tali varietà hanno effettivamente la dimensione zero, cioè se le condizioni di annullamento dei coefficienti differenziali sono indipendenti.

Analoga proprietà vale per le varietà nulle di espressioni algebrico-differenziali $(n-1)$-ple su varietà V_n, semprechè esse siano di dimensione effettiva zero.

Lasciamo in sospeso la ricerca di altri casi nei quali la semiequivalenza coincide con l'equivalenza, ciò che accade sempre per le espressioni algebrico-differenziali n-ple su una V_n, il che è conseguenza banale della definizione. Resta, a parte di ciò, però stabilito che nel mio lavoro citato si trovano già i risultati e le idee enunciati dal sig. EGER.

3. Fin da principio ho detto che io sono il primo a dare colpa a me stesso di infortuni di questo genere, e, nel caso della Nota del sig. EGER, sono perfettamente persuaso che il silenzio sui miei risultati è in perfetta buona fede e dovuto al fatto che nella mia Nota, più che insistere sulla originalità del metodo, che si presta anche per varietà non algebriche, e che non è se non un perfezionamento del *mio* modo di introdurre i noti legami funzionali messi in luce da ENRIQUES tra la serie jacobiana di una serie lineare, la serie stessa e la serie canonica, mi sono preoccupato principalmente di citare gli altri, che avevano il merito di avere prima enunciato risultati, dimostrati con metodi certamente meno adatti. Basterà ad esempio mettere in confronto la mia evidentissima dimostrazione del n° 2 della mia Nota citata, che cioè, se u, v, sono le variabili uniformizzanti un intorno di un punto di una superficie, ed $H(u, v)$

[1]) Nel senso, secondo la nomenclatura di SEVERI, che appartengono a serie d'equivalenza elementari.

una funzione tale che essa ed i suoi prolungamenti, ottenuti col cambiamento di variabili nell'espressione differenziale $H(u, v)(d u d v)^2$, sia ovunque olomorfa, la curva nulla di $H(u, v)$ (e dei suoi prolungamenti) è una curva bicanonica, con la dimostrazione che dello stesso fatto fa per via geometrico-proiettiva il KÄLER, che primo ebbe l'indiscusso merito di enunciare la proprietà [a]).

Così volli subito, con una « Restituzione di priorità » pubblicata immediatamente dopo quella mia Nota nello stesso volume dei Rendiconti, rimediare ad una involontaria dimenticanza, cioè a dichiarare che la proprietà che, su una superficie algebrica, la curva luogo dei punti di contatto delle curve di due fasci lineari appartiene al sistema somma dei doppi di quei fasci e del sistema canonico, era stata prima enunciata da SEVERI. Però, nella fretta di compiere questo dovere, non misi affatto in particolare rilievo che, nel lavoro di SEVERI, questa è una proprietà rilevata incidentalmente (in una nota a piè di pagina), mentre nel mio lavoro è parte integrante del mio metodo di ricerca dei caratteri invarianti. E sono sicuro che l'illustre SEVERI, della cui amicizia mi onoro, non avrebbe trovato inopportuna questa precisazione, nè, qualora io ne l'avessi pregato, avrebbe avuto difficoltà a dichiarare lealmente che nella Sua Memoria « La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica » (Commentarii mathematici Helvetici, vol. 4, 1932), al n° 11, Gli era sfuggito che l'esplicita enunciazione dei due « lemmi » che Egli dà, si trova, insieme con la dimostrazione fatta con mezzi semplicissimi, nella mia breve Nota: « Alcune osservazioni sulle superficie irregolari » (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 36, 1913, pp. 223-225).

4. Passiamo ad altri... infortuni. Nei Rendiconti del Seminario Matematico di Roma, serie IV, vol. I, fasc. 2, novembre 1936-XV, trovo una Memoria del Belga Sig. PIERRE DEFRISE intitolata « Sur les courbes multiples cycliques ». Lo scopo dichiarato in essa è d'introdurre « nello studio delle curve multiple cicliche una nuova nozione, *la similitudine* », che « permetterà di risolvere con maggior generalità e semplicità i problemi classici su queste curve ».

Le curve multiple cicliche sono, per chi non lo rammenti, curve su cui esista una trasformazione birazionale periodica T. L'operazione T e le sue potenze trasformano un punto generico P di una cotale curva C in n punti distinti, se n è il periodo di T. I gruppi di n punti così ottenuti formano un'involuzione ciclica di ordine n. Si può allora, come per qualunque altra involuzione, costruire una curva D, detta immagine dell'involuzione, in corrispondenza $(1, n)$ con la C, tale che ogni punto di D corrisponde ad un gruppo dell'involuzione. Se si assume su D una serie lineare completa g_s^r, ad essa corrisponde su C una serie lineare g_{ns}^r composta con l'involuzione; nel caso

[a]) E. KÄLER, *Forme differenziali e funzioni algebriche* [Memorie della Reale Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali, vol. III (1932-X), n° 3].

nostro, in ogni gruppo di tal serie è possibile scegliere un gruppo parziale, di s punti, tale che tutto il gruppo si ottiene da esso applicandovi la trasformazione T e le sue potenze.

La g_{ns}^{r} appartiene ad una serie completa g_{ns} di C mutata in sè dalle potenze dell'operazione T, questa (e le sue potenze) permuta fra loro i gruppi della suddetta serie e nell'ente lineare *serie* determina una omografia ciclica S. Gli spazi di punti uniti di questa costituiscono serie lineari del tipo precedente, composte con la involuzione, corrispondenti quindi a serie (complete) di ordine s sulla curva D immagine dell'involuzione. Ora due gruppi di due tali serie su D sono appunto, secondo la nomenclatura del sig. DEFRISE, *simili*. Sono equivalenti i due multipli secondo n di due gruppi simili su D. Il sig. DEFRISE che si occupa della determinazione di queste serie simili su D cita, al solito, ENRIQUES-CHISINI e COMESSATTI, ma dimentica di far notare che le funzioni a moltiplicatori dell'APPELL risolvono, oltre che le sue questioni, questioni più generali, come mostrò HURWITZ nel caso delle curve, e come ho mostrato io per varietà qualunque in due Note dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo dell'anno 1924 intorno alle varietà multiple cicliche. E lo strano è che egli citi un lavoro del COMESSATTI pubblicato nei Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, 1930-31, e dal titolo appunto: *Sulle superficie multiple cicliche,* ove sono citate quelle due mie Note, per quanto con una critica niente affatto sostanziale.

Quelle mie due Note sono passate nel dimenticatoio, per quanto, ripeto, si occupino di questioni più generali ed usino il metodo più spedito, e più adatto. Ma qui, interviene la preoccupazione del metodo più o meno *geometrico,* secondo le tendenze in voga. Spesso, si tratta di camuffare, sotto un linguaggio speciale ed inteso per *geometrico* i metodi naturali.

Così anche qui è questione di dare altra apparenza (meramente *formale*) al problema indissolubilmente e naturalmente legato alla questione, cioè alla divisione delle funzioni abeliane. Io, avendo seguito la via naturale, senza camuffamenti, ebbi il modo di risolvere il problema, anzi problemi più generali, in maniera semplice, ragione questa di seppellirmi sotto un silenzio sdegnoso.

5. Lasciamo da canto questo infortunio e passiamo ad altri più numerosi legati ai lavori da me e BAGNERA consacrati alle superficie iperellittiche.

Qui, perchè il lettore si faccia un'idea di ciò che è accaduto, occorrerà prima un poco di storia della questione.

Nel secondo semestre del 1905 l'Académie des Sciences poneva a concorso per il premio BORDIN la classificazione delle superficie iperellittiche, cioè di quelle superficie le cui coordinate del punto generico si lasciano esprimere come funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due argomenti u, v. Secondo ciò che era detto nel tema, si trattava principalmente del caso in cui al punto generico della superficie corrispondesse un numero r di coppie u, v incongrue a meno di periodi, numero r chiamato in seguito *rango* da ENRIQUES e SEVERI.

Usando per brevità questa, ormai usuale, nomenclatura, una cotale superficie Φ di rango r è immagine di un'involuzione di grado r su una superficie F di rango 1. Chiamiamo questa F *superficie di rango* 1 *collegata intrinsecamente alla data,* per distinguerla dalle infinite altre superficie di rango 1 le quali sono sostegni d'involuzioni i cui gruppi si possono far corrispondere ai singoli punti di questa superficie F, le quali superficie sono a loro volta sostegni di involuzioni (composte con le precedenti) immagini della data superficie Φ di rango r. In sostanza, la superficie F di rango 1 *intrinsecamente collegata* alla data Φ di rango r è la superficie i cui punti hanno per coordinate funzioni iperellittiche con *gli stessi periodi* di quelle relative alla data Φ.

Orbene ha luogo questo teorema che diremo *fondamentale*:

A meno che la superficie data Φ, *di rango* r, *non sia razionale od equivalente a rigata ellittica, l'involuzione sulla superficie* F *di rango* 1 *ad essa collegata intrinsecamente è generata da un gruppo di* r *trasformazioni birazionali di* F *in sè.*

Attorno a queste superficie lavorammo indipendentemente da un canto ENRIQUES e SEVERI, da un altro io e BAGNERA.

I lavori che riassumono queste ricerche (esposte anche in Note preventive) sono:

a) F. ENRIQUES et F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathematica, t. 32, 1909, pp. 283-392 e t. 33, 1910, pp. 321-403),

b) G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie 3ª, t. XV, 1908, pp. 251-343),

c) G. BAGNERA et M. DE FRANCHIS, *Le nombre* ρ *de* M. PICARD *pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXX, 2° semestre 1910, pp. 185-238).

Il teorema fondamentale fu dimostrato con considerazioni geometriche delicate ed ingegnose da ENRIQUES e SEVERI. Noi lo dimostrammo contemporaneamente con mezzi molto più semplici; ma per questa dimostrazione, ci occorse, almeno per quanto riguarda le superficie di genere aritmetico 1, una restrizione, inessenziale in base alla dimostrazione di ENRIQUES e SEVERI, ma che noi allora non potemmo togliere. Questa restrizione ho di recente dimostrato, con mezzi semplici ed adeguati all'indole della nostra trattazione, non essere sostanziale. Ma, all'epoca delle nostre ricerche, se si fosse voluto ignorare la dimostrazione di ENRIQUES e SEVERI, poteva rimanere il dubbio che, oltre alle superficie regolari di genere 1, iperellittiche, da noi classificate, potessero esisterne altre, immagini di involuzioni non generate da un gruppo di trasformazioni birazionali di una superficie di rango 1 in sè. Ciò che non è, data la dimostrazione di allora di ENRIQUES e SEVERI e data la mia recente dimostrazione molto semplice sulla inessenzialità della restrizione. Vedasi DE FRANCHIS, *Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie iperellittiche* (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, serie 6ª, vol. XXIX, 1936, fasc. 1-2).

Ad ogni modo e senza idea di sminuire l'importanza della dimostrazione di ENRIQUES e SEVERI, rifacendoci anche all'epoca di quella nostra ricerca e quindi ammesso, teoricamente, che potesse perciò sfuggire dalla nostra classificazione qualche superficie eccezionale, è fuori di dubbio intanto, e ciò è stato anche lealmente riconosciuto da ENRIQUES e SEVERI, che la nostra classificazione comprende, ammessa anche l'essenzialità della restrizione da noi imposta, le superficie di ENRIQUES e SEVERI come casi particolari. Tolta poi quella restrizione inessenziale, è dimostrato che noi abbiamo classificato *tutte* le superficie iperellittiche. Nè solo questo problema ha pienamente risoluto la nostra ricerca, ma essa ha servito anche a togliere dei pregiudizi che si erano venuti formando intorno all'esistenza di superficie iperellittiche cui non competessero *rappresentazioni proprie* mediante funzioni Theta. Pregiudizio questo che ha indotto ad affermazioni fondamentalmente errate illustri ricercatori: cfr. il Cap. VII della Memoria citata di ENRIQUES e SEVERI, specialmente le ultime dodici righe del n° 64. Se fosse vera l'asserzione ivi contenuta, le superficie di rango > 2, cicliche regolari e di genere 1 dovrebbero provenire tutte da superficie di JACOBI possedenti fasci ellittici, il che non è. Mi permetto di rilevare ciò, non per fare un appunto agli illustri e benemeriti ricercatori, ma per mostrare che la nostra opera, lungi dall'essere stata opera di paziente ricerca od estensione, come qualche ostentato silenzio e qualche citazione fatta come per condiscendenza o peggio ancora qualche confronto fatto da chi non aveva capito che cosa avessimo fatto possono aver fatto credere, ha illuminato e precisato parecchi sostanziali punti della teoria delle superficie e delle funzioni iperellittiche.

Una appunto delle difficoltà da noi superate consiste in ciò, che generalmente le superficie di rango 1 possedenti quelle tali trasformazioni birazionali in sè non sono affatto immagini d'involuzioni su superficie di JACOBI provenienti da curve di genere due possedenti trasformazioni birazionali in sè, superficie alle quali è ristretta l'analisi di ENRIQUES e SEVERI.

E quello che meraviglia è che, mentre nella Memoria di ENRIQUES e SEVERI i nostri lavori sono largamente citati, quest'onore non ci è più consentito da altri che si occupano ancora dell'argomento. Per esempio, il Prof. BAKER, specialista di funzioni iperellittiche, nella sua « *Note on Hyperelliptic Surfaces and certain* KUMMER *Surfaces* » (Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 32, Part 3, 1936, pp. 342-354), pare sconosca i nostri lavori e quelli dei nostri allievi.

E dire che, dopo tutto, la nostra ricerca ha avuto anche il merito, col contributo portato allo studio delle funzioni iperellittiche, di essere stata il preambolo e fors'anco l'incentivo delle belle ed importanti ricerche dello SCORZA e della sua Scuola sulle matrici di RIEMANN.

Un altro lavoro che spesso viene citato in *sott'ordine* o non citato laddove si dovrebbe è il mio lavoro « *Sulle varietà ∞^2 delce coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* » (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, 1903, pp. 104-121), ove, tra l'altro, per la prima volta, do il metodo, che ci è poi stato largamente utile nella classificazione delle superficie iperellittiche, mediante il quale si determina (in modo trascendente e senza passare attraverso gli altri generi) il genere geometrico della superficie immagine di un'involuzione data su una superficie della quale si conosca il genere geometrico (o meglio, gli integrali doppi di prima specie) metodo che è quello stabilito nel n° 12 della predetta Nota. E che il metodo aiuti efficacemente anche nelle superficie iperellittiche lo si può rilevare dalla nostra Memoria e dalle applicazioni fattene anche da ENRIQUES e SEVERI (cfr. n° 68 della Memoria citata).

In questa Nota, al n° 8, viene stabilita (e ne è detto esplicitamente il fine) una relazione che mi permetterà in una Nota lincea successiva [3]) di sfruttare (e il primo a far ciò sono stato io) nello studio delle corrispondenze tra curve il fatto (proveniente da un'osservazione di C. SEGRE) che una tale corrispondenza, sulla superficie immagine delle coppie di punti delle due curve, ha per immagine una curva. Ciò che, tra l'altro, mi permise di dare una dimostrazione geometrico-algebrica dei teoremi di SCHWARZ e di HUMBERT-CASTELNUOVO.

Spero che il lettore riconoscerà la legittimità di queste rivendicazioni che avrei potuto del resto prolungare ed estendere ad altri lavori. Ripeto che ho resistito a lungo alla tentazione, ma, e forse questo è conseguenza dell'età non più giovanile, quello spirito di disinteressata rinunzia per il quale mi ritenevo soddisfatto ed appagato se qualche mio lavoro fosse apprezzato da pochi, per quanto veramente illustri cultori, mi ha abbandonato; così, a differenza di ciò che fece Carlo Quinto Imperatore, dopo i suoi finti funerali, io ho voluto fare atto di presenza, dopo aver quasi assistito al mio seppellimento sotto una ben pesante coltre di silenzio.

Palermo, gennaio 1937-XV.

MICHELE DE FRANCHIS.

---

3) M. DE FRANCHIS, *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XII, 1° semestre 1903, pp. 303-310).