EXEMPLE DE MOUVEMENT D'UN POINT ASSUJETTI À UNE LIAISON EXPRIMÉE PAR UNE RELATION NON LINÉAIRE ENTRE LES COMPOSANTES DE LA VITESSE.

Par M. **Paul Appell** (Paris).

Adunanza del 14 maggio 1911.

Je me propose d'exposer, sur un cas particulier élémentaire, la méthode générale que j'ai indiquée dans les Comptes Rendus du 8 mai 1911 [1]).

I. Soit un point matériel, de masse m, de coordonnées x, y, z, sollicité par une force donnée F, de projections X, Y, Z. Ce point est assujetti à une liaison sans frottement, telle que le déplacement virtuel δx, δy, δz, le plus général, compatible avec cette liaison, vérifie la relation

$$\delta x^2 + \delta y^2 - \delta z^2 = 0, \tag{1}$$

et que le déplacement réel dx, dy, dz vérifie la même relation

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0,$$

ou

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0, \tag{2}$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport au temps t.

En dérivant cette relation (2), par rapport à t, on voit que les projections x'', y'', z'', de l'accélération, sont assujetties à la condition

$$x'x'' + y'y'' - z'z'' = 0. \tag{3}$$

Érigeons en principe général ce fait, établi pour les systèmes à liaisons linéaires [2]), que les équations du mouvement s'obtiennent en cherchant les valeurs de x'', y'', z'' qui rendent minimum la fonction

$$R = \frac{1}{2} m(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (Xx'' + Yy'' + Zz'').$$

Nous devrons actuellement chercher les valeurs de x'', y'', z'' qui rendent R minimum, sous la condition (3). Nous aurons, en appelant λ un multiplicateur auxiliaire,

$$\left\{\begin{aligned} m x'' - X - \lambda x' &= 0, \\ m y'' - Y - \lambda y' &= 0, \\ m z'' - Z + \lambda z' &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

---

[1]) *Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CLII (1^{er} semestre 1911), pp. 1197-1199].

[2]) Voyez mon *Traité de Mécanique rationnelle* (Paris, Gauthier-Villars), tome II (1904), chap. XXIV, n° 468.

Telles sont les équations du mouvement. Ces équations, jointes à la condition (2), déterminent x, y, z et λ en fonction de t.

La force de liaison a pour projections

$$+\lambda x', \qquad +\lambda y', \qquad -\lambda z';$$

le travail de cette force est nul, dans le déplacement réel $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$, car son travail élémentaire est

$$\lambda(x'^2 + y'^2 - z'^2)dt,$$

c'est-à-dire *zéro*, d'après (2). On pourra, par exemple, ramener le problème à des quadratures, en supposant que le point est sollicité par une force, rencontrant Oz normalement, proportionnelle à la distance du mobile à Oz.

II. ***Equilibre.*** — La force étant X, Y, Z, cherchons les positions d'équilibre du point. Nous devrons chercher les positions où x, y, z peuvent rester constants, c'est-à-dire $x' = y' = z' = x'' = y'' = z'' = 0$. Les équations (4) donnent alors

$$(5) \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Les positions d'équilibre sont donc les mêmes que si la liaison (1) n'existait pas. Ce résultat se comprend, car les déplacements élémentaires possibles du mobile, à partir d'une position donnée M, sont situés sur un cône du second ordre de sommet M défini par (1). Si, dans cette position M, la force X, Y, Z n'était pas nulle, le point abandonné sans vitesse, sous l'action de cette force, prendrait un déplacement élémentaire sur ce cône: il ne serait pas en équilibre.

Remarque. — On peut imaginer un mécanisme théorique pour réaliser la liaison (1). Le plan xOy étant horizontal, une roulette dont le plan est vertical est assujettie à rouler sur ce plan xOy; cette roulette a son axe engagé dans une fourche fixée à une tige qui tourne librement dans une douille verticale entrainée par la roulette, comme le ferait la roue d'avant d'une bicyclette dont le tube de direction serait vertical, ou comme le font les roulettes de fauteuils; la douille serait maintenue verticale par trois pieds glissant sans frottement sur le plan horizontal; dans la tige verticale coulisserait une barre rectiligne verticale actionnée par la roulette, de telle façon que la longueur dont cette barre s'éléverait, pour un déplacement élémentaire de la roulette, fût égale à l'arc élémentaire de roulette venu en contact avec le plan horizontal. Tous ces organes sont sans masse, et le point matériel M est fixé à l'extrémité supérieure de la barre verticale. Alors, si la roulette roule de

$$\delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2},$$

le point M s'élève de δz et on a

$$\delta z = \pm \delta s$$

suivant le sens du roulement, ou

$$\delta z^2 = \delta x^2 + \delta y^2.$$

III. La même méthode s'applique au cas d'une liaison exprimée par une relation *non homogène* entre x', y', z', telle que, par exemple,

$$x'^2 + y'^2 \pm z'^2 = f(x, y, z),$$

f étant une fonction donnée des coordonnées x, y, z.

Mais il pourrait alors se faire que l'équilibre soit impossible, quelle que soit d'ailleurs la force donnée X, Y, Z; c'est ce qui arriverait, si la fonction $f(x, y, z)$ ne pouvait pas s'annuler.

IV. On pourrait évidemment se passer de la méthode des multiplicateurs, en tirant z'' en fonction de x'', et y'' de la relation analogue à (3), pour le porter dans R. On annulerait ensuite les dérivées de R par rapport à x'' et y''.

Paris, 8 mai 1911.

PAUL APPELL.