LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UNE AIRE ANNULAIRE.

Par M. **Henri Villat** (Montpellier).

Adunanza del 12 novembre 1911.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire a pour but la résolution *effective* et complète du problème de DIRICHLET dans une aire annulaire. Cette résolution dépend, comme on va le voir, de l'introduction de certaines fonctions elliptiques qui jouent ici un rôle absolument essentiel. Les formules auxquelles on va parvenir renferment, comme cas très particulier, la célèbre formule de POISSON. La méthode employée, et que j'ai déjà indiquée ailleurs sur un exemple simple [1]), est entièrement *directe;* j'entends par là qu'elle n'emprunte absolument rien à la théorie des fonctions harmoniques, en dehors de ce fait élémentaire, que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique sont toutes deux harmoniques.

Outre son intérêt théorique, le fait que le problème soit résoluble par des formules *simples* est essentiel pour un très grand nombre de questions de Physique mathématique et d'Analyse [2]). Notons ici que, relativement au problème de DIRICHLET lui-même, l'application au cas du plan de la méthode du balayage dûe à M. HENRI POINCARÉ, s'appuie sur la possibilité théorique de résoudre la question dont il va être traité. Cette possibilité résulte d'une démonstration qu'on trouvera par exemple dans le Traité d'Analyse de M. E. PICARD (tome II, p. 103).

Les principaux résultats du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie

---

[1]) H. VILLAT, *Sur le problème de* DIRICHLET *relatif au cercle* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXIX (1911), pp. 443-456].

[2]) J'en ai indiqué déjà quelques-unes. Cfr. H. VILLAT: *a) Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLII (1er semestre 1911), pp. 303-306]; *b) Sur la détermination de certains mouvements discontinus des fluides* [Ibid., id., pp. 1081-1084]; *c) Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, VIe série, t. VII (1911), pp. 353-408]; *d) Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, IIIe série, t. XXIX (1912) (à paraître)]. J'en signalerai d'autres dans des mémoirs ultérieurs.

des Sciences le 13 mars 1911 [3]). Il est clair qu'on pourra en tirer, relativement à la même aire, la solution du problème de NEUMANN, et de divers problèmes connexes.

I.

LA FONCTION Ω_0.

§ 1. Position du problème.

Considérons une couronne circulaire; il s'agit de déterminer une fonction harmonique, régulière dans l'aire constituée par cette couronne, et qui prenne sur les deux circonférences frontières deux séries de valeurs données à l'avance. On peut évidemment supposer, au moyen d'une homothétie préalable, que les rayons des deux frontières soient égaux à 1 et à q (<1). Nous ferons cette hypothèse dans tout ce qui suit.

Bien entendu, nous placerons l'origine des axes dans le plan de la couronne, au centre commun des deux circonférences; et dans ce plan nous poserons

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

ρ désignant le rayon vecteur, et θ un argument du point (x, y).

Ceci posé, nous allons chercher à obtenir la construction d'une fonction analytique

$$\Omega(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

dont la partie réelle $P(x, y)$ soit la fonction harmonique demandée.

A cet effet, nous commencerons par déterminer une fonction fondamentale.

§ 2. Construction d'une fonction fondamentale.

Je vais chercher s'il existe une fonction analytique, régulière dans la couronne circulaire, et dont la partie réelle soit assujettie aux conditions suivantes:

1° Sur la circonférence de rayon 1, elle devra prendre la valeur constante α sur un arc ayant pour milieu le point $z = 1$, et ayant $2s_0$ pour angle au centre; elle prendra la valeur zéro sur le reste de la circonférence.

2° De même, sur la circonférence de rayon q, cette partie réelle devra prendre la valeur constante β sur un arc ayant pour milieu le point $z = q$, et $2s_1$ pour angle au centre; elle prendra la valeur zéro sur le reste de cette circonférence.

3) H. VILLAT, *Sur le problème de* DIRICHLET *relatif à une couronne circulaire* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLII (1er semestre 1911), pp. 680-682].

Entre les constantes données α, β, s_0, s_1, nous supposerons qu'il existe la relation

$$\alpha s_0 = \beta s_1, \tag{1}$$

qu'il serait facile de prévoir, et dont la nécessité va d'ailleurs apparaître dans un instant.

Cela étant, préjugeons que la fonction analytique cherchée $\Omega_0(z)$ soit développable en série de LAURENT valable jusqu'aux frontières (à l'exception peut-être des quatre points où les données sont discontinues); c'est-à-dire cherchons si l'on peut écrire le développement suivant:

$$\Omega_0(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots + b_1 \frac{1}{z} + \cdots + b_n \frac{1}{z^n} + \cdots. \tag{2}$$

Il est clair que, les données étant symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles, les coefficients a_n et b_n, s'ils existent, sont réels.

Plaçons-nous d'abord sur la circonférence extérieure, et faisons

$$z = e^{i\theta}$$

dans le développement précédent. Sa partie réelle devient alors

$$a_0 + (a_1 + b_1)\cos\theta + \cdots + (a_n + b_n)\cos n\theta + \cdots.$$

Or c'est là une série trigonométrique, qui représentera une fonction égale à α ou à zéro sur les arcs déjà indiqués, si l'on pose, d'après les formules d'EULER et FOURIER,

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{\alpha s_0}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2\alpha}{\pi}\frac{\sin n s_0}{n}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

De même, plaçons-nous sur la circonférence intérieure, et faisons

$$z = q e^{i\theta}.$$

La partie réelle de Ω_0 devient

$$a_0 + \left(a_1 q + \frac{b_1}{q}\right)\cos\theta + \cdots + \left(a_n q^n + \frac{b_n}{q^n}\right)\cos n\theta + \cdots$$

et cette série trigonométrique représentera β ou zéro sur les arcs déjà indiqués, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{\beta s_1}{\pi}, \\ a_n q^n + b_n \frac{1}{q^n} &= \frac{2\beta}{\pi}\frac{\sin n s_1}{n}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Des formules (3) et (4) nous tirons les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{\alpha s_0}{\pi} = \frac{\beta s_1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\alpha s_0 + \beta s_1), \\ a_n &= \frac{2}{n\pi}\frac{1}{1 - q^{2n}}(\alpha \sin n s_0 - \beta q^n \sin n s_1), \\ b_n &= \frac{2}{n\pi}\frac{q^n}{1 - q^{2n}}(\beta \sin n s_1 - \alpha q^n \sin n s_0), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dont la première met en évidence la nécessité de la condition (1).

Transportant dans (2) il vient pour Ω_0 une expression que je décompose ainsi:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_0 = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} &+ \frac{2\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1-q^{2n})} z^n - \frac{2\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^{2n}\sin n s_0}{n(1-q^{2n})}\frac{1}{z^n} \\ &- \frac{2\beta}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^n \sin n s_1}{n(1-q^{2n})} z^n + \frac{2\beta}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^n\sin n s_1}{n(1-q^{2n})}\frac{1}{z^n}. \end{aligned}\right.$$

Nous allons transformer cette expression. Observons tout d'abord qu'on peut écrire, q étant plus petit que 1,

$$\frac{1}{1-q^{2n}} = 1 + q^{2n} + \cdots + q^{2pn} + \cdots$$

et par suite on a

$$(7)\quad \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1-q^{2n})} z^n = \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n} z^n + \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n}(q^2 z)^n + \cdots + \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n}(q^{2p}z)^n + \cdots.$$

Or on démontre facilement la formule

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n} z^n = \frac{1}{2i}\log\frac{1-z e^{-is_0}}{1-z e^{is_0}}$$

valable pour $|z| \leqq 1$, sauf aux deux points $z = e^{\pm i s_0}$. Par suite on a, sauf en ces deux points,

$$(8)\quad \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1-q^{2n})} z^n = \frac{1}{2i}\log\frac{(1-ze^{-is_0})(1-q^2 z e^{-is_0})\ldots(1-q^{2p}ze^{-is_0})\ldots}{(1-ze^{is_0})(1-q^2 z e^{is_0})\ldots(1-q^{2p}ze^{is_0})\ldots}.$$

(La détermination du logarithme est celle qui s'annule pour $z = 0$). J'ai déjà indiqué cette formule dans un précédent Travail [loc. cit. [2]), c), p. 358].

Changeons z en $\frac{q^2}{z}$ et observons que, dans la couronne circulaire, on a partout, limites comprises,

$$\left|\frac{q^2}{z}\right| < 1, \ldots, \left|\frac{q^{2p}}{z}\right| < 1, \ldots;$$

nous en concluons

$$(9)\quad \sum_1^\infty \frac{q^{2n}\sin n s_0}{n(1-q^{2n})}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{2i}\log\frac{\left(1-\frac{q^2}{z}e^{-is_0}\right)\left(1-\frac{q^4}{z}e^{-is_0}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2p+2}}{z}e^{-is_0}\right)\ldots}{\left(1-\frac{q^2}{z}e^{is_0}\right)\left(1-\frac{q^4}{z}e^{is_0}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2p+2}}{z}e^{is_0}\right)\ldots}.$$

De même, dans la formule (8) changeons s_0 en s_1, et z en qz, puis en $\frac{q}{z}$; nous en déduisons les deux formules suivantes, partout valables dans notre domaine, exception faite, pour la seconde, des deux points $z = q e^{\pm i s_1}$ de la frontière:

$$(10)\quad \sum_1^\infty \frac{q^n \sin n s_1}{n(1-q^{2n})} z^n = \frac{1}{2i}\log\frac{(1-qze^{-is_1})(1-q^3ze^{-is_1})\ldots(1-q^{2p+1}ze^{-is_1})\ldots}{(1-qze^{is_1})(1-q^3ze^{is_1})\ldots(1-q^{2p+1}ze^{is_1})\ldots},$$

$$(11)\quad \sum_1^\infty \frac{q^n\sin n s_1}{n(1-q^{2n})}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{2i}\log\frac{\left(1-\frac{q}{z}e^{-is_1}\right)\left(1-\frac{q^3}{z}e^{-is_1}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2p+1}}{z}e^{-is_1}\right)\ldots}{\left(1-\frac{q}{z}e^{is_1}\right)\left(1-\frac{q^3}{z}e^{is_1}\right)\ldots\left(1-\frac{q^{2p+1}}{z}e^{is_1}\right)\ldots}.$$

Transportons ces résultats dans Ω_0, il viendra

$$\Omega_0 = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} + \frac{\alpha}{i\pi}\log\frac{\prod_{p=0}^{p=\infty}(1 - q^{2p} z e^{-is_0}) \times \prod_{p=0}^{p=\infty}\left(1 - \frac{q^{2p+2}}{z}e^{is_0}\right)}{\prod_{p=0}^{p=\infty}(1 - q^{2p} z e^{is_0}) \times \prod_{p=0}^{p=\infty}\left(1 - \frac{q^{2p+2}}{z}e^{-is_0}\right)}$$

$$- \frac{\beta}{i\pi}\log\frac{\prod_{p=0}^{p=\infty}(1 - q^{2p+1} z e^{-is_1}) \times \prod_{p=0}^{p=\infty}\left(1 - \frac{q^{2p+1}}{z}e^{is_1}\right)}{\prod_{p=0}^{p=\infty}(1 - q^{2p+1} z e^{is_1}) \times \prod_{p=0}^{p=\infty}\left(1 - \frac{q^{2p+1}}{z}e^{-is_1}\right)},$$

ce que j'écrirai, après avoir isolé le terme en $\log\dfrac{1 - ze^{-is_0}}{1 - ze^{is_0}}$,

$$\Omega_0 = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{1 - ze^{-is_0}}{1 - ze^{is_0}} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[(1 - q^{2p} z e^{-is_0})\left(1 - \frac{q^{2p}}{z}e^{is_0}\right)\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[(1 - q^{2p} z e^{is_0})\left(1 - \frac{q^{2p}}{z}e^{-is_0}\right)\right]}$$

$$+ \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[(1 - q^{2p-1} z e^{-is_1})\left(1 - \frac{q^{2p-1}}{z}e^{is_1}\right)\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[(1 - q^{2p-1} z e^{is_1})\left(1 - \frac{q^{2p-1}}{z}e^{-is_1}\right)\right]},$$

ou encore

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{1 - ze^{-is_0}}{1 - ze^{is_0}} \\ &- \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p}\left(ze^{-is_0} + \frac{1}{ze^{-is_0}}\right) + q^{4p}\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p}\left(ze^{is_0} + \frac{1}{ze^{is_0}}\right) + q^{4p}\right]} \\ &+ \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(ze^{-is_1} + \frac{1}{ze^{-is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(ze^{is_1} + \frac{1}{ze^{is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]} \end{aligned}\right.$$

Observons ici l'analogie remarquable qui existe entre les produits infinis qu'on vient d'écrire, et certains produits infinis qui interviennent dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons profiter de cette analogie.

Introduisons les fonctions elliptiques construites avec les deux périodes 2ω, $2\omega'$, la première réelle, la seconde imaginaire pure $\left(\omega \text{ et } \frac{\omega'}{i} \text{ pourront être supposés positifs}\right)$, ces deux périodes étant définies à un facteur près par la relation

$$(13)\qquad q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}.$$

Cela étant, rappelons-nous qu'on a la formule suivante [4]), où σ désigne la fonction de WEIERSTRASS:

$$(14)\qquad \sigma(2\omega v)=\frac{2\omega}{\pi}\,\frac{\sin \pi v}{\left(\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p})\right)^{2}}\,e^{2\eta\omega v^2}\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-2q^{2p}\cos 2\pi v+q^{4p}).$$

Or, nous pouvons faire coïncider le binôme $z e^{-is_0}+\frac{1}{z e^{-is_0}}$ avec l'expression $2\cos 2\pi v$, en posant

$$z e^{-is_0}+\frac{1}{z e^{-is_0}}=2\cos 2\pi v=e^{2i\pi v}+\frac{1}{e^{2i\pi v}}.$$

Cette égalité sera satisfaite si l'on prend

$$v=\frac{1}{2i\pi}\log z-\frac{s_0}{2\pi}.$$

De là nous tirons

$$\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{-is_0}+\frac{1}{z e^{-is_0}}\right)+q^{4p}\right]=\frac{\pi}{2\omega}\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p})^2\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i}-\frac{s_0}{2}\right)e^{\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\left(\frac{\log z}{2i}-\frac{s_0}{2}\right)^2}}$$

et, en changeant le signe de s_0,

$$\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{is_0}+\frac{1}{z e^{is_0}}\right)+q^{4p}\right]=\frac{\pi}{2\omega}\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p})^2\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z+\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i}+\frac{s_0}{2}\right)e^{\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\left(\frac{\log z}{2i}+\frac{s_0}{2}\right)^2}},$$

d'où par suite

$$\frac{\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{-is_0}+\frac{1}{z e^{-is_0}}\right)+q^{4p}\right]}{\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{is_0}+\frac{1}{z e^{is_0}}\right)+q^{4p}\right]}=\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z+\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\log z}{2i}+\frac{s_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i}-\frac{s_0}{2}\right)}e^{\frac{2\eta\omega s_0}{i\pi^2}\log z}$$

Maintenant, un calcul facile montre qu'on a

$$\frac{\sin\left(\frac{\log z}{2i}+\frac{s_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i}-\frac{s_0}{2}\right)}=e^{-is_0}\frac{1-z e^{is_0}}{1-z e^{-is_0}},$$

d'où enfin

$$(15)\qquad \frac{\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{-is_0}+\frac{1}{z e^{-is_0}}\right)+q^{4p}\right]}{\prod\limits_{p=1}^{p=\infty}\left[1-q^{2p}\left(z e^{is_0}+\frac{1}{z e^{is_0}}\right)+q^{4p}\right]}=\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z+\frac{\omega}{\pi}s_0\right)}\cdot\frac{1-z e^{is_0}}{1-z e^{-is_0}}e^{\frac{2\eta\omega s_0}{i\pi^2}\log z-is_0}$$

---

[4]) Cfr. TANNERY et MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars), tome II (1896), form. XXIX.

Utilisons ensuite la formule suivante [Tannery et Molk, loc. cit. [4]), form. XXIX]

$$\sigma_3(2\omega v) = \frac{e^{2\eta\omega v^2}}{\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p-1})^2}\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-2q^{2p-1}\cos 2\pi v + q^{4p-2}).$$

Nous voyons comme ci-dessus qu'on peut identifier $2\cos 2\pi v$ avec le binôme $z e^{-is_1} + \frac{1}{z e^{-is_1}}$ en posant

$$v = \frac{1}{2i\pi}\log z - \frac{s_1}{2\pi}.$$

Nous aurons donc

$$\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{-is_1} + \frac{1}{z e^{-is_1}}\right) + q^{4p-2}\right] = \prod_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p-1})^2 \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{e^{\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\left(\frac{\log z}{2i} - \frac{s_1}{2}\right)^2}};$$

et pareillement, en changeant le signe de s_1,

$$\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{is_1} + \frac{1}{z e^{is_1}}\right) + q^{4p-2}\right] = \prod_{p=1}^{p=\infty}(1-q^{2p-1})^2 \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{e^{\frac{2\eta\omega}{\pi^2}\left(\frac{\log z}{2i} + \frac{s_1}{2}\right)^2}}.$$

D'où

$$(16)\qquad \frac{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{-is_1} + \frac{1}{z e^{-is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]}{\prod_{p=1}^{p=\infty}\left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{is_1} + \frac{1}{z e^{is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]} = \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)} e^{\frac{2\eta\omega s_1}{i\pi^2}\log z}.$$

Transportons maintenant tous ces résultats dans l'expression (12) de Ω_0, en utilisant (15) et (16). Il vient, en supprimant dès maintenant les termes en $\log\frac{1 - z e^{is_0}}{1 - z e^{-is_0}}$, qui se détruisent,

$$\Omega_0 = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)} + \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}$$
$$- \frac{\alpha i}{\pi}\left(-is_0 + \frac{2\eta\omega s_0}{i\pi^2}\log z\right) + \frac{\beta i}{\pi}\left(\frac{2\eta\omega s_1}{i\pi^2}\log z\right).$$

Observant ensuite que le terme constant et le terme en $\log z$ disparaissent à cause de la condition (1), il reste enfin la formule très simple

$$(17)\qquad \Omega_0 = -\frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)} + \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}.$$

Pour préciser les déterminations que l'on doit prendre dans les logarithmes qui interviennent dans cette formule, observons qu'il résulte de (8) que ces logarithmes, comme tous ceux qui sont intervenus ci-dessus, sont ceux qui se réduisent à zéro pour s_0 ou s_1 égaux à zéro.

§ 3. Étude de la formule (17).

1. Il est essentiel pour nous de vérifier après coup l'exactitude de la formule précédente, qui va servir de base à la théorie qui va suivre; d'autant plus que cette vérification va nous fournir l'occasion de préciser quelques points importants.

J'observerai tout d'abord que la fonction Ω_0 donnée par (17) est, comme il fallait s'y attendre, une fonction uniforme de z; c'est-à-dire que, si le point z décrit un contour fermé autour de l'origine en restant dans la couronne, Ω_0 revient à sa valeur primitive après cette circulation.

Il suffit de remarquer que, si $\log z$ augmente de $2i\pi$,

$$\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}$$

se transforme en [Tannery et Molk, loc. cit. [4]), form. XII]

$$\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0 + 2\omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0 + 2\omega\right)} = e^{\frac{4\eta\omega}{\pi}s_0}\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}.$$

De même, $\dfrac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}$ devient

$$e^{\frac{4\eta\omega s_1}{\pi}}\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}.$$

Par suite, Ω_0 ne change pas, car il n'est modifié en apparence que par la quantité

$$-\frac{\alpha i}{\pi}\frac{4\eta\omega}{\pi}s_0 + \frac{\beta i}{\pi}\frac{4\eta\omega}{\pi}s_1$$

nulle à cause de (1).

De ceci résulte que l'argument d'un point z appartenant à notre domaine, pourra dans ce qui suit être supposé sans inconvénient compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Nous allons maintenant étudier la fonction Ω_0 donnée par (17), sur les deux circonférences frontières de notre domaine.

2. *Frontière extérieure.* — Plaçons-nous sur la frontière extérieure, et posons

$$z = e^{i\varepsilon}$$

avec

$$|\varepsilon| \leqq \pi.$$

Le coefficient de $-\frac{\alpha i}{\pi}$ devient

$$\log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon - s_0\right)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon + s_0\right)}.$$

Nous allons en chercher la partie imaginaire.

Soit d'abord $|\varepsilon| > s_0$; alors la partie imaginaire du logarithme susdit est évidemment un multiple de $2i\pi$; mais ce multiple est forcément nul, puisque, nous l'avons vu, cette partie imaginaire doit se réduire à zéro si s_0 devient nul.

Soit maintenant $|\varepsilon| < s_0$. Cette fois le coefficient de i dans le logarithme en question, devient un multiple impair de π, puisque le quotient des deux fonctions σ est négatif. Examinons quel est précisément ce multiple. A cet effet, supposons que le point z décrive un petit chemin c intérieur à la couronne, autour du point e^{is_0} et voisin de ce point, de manière à passer de la partie de la frontière extérieure où ε est plus grand que s_0, à la partie où il est plus petit. Voyons comment se comporte $\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)$, qui reste très petit en valeur absolue. Comme on peut écrire

$$\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right) = \left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)(1 + \lambda)$$

avec $|\lambda|$ très petit au voisinage du point en question, la variation de l'argument de $\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)$ quand on décrira le chemin c, sera la même que celle de l'argument de $u = \frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0$. Or, $|z|$ restant inférieur ou égal à 1 pour décrire le chemin susdit, le point u restera au voisinage de l'axe réel de son plan, du côté *positif*, c'est-à-dire dans le demi-plan supérieur. La partie réelle de u passant d'ailleurs du positif au négatif, l'argument de u et par suite l'argument de $\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)$ auront augmenté de π. Comme l'argument de $\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)$ n'a pas subi de variation pour le même trajet c, il en résulte immédiatement que la partie imaginaire de

$$\log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_0)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_0)}$$

est $i\pi$ pour $|\varepsilon| < s_0$.

Par ailleurs, pour $z = e^{i\varepsilon}$ le coefficient de $\frac{\beta i}{\pi}$ dans Ω_0 devient

$$\log \frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_1)}.$$

Le quotient de fonctions σ_3 reste positif; j'en déduis que la partie imaginaire du logarithme ci-dessus est nulle, puisqu'elle devrait se réduire à zéro pour $s_1 = 0$.

De ce qui précède résulte que: sur la frontière extérieure du domaine ($z = e^{i\varepsilon}$) la partie réelle de Ω_0 est

$$\begin{array}{ll} \text{zéro} & \text{pour } |\varepsilon| > s_0, \\ -\frac{\alpha i}{\pi}(i\pi) = \alpha & \text{pour } |\varepsilon| < s_0. \end{array}$$

3. *Frontière intérieure.* — Plaçons-nous maintenant sur la frontière intérieure, et faisons

$$z = q e^{i\varepsilon} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| \leqq \pi.$$

Par suite, en tenant compte de (13), il viendra

$$\log z = -\frac{\pi\omega'}{i\omega} + i\varepsilon.$$

D'où pour Ω_0 l'expression, que je désignerai par Ω'_0:

$$\Omega'_0 = -\frac{\alpha i}{\pi}\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_0 + \omega'\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_0 + \omega'\right)} + \frac{\beta i}{\pi}\log \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1 + \omega'\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1 + \omega'\right)}.$$

Or on a [Tannery et Molk, loc. cit. [4]), form. XII]

$$\sigma(a + \omega') = e^{\eta' a}\,\sigma\omega'\,\sigma_3 a$$

et

$$\sigma_3(a + \omega') = -e^{\eta' a}\frac{\sigma_1\omega'\,\sigma_2\omega'}{\sigma\omega'}\,\sigma a.$$

De là nous tirons facilement

$$\Omega'_0 = -\frac{\alpha i}{\pi}\log\left[e^{-\frac{2\eta'\omega s_0}{\pi}}\frac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_0)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_0)}\right] + \frac{\beta i}{\pi}\log\left[e^{-\frac{2\eta'\omega s_1}{\pi}}\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_1)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\Omega'_0 = -\frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_0)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_0)} + \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_1)}$$

à cause de (1). Dans cette formule, comme dans les précédentes, les déterminations des logarithmes sont celles qui s'annulent pour $s_0 = 0$ ou $s_1 = 0$ respectivement.

De là on conclut, comme précédemment, que la partie imaginaire de

$$\log \frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_0)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_0)}$$

est nulle quel que soit ε. Voyons de plus près celle de

$$\log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_1)}.$$

D'abord on voit tout de suite que cette dernière est nulle si $|\varepsilon| > s_1$; le coefficient de i est de plus un multiple impair de π si $|\varepsilon| < s_1$.

Pour préciser davantage, supposons que le point z passe de l'arc de frontière où $\varepsilon > s_1$ à celui où $\varepsilon < s_1$, en décrivant un petit chemin c' intérieur à la couronne et voisin du point qe^{is_1}. Considérons alors l'expression

$$u' = \frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}s_1 - \frac{\omega}{i\pi}\log q$$

qui se réduit à $\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)$ aux extrémités du chemin c'. La variation de l'argument de $\sigma u'$ sera égale à celle de u' pour le trajet susdit. Or, quand le point z décrit le chemin c', on a $|z| \geqq q$, et par suite le coefficient de i dans u' reste négatif. Donc, lorsque le point z décrit c' en venant de la région où $\varepsilon > s_1$, le point u' décrit dans son plan, au voisinage de l'axe réel, un petit chemin situé du côté *négatif;* comme la partie réelle de u' passe du positif au négatif, l'argument de u' aura donc diminué de π, et il en sera de même de celui de $\sigma u'$. D'autre part, l'argument de

$$\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}s_1 - \frac{\omega}{i\pi}\log q\right)$$

ne subit évidemment pas de variation pour ce même trajet, et on en conclut enfin que la partie imaginaire de

$$\log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - s_1)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon + s_1)}$$

est devenue $-i\pi$ pour $|\varepsilon| < s_1$.

D'où le résultat suivant : sur la frontière intérieure du domaine $(z = qe^{i\varepsilon})$ la partie réelle de Ω'_0, c'est-à-dire celle de Ω_0, est

$$\text{zéro} \qquad \text{pour} \quad |\varepsilon| > s_1,$$

$$\frac{\beta i}{\pi}(-i\pi) = \beta \quad \text{pour} \quad |\varepsilon| < s_1.$$

La fonction Ω_0 étant évidemment continue et régulière dans tout notre domaine, exception faite des quatre points (exclus d'avance) $z = e^{\pm i s_0}$ et $z = q e^{\pm i s_1}$, il en résulte, et des calculs précédents, qu'elle possède toutes les propriétés que nous avions voulu lui donner.

II.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES GÉNÉRALES.

§ 1. Superposition de plusieurs fonctions fondamentales.

Reprenons un instant la fonction analytique Ω_0 obtenue au chapitre précédent. Il est évident que si nous y remplaçons z par $z e^{-i\theta}$, la nouvelle fonction Ω_1 résultant de cette substitution,

$$(18)\quad \Omega_1 = -\frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta - \frac{\omega}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta + \frac{\omega}{\pi}s_0\right)} + \frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta - \frac{\omega}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta + \frac{\omega}{\pi}s_1\right)},$$

possédera une partie réelle prenant sur les frontières les valeurs suivantes:

sur la frontière extérieure, la valeur α le long d'un arc d'angle au centre $2s_0$, ayant son milieu au point d'argument θ; et la valeur zéro partout ailleurs;

sur la frontière intérieure, la valeur β le long d'un arc d'angle au centre $2s_1$, ayant son milieu au point d'argument θ; et la valeur zéro partout ailleurs.

Ceci posé, imaginons que nous ayons décomposé la circonférence extérieure en n petits arcs, d'angles au centre respectifs $t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots, t_n$; les arguments des points milieux de ces arcs étant $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_n$. A chacun de ces arcs, faisons correspondre des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$, respectivement. Puis faisons une opération analogue sur la circonférence intérieure, en la décomposant en n arcs, d'angles au centre $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_n$; dont les points milieux aient mêmes arguments que ci-dessus, et auxquels correspondent les n constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \ldots, \beta_n$. Supposons *pour un instant* qu'entre les constantes introduites on ait les relations

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 t_1 = \beta_1 u_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_p t_p = \beta_p u_p, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n t_n = \beta_n u_n, \end{array}\right.$$

qui entrainent la suivante

$$(20)\quad \sum_{p=1}^{p=n}\alpha_p t_p = \sum_{p=1}^{p=n}\beta_p u_p.$$

Nous n'aurons alors qu'à faire la somme de n fonctions de la forme (18) pour obtenir une fonction analytique dont la partie réelle prenne sur les deux circonférences frontières les valeurs respectives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$, ou $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \ldots, \beta_n$, sur les arcs correspondants; cette fonction est

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega' = &-\frac{i}{\pi}\sum_{p=1}^{p=n}\alpha_p \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p - \frac{\omega}{2\pi}t_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p + \frac{\omega}{2\pi}t_p\right)} \\ &+\frac{i}{\pi}\sum_{p=1}^{p=n}\beta_p \log \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p - \frac{\omega}{2\pi}u_p\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p + \frac{\omega}{2\pi}u_p\right)}. \end{aligned}\right.$$

Il suffit maintenant de jeter un coup d'œil sur les calculs qui terminent le précédent chapitre, pour se rendre compte que, si l'on voulait vérifier la formule que nous venons d'écrire, les conditions (19) n'interviendraient pas séparément, mais seulement par la combinaison (20). Nous pouvons donc dorénavent faire abstraction des relations (19); et seule la condition (20) subsistera.

§ 2. Passage à la limite.

Imaginons que nous fassions croître indéfiniment le nombre des subdivisions de nos deux circonférences, de façon que l'amplitude de chaque subdivision tende vers zéro. Alors, à la limite, la succession $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots$ définira une certaine fonction $\Phi(\theta)$ qui représentera la succession de ces valeurs. De même, la suite de constantes $\beta_1, \ldots, \beta_p, \ldots$ définira à la limite une certaine fonction $\Psi(\theta)$.

Nous ferons l'hypothèse que ces deux fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ soient sommables dans l'intervalle 0, 2π.

Cela étant, il est clair que la condition (20) donnera naissance, à la limite, à la condition suivante

$$(22)\qquad \int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta.$$

Voyons ce que devient la formule (21).

Il suffit d'observer que l'expression

$$\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p - \frac{\omega}{2\pi}t_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p + \frac{\omega}{2\pi}t_p\right)}$$

égale à la différence

$$\log\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p - \frac{\omega}{2\pi}t_p\right) - \log\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta_p + \frac{\omega}{2\pi}t_p\right),$$

où les logarithmes ont des déterminations très voisines, diffère infiniment peu, lorsque

t_p est petit, de l'expression

$$-\frac{\omega}{\pi}t_p\frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta_p\right)}=-\frac{\omega}{\pi}t_p\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta_p\right).$$

J'en conclus immédiatement que la première partie de Ω' devient

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}d\theta.$$

Pour une raison tout à fait pareille, la seconde partie de Ω' tendra vers l'expression suivante

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\frac{\sigma_3'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}d\theta.$$

Il est donc dès maintenant établi que, au moins dans des circonstances extrêmement générales (qui seront précisées ultérieurement), on a le résultat suivant:

Étant données deux fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ satisfaisant à la condition

$$\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)d\theta, \tag{22}$$

la fonction harmonique $P(x, y)$, partie réelle de la fonction

$$\Omega(z)=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}d\theta-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\frac{\sigma_3'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}d\theta \tag{23}$$

ou

$$\Omega(z)=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta, \tag{24}$$

prend sur les frontières de notre couronne les successions de valeurs $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ respectivement.

Le problème de Dirichlet pourra être considéré comme résolu par là même, quand, après nous être débarrassés de la condition (22), nous aurons fait voir que la partie réelle de notre fonction est bien régulière dans l'aire considérée, et qu'elle tend bien vers les valeurs voulues lorsque le point z tend vers un point d'une des frontières.

§ 3. **Sur la restriction** (22).

Nous allons voir que la restriction en question est sans importance, et qu'elle ne diminue pas le degré de généralité de la solution. Qu'exprime-t'elle d'ailleurs? Comme on pouvait le prévoir, et comme il résulte surabondamment de ce qui précède, c'est cette condition qui assure l'uniformité de la fonction $\Omega(\zeta)$. Cela résulte d'ailleurs d'un fait évident sur la formule (24): si $\log\zeta$ y augmente de $2i\pi$, le second membre est modifié seulement par l'addition de

$$\frac{2i\omega}{\pi}\eta\left[\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta-\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta\right]$$

quantité alors nulle.

Nous pouvons donc être assurés que, dans toute question où interviendraient ensemble la partie réelle et la partie imaginaire de Ω, ces deux fonctions harmoniques étant assujetties à être uniformes, *c'est-à-dire dans presque toutes les applications à la Physique mathématique,* la condition (22) sera une nécessité du problème.

Quoiqu'il en soit, il est toujours facile de s'en débarrasser. Supposons en effet qu'elle ne soit pas vérifiée d'elle-même, et posons, a étant une constante,

$$2\pi a=\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta-\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta$$

ou

$$\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-a]\,d\theta.$$

Nous savons alors écrire une fonction de ζ, correspondant aux données $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)-a$ sur les frontières, à savoir

$$\Omega_1=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-a]\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta.$$

On vérifie ensuite bien aisément que la partie réelle de la fonction de ζ suivante

$$\Omega_2=a\frac{\log\zeta}{\log q}=-a\frac{i\omega}{\pi\omega'}\log\zeta$$

prend sur les deux circonférences frontières les valeurs constantes o (frontière extérieure) et a (frontière intérieure). Donc la somme

$$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$$

aura pour partie réelle une fonction harmonique prenant cette fois sur les frontières les valeurs données $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$. La restriction (22) a donc disparu.

Observons que la fonction Ω qu'on vient d'écrire n'est plus une fonction uniforme de ζ dans le domaine annulaire; *mais sa partie réelle est uniforme.*

On peut écrire l'expression définitive de Ω sous une forme plus symétrique. Remarquons d'abord que le coefficient de a dans Ω_1 est

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta$$

ou évidemment

$$-\frac{i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta-2\omega\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta\right)}.$$

Or on a [TANNERY et MOLK, loc. cit. [4]), form. XII]

$$\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - 2\omega\right) = e^{-2\eta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi-\omega\right)}\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi\right),$$

donc

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta = \frac{2\eta i}{\pi}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \omega\right);$$

et il vient pour Ω:

$$\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta - \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Phi(\theta)]d\theta\right\}\left[-\frac{i\omega}{\pi\omega'}\log\chi + \frac{2\eta i}{\pi}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \omega\right)\right]$$

ou encore

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}\Omega = &\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\left[\frac{i\omega}{\pi^2}\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \frac{i\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{2\eta}{i\pi}\right)\log\chi + \frac{i\eta\omega}{\pi^2}\right]d\theta\\ &-\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\left[\frac{i\omega}{\pi^2}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \frac{i\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{2\eta}{i\pi}\right)\log\chi + \frac{i\eta\omega}{\pi^2}\right]d\theta.\end{aligned}\right.$$

Cette formule résoudra le problème de DIRICHLET dans le cas général.

Il est clair qu'en y supprimant une constante imaginaire pure,

$$\frac{i\eta\omega}{\pi^2}\left[\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)d\theta - \int_0^{2\pi}\Psi(\theta)d\theta\right],$$

la fonction restante

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}\Omega = &\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\left[\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \left(\frac{1}{2\omega'} - \frac{\eta}{i\pi}\right)\log\chi\right]d\theta\\ &-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \left(\frac{1}{2\omega'} - \frac{\eta}{i\pi}\right)\log\chi\right]d\theta\end{aligned}\right.$$

résoudra aussi bien le même problème.

§ 4. Homogénéité des formules.

Les périodes des fonctions elliptiques que nous avons introduites, n'ont été définies qu'à un facteur près. Il est facile de vérifier que dans les formules finales (24), (25), (26) les périodes n'interviennent effectivement que par leur rapport. Cela résulte immédiatement des formules d'homogénéité [TANNERY et MOLK, loc. cit. [4]), form. III]

$$\zeta_\alpha(u\,|\,\lambda\omega,\ \lambda\omega') = \frac{1}{\lambda}\zeta_\alpha\left(\frac{u}{\lambda}\,|\,\omega,\ \omega'\right),$$

qui montrent que les produits

$$\omega\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right),\quad \omega\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi - \frac{\omega}{\pi}\theta\right),\quad \omega\eta$$

ne changent pas quand les périodes sont multipliées par λ.

Rien n'empêcherait de simplifier légèrement l'écriture, en supposant

$$\omega = \pi;$$

on aurait alors

$$\omega' = -i \log q.$$

Y-a-t'il besoin d'ajouter qu'on peut dans les formules faire disparaître ζ_3 au profit de ζ en utilisant la relation

$$\zeta_3 u = \zeta(u + \omega') - \eta' ?$$

Avant de chercher à préciser la validité des formules générales que nous venons d'obtenir, observons qu'elles ne sauraient être appliquées sur les frontières, sans précaution. Si nous nous rappelons que dans la fonction Ω' tous les points de subdivision sur ces frontières étaient des points singuliers, il faut nous attendre à ce que ces frontières soient, au moins en apparence, des lignes singulières. Et encore qu'il soit bien à prévoir que la partie réelle de Ω prend aux limites les valeurs $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$, cela n'est pas en évidence sur nos formules actuelles. C'est là un inconvénient qui va disparaître par la transformation qu'on va faire, transformation que notre construction par passage à la limite rend toute naturelle.

Nous rechercherons d'abord la valeur de la fonction Ω sur les frontières.

Nous allons opérer sur la fonction Ω donnée par la formule (24); et il est clair que pour obtenir les résultats correspondant aux formules (25) ou (26), il suffira de rétablir au second membre le terme en $\log z$

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\left(\frac{1}{2\omega'} - \frac{\eta}{i\pi}\right)\log z\left[\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,d\theta - \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\,d\theta\right]$$

et le terme constant

$$\frac{i\eta\omega}{\pi^2}\left[\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,d\theta - \int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\,d\theta\right],$$

ce dernier pour la formule (25) seulement.

§ 5. Valeurs de Ω sur les circonférences limites.

1. Reprenons notre fonction Ω' dont Ω provient; et faisons-y d'abord

$$z = e^{i\varepsilon},$$

ε étant pour le moment différent des arguments des points de subdivision sur la circonférence extérieure. Alors la partie réelle de Ω' devient évidemment égale à l'une des constantes α_p; cherchons sa partie imaginaire. On voit de suite, en la désignant par iU', qu'on peut écrire

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} U' = &-\frac{1}{\pi}\sum_p \alpha_p \log\left|\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon - \theta_p - \frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon - \theta_p + \frac{t_p}{2}\right)}\right| \\ &+\frac{1}{\pi}\sum_p \beta_p \log\left|\frac{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon - \theta_p - \frac{u_p}{2}\right)}{\sigma_3\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon - \theta_p + \frac{u_p}{2}\right)}\right|. \end{aligned}\right.$$

On voit que, quand on passera à la limite, la seconde partie de U' ne soulèvera aucune difficulté, et donnera naissance à l'expression

$$-\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\,d\theta;$$

mais dans la première partie un logarithme deviendra infini, et les choses n'apparaissent plus si simplement.

Mais on a certainement le droit d'écrire, en supposant, pour fixer les idées, que le premier point de subdivision ait un argument nul,

$$\sum_p \alpha_p \log\left|\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right| = \sum_p[\alpha_p-\Phi(\varepsilon)]\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right|$$
$$+\Phi(\varepsilon)\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-2\pi)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}\varepsilon}\right|$$

et sous cette forme la limite apparaît toute seule. En observant qu'on a

$$\sigma\left(2\omega-\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)=e^{2\eta\left(\omega-\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)}\sigma\frac{\omega}{\pi}\varepsilon,$$

on peut écrire

$$\lim\sum_p\alpha_p\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right| = -\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\frac{\sigma'\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)}{\sigma\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)}\,d\theta$$
$$+2\eta\left(\omega-\frac{\omega}{\pi}\varepsilon\right)\Phi(\varepsilon)$$

et, en appelant U la limite de U':

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} U={}&\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\,d\theta-\frac{2\eta\omega}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\Phi(\varepsilon)\\ &-\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\,d\theta.\end{aligned}\right.$$

2. Voyons maintenant ce qui se passe pour la circonférence intérieure. Posons

$$z=qe^{i\varepsilon_1},\quad \text{ou}\quad \log z=-\frac{\pi\omega'}{i\omega}+i\varepsilon_1,$$

ε_1 étant pour l'instant différent des arguments des points de subdivision de cette circonférence; la partie réelle de Ω est alors l'un des β_p; appelons iV' sa partie imaginaire. On a

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} V' &= -\frac{1}{\pi}\sum_p \alpha_p \log \left| \frac{\sigma\left[\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p - \frac{t_p}{2}\right)+\omega'\right]}{\sigma\left[\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p + \frac{t_p}{2}\right)+\omega'\right]}\right| \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_p \beta_p \log \left| \frac{\sigma_3\left[\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p - \frac{u_p}{2}\right)+\omega'\right]}{\sigma_3\left[\frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p + \frac{u_p}{2}\right)+\omega'\right]}\right|, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, par un calcul semblable à celui du § 3 du Chap. I.

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} V' &= -\frac{1}{\pi}\sum_p \alpha_p \log \left| \frac{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p - \frac{t_p}{2}\right)}{\sigma_3 \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p + \frac{t_p}{2}\right)}\right| \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_p \beta_p \log \left| \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p - \frac{u_p}{2}\right)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}\left(\varepsilon_1 - \theta_p + \frac{u_p}{2}\right)}\right|. \end{aligned}\right.$$

A la notation près, c'est le même résultat que nous avions il y a un instant pour U' ; et la limite V pourra s'écrire, sans calculs supplémentaires,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} V = \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta)\,d\theta - \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta) - \Psi(\varepsilon_1)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta)\,d\theta \\ + \frac{2\eta\omega}{\pi}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\pi}\right)\Psi(\varepsilon_1). \end{aligned}\right.$$

§ 6. Transformation de Ω.

Ce que nous venons de dire nous amène tout naturellement à penser que si dans la formule (24) nous introduisions les différences $\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)$ et $\Psi(\theta) - \Psi(\varepsilon_1)$ à la place de $\Phi(\theta)$ et de $\Psi(\theta)$, cette formule deviendrait valable dans notre couronne circulaire, y compris les points $z = e^{i\varepsilon}$ et $z = q e^{i\varepsilon_1}$ des frontières: points où, pour l'instant, les valeurs respectives des fonctions Φ et Ψ sont supposées bien déterminées et finies. Nous allons faire voir que cette vue est exacte, et nous en profiterons grandement par la suite.

Supposant pour le moment z *intérieur* à la couronne, écrivons ainsi le premier terme de la formule (24)

$$\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)]\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta + \frac{i\omega}{\pi^2}\Phi(\varepsilon)\int_0^{2\pi}\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta.$$

On a

$$-\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi}\zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta=\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-2\omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right)},$$

puis

$$\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-2\omega\right)=-e^{-2\eta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\omega\right)}\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right),$$

en sorte que

$$\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-2\omega\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right)}=i\pi-2\eta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\omega\right)\ ^{5)}$$

et que la première partie de la formule (24) peut s'écrire sous la forme

$$(32)\quad \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\theta)]\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta+\Phi(\varepsilon)+\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Phi(\varepsilon)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right)$$

parfaitement équivalente à la forme primitive, tant que le point z est intérieur au domaine.

Prenons ensuite la seconde partie de la même formule; on peut évidemment l'écrire

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{i\omega}{\pi^2}\Psi(\varepsilon_1)\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta.$$

Mais on a

$$-\frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta=\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-2\omega\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right)}$$

avec

$$\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-2\omega\right)=e^{-2\eta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\omega\right)}\sigma_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right).$$

Il vient donc pour cette seconde partie l'expression

$$(33)\quad -\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{2\eta i\omega}{\pi}\Psi(\varepsilon_1)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right)$$

équivalente, dans le domaine, à la forme primitive.

Ceci nous donne pour Ω la formule suivante

$$(34)\quad \begin{cases}\Omega=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta+\Phi(\varepsilon)+\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Phi(\varepsilon)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right)\\ \quad-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Psi(\varepsilon_1)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right),\end{cases}$$

---

5) Au sujet de la détermination du multiple de $i\pi$ qui figure au second membre de cette formule, *voir:* TANNERY et MOLK, loc. cit. 4), tome III, pages 160 et suivantes.

qui garde un sens jusqu'aux points $z = e^{i\varepsilon}$ et $z = q e^{i\varepsilon_1}$ des frontières. A l'intérieur de la couronne, elle équivaut à (24).

Je dis que la partie réelle de Ω, définie par cette formule, prend les valeurs $\Phi(\varepsilon)$ et $\Psi(\varepsilon_1)$ aux deux points susdits.

Cela est évident pour le premier, car, si l'on fait dans (34) $z = e^{i\varepsilon}$, tous les termes deviennent imaginaires pures, à part le terme $\Phi(\varepsilon)$.

Faisons maintenant $z = q e^{i\varepsilon_1}$. Alors $\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)$ devient

$$\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta) + \omega'\right] = \zeta_3\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta)\right] + \eta'$$

et $\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)$ devient

$$\zeta_3\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta) + \omega'\right] = \zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1 - \theta)\right] + \eta';$$

Ω devient donc

$$\begin{aligned}\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\left[\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-\theta)+\eta'\right]d\theta+\Phi(\varepsilon)+\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Phi(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon_1}{\pi}-1+\frac{\omega'}{\omega}\right)\\ -\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\left[\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon_1-\theta)+\eta'\right]d\theta-\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Psi(\varepsilon_1)\left(\frac{\varepsilon_1}{\pi}-1+\frac{\omega'}{\omega}\right)\end{aligned}$$

dont la partie réelle est

$$\begin{aligned}\frac{i\omega\eta'}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]d\theta+\Phi(\varepsilon)+\frac{2i\eta\omega'}{\pi}\Phi(\varepsilon)\\ -\frac{i\omega\eta'}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]d\theta-\frac{2i\eta\omega'}{\pi}\Psi(\varepsilon_1),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (22),

$$\Phi(\varepsilon)\left[1+\frac{2i}{\pi}(\eta\omega'-\eta'\omega)\right]-\Psi(\varepsilon_1)\frac{2i}{\pi}(\eta\omega'-\eta'\omega)$$

quantité égale à

$$\Psi(\varepsilon_1)$$

à cause de la relation classique

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{i\pi}{2}.$$

Voyons maintenant les parties imaginaires aux mêmes points. Pour $z = e^{i\varepsilon}$ on retrouve de suite comme coefficient de i:

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)d\theta+\frac{2\eta\omega}{\pi}\Phi(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\pi}-1\right)\\ -\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)d\theta-\frac{2\eta\omega}{\pi}\Psi(\varepsilon_1)\left(\frac{\varepsilon}{\pi}-1\right)\end{aligned}$$

et on s'assure bien aisément que cette quantité est égale à U. De même, pour $z = q e^{i\varepsilon_1}$, le coefficient de i devient égal à V. Ce fait n'est d'ailleurs rien moins que surprenant, d'après la manière même dont nous avons opéré.

De tout ceci résulte que, lorsque nous nous serons assurés — et ce sera le but du Chapitre suivant — si la fonction Ω, définie par (24) ou (34) est une fonction régulière, et *continue* dans le domaine *jusqu'aux points* $e^{i\varepsilon}$ *et* $q\,e^{i\varepsilon_1}$, il en résultera que la partie réelle de Ω sera une fonction harmonique régulière dans l'aire considérée et qui tendra vers une des valeurs données lorsque le point (x, y) tendra vers le point correspondant des frontières.

Le problème de Dirichlet sera alors résolu, et la validité de nos formules complètement assurée. De plus, en vue des applications, il sera bon de remarquer que de la continuité démontrée résulte que les singularités (apparentes) présentées par la formule (24) disparaissent d'elles-mêmes quand les intégrations ont été effectuées, si, bien entendu, le résultat obtenu est continu jusqu'aux frontières. Cette remarque permet, dans la plupart des applications, de ne recourir qu'à la formule (24).

Faisons encore une observation. Dans la formule (24) une seule des deux parties du second membre présente une singularité sur la frontière extérieure, à savoir la première partie; et seule la seconde partie sur la frontière intérieure. Il suit immédiatement de là qu'au lieu de l'expression (34) on pourrait se contenter d'utiliser les formules suivantes:

au voisinage de la frontière extérieure:

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta + \Phi(\varepsilon)\\ &+\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Phi(\varepsilon)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right)-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta\end{aligned}\right.$$

et au voisinage de la frontière intérieure:

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta\\ &-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(\theta)-\Psi(\varepsilon_1)]\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta-\frac{2i\eta\omega}{\pi}\Psi(\varepsilon_1)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right).\end{aligned}\right.$$

III.

CONTINUITÉ DE LA FONCTION Ω.

§ 1. Continuité à l'intérieur du domaine.

1. Nous allons étudier dans ce Chapitre, les circonstances dans lesquelles la fonction Ω est continue dans notre domaine annulaire; en entendant par là, au voisinage des frontières, que nous chercherons à savoir si la partie réelle tend vers $\Phi(\varepsilon)$ ou vers $\Psi(\varepsilon_1)$ quand on s'approche de l'un des points $z_0 = e^{i\varepsilon}$ ou $z'_0 = q\,e^{i\varepsilon_1}$ par un

chemin non tangent à la circonférence correspondante, et si la partie imaginaire reste continue dans les mêmes conditions. Nous étudierons ensuite la continuité, s'il y a lieu, sur les frontières elles-mêmes.

Il nous faudra, bien entendu, faire sur les fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ quelque hypothèse. Il sera toujours supposé qu'elles sont sommables en valeur absolue, au sens de LEBESGUE. En outre, ces deux fonctions, qui peuvent être considérées comme définies dans tout intervalle, à condition de leur attribuer la période 2π, seront d'abord, dans ce qui suit, supposées satisfaire à une condition de LIPSCHITZ. C'est cette hypothèse, très générale comme on sait, que j'ai choisie tout d'abord, car c'est elle qui permet de mettre le plus facilement en évidence *en même temps* les propriétés de la partie réelle et de la partie imaginaire de Ω; et cela est important pour les applications à la Physique mathématique.

Je montre plus loin en quelques mots, à propos de la partie réelle de Ω, que la continuité à la LIPSCHITZ n'est pas du tout une hypothèse nécessaire à la validité des résultats.

Enfin j'étudie ce qui se passe lorsque les fonctions $\Phi(\theta)$ ou $\Psi(\theta)$ présentent des discontinuités, soit que l'une d'elles passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie, soit qu'elle devienne infinie, en changeant ou non de signe.

Nous aurons soin de remarquer que, une simple transformation de la forme

$$z_1 = \frac{q}{z}$$

permettant d'intervertir le rôle des deux frontières, il sera permis, pour ce qui concerne les frontières, de ne s'occuper que de la frontière extérieure; tout ce que nous obtiendrons relativement à celle-ci se transportera immédiatement, mutatis mutandis, à l'autre, en vertu de la susdite remarque.

2. On voit tout d'abord d'une façon évidente, qu'en supposant $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ absolument sommables, la continuité de la fonction Ω, qu'on peut prendre ici sous la forme (24), est assurée *à l'intérieur* du domaine. Ce fait résulte de ce que $\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)$ et $\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)$ sont alors des fonctions continues de z.

§ 2. Continuité au voisinage d'une frontière.

1. Étudions maintenant ce qui se passe au voisinage de la frontière $|z| = 1$.

Soit $e^{i\varepsilon}$ un point de cette frontière, où la fonction $\Phi(\theta)$ ait une valeur bien déterminée $\Phi(\varepsilon)$, au voisinage de laquelle nous admettrons simplement qu'elle satisfasse à une condition de LIPSCHITZ; c'est-à-dire que, pour θ voisin de ε, on pourra écrire

$$(37) \qquad |\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)| < \lambda|\theta - \varepsilon|^c,$$

λ et c étant deux constantes positives.

Nous prendrons Ω sous la forme (35), et nous nous débarrasserons tout de suite de la portion

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta$$

qui est une fonction de z visiblement continue au voisinage de $e^{i\varepsilon}$, ce point y compris, et dont la partie réelle tend par suite vers zéro quand z tend vers ce point.

Il reste donc à s'occuper seulement, en négligeant un terme constant et un terme en $\log z$, évidemment continu, et en faisant abstraction d'un facteur constant, — de l'expression suivante

$$A(z)=\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta \tag{38}$$

dont il s'agit de montrer la continuité.

Posons

$$z_0=e^{i\varepsilon}$$

et

$$z=\rho e^{i\gamma}\quad(\log z=\log\rho+i\gamma);$$

$\log\rho$ et $\gamma-\varepsilon$ seront voisins de zéro, en même temps que z tendra vers z_0.

Comme on a

$$A(z_0)=\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)d\theta,$$

tout revient à faire voir que la différence

$$J=A(z)-A(z_0)=\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega i}{\pi}\log\rho\right)-\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\right]d\theta \tag{39}$$

tend vers zéro avec $|\log\rho|$ et $|\gamma-\varepsilon|$.

2. A cet effet, sur la circonférence frontière, autour du point z_0 isolons un petit arc ab de longueur $2k$, et ayant ce point z_0 pour milieu. Et soient J_{ab} et J' les deux portions de l'intégrale J relatives à l'arc ab et au reste de la circonférence.

La longueur $2k$ de l'arc ab étant supposée fixée, — et la valeur qu'il faudra lui donner résultera de ce qui va suivre — il est clair que $|\log\rho|$ et $|\gamma-\varepsilon|$ pourront être choisis assez petits pour que, quel que soit θ correspondant à un point extérieur à l'arc ab, la différence

$$\left|\zeta\left(\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega i}{\pi}\log\rho\right)-\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\right|$$

soit plus petite qu'un nombre positif quelconque μ donné d'avance; et par suite, $\Phi(\theta)$ étant absolument sommable, $|J'|$ pourra être rendu plus petit que tout nombre δ donné d'avance.

Passons à J_{ab}. On sait qu'on peut écrire, $\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega i}{\pi}\log\rho$ et $\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)$ étant petits en module:

$$\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega i}{\pi}\log\rho\right]=\frac{1}{\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta-\log\rho)}+H,$$

$$\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\right]=\frac{1}{\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)}+H_1,$$

H et H_1 étant des quantités de l'ordre de grandeur de $|\gamma - \theta - \log\rho|^3$ et $|\varepsilon - \theta|^3$ respectivement; H tendant du reste vers H_1 lorsque $\log\rho$ et $\gamma - \varepsilon$ tendent vers zéro.

De là résulte que, quelle que soit d'ailleurs la longueur de ab, supposée cependant petite, on peut choisir $|\log\rho|$ et $|\theta - \varepsilon|$ suffisamment petits pour assurer l'inégalité

$$|J'_{ab}| = \left| \int_{ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)](H - H_1)\, d\theta \right| < \delta.$$

3. Il n'y a donc plus en réalité à s'occuper que de

$$J''_{ab} = \frac{\pi}{\omega} \int_{ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \left(\frac{1}{\gamma - \theta - i\log\rho} - \frac{1}{\varepsilon - \theta} \right) d\theta$$

ou

$$J''_{ab} = \frac{\pi}{\omega} \int_{ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{\varepsilon - \gamma + i\log\rho}{(\gamma - \theta - i\log\rho)(\varepsilon - \theta)}\, d\theta.$$

La fonction Φ satisfaisant par hypothèse à la condition (37), on a de suite l'inégalité

$$|J''_{ab}| < \lambda \frac{\pi}{\omega} \int_{ab} \left| \frac{\varepsilon - \lambda + i\log\rho}{\theta - \lambda + i\log\rho} \right| \frac{d\theta}{|\theta - \varepsilon|^{1-c}}.$$

Considérons à part la quantité

$$P = \left| \frac{\varepsilon - \gamma + i\log\rho}{\theta - \gamma + i\log\rho} \right| = \frac{\sqrt{(\varepsilon - \gamma)^2 + (\log\rho)^2}}{\sqrt{(\theta - \gamma)^2 + (\log\rho)^2}}$$

et voyons si nous ne pourrions pas trouver pour cette quantité une limite supérieure, lorsque l'on suppose que le point $z = \rho e^{i\gamma}$ tend vers le point $z_0 = e^{i\varepsilon}$ en suivant un chemin qui n'arrive pas à la frontière *tangentiellement* à celle-ci. z étant un point voisin de z_0 sur le chemin en question, désignons par χ l'angle (qu'on peut supposer entre o et $\frac{\pi}{2}$) du vecteur $\overline{zz_0}$ avec la circonférence de rayon 1.

Nous voyons tout d'abord immédiatement que, si l'angle χ restait constamment égal à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si le point z tendait vers z_0 en restant sur le rayon, on aurait constamment $\gamma = \varepsilon$ et, par suite, quel que soit θ,

$$|P| \leqq 1.$$

Supposons maintenant $\chi \neq \frac{\pi}{2}$; la géométrie élémentaire nous donne alors l'égalité

$$\frac{\rho}{\cos\chi} = \frac{1}{\cos(\gamma - \varepsilon - \chi)}$$

en admettant, pour fixer les idées, que γ soit plus grand que ε. On conclut de là

$$\rho = \frac{\cos\chi}{\cos(\gamma - \varepsilon)\cos\chi + \sin(\gamma - \varepsilon)\sin\chi} = \frac{1}{\cos(\gamma - \varepsilon) + \sin(\gamma - \varepsilon)\operatorname{tg}\chi}.$$

Observons maintenant que, lorsque z tend vers z_0 comme il a été dit, l'angle χ ne devient jamais nul, et qu'il reste supérieur à un nombre positif non nul χ'. Il en rément petit pour que le module de

$$\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi$$

reste toujours inférieur à 1. On est alors en droit d'écrire :

$$\rho=\frac{1}{\cos(\gamma-\varepsilon)}[1+\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi]^{-1}=\frac{1}{\cos(\gamma-\varepsilon)}[1-\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi+\cdots]$$

puis :

$$\begin{aligned}\log\rho&=-\log\cos(\gamma-\varepsilon)+\log[1-\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi+\cdots]=-\operatorname{tg}(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi+K(\gamma-\varepsilon)^2\\&=-(\gamma-\varepsilon)\operatorname{tg}\chi+L(\gamma-\varepsilon)^2,\end{aligned}$$

où K et L sont des quantités restant finies au voisinage de z_0. Donc on a, L_1 étant également fini,

$$P=\frac{\sqrt{(\gamma-\varepsilon)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\chi+L_1(\gamma-\varepsilon)^3}}{\sqrt{(\gamma-\theta)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\chi+L_1(\gamma-\varepsilon)^3}},$$

expression qui différera très peu de

$$\frac{\sqrt{(\gamma-\varepsilon)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\chi}}{\sqrt{(\gamma-\theta)^2+(\gamma-\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\chi}}$$

dont le maximum, pour θ variable, est évidemment

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\chi}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\chi}}=\frac{1}{\sin\chi}.$$

En conséquence, on peut, en désignant par M un nombre positif un peu plus grand que $\frac{1}{\sin\chi}$, supposer le point z suffisamment voisin de z_0 sur le chemin qui aboutit à ce point, pour que l'on ait constamment l'inégalité

$$|P|<M.$$

Revenant alors à J''_{ab}, nous voyons que

$$|J''_{ab}|<M\lambda\frac{\pi}{\omega}\int_{ab}\frac{d\theta}{|\theta-\varepsilon|^{1-c}}=M\lambda\frac{\pi}{\omega}\int_{\varepsilon-k}^{\varepsilon+k}\frac{d\theta}{|\theta-\varepsilon|^{1-c}},$$

c'est-à-dire

$$|J''_{ab}|<2M\lambda\frac{\pi}{\omega}\int_0^{\varepsilon+k}\frac{d\theta}{|\theta-\varepsilon|^{1-c}}$$

ou enfin

$$|J''_{ab}|<2M\lambda\frac{\pi}{\omega}\frac{k^c}{c}.$$

Et puisque c est positif, il en résulte qu'on peut choisir une fois pour toutes la longueur $2k$ de l'arc ab, de manière que l'on ait l'inégalité

$$|J''_{ab}|<\delta.$$

Il en résulte enfin, d'après tout ce qui précède, que le choix de $|\gamma-\varepsilon|$ et de $|\log\rho|$ sera possible pour assurer l'inégalité

$$|J|<3\delta. \tag{40}$$

J tend donc vers zéro, et par suite $A(z)$ tend vers $A(z_0)$ quand z tend vers z_0, et $\Omega(z)$ tend vers $\Omega(z_0)$. Ω est donc continue jusqu'au point z_0 de la frontière, y compris.

§ 3. Continuité sur une frontière.

1. Voyons maintenant comment se comporte la fonction Ω sur la circonférence frontière elle-même, au voisinage du même point z_1, la fonction Φ étant toujours supposée satisfaire à une condition de Lipschitz (37) en ce point et au voisinage. On sait déjà comment se comporte la partie réelle, qui est $\Phi(\gamma)$ au point $z = e^{i\gamma}$. Quant à la partie imaginaire, elle nous est fournie par l'équation (28) qui donne le coefficient de i:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} U(\gamma) = {} & \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\gamma)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)\,d\theta \\ & -\frac{2\eta\omega}{\pi}\left(1-\frac{\gamma}{\pi}\right)\Phi(\gamma)-\frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Je vais faire voir que $U(\gamma)$ tend vers $U(\varepsilon)$ lorsque γ tend vers ε, ce qui assurera la continuité de Ω sur la frontière, au point considéré.

En négligeant dans U une partie visiblement continue, et en négligeant aussi un facteur constant, nous avons à considérer la différence

$$M = \int_0^{2\pi}\left\{[\Phi(\theta)-\Phi(\gamma)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\right\}d\theta.$$

Nous séparerons cette intégrale en deux portions M_{ab} et M', correspondant respectivement à un petit arc ab de longueur $2k$, ayant pour milieu le point $e^{i\varepsilon}$, arc auquel le point $e^{i\gamma}$, qui tend vers $e^{i\varepsilon}$, sera intérieur, — et au reste de la circonférence. Occupons-nous d'abord de M_{ab}.

On sait d'après la théorie de la fonction ζ, que, pour $|\gamma-\theta|$ et $|\varepsilon-\theta|$ petits, les produits $\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)\zeta\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)$ et $\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)$ sont voisins de 1. On peut donc tout d'abord restreindre la longueur $2k$ de l'arc ab, pour que, quel que soit θ correspondant à cet arc, on ait les inégalités

$$\left|\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)\zeta\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)\right| < 2,$$

$$\left|\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\right| < 2.$$

En désignant alors par λ' un nombre un peu plus grand que les valeurs de λ au voisinage du point $e^{i\varepsilon}$, et par c' un nombre un peu plus petit que les valeurs de c, il vient de suite

$$|M_{ab}| < 2\lambda'\frac{\pi}{\omega}\left(\int_{ab}\frac{d\theta}{|\gamma-\theta|^{1-c'}}+\int_{ab}\frac{d\theta}{|\varepsilon-\theta|^{1-c'}}\right),$$

d'où bien aisément

$$|M_{ab}| < 4\lambda' \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{c'} [(2k)^{\iota'} + k^{\iota'}] = N k^{\iota'},$$

en désignant par N un nombre fixe.

Il est donc possible de choisir une valeur fixe $2k$ pour l'arc ab, de telle manière que l'on ait

$$|M_{ab}| < \delta,$$

δ étant un nombre positif arbitrairement petit.

2. L'arc ab étant ainsi fixé, il reste à s'occuper de M'. Or il est clair que l'on peut choisir $|\gamma - \varepsilon|$ assez petit pour que, quel que soit le point $e^{i\theta}$ à l'extérieur de l'arc ab, on ait

$$(42) \qquad \left|\zeta \frac{\omega}{\pi}(\gamma - \theta) - \zeta \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \theta)\right| < m,$$

m désignant un nombre arbitrairement petit. Puis, un calcul facile montre qu'on a

$$\int_{\text{circonf.}-ab} \zeta \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \theta) d\theta = -\frac{\pi}{\omega} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{\pi} k - 2\omega\right)}{\sigma\left(-\frac{\omega}{\pi} k\right)} = 2\pi\eta\left(\frac{k}{\pi} - 1\right)$$

et

$$\int_{\text{circonf.}-ab} \zeta \frac{\omega}{\pi}(\gamma - \theta) d\theta = -\frac{\pi}{\omega} \log \frac{\sigma\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma - \varepsilon + k) - 2\omega\right]}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(\gamma - \varepsilon - k)}$$

$$= 2\pi\eta\left(\frac{k}{\pi} - 1 + \frac{\gamma - \varepsilon}{\pi}\right) - \frac{\pi}{\omega} \log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}(k + \gamma - \varepsilon)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(k - \gamma + \varepsilon)}.$$

On peut donc écrire M' sous la forme

$$M' = \int_{\text{circonf.}-ab} \Phi(\theta)\left[\zeta \frac{\omega}{\pi}(\gamma - \theta) - \zeta \frac{\omega}{\pi}(\varepsilon - \theta)\right] d\theta$$

$$+ 2\pi\eta\left(\frac{k}{\pi} - 1\right)[\Phi(\varepsilon) - \Phi(\gamma)] - 2\eta(\gamma - \varepsilon)\Phi(\gamma)$$

$$+ \frac{\pi}{\omega} \Phi(\gamma) \log \frac{\sigma \frac{\omega}{\pi}(k + \gamma - \varepsilon)}{\sigma \frac{\omega}{\pi}(k - \gamma + \varepsilon)}$$

La première intégrale, à cause de (42) et du fait que Φ est absolument intégrable, pourra être rendue aussi petite que l'on veut (par exemple, plus petite que δ); et la partie restante de M' également, car elle tend vers zéro avec $|\gamma - \varepsilon|$ d'une façon trop évidente pour y insister.

De tout quoi résulte

$$|M| < 3\delta,$$

d'où la continuité annoncée.

§ 4. Cas où la fonction Φ devient discontinue.

1. Supposons d'abord qu'au point $z_0 = e^{i\varepsilon}$, la fonction $\Phi(\theta)$ devienne discontinue, en sautant brusquement d'une valeur finie $\Phi(\varepsilon - 0)$ à une valeur également finie $\Phi(\varepsilon + 0)$ lorsque θ traverse en croissant la valeur ε. Ce cas est extrêmement facile à élucider, en utilisant un procédé déjà indiqué par SCHWARZ à propos de la formule de POISSON.

Considérons la fonction

$$\frac{1}{i} \log(z - z_0) = \frac{1}{2i} \log[(x - x_0)^2 (y - y_0)^2] + \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

qui est régulière et bien déterminée dans la couronne, dès qu'on a choisi en un point particulier la détermination qu'on prend pour le logarithme. La partie réelle de cette fonction prend sur la circonférence de rayon 1 une suite de valeurs continue partout sauf au point z_0 pour lequel il y a un saut brusque égal à π. Par suite la fonction

$$\Omega(z) + \frac{\Phi(\varepsilon + 0) - \Phi(\varepsilon - 0)}{i\pi} \log(z - z_0)$$

pourra être considérée comme construite à l'aide des formules du précédent chapitre, avec une fonction Φ_1 n'ayant en z_0 aucune discontinuité. De là, par un raisonnement bien élémentaire, nous concluons que la partie imaginaire de Ω devient infinie au point considéré, quel que soit le chemin suivi dans la couronne, par le point z tendant vers z_0. Quant à la partie réelle, en désignant par τ l'angle sous lequel ce chemin (supposé doué d'une tangente) coupe la frontière, elle tend vers

$$\Phi(\varepsilon - 0) + \frac{\Phi(\varepsilon + 0) - \Phi(\varepsilon - 0)}{\pi} \tau$$

et par suite elle pourra prendre toutes les valeurs intermédiaires à $\Phi(\varepsilon - 0)$ et $\Phi(\varepsilon + 0)$; en particulier elle prendra la valeur

$$\frac{1}{2}[\Phi(\varepsilon - 0) + \Phi(\varepsilon + 0)]$$

si l'on arrive en z_0 en suivant le rayon qui y aboutit.

2. Nous allons maintenant étudier ce qui se passe lorsque $\Phi(\theta)$ devient infini pour $z_0 = e^{i\varepsilon}$; à cet effet nous étudierons spécialement la partie réelle de Ω, et plus particulièrement la portion de cette partie réelle qui provient de l'intégrale effectuée sur la circonférence extérieure (la portion restante, provenant de la frontière intérieure, tendant vers zéro, comme on l'a déjà vu, si $z = \rho e^{i\gamma}$ s'approche de z_0). La portion envisagée est alors la suivante, provenant de la formule (24),

$$P(\rho, \gamma) = \text{partie réelle de } \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi} \log z - \frac{\omega}{\pi} \theta\right) d\theta,$$

d'où

$$(43) \quad 2P(\rho, \gamma) = \frac{\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \left\{ i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma - \theta) + \frac{\omega}{i\pi} \log\rho\right] - i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma - \theta) - \frac{\omega}{i\pi} \log\rho\right] \right\} d\theta.$$

Observons qu'on peut écrire le coefficient de $\Phi(\theta)$ sous le signe $\int$, de la façon suivante :

$$\left\{ i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)+\frac{\omega}{i\pi}\log\rho\right]-\frac{i}{\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)+\frac{\omega}{i\pi}\log\rho}\right\}$$

$$-\left\{ i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho\right]-\frac{i}{\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho}\right\}-\frac{2\pi}{\omega}\frac{\log}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}.$$

Quel que soit θ, la quantité

$$(44)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left\{ i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)+\frac{\omega}{i\pi}\log\rho\right]-\frac{i}{\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)+\frac{\omega}{i\pi}\log\rho}\right\} \\ -\left\{ i\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho\right]-\frac{i}{\frac{\omega}{\pi}(\gamma-\theta)-\frac{\omega}{i\pi}\log\rho}\right\} \end{array}\right.$$

reste une fonction continue, toujours finie, de $\gamma-\theta$ et $\log\rho$, qui s'annule pour $\log\rho=0$ quel que soit θ : de là, et du fait que l'intégrale $\int_0^{2\pi}|\Phi(\theta)|\,d\theta$ est finie, on conclut que le module de la partie correspondante à (44) dans P, devient aussi petit que l'on veut lorsque ρ tend vers 1. La contribution de la quantité (44) tend donc vers zéro, et nous avons le droit d'écrire, quand z est voisin de z_0 :

$$(45)\quad P(\rho,\gamma)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}\,d\theta+\text{ une quantité qui tend vers zéro.}$$

Il est alors facile de démontrer en toute rigueur ce fait bien aisé à prévoir : que la valeur de $P(\rho,\gamma)$ quand z est voisin de z_0, ne dépend que des valeurs de $\Phi(\theta)$ le long d'un arc ab de la frontière, comprenant le point z_0, et d'ailleurs arbitrairement petit.

Appelons en effet C la circonférence totale diminuée de l'arc ab ; la contribution de C à l'intégrale qui figure dans la dernière expression de P, est

$$(46)\qquad -\frac{1}{\pi}\int_C\Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}\,d\theta.$$

Or, le point $\rho e^{i\gamma}$ tendant vers $e^{i\varepsilon}$ intérieur à ab, le module de $\gamma-\theta$ finit par rester supérieur à un nombre fixe f, et alors le module de (46) est inférieur à

$$\frac{1}{\pi}\frac{|\log\rho|}{f^2}\int_0^{2\pi}|\Phi(\theta)|\,d\theta,$$

quantité qui tend vers zéro avec $\log\rho$. D'où le théorème annoncé.

3. Ceci posé, supposons que pour $z_0=e^{i\varepsilon}$, $\Phi(\theta)$ *devienne infini sans changer de signe*, en restant positive par exemple, de sorte que $\Phi(\theta)$ serait continue pour $\theta=\varepsilon$, à condition de lui donner la valeur $+\infty$ en ce point. Je dis qu'alors la partie réelle de Ω tend vers $+\infty$ quand $z=\rho e^{i\gamma}$ tend vers z_0.

D'après ce qui précède, il suffit de s'occuper de P, et même seulement de

$$(47) \qquad P' = -\frac{1}{\pi}\int_{ab}\Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}d\theta,$$

qui en diffère infiniment peu.

Cette expression P' est évidemment positive. Puis, M étant un nombre positif arbitrairement grand, on peut déterminer dans ab un arc intérieur $a'b'$ comprenant le point z_0, et dans lequel $\Phi(\theta)$ soit constamment plus grand que M. Alors il viendra

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a'b'}\Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}d\theta > \frac{M}{\pi}\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta-\gamma}{\log\rho}\right)_{a'b'}.$$

Or la quantité $\left(-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\theta-\gamma}{\log\rho}\right)_{a'b'}$ est finie et non nulle (voisine de π d'ailleurs) dès que z est assez voisin de z_0 pour que le rayon qui va du centre de la couronne au point z, perce la circonférence à l'intérieur de $a'b'$.

De là résulte que

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a'b'}\Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}d\theta$$

dépasse toute quantité donnée d'avance, et par suite il en est a fortiori de même de P', qui lui est évidemment supérieur.

Donc la partie réelle de Ω devient bien égale à $+\infty$.

4. Supposons maintenant que $\Phi(\theta)$ *devienne infinie en changeant de signe,* quand θ traverse la valeur ε. Je dis que la partie réelle de Ω peut tendre vers toute valeur arbitrairement choisie entre $+\infty$ et $-\infty$.

Il suffit encore de considérer l'expression P'. Or, par le point z menons la corde $a''b''$ perpendiculaire au rayon z. Si z est assez voisin de z_0, l'arc $a''b''$ sera intérieur à ab.

Alors, si l'arc $a''b''$ ne contient pas le point z_0, la quantité $\dfrac{-\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}$ aura un dénominateur dont la limite inférieure ne sera pas nulle lorsque le point $e^{i\theta}$ décrira la partie de ab non commune avec $a''b''$; la partie de l'intégrale P' correspondante restera par suite finie. Si alors l'arc $a''b''$ se trouve du côté de z_0 où la fonction $\Phi(\theta)$ est positive, on voit, par un raisonnement analogue à celui qu'on a fait il y a un instant, que la portion de P' relative à $a''b''$ deviendra aussi infiniment grande positive; et de même si l'arc $a''b''$ se trouve du côté où $\Phi(\theta)$ est négative, la portion correspondante deviendra infiniment grande négative.

On peut donc énoncer immédiatement le résultat suivant: décrivons la circonférence S de diamètre $\overline{Oz_0}$; si le point z tend vers z_0 en restant dans la partie de la couronne circulaire, comprise entre la circonférence de rayon 1 et la circonférence S, la partie réelle de Ω tendra vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, selon qu'on arrive en z_0 du côté où $\Phi(\theta)$ est positive ou négative. C'est là une généralisation immédiate d'un résultat obtenu par M. P. Fatou dans sa Thèse [Acta Mathematica, t. XXX (1906), pp. 335-400].

Maintenant on a démontré que Ω était continue dans la couronne. De là il résulte de suite, que si le point z tend vers z_0 en restant dans la circonférence S, la partie réelle de Ω pourra tendre vers une valeur quelconque donnée d'avance.

5. On ne peut donner des résultats aussi précis relativement à la partie imaginaire de Ω au voisinage des points où la fonction $\Phi(\theta)$ devient infinie. Cela tient au fond, à ce que la valeur de cette partie imaginaire au voisinage d'un point d'une frontière, dépend des valeurs que prennent les deux fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ en tous les points des deux frontières.

On peut cependant affirmer sans nouveau calcul, qu'en un point $z_0 = e^{i\varepsilon}$ où $\Phi(\theta)$ devient infini, le coefficient $Q(\rho, \gamma)$ de i dans Ω devient certainement discontinu de quelque façon sur la frontière correspondante. En effet, il a été démontré que, lorsque la partie réelle de Ω était continue (à la LIPSCHITZ) en un point d'une frontière, la partie imaginaire y était aussi continue; comme une simple multiplication par i intervertit le réel et l'imaginaire (à un signe près sans importance), nous en concluons que si Q restait continu (à la LIPSCHITZ tout au moins) sur la frontiere, la fonction $\Phi(\theta)$ n'aurait aucune discontinuité au point considéré; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans ce qui précède nous avons, pour démontrer la continuité de Ω aux frontières, supposé pour $\Phi(\theta)$ ou $\Psi(\theta)$ la continuité à la LIPSCHITZ au point correspondant. Les résultats obtenus sont largement assez généraux pour les applications que j'ai en vue, et que j'ai déjà indiquées partiellement ailleurs. Il ne serait pas malaisé d'étudier la fonction Ω dans des circonstances beaucoup plus larges, notamment au cas où les fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ seraient seulement supposées sommables au sens de LEBESGUE, sans qu'une condition de LIPSCHITZ soit en même temps vérifiée.

J'aurai ailleurs l'occasion de revenir sur ce point, et de démontrer prochainement certains résultats intéressants relatifs à la dérivée normale de la fonction Ω (et notamment de sa partie réelle) prise en un point d'une frontière.

§ 5. **Retour à la continuité près d'une frontière.**

Je veux cependant encore montrer ici que l'hypothèse de la continuité à la LIPSCHITZ peut être facilement laissée de côté si l'on a simplement pour but de démontrer que la partie réelle de Ω tend vers $\Phi(\varepsilon)$ quand le point $z = \rho e^{i\gamma}$ tend vers un point $z_0 = e^{i\varepsilon}$ au voisinage duquel $\Phi(\theta)$ serait supposée continue.

En effet, on a vu précédemment qu'en appelant ab un petit arc comprenant le point z_0, on pouvait écrire, en négligeant une quantité tendant vers zéro:

$$(48) \qquad P(\rho,\gamma) = -\frac{1}{\pi}\int_{ab} \Phi(\theta)\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}\,d\theta + \text{inf. petit}$$

Nous voulons faire voir que cette quantité tend vers $\Phi(\varepsilon)$ si l'on suppose $\Phi(\theta)$ continue pour $\theta = \varepsilon$.

Observons d'abord qu'on a

$$\int_{ab}\frac{\log\rho}{(\gamma-\theta)^2+(\log\rho)^2}\,d\theta = \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\theta-\gamma}{\log\rho}\right]_a^b.$$

Puis la géométrie élémentaire montre qu'on peut écrire, en négligeant des quantités du second ordre en $1 - \rho$,

$$\theta - \gamma = -(1 - \rho)\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\log\rho = -(1 - \rho)$$

(φ désigne l'angle que le vecteur $z\,O$ fait avec le vecteur qui va du point z au point $e^{i\theta}$).

De là résulte immédiatement que l'intégrale

$$\int_{ab} \frac{\log\rho}{(\gamma - \theta)^2 + (\log\rho)^2}$$

diffère infiniment peu de $[\varphi]_a^b$, laquelle quantité diffère elle-même infiniment peu de $-\pi$ quand le point z est suffisamment voisin de z_0.

Il est donc permis d'écrire, en négligeant une quantité qui tend vers zéro avec $|z - z_0|$,

$$(49) \qquad P(\rho, \gamma) = \Phi(\varepsilon) - \frac{1}{\pi}\int_{ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{\log\rho}{(\gamma - \theta)^2 + (\log\rho)^2} d\theta + \text{inf. petit.}$$

et tout revient à faire voir que

$$j = \int_{ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{\log\rho}{(\gamma - \theta)^2 + (\log\rho)^2} d\theta$$

est aussi petit que l'on veut pour $|z - z_0|$ assez petit.

Or, $\Phi(\theta)$ étant continue pour ε, on peut supposer que l'intervalle ab a été au préalable suffisamment restreint, pour que, quel que soit $e^{i\theta}$ sur l'arc ab, la différence $\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)$ soit en module inférieure à un nombre δ donné d'avance; alors on aura

$$|j| < \delta \int_{ab} \frac{-\log\rho}{(\gamma - \theta)^2 + (\log\rho)^2} d\theta < m\delta,$$

en appelant m un nombre fixe un peu plus grand que π.

Donc $|j|$ est aussi petit que l'on veut, ce qui démontre le théorème.

IV.

APPLICATION.

1. Pour indiquer ici au moins une application, rappelons que la solution générale du problème d'Hydrodynamique relatif au mouvement d'un solide dans un fluide limité par une ou deux parois, fixes, se ramène, comme je l'ai démontré [loc. cit. [2]), c) et d)], à la détermination d'une fonction analytique $\Omega(z)$ régulière et uniforme dans une couronne circulaire de rayons extrêmes 1 et q (< 1), et dont la partie réelle prenne sur les frontières:

1° Pour $z = e^{i\theta}$ des valeurs $\Phi(\theta)$ deux à deux égales aux points symétriques par rapport à l'axe réel; on doit avoir

$$\int_0^\pi \Phi(\theta)\,d\theta = 0; \tag{50}$$

la fonction $\Phi(\theta)$ est continue partout sauf en deux points $z = e^{\pm i s_0}$, au plus; en outre les circonstances physiques du problème exigent que $\Phi(\theta)$ ait partout une dérivée bien déterminée, sauf peut-être pour $z = e^{\pm i s_0}$, où il peut y avoir une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

2° Pour $z = q e^{i\theta}$, la partie réelle de Ω doit prendre des valeurs nulles.

Enfin, pour z réel, Ω doit être réel, ce qui détermine la constante additive (imaginaire pure) que les conditions précédentes laissent subsister dans Ω.

Nos formules générales s'appliquent immédiatement à ces données: on a ici

$$\Psi(\theta) \equiv 0;$$

la condition (22) est vérifiée d'elle-même; il faut donc recourir à la formule (24) pour avoir l'expression de Ω valable dans la couronne. Cela nous donne:

$$\Omega(z) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta.$$

Mais par hypothèse on a

$$\Phi(2\pi - \theta) = \Phi(\theta)$$

d'où

$$\int_\pi^{2\pi} \Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta = \int_0^\pi \Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}\theta - 2\omega\right)d\theta$$

et

$$\Omega(z) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\left[\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z + \frac{\omega}{\pi}\theta\right) - 2\eta\right]d\theta.$$

Appliquons maintenant la formule d'addition de la fonction ζ, et utilisons la relation (50); il vient

$$\Omega(z) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\theta)\left\{\begin{aligned} &\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) - \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) + \wp'\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\wp\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right)} \\ &+\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) + \zeta\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) - \wp'\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}{\wp\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}\end{aligned}\right\}d\theta,$$

puis enfin

$$\Omega(z) = \frac{i\omega}{\pi^2}\wp'\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right)\int_0^\pi \Phi(\theta)\frac{d\theta}{\wp\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z\right) - \wp\left(\frac{\omega}{\pi}\theta\right)}. \tag{51}$$

C'est la formule (42) de mon Mémoire [loc. cit. [2]), c]: formule que je démontrais alors par une méthode différente, et moins générale du reste que la méthode actuelle, puisque j'utilisais l'existence de la dérivée de $\Phi(\theta)$, existence qui était alors une nécessité physique de la question, mais qui n'est, comme il résulte du présent Travail, nullement nécessaire à la validité des résultats.

2. Cherchons de même la valeur du coefficient de i dans Ω, en un point $e^{i\varepsilon}$ de la frontière: elle nous sera donnée par la formule (28); d'où pour le cas présent, en désignant par U_1 ce coefficient:

$$U_1 = \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\,d\theta - \frac{2\eta\omega}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\Phi(\varepsilon).$$

Or on aura facilement

$$\int_\pi^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\theta)\,d\theta$$
$$-2\eta\int_0^{\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\,d\theta.$$

D'où finalement

$$(52)\qquad U_1 = \frac{\omega}{\pi^2}\int_0^{\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\left[\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon-\theta)+\zeta\frac{\omega}{\pi}(\varepsilon+\theta)\right]d\theta + \frac{2\eta\omega}{\pi^2}\varepsilon\Phi(\varepsilon),$$

expression qui coïncide, à la notation près, avec celle que j'ai obtenue directement [loc. cit. [2]), c, p. 385].

Toutes les propriétés relatives entre autres à la continuité, sont alors certainement remplies, comme il résulte de l'étude qu'on vient de faire.

V.

ÉTUDE D'UN CAS LIMITE.

Il n'est pas sans intérêt de constater ce que deviennent nos formules, lorsqu'on suppose que le rayon de la circonférence frontière intérieure de notre couronne tend vers zéro, en sorte que notre domaine se réduit à une aire circulaire. Nous allons facilement vérifier qu'on obtient dans ce cas une formule déjà connue, et qui contient particulièrement la formule de Poisson.

Nous nous occuperons de l'expression générale (26) de Ω, dans le domaine, relative au cas le plus général, où les fonctions arbitraires $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ sont tout à fait indépendantes; à savoir

$$(53)\quad \begin{cases} \Omega(z) = \dfrac{i\omega}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta - \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta \\ \qquad + \dfrac{i\omega}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{2\omega'} - \dfrac{\eta}{i\pi}\right)\log z\displaystyle\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Psi(\theta)]\,d\theta. \end{cases}$$

Si l'on admet que le rayon intérieur

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}}$$

tende vers zéro, il suffira de supposer que la demi période ω' devient infinie. On sait alors que les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions trigonométriques, et qu'on a relativement à ce cas [6]) la formule suivante

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u,$$

d'où nous tirons de suite

$$\eta = \zeta\omega = \frac{\pi^2}{12\omega}.$$

On a, de plus,

$$\zeta_3 u = \zeta(u+\omega') - \eta' = \zeta(u+\omega') - \zeta\omega'.$$

Pour calculer ce que devient $\zeta(u+\omega)$, il nous faut connaître l'expression limite de

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\omega}(u+\omega').$$

En écrivant

$$\operatorname{tg}\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega} = \frac{e^{i\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}} - e^{-i\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}}}{i\left[e^{i\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}} + e^{-i\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}}\right]} = \frac{1 - e^{-i\frac{\pi(u+\omega')}{\omega}}}{i\left[1 + e^{-i\frac{\pi(u+\omega')}{\omega}}\right]}$$

et en remarquant que $e^{-i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ devient infini positif en même temps que $\frac{\omega'}{i}$, nous voyons immédiatement que

$$\lim.\operatorname{tg}\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega} = -\frac{1}{i} = i$$

et par suite

$$\lim.\operatorname{cotg}\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega} = -i.$$

On a donc, dans ces conditions,

$$\zeta(u+\omega') = -\frac{i\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2(u+\omega'),$$

et de même

$$\zeta\omega' = -\frac{i\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\omega',$$

d'où, pour $\zeta_3 u$, l'expression limite

$$\zeta_3 u = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u.$$

[On voit que, bien que $\zeta(u+\omega')$ et $\zeta\omega'$ deviennent tous deux infinis, leur différence a une limite].

---

[6]) Cfr. Appell et Lacour, *Principes de la théorie des Fonctions elliptiques et applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1897), p. 401.

Il résulte de là que la limite Ω_1 de Ω peut s'écrire

$$\Omega_1(z)=\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\left[\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)\right]d\theta$$
$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)\right]d\theta-\frac{1}{12.\pi}\log z\int_0^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Psi(\theta)]d\theta.$$

On voit immédiatement que le terme en $\log z$ disparaît de lui-même. On a par ailleurs

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\log z}{2i}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\log z}{2i}}{\operatorname{tg}\frac{\log z}{2i}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}},$$

puis

$$\operatorname{tg}\frac{\log z}{2i}=\frac{e^{\frac{\log z}{2}}-e^{-\frac{\log z}{2}}}{i\left(e^{\frac{\log z}{2}}+e^{-\frac{\log z}{2}}\right)}=\frac{z-1}{i(z+1)},$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log z-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)=\frac{(z-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+i(z+1)}{z-1-i(z+1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\frac{ie^{i\frac{\theta}{2}}+ize^{-i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}}+ze^{-i\frac{\theta}{2}}}=-i\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}.$$

D'où enfin

$$\Omega_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\theta-\frac{i}{12\pi}\int_0^{2\pi}\theta[\Phi(\theta)-\Psi(\theta)]d\theta.$$

Si l'on a pour but la résolution du problème de DIRICHLET, le terme constant, imaginaire pure :

$$-\frac{i}{12\pi}\int_0^{2\pi}\theta[\Phi(\theta)-\Psi(\theta)]d\theta$$

n'a aucune signification, car sa présence ne modifie pas la partie réelle de Ω_1 ; on peut donc dire que :

La partie réelle de la fonction analytique

$$\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\theta \tag{54}$$

est une fonction harmonique régulière dans le cercle de rayon 1, et qui prend sur la circonférence frontière la succession de valeurs $\Phi(\theta)$. C'est un résultat bien connu [7]).

La partie réelle de Ω reproduit d'ailleurs la célèbre intégrale de POISSON, comme il est facile de s'en assurer.

---

[7]) Cfr. SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* (Berlin, Springer, 1890), t. II, p. 152.

VI.

NOTE.

La méthode suivie dans ce qui précède, pour la résolution du problème de DIRICHLET dans la couronne, n'est évidemment pas la seule susceptible de conduire à nos formules. Mais s'il existait — comme c'est le cas — pour résoudre la question, des formules mettant immédiatement en évidence les deux fonctions arbitraires dont elle dépend, notre procédé devait nécessairement nous les fournir sous la forme la plus simple.

Le résultat étant maintenant connu, il n'est pas malaisé de le retrouver par différentes méthodes. Je veux encore montrer comment on peut retomber sur notre formule (26) en partant d'une indication contenue dans le Traité d'Analyse de M. PICARD [8]).

Supposons, comme l'exige la théorie à laquelle nous venons de reporter, que les deux fonctions arbitraires Φ et Ψ soient développables en séries trigonométriques *uniformément* convergentes sur les frontières respectives, et posons

$$\Phi(\gamma) = \alpha_0 + \sum_1^\infty U_n(\gamma) = \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\gamma + \beta_n \sin n\gamma),$$

$$\Psi(\gamma) = \alpha'_0 + \sum_1^\infty V_n(\gamma) = \alpha'_0 + \sum_1^\infty (\alpha'_n \cos n\gamma + \beta'_n \sin n\gamma)$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

$$\alpha'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta, \quad \alpha'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad \beta'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\sin n\theta\,d\theta.$$

On trouve alors [PICARD, loc. cit. [8]), p. 105] qu'en posant $x = \rho\cos\gamma$, $y = \rho\sin\gamma$, la fonction harmonique $P(\rho, \gamma)$ correspondant aux valeurs données aux frontières, est la somme des deux séries suivantes:

$$A = \alpha_0 \frac{\log\frac{\rho}{q}}{\log\frac{1}{q}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{\rho^n}{q^n} - \frac{q^n}{\rho^n}}{\frac{1}{q^n} - q^n} U_n(\gamma),$$

$$B = \alpha'_0 \frac{\log\frac{1}{\rho}}{\log\frac{1}{q}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{\rho^n} - \rho^n}{\frac{1}{q^n} - q^n} V_n(\gamma).$$

Les deux sommes qui interviennent dans A et B peuvent se traiter d'une manière

8) ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), t. II (2^e^ édition, 1905), p. 103.

semblable : occupons-nous par exemple de la somme

$$C = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{\rho^n} - \rho^n}{\frac{1}{q^n} - q^n} V_n(\gamma)$$

qui intervient dans B. On peut tout d'abord évidemment écrire

$$V_n(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\cos n(\theta - \gamma)\,d\theta,$$

d'où pour C l'expression suivante :

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta)\left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}}\frac{1}{\rho^n}\cos n(\theta-\gamma) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}}\rho^n \cos n(\theta-\gamma)\right]d\theta.$$

Or on a manifestement

$$D(\rho) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}}\rho^n \cos n(\theta-\gamma) = \sum_{p=1}^{p=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2p-1)n}\rho^n \cos n(\theta-\gamma)$$

et comme, pour u réel et $|u| < 1$, la quantité $\sum_{n=1}^{n=\infty} u^n \cos n(\theta-\gamma)$ est la partie réelle de

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u^n e^{in(\theta-\gamma)} = \frac{u\,e^{i(\theta-\gamma)}}{1 - u\,e^{i(\theta-\gamma)}},$$

on peut écrire (la lettre R désignant la partie réelle de l'expression qui la suit) :

$$D(\rho) = R\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p-1}\rho\,e^{i(\theta-\gamma)}}{1 - q^{2p-1}\rho\,e^{i(\theta-\gamma)}}.$$

Par suite la différence qui intervient dans C prend la forme

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right) - D(\rho) = R\left[-\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p-1}\rho\,e^{i(\theta-\gamma)}}{1 - q^{2p-1}\rho\,e^{i(\theta-\gamma)}} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}{1 - q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}\right].$$

Or on peut changer le signe de i dans le premier terme du second membre, puisque la partie réelle est seule importante. On a donc

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right) - D(\rho) = R\left[-\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p-1}\rho\,e^{-i(\theta-\gamma)}}{1 - q^{2p-1}\rho\,e^{-i(\theta-\gamma)}} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}{1 - q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}\right].$$

Cela étant, posons, dans le plan de la couronne,

$$z = x + iy = \rho\,e^{i\gamma}$$

et

$$z\,e^{-i\theta} = e^{i\delta},$$

c'est-à-dire

$$\delta = \frac{1}{i}\log z - \theta.$$

Puis groupons les termes deux par deux dans la dernière équation, en utilisant la relation facile

$$\frac{q^{2p-1}\rho e^{-i(\theta-\gamma)}}{1-q^{2p-1}\rho e^{-i(\theta-\gamma)}}-\frac{q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}{1-q^{2p-1}\frac{1}{\rho}e^{i(\theta-\gamma)}}=\frac{2iq^{2p-1}\sin\delta}{1-2q^{2p-1}\cos\delta+q^{4p-2}}$$

Il viendra dans ces conditions

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right)-D(\rho)=-R\left(\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{2iq^{2p-1}\sin\delta}{1-2q^{2p-1}\cos\delta+q^{4p-2}}\right),$$

c'est-à-dire

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right)-D(\rho)=-Ri\frac{d}{d\delta}\left[\log\prod_{p=1}^{p=\infty}(1-2q^{2p-1}\cos\delta+q^{4p-2})\right],$$

ou encore (cfr. infra, I, § 2)

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right)-D(\rho)=-Ri\frac{d}{d\delta}\left[\log\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2p-1})^2\sigma_3(2\omega v)e^{-2\eta\omega v^2}\right]$$

avec

$$v=\frac{\delta}{2\pi}.$$

D'où

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right)-D(\rho)=-Ri\frac{d}{d\delta}\left[\log\sigma_3\left(\frac{\omega}{\pi}\delta\right)e^{-\frac{\eta\omega}{2\pi^2}\delta^2}\right]$$

et, en négligeant une imaginaire pure,

$$D\left(\frac{1}{\rho}\right)-D(\rho)=-R\left[\frac{i\omega}{\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)-\frac{\eta\omega}{\pi^2}\log\chi\right].$$

Il résulte de là que la quantité C est susceptible de recevoir la forme

$$C=R-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta\left[\frac{i\omega}{\pi}\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)-\frac{\eta\omega}{\pi^2}\log\chi\right].$$

Comme par ailleurs $\alpha_0'\dfrac{\log\frac{1}{\rho}}{\log\frac{1}{q}}$ est la partie réelle de

$$-\alpha_0'\frac{\log\chi}{\frac{\pi\omega'}{i\omega}}=-\frac{i\omega}{2\pi^2\omega'}\log\chi\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta,$$

il en résulte que la portion B de la fonction harmonique $P(\rho,\gamma)$ est la partie réelle de la fonction de χ suivante:

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\zeta_3\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\chi-\frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta+\log\chi\left(\frac{\eta\omega}{\pi^3}-\frac{i\omega}{2\pi^2\omega'}\right)\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\,d\theta.$$

Or c'est bien là la partie de la fonction définie par notre formule (26), qui correspond à la frontière intérieure et à la fonction $\Psi(\theta)$.

Un calcul analogue effectué sur A ferait retomber sur la partie restante de cette formule (26).

Notons en terminant, que, en conservant le point de vue actuel, si les fonctions $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ sont développables en séries de FOURIER convergentes uniformément dans tout l'intervalle $0, 2\pi$, il résulte d'un théorème de HARNACK [9]) que la partie réelle de la fonction de χ définie par (26) possède la continuité jusqu'aux frontières du domaine annulaire, au sens indiqué dans les paragraphes antérieurs. Mais on a vu que cette hypothèse relative à $\Phi(\theta)$ et $\Psi(\theta)$ n'est nullement nécessaire à la validité de nos formules.

Celleneuve (Hérault), octobre 1911.

HENRI VILLAT.

9) A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene* (Leipzig, Teubner, 1887), p. 67.