RISOLUZIONE DI UNA QUESTIONE RELATIVA AI DETERMINANTI.

Nota di **M. L. Albeggiani** (Palermo).

Adunanza del 9 febbraio 1936 - XIV.

Con la data di Ottobre 1874 ho dato, nel vol. XIII (1875) del *Giornale di* BATTAGLINI, una formula per rappresentare, simbolicamente, lo sviluppo di un determinante di ordine n, i cui elementi sono polinomi di p termini e ne ho fatto applicazione a diverse questioni tra cui quella relativa alla realtà delle radici della *equazione secolare.*

Tale formula rappresenta, simbolicamente, il determinante di ordine n:

$$\Delta^{(n)} = |a'_{rs} + a''_{rs} + \cdots + a^{(p)}_{rs}| \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

con la potenza

$$(\Delta)^n = (A_1 + A_2 + \cdots + A_p)^n,$$

dove

$$A_1^{(n)} = |a'_{rs}|, \qquad A_2^{(n)} = |a''_{rs}|, \ \ldots, \ A_p^{(n)} = |a^{(p)}_{rs}|$$

indicano determinanti di ordine n ad elementi monomi; mentre, per ritornare dalla rappresentazione simbolica $(\Delta)^n$ alla vera forma dello sviluppo di $\Delta^{(n)}$, bisogna mutare, in quella, gli *esponenti* in *ordini di determinanti* ed i *coefficienti polinomiali* in *segni sommatori,* Σ', quindi sarà:

$$\Delta^{(n)} = \sum [\sum{}' A_1^{(\alpha_1)} . A_2^{(\alpha_2)} \ldots A_p^{(\alpha_p)}],$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p = 0, 1, \ldots, n; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n; \quad A_r^{(0)} \equiv 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

e cioè la *Somma*: di una somma di termini della forma $A_r^{(n)}$; di una somma di termini della forma $A_r^{(n-1)} . A_s^{(1)}$, $r \neq s$; di una somma di termini della forma $A_r^{(n-2)} . A_s^{(2)}$, $r \neq s$ o $A_r^{(n-2)} . A_s^{(1)} . A_t^{(1)}$, r, s, t diversi fra loro; ecc. ecc.; seguendo, per la formazione dei termini-prodotti di Σ', le leggi dei minori complementari: in generale i ragionamenti e le deduzioni da essi, meglio che riguardare il *valore* (quanto?), riguardano la *natura* (quale?) degli enti che si considerano — come nel caso della equazione secolare — cosicchè le forme simboliche, a sostegno di tali ragionamenti, possono paragonarsi, nel mondo fisico, ad immagini di corpi riflessi da specchio curvo, onde la *natura* di un certo *corpo di numeri* non ne viene *alterata*.

Il sig. R. F. SCOTT, nel suo libro « *A treatise on the theory of Determinants* », pubblicato nel 1880, all'art. 18 del Cap. III, pag. 38, dopo avere esposto, precedentemente, il metodo di decomposizione di un determinante, i cui elementi di una sola linea sono polinomi, per determinanti ad elementi tutti monomi e dopo avere accennato alla estensione di tale metodo ad un determinante in cui gli elementi di più linee omonime, o anche tutti gli elementi, sono polinomi, scrive: « But a formula of expansion has been given by ALBEGGIANI which presents the result in a more suitable form for applications », quindi, con breve dimostrazione, perviene alla formula anzidetta e ne fa diverse applicazioni.

Ora, in questa Nota, mi propongo di applicare gli accennati procedimenti alla dimostrazione di un importante teorema, dovuto ad HADAMARD, inteso già, nella teoria dei determinanti, come « *teorema* di HADAMARD » e da lui pubblicato con il titolo medesimo, che io ho voluto conservare alla presente Nota [1]).

1. Diciamo *diagonale*, la diagonale principale della matrice quadrata di un determinante di ordine n; essa divide la matrice in *due regioni*: la *cisdiagonale* e la *transdiagonale*. Nel seguito potrà avvenire di chiamare determinante anche la matrice di esso.

Sia ora la matrice rettangolare formata da n orizzontali e da $m \geqq n$ verticali:

$$D_m^{(n)} = \|a_{rs}\|, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Indichiamo con a'_{rs} l'elemento coniugato di a_{rs} e con $D'^{(n)}_m$ la matrice coniugata di $D_m^{(n)}$, si ha:

$$D'^{(n)}_m = \|a'_{rs}\|. \tag{2}$$

Formiamo, per orizzontali, il prodotto delle matrici (1), (2), si ottiene un determinante di ordine n, $\Delta^{(n)} = D_m^{(n)} . D'^{(n)}_m$. Osserviamo che $\Delta^{(n)}$ è *reale* e *positivo*, infatti è facile dimostrare, che:

$$\Delta^{(n)} = \sum_{r_1 \ldots r_n} (a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n})(a'_{1r_1} a'_{2r_2} \ldots a'_{nr_n})$$

dove $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ è una delle combinazioni semplici della classe n degli m secondi indici $1, 2, \ldots, m$ e $(a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n})$ è un minore di ordine n della matrice $D_m^{(n)}$, così rappresentato per la sua diagonale, $(a'_{1r_1} a'_{2r_2} \ldots a'_{nr_n})$ ne è il coniugato; i pro-

---

[1]) HADAMARD, *Résolution d'une question relative aux déterminants* [Bulletin des Sciences Mathématiques (Deuxième série), Tome XVII, Année 1893, pag. 240].

dotti $(a_{1r_1} \ldots a_{nr_n})(a'_{1r_1} \ldots a'_{nr_n})$ evidentemente sono positivi poichè i due minori sono dello stesso segno, dipendente dalla situazione di essi nelle matrici $D^{(n)}_m$, $D'^{(n)}_m$; ma il prodotto considerato è la *norma* del minore $(a_{1r_1} \ldots a_{nr_n})$ quindi è reale ed è una somma di due quadrati, ne segue, che $\Delta^{(n)}$ è reale ed è una somma di quadrati. Diciamo $\Delta^{(n)}$ la *norma* della matrice (1) o il quadrato del suo *modulo* e ne concludiamo, che la *norma* di una matrice con n righe e con $m \geqq n$ colonne è *reale* e *positiva*. Poniamo:

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{m} a_{rs} a'_{rs} = X^2_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(4) \qquad \sum_{t=1}^{m} a_{rt} a'_{st} = P_{rs} + i\, Q_{rs} \quad (i = \sqrt{-1}) \quad r \neq s, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(5) \qquad \sum_{t=1}^{m} a_{st} a'_{rt} = P_{sr} + i\, Q_{sr} = P_{rs} - i\, Q_{rs} \quad r \neq s, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

si ha:

$$\Delta^{(n)} = |P_{tr} - i\, Q_{tr},\ X^2_r,\ P_{rs} + i\, Q_{rs}|; \quad (t=1, 2, \ldots, r-1;\ r=1, 2, \ldots, n;\ s=r+1, r+2, \ldots, n);$$

gli elementi, X^2_r, formano la *diagonale* di $\Delta^{(n)}$; gli elementi $P_{tr} - i\, Q_{tr}$ ne occupano la regione *cisdiagonale;* quelli $P_{rs} + i\, Q_{rs}$ la *transdiagonale,* secondo l'ordine di righe e colonne già fissato per la matrice (1). Diciamo:

X^2_r, la *norma* della *orizzontale* r^{ma} di $D^{(n)}_m$, essa è una somma di quadrati;

il primo membro della (3), *prodotto* della *orizzontale* r^{ma} di $D^{(n)}_m$ per la sua *coniugata;*

il primo membro della (4), *prodotto* della *orizzontale* r^{ma} di $D^{(n)}_m$ per la *coniugata* di *una* delle *rimanenti* $n - 1$ *orizzontali.*

Tenute presenti queste convenzioni, il teorema di HADAMARD si può enunciare nella seguente maniera:

« La *norma* (il *modulo*) di una matrice, ad n righe e ad $m \geqq n$ colonne, non « supera il prodotto delle *norme* (dei *moduli*) delle sue n righe ».

2. Indichiamo con $\Delta^{(n)}_0$ ciò che diventa $\Delta^{(n)}$ quando, in questo, si sostituiscono con zeri gli elementi, X^2_r, della sua diagonale ed indichiamo con $\Delta^{(k)}_0$ un suo minore principale di ordine k. Se in $\Delta^{(n)}_0$ e nei $\Delta^{(k)}_0$ si muta i in $-i$, le corrispondenti matrici avranno mutate le righe in colonne e viceversa, siffatti determinanti non mutano perciò di valore, rappresentano pertanto quantità reali. Con le poste indicazioni, $\Delta^{(n)}$, come è noto, si può scrivere:

$$(6) \qquad \Delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \Big[\sum_{r_1 \ldots r_{n-k}} X^2_{r_1} \ldots X^2_{r_{n-k}} \Delta^{(k)}_0 \Big],$$

ove la $\sum_{r_1 \ldots r_{n-k}}$ si estende a tutte le combinazioni semplici $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-k})$ della classe $n-k$ degli indici 1, 2, ..., n e $\Delta_0^{(k)}$ si ottiene da $\Delta_0^{(n)}$ sopprimendone le righe e le colonne, che si tagliano negli elementi $r_1^{mo}, r_2^{mo}, \ldots, r_{n-k}^{mo}$ della sua diagonale: il primo termine della somma (6), per $k=0$, è $X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2$ e l'ultimo, per $k=n$, ne è $\Delta_0^{(n)}$.

Se si isola il termine relativo a $k=0$ e si osserva, che, per $k=1$, tutti i $\Delta_0^{(1)} \equiv 0$, la (6) si può scrivere:

$$\Delta^{(n)} = X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2 + \sum_{k=2}^{n} [\sum_{r_1 \ldots r_{n-k}} X_{r_1}^2 \ldots X_{r_{n-k}}^2 \Delta_0^{(k)}] . \tag{7}$$

Osserviamo, che $\Delta_0^{(n)}$ ed i suoi minori principali, $\Delta_0^{(k)}$, sono determinanti ad elementi binomi ai quali si possono applicare la notazione simbolica e le conseguenziali considerazioni a cui si perviene nella mia Nota e nel libro del Sig. SCOTT sopra ricordati. A tale fine poniamo:

$$P^{(n)} = |P_{tr}, 0, P_{rs}|, \qquad Q^{(n)} = |-Q_{tr}, 0, Q_{rs}|$$

$$(t=1, 2, \ldots, r-1 ; r=1, 2, \ldots, n ; s=r+1, r+2, \ldots, n);$$

il primo di questi determinanti è *simmetrico*, l'altro è *gobbo-simmetrico*; i minori principali $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$ si ottengono da $P^{(n)}$, $Q^{(n)}$ così come $\Delta_0^{(k)}$ si ottiene da $\Delta_0^{(n)}$; allora la (6) si scrive simbolicamente:

$$(\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} [\sum_{r_1 \ldots r_{n-k}} X_{r_1}^2 \ldots X_{r_{n-k}}^2 (P+iQ)^k] \tag{VI}$$

e la (7), in virtù delle regole che governano, in aritmetica, il calcolo con potenze, poichè $n-k=(n-2)-h$, dove $h=k-2$, dà luogo alla relazione simbolica:

$$(\Delta)^n = X_1^2 \ldots X_n^2 + \sum_{n-1^{r_n}} \left\{(P+iQ)^2 \sum_{h=0}^{n-2} [\sum_{r_1 \ldots r_{(n-2)-h}} X_{r_1}^2 \ldots X_{r_{(n-2)-h}}^2 (P+iQ)^h]\right\} \tag{VII}$$

in cui $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-2})$ è una delle combinazioni semplici della classe $n-2$ degl'indici 1, 2, ..., n e $(r_{n-1} r_n)$ ne è la combinazione complementare della 2ª classe ad essa corrispondente. Si osserva intanto, che il fattore:

$$\sum_{h=0}^{n-2} [\sum_{r_1 \ldots r_{(n-2)-h}} X_{r_1}^2 \ldots X_{(n-2)-h}^2 (P+iQ)^h] \tag{VI$_1$}$$

è analogo al secondo membro della (VI), rappresentazione simbolica della (6), pertanto è, come quello, la forma simbolica di un determinante del tipo di $\Delta^{(n)}$, che contiene, nella sua diagonale, *certi* $n-2$ degli elementi X_r^2, quindi esso fattore è il simbolo di un minore principale di $\Delta^{(n)}$, dell'ordine $n-2$, della forma $\dfrac{d^2 \Delta^{(n)}}{d X_\rho^2 \, d X_\sigma^2}$ dedotto da $\Delta^{(n)}$ *sopprimendone* le righe e colonne ρ^{ma}, σ^{ma}: avuto poi riguardo alle definizioni (3), (4), (5) del (n° 1) esso risulta dal prodotto, per orizzontali, della matrice rettangolare,

$D_m^{(n-2)}$, ad $n-2$ righe e ad m colonne, ricavata dalla matrice (1) *sopprimendone* le righe ρ^{ma}, σ^{ma}, moltiplicata per la sua coniugata, come tale rappresenta la *norma*, reale, positiva, (n° 1), di essa matrice, la indicheremo con $\Delta_{(\rho\sigma)}^{(n-2)}$ e quindi la sua rappresentazione simbolica (VI)$_1$ con $(\Delta_{(\rho\sigma)})^{n-2}$. L'altro fattore $(P+iQ)^2$, a cui si estende pure $\sum\limits_{r_{n-1} r_n}$, relativa alla combinazione complementare $(r_{n-1}\, r_n)$, è il simbolo di un minore principale di 2° ordine, dedotto da $\Delta_0^{(n)}$ *conservandone* le righe e colonne ρ^{ma}, σ^{ma}; pertanto la (VII) si può scrivere:

$$\text{(VII)}_1 \qquad (\Delta)^n = X_1^2 \ldots X_n^2 + \sum_{\rho\sigma} (P+iQ)^2 (\Delta_{(\rho\sigma)})^{n-2}$$

dove $(P+iQ)^2$ è il simbolo del determinante di 2° ordine:

$$\begin{vmatrix} 0 & P_{\rho\sigma} + i\,Q_{\rho\sigma} \\ P_{\rho\sigma} - i\,Q_{\rho\sigma} & 0 \end{vmatrix} = -(P_{\rho\sigma}^2 + Q_{\rho\sigma}^2);$$

onde dalla (VII)$_1$, tornando, si ha:

$$(8) \qquad \Delta^{(n)} = X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2 - \sum_{\rho\sigma} (P_{\rho\sigma}^2 + Q_{\rho\sigma}^2)\Delta_{(\rho\sigma)}^{(n-2)} .$$

La $\sum\limits_{\rho\sigma}$ si estende — con effetto *inclusivo* riguardo al fattore $P_{\rho\sigma}^2 + Q_{\rho\sigma}^2$ ed *esclusivo* riguardo al fattore $\Delta_{(\rho\sigma)}^{(n-2)}$ — a tutte le $\binom{n}{2}$ combinazioni semplici, $\rho\,\sigma$, della 2ª classe degli indici 1, 2, ..., n e poichè i fattori $P_{\rho\sigma}^2 + Q_{\rho\sigma}^2$, $\Delta_{(\rho\sigma)}^{(n-2)}$ sono entrambi positivi, essa è una somma aritmetica. Se gli elementi della matrice (1) sono tali, che i prodotti (n° 1) di ogni sua orizzontale per la coniugata di ciascuna delle $n-1$ rimanenti sono tutti $=0$ [come per es. avviene per la matrice quadrata (*) del n° 4], allora i fattori $P_{\rho\sigma}^2 + Q_{\rho\sigma}^2$ sono tutti nulli e

$$\Delta^{(n)} = X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2,$$

onde la (8) afferma, secondo i casi, che:

$$(9) \qquad \Delta^{(n)} \leqq X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2;$$

si ha pure:

$$(10) \qquad \sqrt{\Delta^{(n)}} \leqq X_1 . X_2 \ldots X_n .$$

Così il teorema di HADAMARD è pienamente dimostrato.

3. A parte l'osservazione, precedentemente fatta, ci proponiamo ora di stabilire, più generalmente, quando, per la (9), abbia luogo l'eguaglianza, nello stesso tempo che sia $X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2 \neq 0$, che non si annulli cioè alcuno dei fattori di questo prodotto [2]). Per potere rispondere a tale questione cominciamo dall'osservare, che i minori, $\Delta_0^{(k)}$, i quali compariscono nel 2° membro della (7) — indipendentemente dalla situazione complementare di essi, al che sarà provveduto con opportuni indici — si ottengono sviluppando $(P + i\,Q)^k$ e risalendo alla vera espressione di essi con omettere di scrivere i termini, i quali hanno a fattore $\pm\, i$ (n° 2); si ha intanto:

$$(11) \qquad \Delta_0^{(k)} = \sum_s [(-1)^s \sum P(k-2s)\,Q(2s)], \qquad \left(s = 0, 1, \ldots, \begin{cases} \dfrac{k}{2}, & k \text{ pari} \\[2mm] \dfrac{k-1}{2}, & k \text{ dispari} \end{cases} \right),$$

in cui $P(r)$ o $Q(r)$ indica un *qualunque* minore di $P^{(k)}$ o di $Q^{(k)}$, rispettivamente, di ordine $r \leqq k$; se esso è un minore principale, allora $P(r) \equiv P^{(r)}$, $Q(r) \equiv Q^{(r)}$; $\Delta_0^{(k)}$ è pertanto funzione omogenea del grado k di *certe* $\binom{k}{2}$, $P_{\rho\sigma}$ e $Q_{\rho\sigma}$, $\rho \neq \sigma$ [3]). Per $k = 2$, poichè:

$$P^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & P_{r_{n-1}r_n} \\ P_{r_{n-1}r_n} & 0 \end{vmatrix}, \qquad Q^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & Q_{r_{n-1}r_n} \\ -Q_{r_{n-1}r_n} & 0 \end{vmatrix},$$

è

$$\Delta_0^{(2)} = -(P^2_{r_{n-1}r_n} + Q^2_{r_{n-1}r_n}),$$

quindi il termine della (7), corrispondente al valore $k = 2$, è:

$$(12) \qquad -\sum_{r_1 \ldots r_{n-2}} X^2_{r_1} \ldots X^2_{r_{n-2}} (P^2_{r_{n-1}r_n} + Q^2_{r_{n-1}r_n})$$

il cui valore assoluto è una somma di $\binom{n}{2}$ termini *tutti positivi* (somma aritmetica), mentre l'insieme dei rimanenti termini della (7), da $k = 3$ a $k = n$, forma una fun-

---

[2]) Evidentemente, in tutto l'anzidetto, è implicito, che gli elementi di una riga della matrice (1) hanno moduli non tutti, per avventura, $= 0$; si rammenti poi, che una X_r^2 è la somma dei quadrati dei moduli degli elementi della riga r^{ma}.

[3]) Il coefficiente di i, nello sviluppo di $\Delta_0^{(k)}$, è della forma:

$$\sum_t [(-1)^{t-1} \sum P(k-2t+1)\,Q(2t-1)], \qquad \left(t = 1, 2, \ldots, \begin{cases} \dfrac{k}{2}, & k \text{ pari} \\[2mm] \dfrac{k+1}{2}, & k \text{ dispari} \end{cases} \right)$$

mentre dimostrasi facilmente, che *tutti* i minori $P(r)$, $Q(r)$ si distribuiscono in coppie di *eguali* fra loro, qualunque sia r, nel caso di $P(r)$; e di *eguali* fra loro, per r pari e di *opposti* fra loro, per r dispari, nel caso di $Q(r)$; onde poichè, per k dispari, è pure $Q^{(k)} = 0$, tale fattore di i, per ogni k, risulta, come deve essere (n° 2), identicamente *nullo*.

zione, Φ, che è una somma di somme di polinomi omogenei nelle $P_{\rho\sigma}$, $Q_{\rho\sigma}$ di grado $3, 4, \ldots, n$. Se, nella (7), passiamo il prodotto, $X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2$, al 1° membro e, tenendo conto delle (9), (12), applichiamo il teorema relativo al *modulo* di una somma, si ha:

$$(13) \qquad X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2 - \Delta^{(n)} \leqq \sum_{r_1 \ldots r_{n-2}} X_{r_1}^2 \ldots X_{r_{n-2}}^2 (P_{r_{n-1} r_n}^2 + Q_{r_{n-1} r_n}^2) + |\Phi|$$

e perchè sia:

$$(14) \qquad \Delta^{(n)} = X_1^2 . X_2^2 \ldots X_n^2, \qquad X_r^2 \neq 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè perchè il primo membro della (13) si annulli, deve annullarsi, sotto le poste condizioni, ciascuno dei due valori assoluti, che formano il 2° membro di essa: ma perchè sia nullo il primo di questi, cioè il valore assoluto della (12), bisogna e basta che siano *nulli tutti* gli $\binom{n}{2}$ fattori $P_{r_{n-1} r_n}^2 + Q_{r_{n-1} r_n}^2$ e però bisogna e basta che siano *nulle tutte* le $\binom{n}{2}$ quantità $P_{\rho\sigma}$ e *tutte le* $\binom{n}{2}$, $Q_{\rho\sigma}$, $\rho \neq \sigma$, con che, in virtù della forma omogenea della Φ, sopra considerata, è pure, identicamente, $|\Phi| = 0$. Pertanto perchè abbia luogo la (14) *bisogna* e *basta* che siano *nulli tutti gli elementi non principali di* $\Delta^{(n)}$, come dice HADAMARD nella Nota citata. Così questa condizione supposta come *soddisfatta*, in fine al n° 2, è ora dimostrata essere anche *necessaria*.

4. Ma i fattori, X_r^2, variano al variare dei *moduli* degli elementi della matrice (1), *moduli* che vogliamo ora supporre *finiti non superiori* ad una quantità positiva M; ne segue, che, pur soddisfatta la condizione sotto la quale ha luogo la (14), il prodotto, che ne forma il 2° membro, prende diversi valori al variare dei *moduli* anzidetti nello intervallo $(0, M)$ — estremo superiore compreso —. Possiamo allora domandarci: quando, in tale variazione dei *moduli*, $\Delta^{(n)}$ raggiungerà il *massimo* valore? e quale sarà esso?

Il problema, così posto, è indeterminato, possiamo però supporre, nei *moduli* degli elementi a_{rs}, condizioni *sufficienti* a renderlo, almeno in parte, determinato. A tale scopo assumiamo come valore di M il più grande degli mn valori dei *moduli* degli elementi della matrice (1) e lo diciamo *estremo* (superiore) della successione dei *moduli*, allora, poichè ogni X_r^2 è la somma dei quadrati dei *moduli* degli elementi della orizzontale r^{ma} di $D_m^{(n)}$ e poichè $\Delta^{(n)}$, come funzione di essi *moduli*, è rappresentata dalla (14), la quantità scelta, M, è *estremante* tanto per la successione delle *norme*, X_r^2, che per la funzione $\Delta^{(n)}$: in altri termini, basterà dare a ciascuno dei *moduli* il valore *estremo*, M, perchè ciascuna delle X_r^2 prenda il valore *estremo* mM^2, il che è come dire perchè sia la somma delle X_r^2:

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = m\,n\,M^2 \qquad \text{(costante)};$$

ma, come è noto, il prodotto (14) di fattori reali positivi variabili, la cui somma resti costante, diventa *massimo* quando:

$$X_1^2 = X_2^2 = \cdots = X_n^2 \tag{15}$$

e tale *massimo* è $m^n M^{2n}$, quindi questo è l'*estremo* di $\Delta^{(n)}$.

Supponiamo ora, qui ed in seguito, che la matrice (1) sia quadrata ($m = n$) ed indichiamo semplicemente con $D^{(n)}$ il determinante di ordine n da essa rappresentato, allora, tenute presenti le definizioni di cui al (n° 1), si dirà, che, variando i *moduli* nello intervallo (0, M) — estremo superiore compreso — le condizioni perchè il *determinante*, $D^{(n)}$, di ordine n sia *massimo* o risulti *massimo* il suo *modulo* sono:

I) che siano $= 0$ *tutti i prodotti di ciascuna orizzontale per la coniugata di ogni altra delle* $n - 1$ *rimanenti;*

II) che siano *eguali fra loro i prodotti di ciascuna orizzontale per la propria coniugata.*

La I) si traduce nel sistema:

$$\sum_{t=1}^{n} a_{rt}\, a'_{st} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n)$$

di $n - 1$ relazioni lineari omogenee fra gli n elementi $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$; ciò vale a dire, che, indicato con A'_{rs} il minore complementare di a'_{rs} nel determinante $D'^{(n)}$, si ha: $a_{rs} = C_r . A'_{rs}$ dove il fattore di proporzionalità, $C_r = \dfrac{X_r^2}{D'^{(n)}}$, resta *invariato* per *tutti* gli elementi della orizzontale r^{ma}. Ma per soddisfare, contemporaneamente, alla II) debbono *tutte* le X_r^2 essere eguali fra loro, quindi il fattore di A'_{rs} deve restare *invariato* per *tutti* gli elementi di $D^{(n)}$, onde diremo, che $D^{(n)}$ avrà raggiunto il suo *massimo* o risulterà di *massimo modulo* (v. HADAMARD, Nota citata) quando: *A*) *i suoi elementi siano proporzionali ai coniugati dei minori complementari ad essi corrispondenti,* cioè quando: $a_{rs} = C . A'_{rs}$ dove $C = X^2 . D^{(n)} / \Delta^{(n)}$ qualunque sia r: allora, come è facile verificare, la *norma*, $\Delta^{(n)}$, avrà nulli tutti gli elementi non principali ed avrà gli elementi principali tutti $= C . D'^{(n)}$, in conformità alle (14), (15).

Se i *moduli* degli elementi di $D^{(n)}$ sono $\leqq M$, M finita positiva, la II) condizione, come si è visto, è sempre soddisfatta quando i *moduli* dei singoli elementi sono tutti $= M$, in tale caso ogni elemento ha la forma $M e^{i\theta_{rs}}$ dove θ_{rs} ne è l'*argomento*, ma allora è il determinante $D^{(n)} = M^n |e^{i\theta_{rs}}|$, basterà pertanto considerare determinanti i cui elementi abbiano *moduli* $\leqq 1$ (v. HADAMARD, Nota citata); un tale determinante avrà raggiunto il suo *massimo* quando i *moduli* dei suoi elementi siano *tutti* $= 1$ e gli *argomenti* ne siano tali da essere soddisfatta la *A*), il che lascia tuttavia più gradi di libertà: per un tale determinante il *modulo* è $n^{\frac{M}{2}}$.

Per es. raggiunge il *massimo modulo*, 16, il determinante:

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} a & a & b & b \\ c & -c & d & -d \\ a & a & -b & -b \\ c & -c & -d & d \end{vmatrix} \qquad (x.x' = 1)$$

i cui elementi sono supposti della forma $e^{i\theta_{rs}}$, secondo l'ordine di righe e colonne già fissato (n° 1), essi pertanto hanno i *moduli tutti* $= 1$ ed i 16 *argomenti*, non tenendo conto dei segni (—) i quali importano la variazione di un multiplo dispari di π, sono legati dalle 12 relazioni:

$$\theta_{11}=\theta_{12}=\theta_{31}=\theta_{32}, \quad \theta_{13}=\theta_{14}=\theta_{33}=\theta_{34}, \quad \theta_{21}=\theta_{22}=\theta_{41}=\theta_{42}, \quad \theta_{23}=\theta_{24}=\theta_{43}=\theta_{44},$$

possiamo quindi dare un valore a piacere ai θ_{rs} di ciascuna *quaterna*, onde indicando tale valore, rispettivamente, con α, β, γ, δ, gli elementi a, b, c, d diventano $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$, $c = e^{i\gamma}$, $d = e^{i\delta}$. Per verificare, che esso soddisfa alla A) osserviamo, che, per tale determinante, $C = abcd/4$; il coniugato del minore complementare per es. di a_{32} è $4b'c'd'$, quindi $a_{32} = \dfrac{abcd}{4}.4b'c'd' = a$, ecc. Per $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ e per $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, esso diventa, rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = -16i \quad ^{4})$$

determinanti dati da SYLVESTER nel *Philosophical Magazine* t. XXXIV (1867) e riportati da HADAMARD nella sua Nota; per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e δ qualunque, ove si scriva a invece di d, diventa il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{vmatrix} = 16a$$

dato da HADAMARD nella Nota citata.

---

4) Nella Nota di HADAMARD (pag. 244), per errore tipografico, si trova scritto $a_{43} = 1$.

5. Per formare un determinante di ordine 2^k che sia il *massimo* fra quelli per i quali i *moduli* degli elementi variano nell'intervallo (0, 1) — estremo superiore compreso — quando si è formato l'analogo determinante di ordine 2^{k-1}, si può tenere la regola seguente:

indichiamo: con p (iniziale di *più*) il mantenersi delle lettere e dei segni degli elementi del determinante già formato di ordine 2^{k-1};

con π (iniziale di π*iù*) il mutarsi delle sole lettere in esso determinante;

con μ (iniziale di μ*eno*) il mutarsi di lettere e segni nello stesso determinante e formiamo lo schema

$$\left\{\begin{matrix} p & \pi \\ p & \mu \end{matrix}\right\} \tag{16}$$

salvo poi un cambiamento (non necessario) di lettere allo scopo di dare forma più regolare al nuovo determinante.

Per il determinante di ordine $1 = 2^0$ si ha: $D^{(1)}(a) = |a|$; per quello di ordine 2, tenuto presente lo schema (16), si ha:

$$D^{(2)}(a,\ b) = \begin{vmatrix} a & b \\ a & -b \end{vmatrix}, \quad \text{che scriviamo nella forma} \quad D^{(2)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix} = -2ab,$$

allora, in virtù sempre dello schema (16), per quello di ordine $4 = 2^2$ si ha:

$$D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & D^{(2)}_{-}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

e mutando b in c e viceversa, si ha:

$$D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, & D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, & D^{(2)}_{-}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{vmatrix},$$

quindi, tenuto presente il significato di $D^{2}_{+}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $D^{(2)}_{+}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $D^{(2)}_{-}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, come è facile vedere, si ha:

$$D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc} a & a & b & b \\ c & -c & d & -d \\ \hline a & a & -b & -b \\ c & -c & -d & d \end{array}\right|,$$

che è il determinante (*) dato sopra: per averne il valore basta sommare alla 1^a la 3^a orizzontale ed alla 2^a la 4^a, si trova:

$$D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = 4\begin{vmatrix} a & a \\ c & -c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & b \\ d & -d \end{vmatrix} = 16\, a\, b\, c\, d.$$

Da questo di ordine 4 passiamo a quello di ordine $8 = 2^3$, con lo stesso procedimento, introducendo cioè, in un primo tempo, i nuovi elementi e, f, g, h al posto di a, b, c, d, rispettivamente e mutandovi poi e in c, f in d e reciprocamente, si scrive allora nella forma:

$$D^{(8)}\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ e, & f, & g, & h \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} D^{(4)}_{+}\begin{pmatrix} a, & b \\ e, & f \end{pmatrix}, & D^{(4)}_{+}\begin{pmatrix} c, & d \\ g, & h \end{pmatrix} \\ D^{(4)}_{+}\begin{pmatrix} a, & b \\ e, & f \end{pmatrix}, & D^{(4)}_{-}\begin{pmatrix} c, & d \\ g, & h \end{pmatrix} \end{vmatrix};$$

se si sviluppa col metodo tenuto per $D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, si trova:

$$D^{(8)}\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ e, & f, & g, & h \end{pmatrix} = 16\, D^{(4)}\begin{pmatrix} a, & b \\ e, & f \end{pmatrix} . D^{(4)}\begin{pmatrix} c, & d \\ g, & h \end{pmatrix} = 16 . 16\, a\, b\, e\, f . 16\, c\, d\, g\, h = 4096\, a\, b\, c\, d\, e\, f\, g\, h,$$

il suo *modulo* è perciò $= 4096 = 8^4$: per questo determinante è $C = \dfrac{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h}{8^3}$.

Quanto alle relazioni fra gli *argomenti*, per il determinante di ordine 2, tenuta presente l'osservazione fatta sopra per riguardo ai segni, si ha:

$$\theta_{11} = \theta_{12}, \qquad \theta_{21} = \theta_{22};$$

indicando con α, β il valore comune alle θ_{rs} di ogni coppia, si ha:

$$a = e^{i\alpha}, \qquad b = e^{i\beta}.$$

Quanto agli *argomenti*, θ_{rs}, relativi agli elementi del determinante di ordine 4, formiamo il quadro:

r	s: 1,2	s: 3,4
1,3	a	b
2,4	c	d

così gli *argomenti* di a, nelle varie righe e colonne e le loro mutue relazioni sono: $\theta_{11} = \theta_{12} = \theta_{31} = \theta_{32}$ ecc.; si avranno pertanto le quaterne già scritte sopra (n° 4).

Per il determinante di ordine 8 si ha il quadro:

r	s			
	1,2	3,4	5,6	7,8
1, 3, 5, 7	a	b	c	d
2, 4, 6, 8	e	f	g	h

;

così per es. per gli *argomenti* relativi all'elemento f si hanno le relazioni:

$$\theta_{23} = \theta_{24} = \theta_{43} = \theta_{44} = \theta_{63} = \theta_{64} = \theta_{83} = \theta_{84}$$

potendo indicare con una lettera, per es. φ, (alla quale poi si daranno valori a piacere) le θ_{rs} di questa *ottava*, onde $f = e^{i\varphi}$ e così via...: se poniamo $= 0$ gli *argomenti* comuni alle *ottave* relative agli elementi a, f, c, h e poniamo $= \frac{\pi}{2}$ quelli relativi agli altri elementi e, b, g, d avremo:

$$a = f = c = h = 1, \qquad e = b = g = d = i,$$

onde il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & i & i & 1 & 1 & i & i \\ i & -i & 1 & -1 & i & -i & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -i & -i & 1 & 1 & -i & -i \\ i & -i & -1 & 1 & i & -i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & i & i & -1 & -1 & -i & -i \\ i & -i & 1 & -1 & -i & i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -i & -1 & -1 & i & i \\ i & -i & -1 & 1 & -i & i & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4096.$$

Per il *massimo* di un determinante di ordine diverso da una potenza di 2 vedasi la Nota di HADAMARD più volte citata.

6. Se gli elementi della matrice (1) sono *tutti* reali, allora $D'^{(n)}_m \equiv D^{(n)}_m$ e $\Delta^{(n)} = [D^{(n)}_m]^2$; in tale caso X_r^2 si dice il *quadrato* della r^{ma} orizzontale; gli elementi non principali di $\Delta^{(n)}$ sono gli $\binom{n}{2}$ *prodotti* delle orizzontali moltiplicate fra loro, due a due; ciascuno di tali prodotti è la somma dei prodotti degli elementi isoverticali delle due orizzontali fattori. L'enunciato del teorema di HADAMARD prende allora la forma: « Il quadrato di una matrice ad n righe e ad $m \geqq n$ colonne è un determinante

« di ordine n, il cui valore non supera il prodotto dei quadrati delle righe della « matrice ».

Vogliamo ora limitarci al caso $m = n$, consideriamo quindi il determinante, $D^{(n)}$, di ordine n, ad elementi *tutti* reali.

Il quadrato $\Delta^{(n)}$ del determinante $D^{(n)}$ può ottenersi con due procedimenti o *per righe* cioè o *per colonne;* in ogni caso vi sarà un *massimo secondo* HADAMARD, che è eguale al prodotto degli elementi principali di $\Delta^{(n)}$, lo diremo, rispettivamente, *massimo per righe, massimo per colonne;* se i due massimi coincidono, il loro valore comune lo diremo un *massimo indipendente.*

Tenuto presente quanto fu detto al (n° 4), le condizioni ivi enunciate si possono tradurre nelle seguenti:

a) Perchè il determinante $\Delta^{(n)}$, quadrato del determinante $D^{(n)}$, sia *massimo secondo* HADAMARD bisogna e basta, che *siano nulli i suoi elementi non principali* e propriamente: perchè sia *massimo per righe (per colonne)* bisogna e basta che siano $= 0$ *tutti* i prodotti di ciascuna riga (colonna) per le rimanenti.

In questo caso gli elementi principali di $\Delta^{(n)}$ per righe (colonne) non sono tutti eguali fra loro: le matrici, ottenute operando nei due modi, sono essenzialmente diverse fra loro.

b) Perchè il quadrato $\Delta^{(n)}$ sia *massimo indipendente* bisogna e basta, che, insieme alla *a*), i suoi elementi principali, comunque ottenuti, abbiano *tutti* lo stesso valore; che sia cioè *costante* il quadrato di ciascuna riga, il quale sarà, allora, eguale a quello di ciascuna colonna, e viceversa.

Alle *a*), *b*), prese insieme, può essere sostituita l'unica condizione seguente, la quale può anche servire di verifica, e cioè:

c) Perchè il quadrato di $D^{(n)}$ sia *massimo indipendente* bisogna e basta, che gli elementi del determinante dato siano *proporzionali* ai loro *minori complementari* ad essi corrispondenti: la costante di proporzionalità, C, si può calcolare osservando, che, in virtù della condizione *c*) e della relazione, che lega un determinante a quello del sistema aggiunto, si ha:

$$C^n . [D^{(n)}]^{n-2} = 1.$$

Sia dato per es. il determinante:

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 12 \\ -6 & -3 & 2 \\ 6 & -18 & -9 \end{vmatrix} = 6.7^3$$

il cui quadrato è perciò $6^2.7^6$. Eseguendo tale quadrato per righe, si ha:

$$\Delta_r^{(3)} = \begin{vmatrix} 196 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 441 \end{vmatrix} = 196.49.441 = 6^2.7^6;$$

eseguendolo per colonne, si ha:

$$\Delta_c^{(3)} = \begin{vmatrix} 108 & -114 & 6 \\ -114 & 349 & 108 \\ 6 & 108 & 229 \end{vmatrix} < 108 . 349 . 229,$$

dunque $6^2 . 7^6$ è un *massimo per righe.*

Sia dato invece il determinante:

$$D^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7^3,$$

il suo quadrato è, 7^6. Si ha:

$$\Delta_r^{(3)} = \Delta_c^{(3)} = \begin{vmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{vmatrix} = 49^3 = 7^6,$$

quindi 7^6 è un *massimo indipendente.* Per calcolare la costante C faremo $n = 3$ nella formula trovata sopra, si ha $C^3 . D^{(3)} = 1$, quindi, nel nostro caso, $C = \frac{1}{7}$; per es. il minore complementare di a_{32} è $A_{32} = -42$, segue: $a_{32} = \frac{-42}{7} = -6$, ecc.

Anche il quadrato del determinante di 3^o ordine:

$$(^{**}) \quad D^{(3)} = \begin{vmatrix} a^2-b^2-c^2+d^2 & 2(ab-cd) & 2(ac+bd) \\ -2(ab+cd) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(ad-bc) \\ -2(ac-bd) & -2(ad+bc) & a^2+b^2-c^2-d^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^3$$

è un *massimo indipendente:* è facile verificare, che le condizioni a), b) sono entrambe soddisfatte; si ha poi, indicando con ρ^2 l'elemento costante della diagonale di $\Delta^{(3)}$, $\rho^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $\Delta^{(3)} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^6$; dalla $C^3 . D^{(3)} = 1$ si ha $C = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$; con facili calcoli si verifica la c).

Quando per il quadrato di $D^{(n)} = |a_{rs}|$ sia il caso di *massimo indipendente,* allora le a), b) si traducono, secondo che si operi per righe o per colonne, nelle relazioni:

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_{t=1}^{n} a_{rt}\, a_{st} = 0 \qquad r \neq s & (r, s = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{s=1}^{n} a_{rs}^2 = \rho^2 \qquad \text{(costante)} & (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} \sum_{t=1}^{n} a_{tr} a_{ts} = 0 \qquad r \neq s & (r, s = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{r=1}^{n} a_{rs}^2 = \rho^2 \qquad \text{(costante)} & (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

non indipendenti fra loro: consideriamo infatti il sistema delle n equazioni lineari seguenti, che legano le variabili $U_1, U_2, \ldots, U_n$ alle $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$(19)\qquad \rho U_s = a_{1s} u_1 + a_{2s} u_2 + \cdots + a_{rs} u_r + \cdots + a_{ns} u_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

i cui coefficienti, a_{rs}, sono gli elementi delle verticali di $D^{(n)}$ e ρ è il valore calcolato per mezzo della 2ª delle (17): sommando le (19) dopo averle moltiplicate, rispettivamente, per $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$, in virtù delle (17), si ha:

$$(20)\qquad \rho u_r = a_{r1} U_1 + a_{r2} U_2 + \cdots + a_{rs} U_s + \cdots + a_{rn} U_n, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

i cui coefficienti sono gli elementi delle orizzontali di $D^{(n)}$. Se queste espressioni di ρu_r si sostituiscono nelle (19), moltiplicate per ρ, debbono aversi altrettante relazioni identiche, per il che bisogna e basta che siano soddisfatte le (18), le quali, pertanto, non sono indipendenti dalle (17). Poste le (18), la risoluzione del sistema (20) si fa con procedimento analogo a quello tenuto per la risoluzione del sistema (19). Le (19), (20) insieme alle (17), (18) dànno luogo inoltre alla relazione notevole:

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2,$$

muovendo dalla quale, nella ipotesi che debba essere soddisfatta da relazioni delle U per mezzo delle u o di queste per mezzo di quelle, della forma (19) o (20), si perviene a stabilire le (17), (18); il che, per es., occorre di fare, in Geometria Analitica, nel caso della trasformazione di un *sistema di coordinate ortogonali* in altro consimile, ove i due sistemi abbiano l'origine nello stesso punto dello spazio S_n.

I sistemi (17), (19); (18), (20) formano ciò che si dice una *sostituzione ortogonale* di *modulo* ρ; le matrici, che hanno per elementi i coefficienti dell'uno o dell'altro sistema, non differiscono fra loro che per il cambio di righe in colonne e viceversa e diconsi *ortogonali,* quindi perchè il quadrato di $D^{(n)}$ raggiunga il *massimo indipendente,* sia cioè *eguale,* indifferentemente, al *prodotto* dei *quadrati* delle *righe* o a *quello* dei *quadrati* delle *colonne*, bisogna e basta che la matrice $D^{(n)}$ sia *ortogonale,* che soddisfi cioè alle (17) o alle (18) [5].

---

5) V. M. CIPOLLA, *Analisi Algebrica,* Palermo (1914), pag. 97.

Se

$$\Delta = |- a_{tr},\ \rho,\ a_{rs}| \quad (t=1, 2, \ldots, r-1;\ r=1, 2, \ldots, n;\ s=r+1, r+2, \ldots, n)$$ [6]),

è un determinante gobbo di ordine n, la matrice quadrata:

$$D^{(n)} = |(-1)^{r+t-1}.2\rho\Delta_{rt},\ \Delta - 2\rho\Delta_{rr},\ (-1)^{r+s-1}.2\rho\Delta_{rs}|,$$
$$(t = 1, 2, \ldots, r-1;\ r = 1, 2, \ldots, n;\ s = r+1, r+2, \ldots, n)$$

è *ortogonale:* per $\rho = a$, $a_{12} = b$, $a_{13} = c$, $a_{23} = d$, si trova il determinante di 3° ordine (**) dato sopra, poichè, ora, $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ -c & -d & a \end{vmatrix}$.

---

[6]) Quando $\rho \neq 0$ è numero reale, è $\Delta \neq 0$. Sia infatti il determinante gobbo di ordine n:

$$\Delta(x) \equiv |-a_{tr},\ x,\ a_{rs}| \quad (t = 1, 2, \ldots, r-1;\ r = 1, 2, \ldots, n;\ s = r+1, r+2, \ldots, n;\ a_{hi} \text{ reali}),$$

l'equazione $\Delta(x) = 0$ non ha radici reali, se n è pari; ha la sola radice reale $x = 0$, se n è dispari. Per dimostrarlo si ponga:

$X^{(n)} = |0, x, 0|$ cioè un determinante d'ordine n i cui elementi *principali* sono *tutti* $= x$ e quelli *non principali* sono *tutti* $= 0$ ed $A^{(n)} = |-a_{tr}, 0, a_{rs}|$ (t, r, s come prima) determinante gobbo-simmetrico di ordine n; allora, simbolicamente, si ha:

$$\Delta(n) = (X + A)^n.$$

Si sviluppi la potenza $(X + A)^n$ e poi si ritorni alla vera forma di $\Delta(x)$ osservando, che i *minori non principali* di $X^{(n)}$ sono *tutti* nulli, i suoi *minori principali* sono potenze della x, mentre i *minori principali* di $A^{(n)}$ a questi corrispondenti, in situazione complementare, sono $= 0$, se di ordine dispari, ed eguali ad un quadrato positivo, se di ordine pari, allora:

per n pari è $\Delta(x) = x^n + x^{n-2}\sum A^{(2)} + x^{n-4}\sum A^{(4)} + \ldots + x^2\sum A^{(n-2)} + A^{(n)}$

per n dispari è $\Delta(x) = x^n + x^{n-2}\sum A^{(2)} + x^{n-4}\sum A^{(4)} + \ldots + x^3\sum A^{(n-3)} + x\sum A^{(n-1)}$.

Pertanto l'equazione $\Delta(x) = 0$ è, in entrambi i casi, un'equazione a termini *tutti* positivi, mentre, nel caso di n pari, vi figurano solo potenze di grado pari di x, onde alcun valore reale di x ne è radice e, nel caso di n dispari, vi figurano solo potenze di grado dispari di x, onde, tranne $x = 0$, nessun altro valore reale di x può soddisfarla.

Il numero dei termini di grado $n - 2h$, in ciascuna di esse equazioni, è $\binom{n}{2h}$ quindi, in virtù della nota relazione

$$\binom{n}{2h} = \binom{n-1}{2h-1} + \binom{n-1}{2h},$$

il numero di *tutti* i termini diventa:

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1},$$

di tal che: Δ, nel caso di n pari, e $\rho\Delta$, nel caso di n dispari, è una somma di 2^{n-1} quadrati.

7. Il *massimo* di cui è parola nel (n° 4), relativo al caso $m = n$, è un *massimo indipendente,* ove a *quadrato* e *prodotto,* di cui al (n° 6), si sostituisca, rispettivamente, *prodotto di una linea per la sua coniugata, prodotto di una linea per la coniugata di altra linea omologa.*

Se gli elementi di un determinante, $D^{(n)}$, di ordine n soddisfano alle condizioni di cui ai (n^{i} 4, 6) secondo che *non siano* o che *siano tutti* reali, allora gli elementi del determinante di ordine $2n$, formato con i procedimenti del (n° 5):

$$D^{(2n)} = \begin{vmatrix} D_+^{(n)}(a_{rs}) & D_+^{(n)}(b_{rs}) \\ D_+^{(n)}(a_{rs}) & D_-^{(n)}(b_{rs}) \end{vmatrix}$$ secondo lo schema (16) quando i *moduli* degli elementi, non *tutti* reali, sono *tutti* $= 1$,

$$D^{(2n)} = \begin{vmatrix} D_+^{(n)}(a_{rs}) & D_+^{(n)}(a_{rs}) \\ D_+^{(n)}(a_{rs}) & D_-^{(n)}(a_{rs}) \end{vmatrix}$$ secondo lo schema $\begin{Bmatrix} p, & p \\ p, & m \end{Bmatrix}$ quando gli elementi sono *tutti* reali,

soddisfano alle stesse condizioni: in particolare, se la *matrice quadrata* $D^{(n)}$ è *ortogonale,* tale è pure la *matrice* $D^{(2n)}$.

Queste considerazioni, come è evidente, permettono la costruzione di determinanti, $D^{(2^k n)}$, di ordine $2^k . n$, i cui quadrati sono *massimi,* rispettivamente, della stessa specie di quello del determinante $[D^{(n)}]^2$.

Palermo, 7 marzo 1936.

M. L. ALBEGGIANI.