SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES ET SUR LA GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE DE FOURIER.

Par **J. Tamarkine** (St.-Pétersbourg).

Adunanza del 26 maggio 1912.

INTRODUCTION.

Dans ses nombreux travaux M. STEKLOFF a établi une méthode générale pour le développement d'une fonction dite arbitraire, $f(x)$, en série procédant suivant les solutions des équations différentielles ordinaires du second ordre [1]). Une autre méthode de même espèce a été développée dans les travaux de M. KNESER [2]).

On peut citer ensuite plusieurs travaux, où la méthode de M. STEKLOFF, ainsi que les méthodes analogues, s'appliquent aux équations du 4ème ordre [3]).

---

1) W. STEKLOFF : *a) Problème de refroidissement d'une barre hétérogène* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, IIe série,t. III (1901), pp. 281-313] ; *b) Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions* [Communications de la Société Mathématique de Kharkow, t. X (1909), pp. 97-201] ; *c) Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes du développement d'une fonction arbitraire en séries infinies* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLIV (1er sem. 1907), pp. 1329-1332] ; *d) Sur l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre* [Memorie della R. Accademia dei Lincei, vol. VIII (1910), pp. 159-170] ; *e) Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de* STURM-LIOUVILLE [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIX, 2° semestre 1910, pp. 490-496].

2) A. KNESER : *a) Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Functionen in der mathematischen Physik* [Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904), pp. 81-147] ; *b) Beiträge zur Theorie der* STURM-LIOUVILLE*schen Darstellung willkürlicher Funktionen* [Mathematische Annalen, Bd. LX (1905), pp. 402-423].

3) A. DAVIDOGLOU : *a) Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques* [Annales de l'École Normale Supérieure, IIIe série, t. XVII (1900), pp. 359-444] ; *b) Étude de l'équation différentielle,* etc. [Ibidem, IIIe série, t. XXII (1905), pp. 539-565].

N. KRYLOFF : *a) Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, 2° semestre 1909, pp. 610-614] ; *b) Sur les développements en séries des fonctions dites fondamentales rencontrées dans le problème des vibrations transversales des verges élastiques hétérogènes* [Annales de l'Université de Kieff, 1910].

J. TAMARKINE, *Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques* [Communications de la Société Mathématique de Kharkow, t. XII (1910), pp. 19-46].

Il faut remarquer que le champ d'applications des méthodes tout à l'heure mentionnées est limité, car elles ne s'appliquent qu'aux problèmes qu'on appelle « adjoints à eux mêmes ».

M. POINCARÉ a indiqué, dans son Mémoire devenu maintenant classique [4]), une autre méthode, basée sur un théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable complexe (CAUCHY), qui est exempt de ce défaut.

Cette méthode est étroitement liée à la recherche des expressions asymptotiques de solutions des équations différentielles qui servent au développement de la fonction $f(x)$.

Mais les expressions asymptotiques des intégrales des équations linéaires ordinaires n'ont été trouvées, dans le cas général, qu'en ce dernier temps par MM. SCHLESINGER et BIRKHOFF [5]), ce qui explique, en partie, la lenteur du progrès de la méthode de POINCARÉ-CAUCHY.

Les expressions asymptotiques dont il s'agit étant trouvées, le développement de la méthode de POINCARÉ-CAUCHY ne pouvait pas présenter des difficultés essentielles.

Notre travail est consacré justement à l'application de la méthode de POINCARÉ-CAUCHY au problème du développement susdit.

Quant aux expressions asymptotiques (dans le cas général), je remarquerai, que je les ai déduites indépendemment de M. BIRKHOFF, et par une voie analogue en grands traits à celle qui a conduit le géomètre américain à ses résultats, que je viens de mentionner.

Malheureusement, les « Transactions of the American Mathematical Society » étant peu répandus dans notre pays, nous n'avons appris que tout récemment l'existence des travaux de M. BIRKHOFF, grâce à l'amabilité de l'auteur lui même, qui a envoyé ses Mémoires à M. STEKLOFF. Il est inutile maintenant de reproduire nos recherches sur les expressions asymptotiques, et nous allons suivre dans ce travail le Mémoire de M. BIRKHOFF, publié en 1908.

M. BIRKHOFF, dans un second Mémoire [6]), a tenté aussi de faire application de la méthode de POINCARÉ-CAUCHY au problème du développement. Mais cette dernière question ne peut pas être considérée comme définitivement tranchée par le Mémoire cité de M. BIRKHOFF, parce que les résultats principaux y compris ne nous semblent pas établis d'une manière rigoureuse.

W. STEKLOFF et J. TAMARKINE, *Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXI (1° sem. 1911), pp. 341-362].

[4]) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VIII (1894), pp. 57-156].

[5]) L. SCHLESINGER, *Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters* [Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1907), pp. 277-300].

D. BIRKHOFF, *On the asymptotic charakter of the solutions of certain linear différential équations containing a parameter* [Transactions of the American Mathematical Society, Vol. IX (1908), pp. 219-231].

[6]) D. BIRKHOFF, *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations* [Transactions of the American Mathematical Society, Vol. IX (1908), pp. 373-395].

C'est pourquoi je me permet de reprendre ce problème dans cet Article, ayant le but principal de donner une *solution rigoureuse* du problème dont il s'agit.

1. Nous allons étudier, dans ce travail, le problème du développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les solutions de l'équation différentielle

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^m u}{d x^m} + p_2(x)\frac{d^{m-2} u}{d x^{m-2}} + \cdots + p_m(x) u + \lambda u = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

jointe aux conditions aux limites

$$(\mathrm{I}_a) \qquad U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où: U_i désignent les m formes linéaires de

$$u(0), \quad u'(0), \ldots, u^{(m-1)}(0), \quad u(1), \quad u'(1), \ldots, u^{(m-1)}(1)$$

linéairement distinctes;

$$p_2(x), \ldots, p_m(x)$$

les fonctions données de x, réelles ou complexes, continues dans $(0, 1)$; λ un paramètre [7]).

Nous allons supposer que les conditions (I_a) soient réduites à la forme normale de la manière suivante [8]): on peut supprimer $u^{(m-1)}(0)$ et $u^{(m-1)}(1)$ par des combinaisons linéaires convenablement choisies, dans les $(m-2)$ des équations (I_a); il en reste encore, au plus, deux qui contiennent encore $u^{(m-1)}(0)$ et $u^{(m-1)}(1)$. En appliquant les opérations analogues aux $u^{(m-2)}(0)$ et $u^{(m-2)}(1)$, on obtient encore deux équations au plus, qui contiennent $u^{(m-2)}(0)$ et $u^{(m-2)}(1)$, et $(m-4)$ ne contenant ni $u^{(m-1)}(0)$, $u^{(m-1)}(1)$ ni $n^{(m-2)}(0)$, $u^{(m-2)}(1)$. En procédant ainsi successivement on peut réduire les équations (I_a) à la forme normale

$$(\mathrm{I}_b) \qquad \left\{ \begin{aligned} & U_i(u) \equiv U_{i0}(u) + U_{i1}(u) = 0, \\ & U_{i0}(u) \equiv \alpha_i u^{(k_i)}(0) + \sum_{j=0}^{k_i - 1} \alpha_{ij} u^{(j)}(0) && (i = 1, 2, \ldots, m), \\ & U_{i1}(u) \equiv \beta_i u^{(k_i)}(1) + \sum_{j=0}^{k_i - 1} \beta_{ij} u^{(j)}(1) && (k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_m). \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant

$$y_1, \; y_2, \ldots, y_m$$

un système d'intégrales particulières indépendantes de l'équation (I); ce sont les fonctions entières du paramètre λ. L'intégrale générale de (I) sera

$$U = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

---

7) Le problème plus général

$$P_0(x)\frac{d^m u}{d x^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1} u}{d x^{m-1}} + \ldots + P_m(x) u + P(x)\lambda u = 0 \quad (a \leqq x \leqq b)$$

peut être ramené au problème précédent par un changement de variable, sous la seule condition que les fonctions $P_0(x)$ et $P(x)$ soient toujours distinctes de zéro dans (a, b) et que le rapport $\frac{P(x)}{P_0(x)}$ soit réel.

8) Voir: BIRKHOFF, loc. cit. 6), p. 382.

c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ désignant des constantes arbitraires. En substituant dans (I_a), on trouve

$$\sum_{j=1}^{m} c_j U_i(y_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

C'est un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux constantes c_i, qui admet un système de solutions distinctes de zéro sous la seule condition que son déterminant

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_m(y_1) & \ldots & U_m(y_m) \end{vmatrix}$$

est nul. L'équation

$$\Delta(\lambda) = 0 \tag{2}$$

nous donne une suite de « valeurs caractéristiques » de λ pour lesquelles les solutions de notre problème existent et sont différentes de zéro. Supposons, au contraire, que

$$\Delta(\lambda) \neq 0;$$

la solution des équations (I) et (I_a) sera identiquement nulle; mais on peut alors obtenir la solution d'un autre problème:

$$L(v) + \lambda v = f, \tag{3}$$

$$U_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3$_a$}$$

où l'on a posé pour plus de simplicité

$$L(v) = \frac{d^m v}{d x^m} + p_2(x) \frac{d^{m-2} v}{d x^{m-2}} + \cdots + p_m(x) v,$$

$f(x)$ étant une fonction donnée continue dans $(0, 1)$.

En effet, on peut écrire l'intégrale générale de (3) sous l'une des deux formes suivantes

$$v = \sum_{j=1}^{m} c'_j y_j(x) + \int_0^x f(t) \sum_{j=1}^{m} \frac{y_j(x) Y_j(t)}{\delta} dt,$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} c''_j y_j(x) - \int_x^1 f(t) \sum_{j=1}^{m} \frac{y_j(x) Y_j(t)}{\delta} dt,$$

$\delta(t)$ désignant le déterminant

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} y_1^{(m-1)}(t) & \ldots & y_m^{(m-1)}(t) \\ y_1^{(m-2)}(t) & \ldots & y_m^{(m-2)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(t) & \ldots & y_m(t) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$Y_j(t)$ les mineurs de ce déterminant, relativement aux éléments de la première ligne; c'_i et c''_i sont des constantes arbitraires. On en déduit la formule plus symétrique

$$v = \sum_{j=1}^{m} c_j y_j(x) + \int_0^1 f(t) g(x, t) dt, \tag{5}$$

où l'on a posé

$$(6) \qquad g(x,\, t) = \pm \frac{1}{2\delta(t)} \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1^{(m-1)}(t) & \dots & y_m^{(m-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(t) & \dots & y_m(t) \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} + \text{ pour } x > t \\ - \text{ pour } x < t. \end{matrix}$$

En substituant cette expression de v dans les équations (3_a), on trouve un système d'équations linéaires pour la détermination de c_j:

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{m} c_j U_j(y_i) + \int_0^1 f(t) U_i(g)\, dt = 0 \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Le déterminant Δ étant différent de zéro, ce qu'on a supposé, le système (7) admet un système unique de solutions pour c_j. En substituant dans (5) les expressions de c_j déduites de (7), on trouve, après quelques calculs élémentaires,

$$(5_a) \qquad v = \int_0^1 f G(x,\, t)\, dt \text{ [9]},$$

où

$$(8) \qquad G(x,\, t) = \frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) & g(x,\, t) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_m) & U_1(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & \dots & U_m(y_m) & U_m(g) \end{vmatrix}.$$

Cette expression de $v(x)$ est très importante pour la discussion de la possibilité du développement de la fonction $f(x)$ suivant les solutions des équations (I), (I_a).

2. Nous allons maintenant énoncer un Lemme général, qui est établi par M. Birkhoff [10]).

Soit donnée l'équation différentielle

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^m y}{dx^m} + \rho a_{m-1}(x,\, \rho) \dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + \rho^m a_0(x,\, \rho) y = 0, \\ a_i(x,\, \rho) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x) \rho^{-j} \qquad (i = 0, \dots, m-1), \end{cases}$$

a_{ij} étant des fonctions données de x et ρ un paramètre. Supposons que l'équation

$$(10) \qquad w^m + a_{m-1,0}(x) w^{m-1} + \dots + a_{0,0}(x) = 0$$

ait son discriminant toujours distinct de zéro dans (0, 1), et qu'on peut trouver une telle région D de la variable complexe ρ avec une disposition correspondante de racines de (10),

$$w_1, \quad w_2, \dots, w_m,$$

pour laquelle

$$R(\rho w_1) \leqq R(\rho w_2) \leqq \dots \leqq R(\rho w_m) \text{ [11]}$$

dans D, x variant dans (0, 1).

---

[9]) Cette formule est démontrée par une méthode différente par M. W. D. A. Westfall, *Zur Theorie der Integralgleichungen* (Inaugural-Dissertation) (Göttingen 1905), pp. 18-20.

[10]) Voir: Birkhoff, loc. cit. [6]), pp. 219-231.

[11]) $R(a)$ désigne « partie réelle de a ».

Adoptons, en général, le symbole

$$E_{i,k,\dots}$$

pour désigner des fonctions du paramètre ρ (et d'autres variables, d'ailleurs) qui restent finies pour les grandes valeurs de ρ et vérifient toujours l'inégalité de la forme

$$(\alpha) \qquad |E_{i,k,\dots}| < M,$$

M étant une constante positive. On peut énoncer la proposition suivante:

Lemme I. — *On peut présenter, pour les grandes valeurs de $|\rho|$, un système d'intégrales particulières indépendantes de l'équation différentielle* (9) *sous la forme*

$$y_i(x, \rho) = z_i(x, \rho) + e^{\rho\int_0^x w_i(t)dt} E_{0i}\rho^{-m_0} \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où

$$z_i(x, \rho) = e^{\rho\int_0^x w_i(t)dt} \sum_{j=0}^{m_0-1} z_{ij}(x)\rho^{-j}$$

et les fonctions $z_{ij}(x)$ sont choisies de façon à rendre nuls tous les coefficients de m_0 puissances supérieures de ρ dans le résultat de la substitution de z_i au lieu de y dans le premier membre de (9), *m_0 désignant un nombre entier positif quelconque* [12]).

On a d'ailleurs

$$\frac{d^k y_i(x, \rho)}{dx^k} = \frac{d^k z_i(x, \rho)}{dx^k} + e^{\rho\int_0^x w_i(t)dt} E_{ki}\rho^{-m_0+k} \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \dots, m), \\ (k = 1, 2, \dots, m-1). \end{cases}$$

On peut trouver la démonstration du Lemme I dans le mémoire cité de M. Birkhoff; une démonstration analogue a été trouvée par nous, indépendamment de M. Birkhoff [Voir l'Introduction].

En vue d'application du Lemme I à l'équation (I), posons

$$\lambda = \rho^m.$$

Le plan de la variable complexe λ se transformera en un secteur (D) dans le plan de la variable complexe ρ, qui est défini par les inégalités

$$(D) \qquad \frac{l\pi}{m} \leqq \arg\rho \leqq \frac{(l+2)\pi}{m},$$

l étant un nombre entier quelconque.

On doit poser encore

$$a_{m-1}(x, \rho) = 0, \quad a_{m-k}(x, \rho) = \frac{p_k(x)}{\rho^k} (k = 2, \dots, m-1), \quad a_0(x, \rho) = 1 + \frac{p_m(x)}{\rho^m}.$$

L'équation (10) se réduit à

$$(10_a) \qquad w^m + 1 = 0$$

---

[12]) Pour que cela soit possible, il faut en premier lieu supposer l'existence de $(m_0 - 1)$ dérivées premières de $a_{ij}(x)$ dans (0, 1). Nous allons considérer le cas particulier où $m_0 = 1$; alors les fonctions $a_{ij}(x)$ sont des fonctions continues dans (0, 1).

dont toutes les racines sont distinctes (et constantes, d'ailleurs):

$$w = \cos\frac{2k+1}{m}\pi + i\sin\frac{2k+1}{m}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Il nous reste encore à déterminer la région D. Or, la condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité

$$R(\rho w') = R(\rho w'')$$

$[w'$ et w'' désignant deux racines quelconques de $(10_a)]$ ait lieu, est évidemment

$$\arg\rho = \frac{l'\pi}{m},$$

où l' est un nombre entier. Donc, la région D qui doit être contenue dans (D) sera déterminée par un des deux systèmes d'inégalités

$$(D_1) \qquad \frac{l\pi}{m} \leqq \arg\rho \leqq \frac{(l+1)\pi}{m},$$

$$(D_2) \qquad \frac{(l+1)\pi}{m} \leqq \arg\rho \leqq \frac{(l+2)\pi}{m}.$$

Soit

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_m$$

la disposition correspondante à D_1 et

$$w'_1, \quad w'_2, \quad \ldots, \quad w'_m$$

celle à D_2. Supposons, pour fixer les idées, que m soit pair:

$$m = 2\mu.$$

C'est le seul cas que nous allons discuter en détail. Des considérations tout à fait analogues peuvent être appliquées au cas

$$m = 2\mu + 1.$$

Choisissons le nombre l, ce qui est toujours possible, de façon qu'on ait

$$R(\rho w') = 0, \quad \arg\rho = \frac{l+1}{2\mu}\pi,$$

w' désignant une racine de l'équation (10_a). On trouve alors

$$(11) \quad R(\rho w_1) < R(\rho w_2) < \cdots \leqq R(\rho w_\mu) \leqq 0 \leqq R(\rho w_{\mu+1}) < \cdots < R(\rho w_{2\mu}), \quad \text{dans } D_1.$$

On a, en outre,

$$(12) \quad R(\rho w'_1) < R(\rho w'_2) < \cdots < R(\rho w'_\mu) \leqq 0 \leqq R(\rho w'_{\mu+1}) \leqq R(\rho w'_{\mu+2}) < \cdots < R(\rho w_{2\mu}), \quad \text{dans } D_2.$$

Remarquons encore que les fonctions

$$z_{i0}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

se réduisent toutes, dans le cas considéré, à 1. Nous pouvons donc affirmer l'existence, pour les grandes valeurs de $|\rho|$, d'un système d'intégrales particulières indépendantes de (I), de la forme

$$y_i = e^{\rho x w_i}\left(1 + \frac{E_i}{\rho}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad \text{dans } D_1,$$

et de la forme

$$y_i' = e^{\rho x w_i'}\left(1 + \frac{E_i'}{\rho}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad \text{dans } D_2 \text{ [13]}.$$

Or, rappelons-nous que les fonctions y_i, y_i' sont des fonctions analytiques de ρ dans (D); cela nous montre que la fonction y_i' est le prolongement analytique de y_i $(i = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 2, \ldots, 2\mu)$, ainsi que $y'_{\mu+1}$, y'_μ respect. de y_μ et $y_{\mu+1}$. Nous pouvons donc, enfin, écrire un système d'intégrales particulières indépendantes de (I) sous la forme

$$y_i = e^{\rho x w_i}\left(1 + \frac{E_{0i}}{\rho}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

qui est valable dans le domaine entier (D). On aura, en outre,

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = \rho^k e^{\rho x w_i}\left(w_i^k + \frac{E_{ki}}{\rho}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m - 1).$$

Introduisons maintenant, avec M. Birkhoff [14]), cette notation abrégée

$$[z] = z(x) + \frac{E(x, \rho)}{\rho},$$

$z(x)$ désignant une fonction de x (et d'autres variables) qui ne dépend pas de ρ, et qui peut se réduire à une constante, et $E(x, \rho)$ une fonction analogue aux E_{ji}. On peut alors énoncer le

Théorème I. — *Le système d'intégrales particulières indépendantes de l'équation différentielle* (I) *pour les grandes valeurs de*

$$|\lambda| = |\rho^m|$$

peut être présenté sous la forme

$$y_i(x) = e^{\rho w_i x}[1], \quad \frac{dy_i}{dx} = \rho e^{\rho w_i x}[w_i], \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1} y_i}{dx^{m-1}} = \rho^{m-1} e^{\rho w_i x}[w_i^{m-1}],$$

valable dans le domaine

$$(D) \qquad \frac{l\pi}{2\mu} \leqq \arg \rho \leqq \frac{(l + 2)\pi}{2\mu}.$$

w_i désignent des racines de (10_a) qui sont disposés dans l'ordre déterminé par les inégalités (11).

3. Il nous faut maintenant calculer le déterminant Δ. On trouve sans peine, en utilisant les expressions obtenues de y_i,

$$\begin{aligned} U_i(y_j) &= (\rho w_j)^{k_i}[\alpha_i] && (j = 1, 2, \ldots, \mu - 1), \\ U_i(y_j) &= e^{\rho w_j}(\rho w_j)^{k_i}[\beta_i] && (j = \mu + 2, \ldots, 2\mu), \\ U_i(y_\mu) &= (\rho w_\mu)^{k_i}\{[\alpha_i] + e^{\rho w_\mu}[\beta_i]\} && \\ U_i(y_{\mu+1}) &= (\rho w_{\mu+1})^{k_i}\{[\alpha_i] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_i]\} && (i = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}$$

[13]) On a posé ici $m_0 = 1$ (voir n° 2).

[14]) Voir: Birkhoff, loc. cit. [6]), pp. 389-390.

ce qui nous donne

$$(13)\qquad \Delta = \prod_{i=1}^{m} \rho^{k_i} \prod_{j=\mu+2}^{m} e^{\rho w_j} \Delta_0 ,$$

où Δ_0 désigne le déterminant

$$(13_a)\quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} [\alpha_1 w_1^{k_1}] & \ldots & w_\mu^{k_1}\{[\alpha_1] + e^{\rho w_\mu}[\beta_1]\} & w_{\mu+1}^{k_1}\{[\alpha_1] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_1]\} & \ldots & [\beta_1 w_m^{k_1}] \\ [\alpha_2 w_1^{k_2}] & \ldots & w_\mu^{k_2}\{[\alpha_2] + e^{\rho w_\mu}[\beta_2]\} & w_{\mu+1}^{k_2}\{[\alpha_2] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_2]\} & \ldots & [\beta_2 w_m^{k_2}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [\alpha_m w_1^{k_m}] & \ldots & w_\mu^{k_m}\{[\alpha_m] + e^{\rho w_\mu}[\beta_m]\} & w_{\mu+1}^{k_m}\{[\alpha_m] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_m]\} & \ldots & [\beta_m w_m^{k_m}] \end{vmatrix}$$
$$= [a_0] e^{\rho w_\mu} + [a_1] + [a_2] e^{-\rho w_\mu},$$

a_0, a_1, a_2 désignant resp. les coefficients de ξ^1, ξ^0, ξ^{-1} dans le développement du déterminant [15])

$$(13_b)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \ldots & w_\mu^{k_1}(\alpha_1 + \xi\beta_1) & w_{\mu+1}^{k_1}\left(\alpha_1 + \frac{1}{\xi}\beta_1\right) & \ldots & \beta_1 w_m^{k_1} \\ \alpha_2 w_1^{k_2} & \ldots & w_\mu^{k_2}(\alpha_2 + \xi\beta_2) & w_{\mu+1}^{k_2}\left(\alpha_2 + \frac{1}{\xi}\beta_2\right) & \ldots & \beta_2 w_m^{k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m w_1^{k_m} & \ldots & w_\mu^{k_m}(\alpha_m + \xi\beta_m) & w_{\mu+1}^{k_m}\left(\alpha_m + \frac{1}{\xi}\beta_m\right) & \ldots & \beta_m w_m^{k_m} \end{vmatrix} .$$

Démontrons maintenant un Lemme, qui nous sera utile dans l'étude de la fonction Δ_0.

LEMME II. — *Posons*

$$\theta(\rho) = e^{\alpha(\rho - \rho_0)} - 1.$$

La fonction $\theta(\rho)$ *sera nulle pour*

$$\rho = \rho_k = \rho_0 + \frac{2k\pi i}{\alpha} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Entourons les points ρ_k *par des cercles* (γ_k) *d'un rayon commun,* r_0, *suffisamment petit. On aura, dans la partie restante du plan de* ρ:

$$|\theta(\rho)| > \Theta > 0,$$

Θ *étant une constante positive qui ne dépend que de* r_0.

Posons

$$\alpha\rho = 2\pi i\xi, \quad \rho_k = \frac{2\pi i \xi_k}{\alpha}, \quad \xi_k = \xi_0 + k.$$

On trouve

$$\theta(\rho) = \theta_1(\xi) = e^{2\pi i(\xi - \xi_0)} - 1.$$

Le cercle (γ_k) se transformera en un cercle (γ'_k) qui est décrit, du point ξ_k comme centre, par un rayon

$$r_1 = \frac{2\pi r_0}{|\alpha|}.$$

[15]) Voir: BIRKHOFF, loc. cit. [6]), p. 383.

La fonction $\theta_1(\xi)$ étant une fonction périodique, à période 1, nous n'aurons qu'à considérer la partie du plan de ξ qui est comprise entre deux droites parallèles,

$$R(\xi) = R\left(\xi_0 - \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad R(\xi) = R\left(\xi_0 + \tfrac{1}{2}\right),$$

et qui ne contient qu'un seul cercle (γ_0'). Posons

$$2\pi(\xi - \xi_0) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

On aura

$$\theta_1(\xi) = e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - 1 = Re^{i\psi} - 1, \qquad |\theta_1(\xi)|^2 = (R-1)^2 + 2R(1-\cos\psi),$$

où

$$R = e^{-r\sin\varphi}, \quad \psi = r\cos\varphi.$$

Considérons d'abord le cas

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}.$$

Soit ε un nombre positif suffisamment petit, et décomposons l'intervalle

$$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

en trois intervalles partielles

$$\left(-\frac{\pi}{2}, -\varepsilon\right), \qquad (-\varepsilon, +\varepsilon), \qquad \left(+\varepsilon, +\frac{\pi}{2}\right).$$

On trouve, r_1 et ε étant suffisamment petits,

$$2R(1-\cos\psi) > N_1(r_1, \varepsilon) > 0 \quad \text{pour} \quad -\varepsilon \leqq \varphi \leqq +\varepsilon,$$

N_1 étant une constante ne dépendant pas de r et de φ. On peut établir les inégalités analogues relativement aux intervalles

$$\left(-\frac{\pi}{2}, -\varepsilon\right), \qquad \left(+\varepsilon, +\frac{\pi}{2}\right), \qquad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

En fixant la valeur de r_1 (c'est-à-dire celle de r_0) et celle de ε, on achève sans peine la démonstration du Lemme II.

4. Revenons à la fonction Δ_0. Soit

$$a(\rho) = a_0 e^{2\rho w_\mu} + a_1 e^{\rho w_\mu} + a_2.$$

Supposons que les deux nombres a_0, a_2 *soient différents de zéro*. Désignons par

$$\xi' = e^{w_\mu \rho'} \quad \text{et} \quad \xi'' = e^{w_\mu \rho''} \qquad (\xi', \xi'' \neq 0, \infty)$$

les deux racines de l'équation

$$a_0\xi^2 + a_1\xi + a_2 = 0$$

qui peuvent être égales, d'ailleurs. On suppose que

$$w_\mu \rho' \quad \text{et} \quad w_\mu \rho''$$

soient *les valeurs principales de* $\lg\xi'$ et $\lg\xi''$.

On a

$$(14) \quad a(\rho) = a_2\{e^{w_\mu(\rho-\rho')} - 1\}\{e^{w_\mu(\rho-\rho'')} - 1\} = a_0 e^{2w_\mu\rho}\{e^{-w_\mu(\rho-\rho')} - 1\}\{e^{-w_\mu(\rho-\rho'')} - 1\}.$$

La fonction $a(\rho)$ sera nulle pour

$$\rho = \rho'_k = \rho' + \frac{2k\pi i}{w_\mu}, \qquad \rho = \rho''_k = \rho'' + \frac{2k\pi i}{w_\mu} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

De tous les points ρ'_k, ρ''_k comme centres décrivons des petits cercles (Γ'_k) et (Γ''_k) d'un rayon commun r_0 suffisamment petit. Désignons par (Γ) la partie restante du plan de ρ. On a évidemment

$$\Delta_0 = [a_0]e^{\rho w_\mu} + [a_1] + [a_2]e^{-\rho w_\mu}$$
$$= a_0 e^{\rho w_\mu} + a_1 + a_2 e^{-\rho w_\mu} + \frac{E_0 e^{\rho w_\mu} + E_1 + E_2 e^{-\rho w_\mu}}{\rho} = e^{-\rho w_\mu} a(\rho)\{1 + \eta_0(\rho)\}.$$

On peut établir le

Théorème II. — *Pour les valeurs de* $|\rho|$ *suffisamment grandes on a toujours dans* (Γ)

(15) $$\Delta_0 = e^{-\rho w_\mu} a(\rho)\{1 + \eta_0(\rho)\}, \qquad |\eta_0(\rho)| < 1.$$

Il faut considérer les deux cas

$$1^\circ \qquad R(\rho w_\mu) \leqq 0$$

et

$$2^\circ \qquad R(\rho w_\mu) \geqq 0.$$

Les parties correspondantes de (Γ) soient (Γ') et (Γ''). Considérons d'abord le cas 1°. En appliquant le Lemme II aux deux fonctions

$$e^{w_\mu(\rho-\rho')} - 1 \quad \text{et} \quad e^{w_\mu(\rho-\rho'')} - 1,$$

on trouve sans peine

$$|a(\rho)| > N_0 \quad \text{dans} \quad (\Gamma),$$

N_0 étant une constante ne dépendant pas de ρ. Or la supposition

$$R(\rho w_\mu) \leqq 0 \quad \text{dans} \quad (\Gamma')$$

nous donne

$$|E_0 e^{2\rho w_\mu} + E_1 e^{\rho w_\mu} + E_2| < 3M.$$

On peut donc choisir $|\rho|$ suffisamment grand pour que l'on ait

$$|\eta_0(\rho)| = \left|\frac{E_0 e^{2\rho w_\mu} + E_1 e^{\rho w_\mu} + E_2}{\rho\, a(\rho)}\right| < \frac{3M}{|\rho| . N_0} < 1.$$

Dans le cas 2°, on peut appliquer le Lemme II aux fonctions

$$e^{-w_\mu(\rho-\rho')} - 1 \quad \text{et} \quad e^{-w_\mu(\rho-\rho'')} - 1,$$

et on trouve immédiatement le résultat analogue au précédent. En résumé, on a partout dans (Γ), pour les valeurs de $|\rho|$ suffisamment grandes,

$$|\eta_0(\rho)| < 1 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le Théorème II nous permet d'établir cette proposition fondamentale:

Théorème III. — *Supposons que les coefficients*

$$\alpha_i, \ \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dans les expressions (I_b) *pour* $U_i(u)$ *soient tels, que les nombres* a_0 *et* a_2 *soient différents* *de zéro* [16]). *Il existe alors deux suites infinies de nombres caractéristiques*

$$\lambda'_k \quad et \quad \lambda''_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Quant aux expressions asymptotiques de λ'_k, λ''_k, *on doit distinguer les deux cas suivants:*

Premier cas:

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0;$$

alors

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_k &= (-1)^{\mu-1}(2k\pi)^{2\mu}\left(1 + \frac{\mu \operatorname{Lg}\xi'}{k\pi i} + \frac{E'}{k^2}\right) \\ \lambda''_k &= (-1)^{\mu-1}(2k\pi)^{2\mu}\left(1 + \frac{\mu \operatorname{Lg}\xi''}{k\pi i} + \frac{E''}{k^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ξ', ξ'' *désignant les deux racines (distinctes) de l'équation*

$$(16) \qquad a_0\xi^2 + a_1\xi + a_2 = 0$$

et $\operatorname{Lg}\xi'$, $\operatorname{Lg}\xi''$ *les valeurs principales des logarithmes correspondants.*

Deuxième cas:

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0;$$

alors:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_k &= (-1)^{\mu-1}(2k\pi)^{2\mu}\left(1 + \frac{\mu \operatorname{Lg}\xi'}{k\pi i} + \frac{E'}{k\sqrt{k}}\right) \\ \lambda''_k &= (-1)^{\mu-1}(2k\pi)^{2\mu}\left(1 + \frac{\mu \operatorname{Lg}\xi'}{k\pi i} + \frac{E''}{k\sqrt{k}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ξ' *désignant la racine (double) de l'équation* (10).

Considérons l'équation

$$(17) \qquad \Delta_0(\rho) = 0$$

qui est équivalente à celle-ci

$$(17_a) \qquad [a_0]e^{2\rho w_\mu} + [a_1]e^{\rho w_\mu} + [a_2] \equiv a(\rho)\{1 + \eta_0(\rho)\} = 0.$$

Le Théorème II nous apprend immédiatement que, pour les valeurs de $|\rho|$ suffisamment grandes, les racines de (17_a) existent effectivement; elles seront toutes comprises dans les cercles (Γ'_k), (Γ''_k) dont chacun en contiendra *une et seulement une* [16]); dans le cas où l'équation (16) a une racine double, les deux systèmes de cercles (Γ'_k), (Γ''_k) sont identiques; alors chacun des cercles (Γ'_k) contiendra, pour les grandes valeurs de k, *deux et seulement deux* des racines de (17_a).

Discutons d'abord le cas 1°: $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$. Soit k suffisamment grand et considérons le cercle (Γ'_k) qui contient une et seulement une racine ρ_{1k} de (17_a). On trouve sans peine

$$\rho_{1k} = \rho'_k + \sigma'_k = \rho' + \frac{2k\pi i}{w_\mu} + \sigma'_k, \quad |\sigma'_k| < r_0 < 1.$$

Posons

$$\rho = \rho_{1k}$$

[16]) Cfr. E. Lindelöf, *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1905), pp. 22-23.

dans (17_a). On peut écrire

$$[a_0]e^{2\rho_1 k w_\mu} + [a_1]e^{\rho_1 k w_\mu} + [a_2] = [a_0]\{e^{\rho_1 k w_\mu} - [\xi']\}\{e^{\rho_1 k w_\mu} - [\xi'']\}$$
$$= [a_2]\{e^{w_\mu(\rho_{1k}-\rho')} - [1]\}\{e^{w_\mu(\rho_{1k}-\rho'')} - [1]\} = 0.$$

Or le nombre ρ_{1k} étant situé en dehors de tous les cercles (Γ''_k), le Lemme II nous montre que le facteur

$$e^{w_\mu(\rho_{1k}-\rho'')} - [1] \neq 0.$$

Donc

$$e^{w_\mu(\rho_{1k}-\rho')} - [1] = 0,$$

ce qui nous donne

$$\rho_{1k} = \rho' + \frac{2k'\pi i}{w_\mu} + \mathrm{Lg}\,[1],$$

Lg désignant la valeur principale du logarithme, k' un nombre entier. Mais, en développant, on trouve

$$\mathrm{Lg}\,[1] = \frac{E_1}{k}.$$

On a donc

$$\sigma'_k = \frac{2(k'-k)\pi i}{w_\mu} + \frac{E_1}{k}.$$

Or l'inégalité

$$|\sigma'_k| < r_0,$$

r_0 étant suffisamment petit, nous apprend

$$k' - k = 0,$$

ce qui nous donne enfin

$$\sigma'_k = \frac{E_1}{k}, \quad \rho_{1k} = \rho' + \frac{2k\pi i}{w_\mu} + \frac{E_1}{k} = \frac{2k\pi i}{w_\mu}\left(1 + \frac{\rho' w_\mu}{2k\pi i} + \frac{E_1}{k^2}\right).$$

La valeur correspondante de λ'_k sera

$$\lambda'_k = (\rho_{1k})^{2\mu} = (-1)^{\mu-1}(2k\pi)^{2\mu}\left(1 + \frac{\mu\,\mathrm{Lg}\,\xi'}{k\pi i} + \frac{E'}{k^2}\right),$$

en se rappellant que

$$\rho' w_\mu = \mathrm{Lg}\,\xi'.$$

Des considérations tout à fait analogues peuvent être appliquées aux cercles (Γ''_k). La première partie du Théorème III est ainsi démontrée.

Considérons maintenant le cas 2°: $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$. Les deux systèmes de cercles (Γ'_k), (Γ''_k) sont alors identiques et se réduisent à l'un seulement, (Γ_k). Soit, comme auparavant, k suffisamment grand. Le cercle (Γ_k) contient deux et seulement deux des racines de (17_a) (qui peuvent se confondre en une seule racine double). Nous les désignons par

$$\rho_{1k} \quad \text{et} \quad \rho_{2k}.$$

On a évidemment

$$\rho_{jk} = \rho'_k + \sigma'_k = \rho' + \frac{2k\pi i}{w_\mu} + \sigma'_{jk}, \quad |\sigma'_{jk}| < r_0 \qquad (j = 1, 2)$$

et l'on peut écrire, en posant

$$\rho = \rho_{jk} \qquad (j = 1, 2)$$

dans (17_a),

$$[a_0]e^{2\rho_{jk}w_\mu} + [a_1]e^{\rho_{jk}w_\mu} + [a_2] = [a_0]\left\{e^{\rho_{jk}w_\mu} - \frac{-[a_1] + \sqrt{[0]}}{2[a_0]}\right\}\left\{e^{\rho_{jk}w_\mu} - \frac{-[a_1] - \sqrt{[0]}}{2[a_0]}\right\}$$

$$= [a_0]\left\{e^{w_\mu(\rho_{jk}-\rho')} - \left(1 + \frac{E_1}{\sqrt{k}}\right)\right\}\left\{e^{w_\mu(\rho_{jk}-\rho')} - \left(1 + \frac{E_2}{\sqrt{k}}\right)\right\} = 0 \text{ [17]}.$$

Des considérations semblables à celles du cas précédent nous montrent maintenant que

$$\rho_{jk} = \rho' + \frac{2k\pi i}{w_\mu} + \frac{E^{(j)}}{\sqrt{k}} \qquad (j = 1, 2),$$

où

$$\rho' w_\mu = \operatorname{Lg} \xi',$$

et l'exactitude du Théorème III est alors évidente.

5. Nous croyons utile citer quelques exemples pour montrer que les conditions

$$a_0 \neq 0, \quad a_2 \neq 0$$

ne sont pas trop restrictives.

I. Soit

$$U_i(u) \equiv u^{(k'_i)}(0) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu); \quad k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_\mu < 2\mu,$$

$$U_{\mu+i}(u) \equiv u^{(k''_i)}(1) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu); \quad k''_1 < k''_2 < \cdots < k''_\mu < 2\mu.$$

Multiplions l'expression (13_b) par ξ; on trouve dans le cas considéré, au signe près,

$$Q(\xi) = \begin{vmatrix} w_1^{k'_1} & \ldots & w_{\mu-1}^{k'_1} & w_\mu^{k'_1} & \xi w_{\mu+1}^{k'_1} & 0 & \ldots & 0 \\ w_1^{k'_2} & \ldots & w_{\mu-1}^{k'_2} & w_\mu^{k'_2} & \xi w_{\mu+1}^{k'_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{k'_\mu} & \ldots & w_{\mu-1}^{k'_\mu} & w_\mu^{k'_\mu} & \xi w_{\mu+1}^{k'_\mu} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \xi w_\mu^{k''_1} & w_{\mu+1}^{k''_1} & w_{\mu+2}^{k''_1} & \ldots & w_m^{k''_1} \\ 0 & \ldots & 0 & \xi w_\mu^{k''_2} & w_{\mu+1}^{k''_2} & w_{\mu+2}^{k''_2} & \ldots & w_m^{k''_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & \xi w_\mu^{k''_\mu} & w_{\mu+1}^{k''_\mu} & w_{\mu+2}^{k''_\mu} & \ldots & w_m^{k''_\mu} \end{vmatrix}.$$

On aura, au signe près,

$$a_2 = Q(0), \quad a_1 = \left(\frac{dQ}{d\xi}\right)_{\xi=0}, \quad a_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2Q}{d\xi^2}\right)_{\xi=0},$$

---

[17] Il est évident que $\sqrt{[a]} = [\sqrt{a}]$, quand $a \neq 0$. Mais: $\sqrt{[0]} = \frac{E}{\sqrt{k}}$; c'est la différence essentielle entre les deux cas 1° et 2°, qui n'est pas néanmoins signalée par M. Birkhoff.

ce qui nous donne

$$\pm a_2 = \begin{vmatrix} w_1^{k'_1} & \dots & w_\mu^{k'_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_1^{k'_\mu} & \dots & w_\mu^{k'_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_{\mu+1}^{k''_1} & \dots & w_{2\mu}^{k''_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{\mu+1}^{k''_\mu} & \dots & w_{2\mu}^{k''_\mu} \end{vmatrix},$$

$$\pm a_0 = \begin{vmatrix} w_1^{k'_1} & \dots & w_{\mu-1}^{k'_1} & w_{\mu+1}^{k'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{k'_\mu} & \dots & w_{\mu-1}^{k'_\mu} & w_{\mu+1}^{k'_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_\mu^{k''_1} & w_{\mu+2}^{k''_1} & \dots & w_{2\mu}^{k''_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_\mu^{k''_\mu} & w_{\mu+2}^{k''_\mu} & \dots & w_{2\mu}^{k''_\mu} \end{vmatrix},$$

$$a_1 = 0.$$

Cela nous montre que les conditions du Théorème III sont remplies toutes les fois que les nombres k'_i et k''_i sont tels, que les quatre déterminants dans les expressions précédentes pour a_0 et a_2 soient différents de zéro. Ce cas se présentera toujours pour $\mu = 2$, $m = 4$ [18]). Dans le cas de m quelconque, il suffit de supposer que les nombres k'_i, k''_i forment deux suites d'entiers successifs, etc. On doit encore remarquer que le discriminant $a_1^2 - 4a_0a_2$ étant distinct de zéro, *dans le cas* I, *les nombres caractéristiques sont des racines simples de l'équation*

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

au moins ceux dont le rang est suffisamment élevé.

II. *Les conditions aux limites du type périodique:*

$$U_i(u) \equiv u^{(i)}(0) - u^{(i)}(1) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

L'expression (13_b) se réduit à

$$(-1)^{\mu-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & (1-\xi) & \left(1-\frac{1}{\xi}\right) & \dots & 1 \\ w_1 & \dots & w_\mu(1-\xi) & w_{\mu+1}\left(1-\frac{1}{\xi}\right) & \dots & w_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m-1} & \dots & w_\mu^{m-1}(1-\xi) & w_{\mu+1}^{m-1}\left(1-\frac{1}{\xi}\right) & \dots & w_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

ce qui nous donne, à un facteur constant près, la fonction

$$(1-\xi)\left(1-\frac{1}{\xi}\right).$$

Les conditions du Théorème III sont évidemment remplies, mais les nombres caractéristiques peuvent être des *racines doubles* de l'équation

$$\Delta(\lambda) = 0.$$

---

[18]) Ainsi, toutes les conditions aux limites qui se rencontrent dans la théorie des verges vibrantes élastiques, sont comprises comme un cas très particulier dans notre cas I.

III. *Les conditions aux limites linéaires les plus générales dans le cas où* $\mu = 1$, $m = 2$ *sont de la forme*

$$(18)\qquad \begin{cases} a_1 u(0) + a_2 u'(0) + a_3 u(1) + a_4 u'(1) = 0, \\ b_1 u(0) + b_2 u'(0) + b_3 u(1) + b_4 u'(1) = 0. \end{cases}$$

Il faut distinguer ici les cas suivants :

1) $$a_2 b_4 - a_4 b_2 \neq 0.$$

On peut écrire alors, en résolvant par rapport à $u'(0)$ et $u'(1)$,

$$U_1 \equiv u'(0) + \alpha_{11} u(0) + \beta_{11} u(1),$$
$$U_2 \equiv u'(1) + \alpha_{21} u(0) + \beta_{21} u(1).$$

Les conditions du Théorème III sont remplies toujours.

2) $$a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0,$$

a) $$a_4 = b_4 \neq 0 \text{ [19]}, \quad a_2 = b_2.$$

On trouve sans peine que les conditions aux limites sous la forme normale sont

$$U_1 \equiv a_2 u'(0) + a_4 u'(1) + a_1 u(1) + a_3 u(1),$$
$$U_2 \equiv (a_1 - b_1) u(0) + (a_3 - b_3) u(1).$$

Les conditions du Théorème III se réduisent à

$$a_4(a_1 - b_1) - a_2(a_3 - b_3) \neq 0.$$

b) $$a_4 = b_4 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0.$$

On trouve

$$\left.\begin{aligned} U_1 &\equiv u'(0) + \beta_{11} u(1) \\ U_2 &\equiv u(0) + \beta_2 u(1) \end{aligned}\right\} \quad \text{si} \quad a_1 \neq 0$$

et

$$\left.\begin{aligned} U_1 &\equiv u'(0) + \beta_{11} u(1) \\ U_2 &\equiv u(1) \end{aligned}\right\} \quad \text{si} \quad a_1 = 0.$$

Les conditions du Théorème III sont encore remplies toujours.

c) $$a_2 = b_2 \neq 0, \quad a_4 = b_4.$$

d) $$a_2 = b_2 = 0, \quad a_4 = 0, \quad b_4 \neq 0, \quad a_3 \neq 0.$$

Ces deux cas sont analogues aux cas *a*), *b*).

Il nous reste encore le cas

e) $$a_4 = a_2 = 0, \quad b_2 \neq 0, \quad b_4 \neq 0.$$

On trouve

$$U_1 \equiv b_2 u'(0) + b_4 u'(1) + b_1 u(0) + b_3 u(1),$$
$$U_2 \equiv a_1 u(0) + a_3 u(1).$$

[19]) Les deux nombres a_4, b_4 étant différents de zéro, on peut toujours faire $a_4 = b_4$ en multipliant une des équations (18) par un facteur convenable.

Les conditions du Théorème III se réduisent à

$$a_1 \neq 0, \quad a_3 \neq 0.$$

Remarquons enfin, que les conditions obtenues plus haut renferment comme des cas particuliers toutes les conditions générales de M. STEKLOFF [20]) qui sont nécessaires pour l'application de la méthode de M. STEKLOFF.

6. Nous pouvons maintenant aborder le problème fondamental de ce travail. Nous ferons usage de la méthode de CAUCHY-POINCARÉ [21]). L'étude de l'intégrale complexe

$$\int_{L_n} v\, d\lambda,$$

prise suivant un contour fermé L_n situé dans le plan de λ, forme la base de toute la méthode.

Posons

$$\lambda = \rho^m.$$

Le plan de λ se transformera en un secteur (D) dans le plan de ρ, qui est défini par les inégalités

$$(D) \qquad \frac{l\pi}{2\mu} \leqq \arg \rho \leqq \frac{(l+2)\pi}{2\mu} \text{ [22])}.$$

Désignons par Γ la partie commune de (Γ) et de (D) [23]). Du point $\rho = 0$ comme centre décrivons un système de cercles

$$(C_1), \ (C_2), \ \ldots, \ (C_n), \ \ldots$$

de façon qu'ils n'aient pas de points communs avec les cercles (Γ'_k) et (Γ''_k). Soit r_n le rayon de (C_n) et

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \ldots; \quad \lim_{n=\infty} r_n = \infty.$$

Désignons par C_n la partie de (C_n) comprise dans Γ. Pour les valeurs de n suffisamment grandes, les contours C_n ne contiennent aucun des points

$$\rho_{1k}, \quad \rho_{2k}.$$

Supposons maintenant que le contour L_n dans le plan de λ se réduit à C_n dans le plan de ρ. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} v\, d\lambda$$

sera alors

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} v.\, m\rho^{m-1}\, d\rho.$$

En se rappelant que

$$v = \int_0^1 f(t)\, G(x,t)\, dt,$$

[20]) Voir: W. STEKLOFF, *Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CL (1er semestre 1910), pp. 452-454].

[21]) La méthode employée par M. BIRKHOFF est précisément la méthode de CAUCHY-POINCARÉ.

[22]) Voir n° 2.

[23]) Voir n° 2.

on trouve

$$J_n = \int_0^1 f(t)\Phi_n(x, t)\,dt,$$

où

$$\Phi_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} m\rho^{m-1} G(x, t)\,d\rho.$$

Considérons en premier lieu le cas où

$$(\beta) \qquad f(t) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C,$$

C étant une constante et $\varphi(x)$ une fonction intégrable dans (o, 1). Étudions l'intégrale

$$I_n^{x,\alpha} = \int_x^\alpha f(t)\Phi_n(x, t)\,dt \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

Nous allons établir le

Théorème IV. — *Quels que soient les nombres x, α dans* (o, 1), *on a toujours, pour tous les n,*

$$|I_n^{x,\alpha}| < \Phi . N,$$

Φ désignant le plus grand des deux nombres

$$\max|f|, \quad \max|\varphi| \text{ dans } (0, 1),$$

et N une constante positive ne dépendant ni de x, α, n, ni de la forme de f et φ.

Si l'on suppose, en outre, que x soit différent de o, 1, *l'intégrale $I_n^{x,\alpha}$ tend vers la limite*

$$\lim_{n=\infty} I_n^{x,\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2}f(x), & \alpha > x \\ -\frac{1}{2}f(x), & \alpha < x \end{cases}$$

uniformément pour tous les α différents de x. [C'est-à-dire, pour tous les α qui ne sont pas compris dans l'intervalle $(x-\eta,\ x+\eta)$ quelque petit que soit le nombre positif η].

Pour la démonstration, décomposons C_n en deux parties égales: l'une, C_n', où

$$R(\rho w_\mu) \leqq 0,$$

et l'autre, C_n'', où

$$R(\rho w_\mu) \geqq 0.$$

C_n' est comprise dans D_1 et C_n'' dans D_2 [24]). On peut s'assurer sans peine (ce qui nous sera utile plus tard) qu'on a sur C_n':

$$(19) \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\mu} \leqq \arg\rho w_j \leqq \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{\mu} & (j = 1, 2, \ldots, \mu-1), \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\mu} \leqq \arg\rho w_j \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\mu} & (j = \mu+2, \ldots, 2\mu), \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\mu} \leqq \arg\rho w_\mu \leqq \frac{3\pi}{2}, & \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\mu} \leqq \arg\rho w_{\mu+1} \leqq \frac{\pi}{2}, & \end{cases}$$

et les inégalités analogues pour C_n''.

---

[24]) Voir n° 2.

On aura

$$\Phi_n(x, t) = \int_{C'_n} + \int_{C''_n} = \Phi'_n + \Phi''_n,$$

$$I_n^{x,\alpha} = \int_x^\alpha f\Phi'_n dt + \int_x^\alpha f\Phi''_n dt = I_{1,n}^{x,\alpha} + I_{2,n}^{x,\alpha}.$$

Considérons d'abord l'intégrale $I_{1,n}^{x,\alpha}$.

Rappelons qu'on a

$$G(x, t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_m) & U_1(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & \dots & U_m(y_m) & U_m(g) \end{vmatrix}, \tag{20}$$

$$g(x, t) = \pm\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1^{(m-2)}(t) & \dots & y_m^{(m-2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(t) & \dots & y_m(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{(m-1)}(t) & \dots & y_m^{(m-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(t) & \dots & y_m(t) \end{vmatrix}} = \pm\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} y_j(x)\,Y_j(t).$$

On doit prendre ici le signe $(+)$ quand $x > t$, et le signe $(-)$ quand $x < t$. On en déduit

$$U_i(g) = U_{i0}(g) + U_{i1}(g) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} U_{i0}(y_j)\,Y_j(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} U_{i1}(y_j)\,Y_j(t).$$

En multipliant par

$$\pm\, Y_j(t)\begin{cases} + & \text{si } j = 1, \dots, \mu, \\ - & \text{si } j = \mu+1, \dots, 2\mu \end{cases}$$

la j-ème colonne dans le déterminant qui se trouve dans le second membre de la formule (20), et en les ajoutant toutes à la dernière, on trouve [25])

$$G(x, t) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) & A(x, t) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_m) & \sum_{j=1}^{\mu} U_{11}(y_j)\,Y_j(t) - \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} U_{10}(y_j)\,Y_j(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & \dots & U_m(y_m) & \sum_{j=1}^{\mu} U_{m1}(y_j)\,Y_j(t) - \sum_{j=\mu+1}^{m} U_{m0}(y_j)\,Y_j(t) \end{vmatrix}. \tag{20_a}$$

On a posé ici

$$A(x, t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{\mu} y_j(x)\,Y_j(t) & \text{si } x > t, \\ \displaystyle -\sum_{j=\mu+1}^{2\mu} y_j(x)\,Y_j(t) & \text{si } x < t. \end{cases}$$

Les formules évidentes

$$y_i^{(k)}(x) = e^{\rho w_i x}\rho^k[w_i^k] \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 0, 1, \dots, m-1)$$

---

[25]) Voir: BIRKHOFF, loc. cit. [6]), p. 392.

nous donnent, après un calcul simple,

$$Y_j(t) = -\frac{e^{-\rho w_j t}}{m\rho^{m-1}}[w_j].$$

Rappelons enfin les formules

$$\left.\begin{aligned} U_i(y_j) &= (\rho w_j)^{k_i}[\alpha_i] \qquad (j=1, 2, \dots, \mu-1),\\ U_i(y_j) &= e^{\rho w_j}(\rho w_j)^{k_i}[\beta_i] \qquad (j=\mu+1, \dots, 2\mu),\\ U_i(y_\mu) &= (\rho w_\mu)^{k_i}\{[\alpha_i] + e^{\rho w_\mu}[\beta_i]\},\\ U_i(y_{\mu+1}) &= (\rho w_{\mu+1})^{k_i}\{[\alpha_i] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_i]\}, \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \dots, 2\mu),$$

$$\Delta = \prod_{i=1}^{2\mu}\rho^{k_i}\prod_{j=\mu+2}^{2\mu}e^{\rho w_j}.\Delta_0; \quad \Delta_0 = e^{-\rho w_\mu}a(\rho)\{1+\eta_0(\rho)\},$$

$$w_\mu = -w_{\mu+1}.$$

En substituant tout cela dans (20_a), on trouve sans peine

$$m\rho^{m-1}G(x, t)$$

$$= a'(\rho)\begin{vmatrix} e^{\rho w_1 x} & \dots & e^{\rho w_\mu x} & e^{\rho w_{\mu+1}(x-1)} & \dots & e^{\rho w_m(x-1)} & A_0\\ [\alpha_1 w_1^{k_1}] & \dots & w_\mu^{k_1}\{[\alpha_1]+e^{\rho w_\mu}[\beta_1]\} & (-w_\mu)^{k_1}\{[\alpha_1]e^{\rho w_\mu}+[\beta_1]\} & \dots & [\beta_1 w_m^{k_1}] & A_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ [\alpha_m w_1^{k_m}] & \dots & w_\mu^{k_m}\{[\alpha_m]+e^{\rho w_\mu}[\beta_m]\} & (-w_\mu)^{k_m}\{[\alpha_m]e^{\rho w_\mu}+[\beta_m]\} & \dots & [\beta_m w_m^{k_m}] & A_m \end{vmatrix}.$$

On a posé ici

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} a'(\rho) &= \frac{1}{a(\rho)\{1+\eta_0(\rho)\}}\ ^{26)},\\ A_0 &= \begin{cases} -\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho w_j(x-t)}[w_j] & (x>t),\\ \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} e^{\rho w_j(x-t)}[w_j] & (x<t), \end{cases}\\ A_s &= \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} e^{-\rho w_j t}[\alpha_s w_j^{k_s+1}] - \sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho w_j(1-t)}[\beta_s w_j^{k_s+1}] \quad (s=1, 2, \dots, m). \end{aligned}\right.$$

En développant suivant les éléments de la dernière colonne, on trouve

$$(22)\qquad m\rho^{m-1}G(x, t) = a'(\rho)\sum_{s=1}^{m}A_s B_s + A_0,$$

B_s désignant le mineur correspondant à A_s.

On a évidemment

$$(23)\qquad B_s = \sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho w_j x}[a_{sj}] + \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} e^{\rho w_j(x-1)}[b_{sj}],$$

a_{sj}, b_{sj} étant des constantes finies.

On a donc

$$(24)\qquad I_{1,n}^{x,\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho\int_x^\alpha f A_0\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho.a'(\rho)\sum_{s=1}^{m}B_s\int_x^\alpha f A_s\,dt.$$

---

26) Rappelons que, C'_n étant situé tout entier dans (Γ), la fonction $|a'(\rho)|$ aura une limite supérieure finie sur C'_n, quel que soit n.

En intégrant par parties [ce qui est permis ici, eu égard à une formule générale de M. LIAPOUNOFF [27])], on trouve sans peine

$$(24_a)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_x^\alpha f A_0\, dt = \frac{E_0}{\rho}\Phi, \\ \displaystyle\int_x^\alpha f A_s\, dt = \frac{E_s}{\rho}\Phi \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

E_0, E_s désignant des fonctions qui vérifient toutes l'inégalité (α) (n° 2), quoiqu'elles dépendent, en général, de la forme de f et φ. Cela nous montre immédiatement

$$|I_{1,n}^{x,\alpha}| < \Phi . N_1,$$

N_1 étant une constante positive, analogue à N.

7. Calculons maintenant la limite

$$\lim_{n=\infty} I_{1,n}^{x,\alpha},$$

en supposant que x est différent de 0 et 1, et α est différent de x. On peut écrire, ayant égard aux formules (23) et (24_a),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'} d\rho\,.\,a'(\rho) B_s \int_x^\alpha f A_s\, dt = \frac{\Phi}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{C_n'}\frac{e^{\rho w_j x} E_{1s}}{\rho}\,d\rho + \frac{\Phi}{2\pi i}\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_{C_n'}\frac{e^{\rho w_j (x-1)} E_{2s}}{\rho}\,d\rho,$$

E_{1s}, E_{2s} étant des fonctions analogues à E_s.

Posons

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'}\frac{e^{\rho w_j x} E_{1s}}{\rho}\,d\rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'}\frac{e^{\rho w_j x} E_{2s}}{\rho}\,d\rho \qquad (j = \mu + 1, \ldots, 2\mu).$$

On aura

$$(24_b)\qquad I_{1,n}^{x,\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'} d\rho \int_x^\alpha f A_0\, dt + \Phi\sum_{j=1}^{2\mu} P_j.$$

Posons

$$\rho w_j = r_n(\cos\theta_j + i\sin\theta_j), \quad \theta_j = \arg\rho w_j;$$

on peut écrire

$$|P_j| < \frac{M}{2\pi}\int_{C_n'} e^{r_n \omega\cos\theta_j}\, d\theta_j \quad \begin{cases} \omega = x & \text{si } j = 1, 2, \ldots, \mu, \\ \omega = x - 1 & \text{si } j = \mu + 1, \ldots, 2\mu. \end{cases}$$

Or, les inégalités (19) nous montrent qu'il existe un nombre positif β tel qu'on ait sur C_n'

$$\cos\theta_j < -\beta < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu - 1),$$
$$\cos\theta_j > \beta > 0 \qquad (j = \mu + 2, \ldots, 2\mu).$$

On peut donc écrire

$$(25)\qquad |P_j| < \frac{M}{2\pi}\int_{C_n'} e^{-r_n|\omega|\beta}\, d\theta_j < \frac{N_2}{|\omega| r_n} \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 2, \ldots, 2\mu),$$

[27]) Voir: A. LIAPOUNOFF, *Sur l'équation de* CLAIRAUT *et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, t. XV, n° 10 (1904), pp. 1-66].

N_2 étant une constante analogue à N_1. On a de même, pour $j = \mu, \mu + 1$,

$$(25_a)\quad |P_j| < \frac{M}{2\pi}\int_{C'_n} e^{r_n \omega \cos\theta_j}\, d\theta_j = \frac{M}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-r_n|\omega|\sin\varphi}\, d\varphi < \frac{M}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-r_n|\omega|\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi < \frac{N_3}{|\omega| r_n},$$

x étant différent de 0 et 1. Il ne nous reste qu'à considérer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_x^\alpha f A_0\, dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=1}^{\mu} \int_x^\alpha f e^{\rho w_j(x-t)}[w_j]\, dt & (\alpha < x), \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} \int_x^\alpha f e^{\rho w_j(x-t)}[w_j]\, dt & (\alpha > x). \end{cases}$$

Posons

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_x^\alpha f e^{\rho m_j(x-t)}[w_j]\, dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2\mu).$$

On aura

$$(24_c)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_x^\alpha f A_0\, dt = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=1}^{\mu} Q_j & (\alpha < x), \\ \displaystyle\sum_{j=\mu+1}^{2\mu} Q_j & (\alpha > x). \end{cases}$$

On peut présenter Q_j sous la forme suivante

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_x^\alpha f e^{\rho w_j(x-t)} w_j\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} \frac{d\rho}{\rho} \int_x^\alpha f e^{\rho w_j(x-t)} E_j\, dt = Q'_j + Q''_j.$$

On trouve sans peine

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-t)} E_j \frac{d\rho}{\rho}\right| < \frac{M}{2\pi}\int_{C'_n} e^{r_n(x-t)\cos\theta_j}\, d\theta_j$$

$$< \begin{cases} \dfrac{M}{4\pi\mu} e^{-\beta r_n|x-t|} & (j = 1, \ldots, \mu-1, \mu+2, \ldots, 2\mu), \\ \dfrac{M}{\pi\mu}\, \dfrac{1 - e^{-\frac{\pi r_n|x-t|}{4\mu}}}{r_n|x-t|} & (j = \mu, \mu+1). \end{cases}$$

Un calcul simple nous donne alors

$$(26)\qquad \begin{cases} |Q''_j| < \dfrac{N_4 . \Phi}{r_n|x-\alpha|} & (j = 1, \ldots, \mu-1, \mu+2, \ldots, 2\mu), \\ |Q''_j| < \dfrac{N_4 \Phi}{|x-\alpha|}\, \dfrac{\lg r_n}{r_n} & (j = \mu, \mu+1), \end{cases}$$

N_4 étant une constante, analogue à $N_1, N_2, \ldots$. On a, d'autre part,

$$(24_d)\qquad \begin{cases} Q'_j = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'_n} d\rho \int_x^\alpha f e^{\rho w_j(x-t)} w_j\, dt = \dfrac{f(x)}{4\mu} - \dfrac{f(\alpha)}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-\alpha)} \frac{d\rho}{\rho} \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'_n} \frac{d\rho}{\rho} \int_x^\alpha \varphi\, e^{\rho w_j(x-t)}\, dt. \end{cases}$$

En appliquant aux deux derniers termes du second membre de (24_d) des raisonnements tout à fait analogues aux précédents, on trouve enfin, en tenant compte des inégalités (25), (25_a), (26) et des formules (24), (24_b), (24_c), (24_d),

$$I^{x,\alpha}_{1,n} = \pm \frac{f(x)}{4} + \varphi_{1,n}(x) \qquad \begin{cases} + & \text{si} \quad \alpha > x, \\ - & \text{si} \quad \alpha < x, \end{cases} \tag{27}$$

$\varphi_{1,n}$ désignant une fonction qui vérifie l'inégalité

$$|\varphi_{1,n}(x)| < \frac{\lg r_n}{r_n} \Phi \Omega_1(x); \tag{27$_a$}$$

$\Omega_1(x)$ est une fonction positive de x qui ne dépend ni de n, ni de la forme de f, φ, et qui reste finie, quand x est distinct de o, 1, α. Cela nous montre immédiatement

$$\lim_{n=\infty} I^{x,\alpha}_{1,n} = \begin{cases} -\dfrac{f(x)}{4}, & \alpha < x \\ +\dfrac{f(x)}{4}, & \alpha > x \end{cases} \qquad (0 < x < 1;\ 0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

On voit d'ailleurs que l'intégrale $I^{x,\alpha}_{1,n}$ tend *uniformément* à la limite $\pm \frac{1}{4} f(x)$ pour tous les α qui ne sont pas compris dans l'intervalle $(x - \eta,\ x + \eta)$, quelque petit que soit le nombre positif η.

Passons à l'intégrale

$$I^{x,\alpha}_{2,n} = \int_x^\alpha f \Phi''_n dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C''_n} m \rho^{m-1} d\rho \int_x^\alpha f G(x,\ t) dt.$$

Nous n'aurons qu'à modifier convenablement l'expression de $G(x,\ t)$; à savoir, multiplions par [25])

$$\pm Y_j(t),\ (+) \text{ si } j = 1, \ldots, \mu - 1, \mu + 1;\ \ (-) \text{ si } j = \mu, \mu + 2, \ldots, 2\mu,$$

la j-ème colonne dans l'expression (20) de $G(x,\ t)$ et les ajoutons toutes à la dernière. Il vient

$$m\rho^{m-1} G(x,\ t)$$
$$= a''(\rho) \begin{vmatrix} e^{\rho w_1 x} & \ldots & e^{\rho w_\mu (x-1)} & e^{\rho w_{\mu+1} x} & \ldots & e^{\rho w_m (x-1)} & A'_0 \\ [\alpha_1 w_1^{k_1}] & \ldots & w_\mu^{k_1}\{[\alpha_1] e^{-\rho w_\mu} + [\beta_1]\} & w_{\mu+1}^{k_1}\{[\alpha_1] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_1] & \ldots & [\beta_1 w_m^{k_1}]\} & A'_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [\alpha_m w_1^{k_m}] & \ldots & w_\mu^{k_m}\{[\alpha_m] e^{-\rho w_\mu} + [\beta_m]\} & w_{\mu+1}^{k_m}\{[\alpha_m] + e^{\rho w_{\mu+1}}[\beta_m] & \ldots & [\beta_m w_m^{k_m}]\} & A'_m \end{vmatrix},$$

où $a''(\rho)$ est une fonction analogue à $a'(\rho)$;

$$A'_0 = \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{\mu} e^{\rho w'_j (x-t)} [w'_j], & x > t, \\ \sum\limits_{j=\mu+1}^{2\mu} e^{\rho w'_j (x-t)} [w'_j], & x < t, \end{cases}$$

$$A'_s = \sum_{j=\mu+1}^{2\mu} e^{-\rho w'_j t} [\alpha_s (w'_j)^{k_s+1}] - \sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho w'_j (1-t)} [\beta_s (w'_j)^{k_s+1}] \qquad (s = 1, \ldots, m),$$

$$w'_j = w_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 2, \ldots, 2\mu),$$

$$w'_\mu = w_{\mu+1}, \quad w'_{\mu+1} = w_\mu.$$

Les raisonnements ultérieurs sont identiques à ceux que nous avons employés dans l'étude de l'intégrale $I^{x,\alpha}_{1,n}$, et on peut obtenir pour $I^{x,\alpha}_{2,n}$ les mêmes résultats que pour $I^{x,\alpha}_{1,n}$. Or on a

$$I^{x,\alpha}_{n} = I^{x,\alpha}_{1,n} + I^{x,\alpha}_{2,n}.$$

On a donc

$$|I^{x,\alpha}_{n}| < \Phi . N,$$

$$\lim_{n=\infty} I^{x,\alpha}_{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}f(x), & \alpha < x \\ +\frac{1}{2}f(x), & \alpha > x \end{cases}$$

et, en outre,

$$(27_b) \qquad I^{x,\alpha}_{n} = \mp \tfrac{1}{2}f(x) + \varphi_n(x),$$

$\varphi_n(x)$ vérifiant une inégalité de la forme

$$(27_c) \qquad |\varphi_n(x)| < \frac{\lg r_n}{r_n}\Phi\,\Omega_2(x),$$

où Ω_2 est une fonction analogue à Ω_1.

Posons

$$f(x) \equiv 1.$$

Si l'on se rappelle maintenant un théorème connu de M. Jordan [28]), on établi immédiatement ce théorème général:

Théorème V. — *Soit $f(x)$ une fonction donnée arbitrairement dans* $(0, 1)$. *On a toujours*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{n=\infty} J_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} d\rho . m\rho^{m-1}\int_0^1 f(t)\,G(x, t)\,dt,$$

sous la seule condition que $f(x)$ soit à variation bornée dans $(0, 1)$.

Si l'on suppose, en outre, que la fonction $f(x)$ soit de la forme

$$(\beta) \qquad f(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C,$$

il vient

$$|f(x) - J_n| < \frac{\lg r_n}{r_n}\Phi\,\Omega(x) \qquad (0 < x < 1),$$

$\Omega(x)$ désignant une fonction analogue à $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, et Φ étant le plus grand des deux nombres

$$\max|f| \quad et \quad \max|\varphi| \quad dans \quad (0, 1).$$

Un théorème analogue se trouve dans le Mémoire cité de M. Birkhoff; or les raisonnements de l'auteur, qui sont exposés d'ailleurs bien brièvement, ne nous paraissent pas suffisants.

8. Pour obtenir des propositions encore plus générales, nous allons appliquer une méthode analogue à celle qui a été indiquée récemment par M. Stekloff [29]).

---

[28]) Voir: C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (Paris, Gauthier-Villars), t. II (1894), pp. 228-231.

[29]) Voir: W. Stekloff, loc. cit. [1]), *e*; W. Stekloff et J. Tamarkine, loc. cit. [3]).

Soit $f(x)$ une fonction quelconque intégrable dans (0, 1), et considérons l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 f(t)\Phi_n(x,\, t)\,dt = \int_0^1 f\Phi'_n\,dt + \int_0^1 f\Phi''_n\,dt = J_{1,n} + J_{2,n}.$$

On trouve immédiatement

$$(28)\qquad J_{1,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_0^1 f A_0\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho . a'(\rho)\sum_{s=1}^{m} B_s \int_0^1 f(t) A_s\,dt = J'_{1,n} + J''_{1,n}.$$

Si l'on pose

$$P'_s = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} a'(\rho) B_s A_s\,d\rho,$$

on trouve

$$|J''_{1,n}| < \sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt}\,.\sum_{s=1}^{m}\sqrt{\int_0^1 |P'_s|^2\,dt}.$$

On peut écrire, ayant égard aux formules (21) et (23),

$$P'_s = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{C'_n} e^{\rho w_j x} E'_s\,d\rho + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_{C'_n} e^{\rho w_j (x-1)} E'_s\,d\rho.$$

Alors, les considérations tout à fait analogues à celles que nous avons appliquées pour l'évaluation de l'intégrale P_s (n° 7) nous montrent qu'on peut écrire

$$|P'_s| < \frac{\omega_1(x)}{m},$$

$\omega_1(x)$ *étant une fonction de x seul,* positive et finie pour les valeurs de x différentes de 0 et 1. On a donc

$$(29)\qquad |J''_n| < \omega_1(x)\sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt}.$$

Passons à l'intégrale

$$J'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_0^1 f A_0\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=1}^{\mu}\int_0^x e^{\rho w_j (x-t)} f[w_j]\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_x^1 e^{\rho w_j (x-t)} f[w_j]\,dt.$$

En présentant $[w_j]$ sous la forme

$$[w_j] = w_j + \frac{E''_j}{\rho}$$

et en se rappelant que sur C'_n on a

$$|e^{\rho w_j (x-t)}| \leqq 1, \quad x > t \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$
$$|e^{\rho w_j (x-t)}| \leqq 1, \quad x < t \qquad (j = \mu + 1, \ldots, 2\mu),$$

on peut écrire

$$(28_a)\qquad J'_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=1}^{\mu}\int_0^x e^{\rho w_j (x-t)} f w_j\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_x^1 e^{\rho w_j (x-t)} f w_j\,dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{C'_n}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^1 f E_j\,dt,$$

et on trouve immédiatement que la dernière somme dans (28_a) vérifie l'inégalité

$$(30) \qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\int_{C'_n}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^1 f E_j\,dt\right| < M_0\sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt},$$

M_0 étant une constante ne dépendant pas de n. On peut donc écrire, ayant égard aux formules (28), (28_a) et aux inégalités (29), (30),

$$J_{1,n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho\sum_{j=1}^{\mu}\int_0^x e^{\rho w_j(x-t)} f w_j\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_x^1 e^{\rho w_j(x-t)} f w_j\,dt + \psi_{1,n},$$

$\psi_{1,n}$ désignant une fonction de x et de n qui vérifie toujours l'inégalité

$$|\psi_{1,n}| < \Omega_1(x)\sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt} \qquad (0 < x < 1),$$

$\Omega_1(x)$ étant une fonction analogue à $\omega_1(x)$, etc. D'une manière tout à fait analogue, on trouve

$$J_{2,n} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C''_n} d\rho\sum_{j=1}^{\mu}\int_0^x e^{\rho w'_j(x-t)} f w'_j\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C''_n} d\rho\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\int_x^1 e^{\rho w'_j(x-t)} f w'_j\,dt + \psi_{2,n},$$

la fonction $\psi_{2,n}$ étant analogue à $\psi_{1,n}$. En ajoutant, on trouve

$$J_n = S'_n + \psi_{3,n},$$

où

$$S'_n = \int_0^x f\,dt\left\{-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\mu}\left(\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-t)} w_j\,d\rho + \int_{C''_n} e^{\rho w'_j(x-t)} w'_j\,d\rho\right)\right\}$$
$$+ \int_x^1 f\,dt\left\{\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\left(\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-t)} w_j\,d\rho + \int_{C''_n} e^{\rho w'_j(x-t)} w'_j\,d\rho\right)\right\}.$$

La fonction $\psi_{3,n}$ vérifie l'inégalité de la forme

$$|\psi_{3,n}| < \Omega_3(x)\sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt}.$$

En intégrant, on trouve immédiatement

$$-\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{j=1}^{\mu}\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-t)} w_j\,d\rho + \int_{C''_n} e^{\rho w'_j(x-t)} w'_j\,d\rho\right\}$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\mu}\left\{\int_{C'_n} e^{r_n(x-t)(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)} r_n(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)\,d\theta_j + \int_{C''_n} e^{r_n(x-t)(\cos\theta'_j + i\sin\theta'_j)} r_n(\cos\theta'_j + i\sin\theta'_j)\,d\theta'_j\right\}$$
$$= -\frac{r_n}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r_n(x-t)(\cos\theta + i\sin\theta)}(\cos\theta + i\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\frac{\sin r_n(x-t)}{x-t},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=\mu+1}^{2\mu}\left\{\int_{C'_n} e^{\rho w_j(x-t)} w_j\,d\rho + \int_{C''_n} e^{\rho w'_j(x-t)} w'_j\,d\rho\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin r_n(x-t)}{x-t}$$

et, finalement,

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(t)\frac{\sin r_n(x-t)}{x-t}\,dt.$$

Fixons maintenant r_n de façon qu'on ait

$$r_n = 2\pi n + \alpha_0,$$

α_0 étant une constante ne dépendant pas de n. Cela est toujours possible, eu égard à la distribution des nombres ρ_{1k} et ρ_{2k} (n° 4).

On trouve, après un calcule simple,

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(t)\frac{\sin 2\pi n(x-t)}{\sin(x-t)}dt + \psi_{4,n} = S_n + \psi_{4,n},$$

où S_n est l'intégrale classique de DIRICHLET qui exprime la somme de n termes de la simple série trigonométrique de la fonction f, et $\psi_{4,n}$ une fonction analogue à $\psi_{3,n}$, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité

$$|\psi_{4,n}| < \Omega_4(x)\sqrt{\int_0^1 |f|^2 dt}.$$

Nous pouvons donc énoncer cette proposition fondamentale:

THÉORÈME VI. — *Quelle que soit la fonction $f(x)$ intégrable dans* (0, 1), *on a toujours*

$$J_n = \int_0^1 f(t)\Phi_n(x, t)dt = S_n + \Psi_n \qquad (0 < x < 1),$$

S_n désignant la somme de n termes de la série trigonométrique de la fonction $f(x)$, et Ψ_n une fonction de x et de n qui vérifie toujours l'inégalité

$$|\Psi_n| < \Omega(x)\sqrt{\int_0^1 |f|^2 dt} \qquad (0 < x < 1),$$

$\Omega(x)$ étant une fonction positive de x, qui ne dépend pas de n et reste finie quand x est distinct de 0 *et* 1.

Le Théorème VI nous conduit immédiatement au

THÉORÈME VII. — *Soit $f(x)$ une fonction quelconque, intégrable dans* (0, 1). *Posons*

$$J_n(f) = \int_0^1 f(t)\Phi_n(x, t)dt \qquad (0 < x < 1),$$

et désignons par

$$S_n(f)$$

la somme de n termes premiers de la simple série trigonométrique correspondant à $f(x)$. On a toujours

$$\lim_{n=\infty}\{J_n(f) - S_n(f)\} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)\right\} = 0.$$

Soit h un nombre positif suffisamment petit, et introduisons avec M. STEKLOFF une fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx.$$

On a, en vertu du Théorème VI,

$$J_n(f-\varphi) - S_n(f-\varphi) = \Psi_n, \quad |\Psi_n| < \Omega(x)\sqrt{\int_0^1 |f-\varphi|^2 dt}.$$

Soit η un nombre positif donné, arbitrairement petit d'ailleurs. On peut toujours choisir h suffisamment petit, pour qu'on ait

$$|\Psi_n| < \frac{\eta}{2}, \quad 0 < x < 1 \text{ [30]}.$$

La fonction $\varphi(x)$ sera alors une fonction déterminée, continue et à variation bornée dans $(0, 1)$; on peut toujours, d'ailleurs, la présenter sous la forme

$$(\beta) \qquad \varphi(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx + C,$$

$\psi(x)$ étant une fonction intégrable dans $(0, 1)$. Or, on peut écrire

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} |J_n(f) - S_n(f)| &\leqq |J_n(f-\varphi) - S_n(f-\varphi)| + |J_n(\varphi) - S_n(\varphi)| \\ &< \frac{\eta}{2} + |J_n(\varphi) - S_n(\varphi)|, \end{aligned} \right.$$

et l'on a évidemment

$$\lim_{n=\infty} S_n(\varphi) = \varphi,$$
$$\lim_{n=\infty} J_n(\varphi) = \varphi$$

(en vertu du Théorème V). On peut donc trouver n_0 suffisamment grand, pour qu'on ait, pour tous les $n > n_0$,

$$|J_n(\varphi) - S_n(\varphi)| < \frac{\eta}{2}, \quad |J_n(f) - S_n(f)| < \eta$$

et, comme la différence

$$J_n(f) - S_n(f)$$

ne dépend pas de h, on trouve finalement

$$\lim_{n=\infty} \{J_n(f) - S_n(f)\} = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{J_n(f) - S_n(f)\} \right| \leqq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} J_k(\varphi) - \sum_{k=1}^{n} S_k(\varphi) \right|.$$

Or, on a évidemment

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \right| < \frac{\eta}{2},$$

$$\left| \varphi - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} J_k(\varphi) \right| < \frac{\Omega(x)}{n} \Phi . \sum_{k=1}^{n} \frac{\lg k}{k} < 2\,\Phi\,\Omega \frac{(\lg n)^2}{n},$$

en vertu du Théorème V; Φ désigne ici le plus grand des deux nombres $\max|\psi|$, $\max|\varphi|$ dans $(0, 1)$. De même,

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(\varphi) \right\} = \varphi,$$

en vertu d'un théorème connu de M. Fejér [31]). On peut donc trouver n_0 suffisamment

[30]) Voir : Stekloff et Tamarkine, loc. cit. [3]), pp. 358-360.

[31]) Voir : L. Fejér, *Untersuchungen über* Fourier'*sche Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904), pp. 51-69], p. 59.

grand, pour qu'on ait pour tous les $n > n_0$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)\right| < \eta,$$

et, comme la différence dans le premier nombre de l'inégalité précédente ne dépend pas de h, on en déduit

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)\right\} = 0.$$

On peut donner une autre démonstration de la formule précédente, *sans avoir recours à l'inégalité* (27). Cette démonstration, que nous a indiquée M. STEKLOFF, ne diffère pas de la démonstration de l'inégalité (61) du travail cité plus haut [32a]). L'inégalité (31), la fonction $\varphi(x)$ étant une fonction à variation bornée dans (0, 1), nous donne, eu égard à la première partie du Théorème V,

$$|J_n(f) - S_n(f)| < \eta,$$

pour tous les $n > n_0$, n_0 étant un nombre positif entier qui dépend de η. On en déduit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)\right| < \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}\{J_k(f) - S_k(f)\right| + \frac{n-n_0}{n}\eta.$$

On peut donc choisir n suffisamment grand, pour qu'on ait toujours

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}\{J_k(f) - S_k(f)\}\right| < \eta$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} J_k(f) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f)\right| < 2\eta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

9. Nous allons maintenant étudier l'intégrale

$$J_n(f)$$

sous un point de vue tout à fait différent. Démontrons d'abord le

THÉORÈME VIII. — *Les solutions du problème* (I), (I_a) *pour*

$$\lambda = \lambda'_k, \quad \lambda''_k$$

existent toujours pour les valeurs de k suffisamment grandes. Il en existe au plus deux, linéairement distinctes, correspondant à chaque nombre λ'_k, λ''_k. *Mais, dans le cas où*

$$a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0 \text{ [33]},$$

à chaque nombre λ'_k, λ''_k *correspond une et une seule solution de* (I), (I_a), *qui est déterminée à un facteur constant près. On suppose d'ailleurs, que les deux nombres* a_0, a_2 *soient différents de zéro* [34]).

[32a]) Voir: W. STEKLOFF et J. TAMARKINE, loc. cit. [3]), pp. 360-362.

[33]) La différence essentielle entre les deux cas:

$$a_1^2 - 4a_0a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$$

est évidemment échappée à l'analyse de M. BIRKHOFF.

[34]) Voir n^os 3-4.

Désignons, pour un moment, par $u(x)$ la solution du problème (I), (I_a), qui correspond à $\lambda = \lambda'_k$, ou à $\lambda = \lambda''_k$. Nous avons déjà vu que

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x),$$

les constantes c_i vérifiant le système d'équations linéaires

$$\sum_{i=1}^{m} c_i U_k(y_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \text{ [35]}. \tag{1}$$

Le déterminant du système (1) étant $\Delta(\lambda)$, on doit montrer pour la démonstration du Théorème VIII:

1) que, pour $\lambda = \lambda'_k, \lambda''_k$, on peut trouver au moins un *mineur du second rang* du déterminant $\Delta(\lambda)$, qui n'est pas nul;

2) que, le discriminant

$$a_1^2 - 4a_0 a_2$$

étant distinct de zéro, on peut trouver pour $\lambda = \lambda'_k, \lambda''_k$ au moins un mineur du premier rang de $\Delta(\lambda)$, qui n'est pas nul.

Il est évident, qu'on peut considérer le déterminant Δ_0, au lieu de Δ.

Or, nous avons vu que

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} [\alpha_1 w_1^{k_1}] & \ldots & w_\mu^{k_1}\{[\alpha_1] + e^{\rho w_\mu}[\beta_1]\} & w_{\mu+1}^{k_1}\{[\alpha_1] + e^{-\rho w_\mu}[\beta_1]\} & \ldots & [\beta_1 w_m^{k_1}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_m w_1^{k_m}] & \ldots & w_\mu^{k_m}\{[\alpha_m] + e^{\rho w_\mu}[\beta_m]\} & w_{\mu+1}^{k_m}\{[\alpha_m] + e^{-\rho w_\mu}[\beta_m]\} & \ldots & [\beta_m w_m^{k_m}] \end{vmatrix}.$$

Désignons par

$$A_{\mu,\mu+1}^{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

les mineurs du second rang correspondant aux éléments de deux colonnes $\mu^{\text{ème}}$ et $(\mu+1)^{\text{ème}}$. Les deux nombres a_0, a_2 étant différents de zéro, on peut trouver au moins un mineur

$$A_{\mu,\mu+1}^{i_0,k_0}$$

de la forme

$$A_{\mu,\mu+1}^{i_0,k_0} = [a],$$

le nombre a étant différent de zéro, car autrement on aurait nécessairement, en développant,

$$a_0 = a_2 = 0.$$

Si l'on substitue maintenant λ'_k, λ''_k au lieu de λ dans $\Delta(\lambda)$ ou, ce qui est la même chose, $\rho_{1,k}, \rho_{2,k}$ au lieu de ρ dans Δ_0 et dans $A_{\mu,\mu+1}^{i_0,k_0}$, on trouve, pour les valeurs suffisamment grandes de k,

$$A_{\mu,\mu+1}^{i_0,k_0} = [a] \neq 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Supposons maintenant que

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0. \tag{32}$$

---

[35]) Cfr. BIRKHOFF, loc. cit. [6]), p. 385.

Posons

$$Q(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \dots & w_\mu^{k_1}(\alpha_1 + \xi\beta_1) & w_{\mu+1}^{k_1}(\xi\alpha_1 + \beta_1) & \dots & w_m^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m w_1^{k_m} & \dots & w_\mu^{k_m}(\alpha_m + \xi\beta_m) & w_{\mu+1}^{k_m}(\xi\alpha_m + \beta_m) & \dots & w_m^{k_m} \end{vmatrix}$$

et désignons par

$$A_j^i \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = \mu, \mu + 1)$$

les mineurs du premier rang qui correspondent aux éléments de deux colonnes, $\mu^{\text{ème}}$ et $(\mu + 1)^{\text{ème}}$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{dQ}{d\xi} = a_0\xi + \frac{a_1}{2} = \sum_{i=1}^{m} w_\mu^{k_i}\beta_i A_\mu^i + \sum_{i=1}^{m} w_{\mu+1}^{k_i}\alpha_i A_{\mu+1}^i.$$

Soit maintenant

$$\xi = \xi', \quad \xi''.$$

L'inégalité (32) nous montre que

$$a_0\xi' + \frac{a_1}{2} \neq 0, \quad a_0\xi'' + \frac{a_1}{2} \neq 0;$$

on peut donc trouver au moins un mineur

$$A_{j_0}^{i_0}$$

qui est distinct de zéro pour $\xi = \xi', \xi''$. Posons maintenant $\rho = \rho_{1k}, \rho_{2k}$ dans Δ_0. On voit immédiatement que le mineur de Δ_0 correspondant au terme

$$[\alpha_i] + e^{\rho w_\mu}[\beta_i] \quad (i = 1, 2, \dots, m), \qquad e^{\rho w_\mu} = [\xi'], \quad [\xi''],$$

sera de la forme

$$\frac{1}{\xi}[A_\mu^i], \quad (\xi = \xi', \xi''),$$

et celui qui correspond au terme

$$[\alpha_i] + e^{-\rho w_\mu}[\beta_i] \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

sera de la forme

$$[A_{\mu+1}^i].$$

On peut donc trouver au moins un mineur du premier rang de Δ_0, ou, ce qui est la même chose, du déterminant $\Delta(\lambda)$, qui soit distinct de zéro pour

$$\lambda = \lambda_k', \quad \lambda_k'',$$

pour les valeurs de k suffisamment grandes, ce qui achève la démonstration du théorème. On peut trouver sans peine les expressions correspondantes de $u(x)$, en résolvant le système (1) [36]. Nous n'insistons pas sur ce point là.

Nous désignons, en géneral, par

$$u_{1k}, \quad u_{2k}$$

la solution du problème (I), (I_a) qui correspond resp. à λ_k', λ_k'', cette solution étant

---

[36]) Cfr. BIRKHOFF, loc. cit. [6]), p. 389.

unique, et par

$$u'_{1k},\quad u''_{1k},\quad u'_{2k},\quad u''_{2k}$$

les deux solutions linéairement distinctes, correspondant à λ'_k, λ''_k dans le cas contraire.

10. Considérons maintenant la fonction $G(x, t)$; c'est une fonction méromorphe de λ, dont tous les pôles font partie de l'une des deux suites

$$\lambda'_k,\quad \lambda''_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

On doit distinguer les trois cas possibles

1) Le point

$$(\gamma) \qquad \lambda = \lambda'_k,\quad \lambda''_k$$

est un pôle double de $G(x, t)$.

2) Le point (γ) est un pôle simple de $G(x, t)$.

3) Le point (γ) n'est point un pôle de $G(x, t)$.

Ce sont là tous les cas possibles, parce que l'équation

$$\Delta(\lambda)$$

peut avoir au plus des racines doubles [37]) pour les valeurs suffisamment grandes de $|\lambda|$. Désignons, en général, par

$$R'_k(x, t),\quad R''_k(x, t)$$

les résidus de $G(x, t)$, relativement aux pôles

$$\lambda'_k,\quad \lambda''_k.$$

On a évidemment

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} d\rho \int_0^1 m\rho^{m-1} f(t)\, G(x, t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 dt . f(t) \int_{L_n} G(x, t)\, d\lambda = \sum \left\{ \int_0^1 f(t) R'_k(x, t)\, dt + \int_0^1 f(t) R''_k(x, t)\, dt \right\},$$

la somme étant prise suivant tous les pôles de $G(x, t)$ qui sont situés dans le contour L_n. On trouve donc

$$\lim_{n=\infty} J_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^1 f(t) R'_k(x, t)\, dt + \int_0^1 f(t) R''_k(x, t)\, dt \right\},$$

et le Théorème VII nous donne immédiatement le

THÉORÈME IX. — *Soit $f(x)$ une fonction quelconque, intégrable dans* $(0, 1)$. *Posons*

$$(33) \qquad \sigma_n = \sum_{k=-n}^{+n} \left\{ \int_0^1 f(t) R'_k(x, t)\, dt + \int_0^1 f(t) R''_k(x, t)\, dt \right\}.$$

Les conditions du développement de $f(x)$ en une série de la forme $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n$ sont les mêmes que celles du développement de $f(x)$ en une série trigonométrique. Le même résultat subsiste relativement à la représentation de $f(x)$ à l'aide des moyens arithmétiques

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k,\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} S_k.$$

---

37) Voir n° 4.

On peut donc étendre aux séries de la forme $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n$ tous les résultats obtenus par MM. DINI, LIPSCHITZ, JORDAN, FEJÉR pour les simples séries trigonométriques.

Nous allons maintenant discuter plus précisement la nature des fonctions

$$R'_k(x,\ t),\quad R''_k(x,\ t).$$

Nous laissons de coté le cas 1) qui exige une analyse plus délicate, et qui n'a pas lieu, d'ailleurs, dans les problèmes les plus intéressants de la Physique mathématique [38]).

Le cas 3) est impossible, ce qui est établi par M. WESTFALL. Il a montré en effet, que la fonction $G(x,\ t)$ et les solutions du problème (I), (I_a) non nulles identiquement ne peuvent pas coexister pour les mêmes valeurs de λ [39]). Nous n'avons donc qu'à considérer le cas 2).

On doit maintenant introduire la notion du problème adjoint [40]) du problème (I), (I_a).

Posons

$$L(u) \equiv \frac{d^m u}{d x^m} + p_2(x)\frac{d^{m-2} u}{d x^{m-2}} + \cdots + p_m(x) u.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^1 v L(u) d x = P(u,\ v) + \int_0^1 u M(v) d x,$$

$M(v)$ désignant une opération différentielle d'ordre m, analogue à L, et $P(u,\ v)$ une forme bilinéaire de deux suites de variables

$$(34) \qquad u(0),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(0);\quad u(1),\ \ldots,\ u^{(m-1)}(1),$$

$$(34_a) \qquad v(0),\ \ldots,\ v^{(m-1)}(0);\quad v(1),\ \ldots,\ v^{(m-1)}(1).$$

Les m formes linéaires

$$U_i(u) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

de $2m$ variables (34) étant linéairement indépendantes, on peut construire encore m formes linéaires

$$U_i(u) \qquad (i = m+1,\ \ldots,\ 2m)$$

de mêmes variables, qui, avec les formes $U_i(u)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, constituent un

---

38) Remarquons que *le cas* 1) *ne peut se présenter que quand*

$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 0;$$

le cas le plus intéressant, où l'égalité précédente a lieu, est celui de conditions à limites du type périodique (n° 5), l'équation (I) étant adjointe à elle-même. Or nous allons montrer plus tard que dans le cas du problème adjoint à lui même *tous les pôles de* $G(x,\ t)$ *sont simples.*

On vérifie sans peine que, si le cas 1) est en général possible, le développement (33) est une série procédant suivant les solutions de l'équation différentielle

$$L L(u) + 2\lambda L(u) + \lambda^2 u = 0$$

et non plus de l'équation (1), quoique les solutions de celle-ci existent de même. Le cas 1) est lié avec la théorie des équations intégrales au noyau non symétrique.

39) Voir: W. D. A. WESTFALL, loc. cit. 9), pp. 19-21.

40) BIRKHOFF, loc. cit. 6), pp. 375-377.

système complet de $2m$ formes linéaires indépendantes de (34). On peut alors, réciproquement, exprimer (34) au moyen de $U_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$. On trouve

$$P(u, v) \equiv \sum_{i=1}^{2m} U_i(u) V_{2m-i+1}(v),$$

$V_k(v)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$ désignant les $2m$ formes linéaires de variables (34_a). On peut démontrer à l'aise, que les formes

$$V_k(v) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2m)$$

sont linéairement indépendantes. Le problème

(II) $$M(v) + \lambda v = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

avec les conditions aux limites

(II_a) $$V_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m)$$

est *le problème adjoint du problème* (I), (I_a). On sait que les suites de nombres caractéristiques relativement aux deux problèmes (I), (I_a) et (II), (II_a) sont identiques [41]). En désignant, pour un moment, par $u_k(x)$ et $v_i(x)$ les deux solutions resp. du problème (I), (I_a) et de son adjoint, on a, en général,

(35) $$\int_0^1 u_k(x) v_i(x) dx = 0,$$

sous la condition que les solutions u_k et v_i correspondent à des nombres caractéristiques *inégaux*.

Désignons par $H(x, t)$ la fonction analogue à $G(x, t)$, relativement au problème (II), (II_a). On a, comme on le sait,

$$G(x, t) = H(t, x) \text{ [42])}.$$

Un calcul simple nous montre que le résidu de la fonction $G(x, t)$ relatif à un pôle simple, considéré comme une fonction de x, est une solution du problème (I), (I_a); et de même, le résidu de $H(t, x)$, considéré comme une fonction de t, est une solution du problème adjoint (II), (II_a). On trouve donc, eu égard au Théorème VIII et aux notations du n° 10,

(36) $$\begin{cases} R'_k(x, t) = v_{1k}(t) u_{1k}(x), & \lambda = \lambda'_k, \\ R''_k(x, t) = v_{2k}(t) v_{2k}(x), & \lambda = \lambda''_k, \end{cases}$$

ou

(36_a) $$\begin{cases} R'_k(x, t) = v'_{1k}(t) u'_{1k}(x) + v''_{1k}(t) u''_{1k}(x), & \lambda = \lambda'_k, \\ R''_k(x, t) = v'_{2k}(t) u'_{2k}(x) + v''_{2k}(t) u''_{2k}(x), & \lambda = \lambda''_k, \end{cases}$$

$v_{1k}, \ldots$ désignant des solutions du problème (II), (II_a), convenablement choisies. On a donc, finalement,

(33_a) $$\sigma_n = \sum_{k=-n}^{+n} u_{1k}(x) \int_0^1 f(t) v_{1k}(t) dt + \sum_{k=-n}^{+n} u_{2k}(x) \int_0^1 f(t) v_{2k}(t) dt,$$

---

[41]) Voir: W. D. A. WESTFALL, loc. cit. [9]), p. 21. M. WESTFALL a obtenu un résultat plus particulier; son extension pour le cas général considéré dans le texte ne présente aucune difficulté.

[42]) Voir la note [41]).

dans le cas (36), et

$$(33_b)\qquad \sigma_n = \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=-n}^{+n} \left\{ u'_{1k}(x) \int_0^1 f(t) v'_{1k}(t)\,dt + u''_{1k}(x) \int_0^1 f(t) v''_{1k}(t)\,dt \right\} \\ &+ \sum_{k=-n}^{+n} \left\{ u'_{2k}(x) \int_0^1 f(t) v'_{2k}(t)\,dt + u''_{2k}(x) \int_0^1 f(t) v''_{2k}(t)\,dt \right\}, \end{aligned} \right.$$

dans le cas (36_a).

La série dans le second membre est analogue à celle de FOURIER.

Le Théorème IX nous donne ainsi le développement de la fonction arbitraire $f(x)$ en une série procédant suivant les solutions du problème (I), (I_a) et la « sommation » d'une telle série, dans le sens de M. FEJÉR. Le problème principal de ce travail est ainsi résolu. Un autre problème, à savoir, *l'unicité de développement d'une fonction $f(x)$ en une série de la forme (33_a) ou (33_b)* sera discuté dans un travail ultérieur. On peut établir, relativement à ce problème, un théorème analogue à celui de M. G. CANTOR relativement aux séries trigonométriques.

11. Les résultats précédents sont plus symétriques quand le problème (I), (I_a) est adjoint à lui même, ce que nous allons supposer maintenant.

Dans le cas considéré, nous avons

$$L(u) \equiv M(u),$$

$$U_i(u) \equiv V_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(Les conditions aux limites du type périodique sont compris dans le cas considéré). On établi le

THÉORÈME X. — *La fonction $G(x, t)$, correspondant au problème adjoint à lui-même, a tous ses pôles simples et réels.*

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, continue dans (0, 1). Considérons le problème

$$(3)\qquad L(v) + \lambda v = f,$$

$$(3_a)\qquad U_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

(n° 1). On a

$$v = \int_0^1 f(t) G(x, t)\,dt.$$

La fonction v est une fonction méromorphe de λ. Nous allons montrer que *tous les pôles différents de zéro de $v(x, \lambda)$, quelle que soit la fonction $f(x)$, sont simples et réels.* Soit $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ un pôle de $v(x)$, d'ordre $k (k > 1)$. On a, pour les valeurs de λ suffisamment voisines de λ_0,

$$v(x) = \frac{v_k(x)}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \frac{v_{k-1}(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{v_1(x)}{\lambda - \lambda_0} + v_0(x, \lambda),$$

$v_0(x, \lambda)$ étant une fonction holomorphe pour $\lambda = \lambda$. On trouve sans peine les équations pour $v_s(x)$ [43])

$$L(v_k)+\lambda_0 v_k=0,$$

$$L(v_{k-s})+\lambda_0 v_{k-s}+v_{k-s+1}=0 \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,k-1),$$

$$U_i(v_s)=0 \qquad (s=1,2,\,\ldots,\,k;\; i=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

Posons

$$\lambda_0=\lambda_1+i\lambda_2,$$

$$v_{k-s}(x)=v'_{k-s}(x)+i v''_{k-s}(x) \qquad (s=0,\,\ldots,\,k-1).$$

Il vient

$$(37)\quad \begin{cases} L(v'_k)\;\;+\lambda_1 v'_k-\lambda_2 v''_k=0, \\ L(v''_k)\;\;+\lambda_2 v'_k+\lambda_1 v''_k=0, \\ \left.\begin{aligned} &L(v'_{k-s})+\lambda_1 v'_{k-s}-\lambda_2 v''_{k-s}+v'_{k-s+1}=0 \\ &L(v''_{k-s})+\lambda_2 v'_{x-s}+\lambda_1 v''_{k-s}+v''_{k-s+1}=0 \end{aligned}\right\} \quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,k-1), \\ U_i(v'_{k-s})=U_i(v''_{k-s})=0 \qquad (s=0,\,1,\,\ldots,\,k-1;\; i=1,\,2,\,\ldots,\,m). \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent sans peine

$$\lambda_2\int_0^1 (v'^2_k+v''^2_k)\,dx=0.$$

On a donc un des deux cas suivants:

1) $\lambda_2=0;\quad \lambda_0=\lambda_1$ est réel;

2) $\displaystyle\int_0^1 (v'^2_k+v''_k)^2\,dx=0;\quad v_k(x)\equiv 0$ dans $(0,\,1)$.

Considérons d'abord le cas 1). Il vient sans peine

$$\int_0^1 v'^2_k\,dx=\int_0^1 v''^2_k\,dx=0,$$

$$v'_k\equiv 0,\quad v''_k\equiv 0,\quad v_k\equiv 0 \text{ dans } (0,\,1),$$

ce qui nous montre que λ_0 est un pôle d'ordre $(k-1)$, au plus. On trouve immédiatement le même résultat dans le cas 2). En continuant les mêmes raisonnements, on démontre enfin que λ_0 est un pôle *simple* de $v(x)$, c'est-à-dire qu'on a

$$v(x)=\frac{v_1(x)}{\lambda-\lambda_0}+v_0(x,\,\lambda).$$

Si l'on pose $k=1$ dans les équations (37), on trouve comme auparavant

$$\lambda_2\int_0^1 (v'^2_k+v''^2_k)\,dx=0,\quad \lambda_2=0,$$

la fonction $v(x)$ étant différente de zéro, dans $(0,\,1)$. Donc λ_0 est un pôle *simple* et *réel* de la fonction $v(x)$, c. q. f. d. Le raisonnement précédent ne s'applique pas au

---

43) Cfr.: BOGGIO, *Sopra alcuni teoremi di Fisica-matematica* [Atti del IV° Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908, vol. III (1909), pp. 125-137].

cas possible

$$\lambda_0 = 0,$$

qui ne présente aucun intérêt.

Supposons maintenant que $\lambda = \lambda_0$ soit un pôle multiple de la fonction $G(x, t)$, d'ordre $k (k > 1)$. On a

$$G(x, t) = \frac{R_k(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \cdots + \frac{R_2(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \frac{R_1(x, t)}{\lambda - \lambda_0} + R_0(x, t),$$

$R_0(x, t)$ étant une fonction holomorphe pour $\lambda = \lambda_0$. Or, quelle que soit $f(x)$, on a

$$v(x) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\int_0^1 f(t) R_{k-s}(x, t)\, dt}{(\lambda - \lambda_0)^{k-s}} + \int_0^1 f(t) R_0(x, t)\, dt,$$

ce qui nous donne, tous les pôles de $v(x)$ étant simples,

$$\int_0^1 f(t) R_s(x, t)\, dt \equiv 0 \qquad (s = 2, \ldots, k).$$

Les fonctions $R_s(x, t)$ étant continues et $f(t)$ étant une fonction continue *arbitraire*, on a donc identiquement

$$R_s(x, t) \equiv 0 \qquad (s = 2, \ldots, k).$$

On établit de même que λ_0 doit être réel. C. Q. F. D.

On peut donc affirmer que, dans le cas où le problème (I), (I_a) est adjoint à lui-même, la série (33) se réduit toujours à l'une des deux formes (33_a) et (33_b), les fonctions $v_{1k}(t), \ldots$ désignant les solutions du même problème (I), (I_a). Supposons encore, pour fixer les idées, que

$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 \neq 0.$$

On a évidemment

$$\lim_{\lambda = \lambda'_k} (\lambda - \lambda'_k)\, G(x, t) = R'_k(x, t) = c' u_{1k}(t) u_{1k}(x),$$

$$\lim_{\lambda = \lambda''_k} (\lambda - \lambda''_k)\, G(x, t) = R''_k(x, t) = c'' u_{2k}(t) u_{2k}(x).$$

On a, d'autre coté,

$$L(u_{1k}) + \lambda u_{1k} = (\lambda - \lambda'_k)\, u_{1k}, \quad U_i(u_{1k}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$L(u_{2k}) + \lambda u_{2k} = (\lambda - \lambda''_k)\, u_{2k}, \quad U_i(u_{2k}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Donc

$$u_{1k}(x) = (\lambda - \lambda'_k) \int_0^1 u_{1k}(t)\, G(x, t)\, dt,$$

$$u_{2k}(x) = (\lambda - \lambda''_k) \int_0^1 u_{2k}(t)\, G(x, t)\, dt.$$

On a donc

$$u_{1k}(x) = \int_0^1 u_{1k}(t)(\lambda - \lambda'_k)\, G(x, t)\, dt = \lim_{\lambda = \lambda'_k} \int_0^1 u_{1k}(t)(\lambda - \lambda'_k)\, G(x, t)\, dt$$

$$= c' u_{1k}(x) \int_0^1 \{u_{1k}(t)\}^2\, dt;$$

$$c' = \frac{u_{1k}(x)}{\int_0^1 u_{1k}^2\, dt},$$

et de même

$$c'' = \frac{u_{2k}(x)}{\int_0^1 u_{2k}^2\,dt}.$$

Donc, dans le cas considéré, la série (33) se réduit à la suivante:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{1k}(x) \frac{\int_0^1 f(t)\,u_{1k}(t)\,dt}{\int_0^1 u_{1k}^2\,dt} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{2k}(x) \frac{\int_0^1 f(t)\,u_{2k}(t)\,dt}{\int_0^1 u_{2k}^2\,dt},$$

qui ne présente que la simple généralisation de la série de FOURIER [44]).

St.-Pétersbourg, le 25 mars 1912.

J. TAMARKINE.

[44]) Remarquons que toutes les considérations de ce travail ne supposent nullement que la fonction à developper soit réelle, ou que les coefficients $p_2(x)$ ... et α_i, β_i, etc. soient réels.