SULL'INTEGRAZIONE PER SERIE.

Memoria di **G. Vitali** (Genova).

Adunanza del 13 gennajo 1907.

Vari lavori recenti hanno messo in evidenza l'importanza che nello studio delle funzioni ha la trasformazione proposta dal signor HENRI LEBESGUE dei concetti noti sotto il nome di *misura di un gruppo di punti* e di *integrale di una funzione* *).

I nuovi concetti si sono mostrati indispensabili per lo studio delle quistioni più fondamentali del Calcolo, da tanto tempo già poste, come quelle che riguardano la costruzione delle funzioni primitive e l'esistenza delle derivate.

Gli integrali di LEBESGUE si presentano come una naturale generalizzazione dell'integrale di RIEMANN, non solo per la maggior vastità del campo delle funzioni che risultano integrabili **), ma anche per la maggior varietà dei campi a cui si può estendere una integrazione.

Invero l'integrazione di LEBESGUE estesa ad un segmento si può considerare come un caso specialissimo dell'integrazione estesa ad un gruppo misurabile di punti.

In particolare il problema dell'integrazione per serie non può più essere considerato soltanto dal punto di vista speciale dell'integrazione estesa a dei segmenti, ma si deve studiare da quello più generale dell'integrazione estesa a qualunque gruppo misurabile di punti.

---

*) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* par HENRI LEBESGUE [Paris, Gauthier-Villars, 1904] e G. VITALI, *Sui gruppi di punti* [questi Rendiconti, t. XVIII (1904), pp. 116-126].

**) Veramente una funzione illimitata può avere un integrale nel senso comune della parola e non un integrale di LEBESGUE. Ma la comune definizione degli integrali di tali funzioni illimitate non è meno arbitraria di quel che sarebbe il definire la somma di una serie non convergente colla somma della serie che si ottiene aggruppando in un modo stabilito una volta per sempre i termini della data. Del resto potremmo in modo analogo estendere il significato di integrale di LEBESGUE prefissando una successione di gruppi

$$G_1, \quad G_2, \ldots G_n, \ldots$$

in cui la funzione è sommabile, ciascuno contenuto nel successivo, e tendente al campo di integrazione, ed assumere per valore dell'integrale il limite (quando esiste) dell'integrale esteso a G_n per $n = \infty$.

Ma ciò non sembra opportuno, perchè dal punto di vista generale non è preferibile una successione piuttosto che un'altra, e cambiando la scelta della successione può venire a cambiare il valore che si attribuisce all'integrale.

Io dirò che una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ di funzioni finite e integrabili in un dato gruppo G di punti misurabile e a misura finita è *integrabile completamente per serie* quando per ogni sottogruppo misurabile Γ di G esistono e sono uguali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} u_n(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

Per esprimere invece che ciò avviene quando G è un segmento (a, b) e Γ è uno qualsiasi dei segmenti (a, x) $(a < x \leqq b)$, dirò che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ è *integrabile per serie nel senso ordinario.*

Io darò una condizione necessaria e sufficiente per l'integrazione completa per serie.

Per esprimere questa condizione bisogna che io richiami la nozione di *assoluta continuità* di cui ho fatto uso in altra Nota *).

Io chiamo *gruppo di intervalli distinti* un gruppo di intervalli presi sopra una retta, tale che due qualsiansi intervalli di esso non abbiano punti interni comuni, ed *ampiezza di un gruppo di intervalli* la somma delle lunghezze dei singoli intervalli del gruppo.

Sia $F(x)$ una funzione finita della variabile reale x in un intervallo (a, b) ed $a < b$.

Sia (α, β) un intervallo parziale di (a, b) ed $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$.

Io chiamo incremento di $F(x)$ in (α, β) la differenza $F(\beta) - F(\alpha)$.

Chiamo poi *incremento di $F(x)$ in un gruppo di intervalli parziali distinti di (a, b)* la somma, se è determinata e finita, degli incrementi di $F(x)$ nei singoli intervalli.

Ora, se per ogni numero $\sigma < 0$ esiste un numero $\mu > 0$ tale che sia minore di σ il modulo dell'incremento di $F(x)$ in ogni gruppo di ampiezza minore di μ di intervalli parziali di (a, b) distinti, dico che $F(x)$ è *assolutamente continua.*

Io ho dimostrato nella Nota citata che condizione *necessaria e sufficiente perchè una funzione $F(x)$ sia un integrale è che essa sia assolutamente continua.*

Consideriamo ora l'integrale di una funzione sommabile $f(x)$. Esso è una funzione assolutamente continua e quindi, prefissato un numero $\sigma > 0$, esiste un numero $\mu > 0$ tale che in ogni gruppo Γ di ampiezza minore di μ di intervalli parziali di (a, b) distinti, il modulo dell'incremento di $\int_a^x f(x)\,dx$ è minore di σ. È quindi $\left|\int_{\Gamma} f(x)\,dx\right| < \sigma$.

Sia ora g un gruppo di punti di (a, b) di ampiezza minore di μ. Si possono trovare infiniti gruppi di ampiezza minore di μ di intervalli distinti

$$\Gamma_2, \quad \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots$$

ciascuno contenuto nel precedente e rinchiudente g, tali che il limite inferiore delle loro ampiezze sia la misura di g.

Sarà per ogni n

$$\left|\int_{\Gamma_n} f(x)\,dx\right| < \sigma$$

*) G. VITALI, *Sulle funzioni integrali* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL (1904-905), pp. 1021-1034.

e

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Gamma_n} f(x)\,dx = \int_g f(x)\,dx \text{ *)}.$$

Quindi

$$\left| \int_g f(x)\,dx \right| \leqq \sigma.$$

Si può dunque dire che *data una funzione sommabile* $f(x)$, *esiste per ogni numero* $\sigma > 0$ *un numero* $\mu > 0$ *tale che il modulo dell'integrale di* $f(x)$ *esteso ad un qualsiasi gruppo misurabile di misura minore di* μ *sia minore di* σ.

Naturalmente, se la funzione $f(x)$ invece di essere definita in un intervallo è definita in un gruppo misurabile di misura finita, valgono le stesse conclusioni.

Queste proprietà degli integrali delle funzioni sommabili non sono in sostanza altro che l'assoluta continuità di cui ho parlato più sopra.

Ora, data una varietà di funzioni sommabili, si dirà che i loro integrali sono *equi-assolutamente continui* in un gruppo misurabile G, se, per ogni numero $\sigma > 0$, esiste un numero $\mu > 0$ tale che il modulo dell'integrale di una qualsiasi funzione della varietà, esteso ad un qualsiasi gruppo misurabile di misura minore di μ, sia minore di σ.

In particolare adunque: le funzioni di una varietà saranno equi-assolutamente continue in un intervallo (a, b), se, per ogni numero $\sigma > 0$, esiste un numero $\mu > 0$ tale che sia minore di σ il modulo dell'incremento di qualsiasi funzione della varietà in ogni gruppo di ampiezza minore di μ di intervalli parziali di (a, b) distinti.

In questo lavoro io dimostrerò che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie $\sum u_n(x)$ *di funzioni finite e sommabili in un gruppo misurabile a misura finita sia integrabile completamente per serie è che essa converga e che gli integrali delle sue somme parziali* **) *siano equi-assolutamente continui* (§ 1, § 6 *e* § 7).

Per l'integrazione per serie nel senso ordinario la predetta condizione sarebbe soltanto sufficiente, come proverò con un esempio (§ 8).

Però i casi più comuni di integrazione per serie nel senso ordinario rientrano pienamente nel caso di integrazione completa.

Noi vedremo che, quando le somme parziali della serie data sono egualmente limitate in un senso (cioè o tutte maggiori, o tutte minori di un medesimo numero), le condizioni indicate sono necessarie e sufficienti anche per l'integrazione nel senso ordinario (§ 9). Anzi vedremo di più che per tali serie la relazione

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \sum_{r=1}^{n} dx = \int_a^b \sum_{r=1}^{\infty} dx$$

porta l'integrabilità completa per serie in (a, b).

---

*) v. H. LEBESGUE, l. c., pag. 116.

**) Chiamo somme parziali le somme $\sum_{n=1}^{r} u_n(x)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Nella trattazione io mi valgo del teorema del signor LEBESGUE sulla integrazione delle serie le cui somme parziali sono egualmente limitate *).

In fine espongo i risultati sull'integrabilità delle serie a termini positivi ottenuti recentemente da B. LEVI **) riducendo le condizioni che in essi figurano.

Il teorema principale di questo mio lavoro dà origine immediatamente al seguente sulla derivazione per serie.

Una serie di funzioni avente le somme parziali equi-assolutamente continue è derivabile termine a termine, fuorchè in un gruppo di punti di misura nulla, se la serie delle derivate converge.

Nell'ultimo § di questo lavoro mi occupo dell'integrabilità per serie nel senso ordinario, e trovo una classe estesa di serie convergenti, che sono certamente integrabili per serie, se la serie degli integrali converge verso una funzione assolutamente continua.

Questa classe di serie è, oltre quella precedentemente accennata, una nuova classe di serie per cui si conosce una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità per serie nel senso ordinario.

---

1. Consideriamo una serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ convergente di funzioni finite ed integrabili in un gruppo di punti G misurabile ed a misura finita e supponiamo che gli integrali delle sue somme parziali siano equi-assolutamente continui.

Sia K un numero maggiore di 1 e G_h il gruppo dei punti in cui qualche somma parziale è in valore assoluto maggiore di K^h.

I gruppi

$$G_1, \quad G_2, \ldots G_h, \ldots$$

sono certamente misurabili; ciascuno di essi è contenuto nel precedente; il gruppo dei punti comuni a tutti è nullo. Dunque il limite della misura di G_h per $h = \infty$ è uguale a zero ***).

Sia $\Gamma_h = G - G_h$. Sarà

$$\int_G \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx + \int_{G_h} \sum_{r=1}^{n} U_r(x)\,dx. \tag{1}$$

Per l'equi-assoluta continuità degli integrali delle somme parziali posso, fissato un numero $\sigma > 0$, trovare un numero $\mu > 0$ tale che l'integrale di qualsiasi di quelle somme parziali, esteso a qualsiasi gruppo di misura minore di μ, sia in valore assoluto minore di σ. Ora io posso scegliere h così grande che la misura di G_h sia minore di μ. Per un tale h è, qualunque sia n,

$$\left|\int_{G_h} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx\right| < \sigma. \tag{2}$$

---

*) LEBESGUE, l. c., pag. 114.

**) B. LEVI, *Sopra l'integrazione delle serie* [Rend. del R. Ist. Lombardo, s. II, vol. XXXIX (1906), pp. 775-780].

***) LEBESGUE, l. c., pag. 109.

In Γ_h le $\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$ sono ugualmente limitate, e quindi

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \text{ *)},$$

e, per n abbastanza grande,

$$(3) \qquad \left| \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \int_{\Gamma_h} \sum_{1}^{\infty} u_r(x)\,dx \right| < \sigma.$$

Dalle (1), (2), (3) consegue, per n abbastanza grande,

$$(4) \qquad \left| \int_{G} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \right| < 2\sigma.$$

Si deduce, che da un certo n in poi gli integrali estesi a G delle $\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$ differiscono fra loro a meno di 4σ. Ma σ è piccolo a piacere. Dunque esiste il

$$\lim_{n=\infty} \int_{G} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx.$$

Per la (4) allora, per qualunque σ e per h abbastanza grande,

$$\left| \lim_{n=\infty} \int_{G} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \right| \leqq 2\sigma.$$

Dunque esiste il

$$\lim_{h=\infty} \int_{\Gamma_h} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

che non è altro che

$$\int_{G} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \text{ **)},$$

e sarà

$$\lim_{n=\infty} \int_{G} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{G} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx.$$

Quello che ho detto per G lo avrei potuto ripetere per ogni sottogruppo misurabile di G e quindi è dimostrato che:

La convergenza di una serie e l'equi-assoluta continuità degli integrali delle sue somme parziali sono condizioni sufficienti per l'integrabilità completa per serie.

2. Consideriamo una serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ convergente in tutti i punti di un gruppo misurabile G a misura finita, e integrabile completamente per serie, le cui somme parziali siano positive. Io voglio dimostrare che gli integrali delle somme parziali sono equi-assolutamente continui.

Se ciò non fosse, esisterebbe un numero $\sigma > 0$ tale che, per ogni $\mu > 0$, esiste un gruppo di misura minore di μ e un n tale che l'integrale di $\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$ esteso a quel gruppo sia maggiore di σ.

---

*) LEBESGUE, l. c., pag. 114.

**) LEBESGUE, l. c., pag. 116.

Prefissiamo una serie convergente a termini positivi $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$. Si può per ogni i determinare un gruppo G_i di misura minore di μ_i e un numero n_i tali che

$$\int_{G_i} \sum_{r=1}^{n_i} u_r(x)\,dx > \sigma.$$

Indico con Γ_s il gruppo dei punti che appartengono a qualcuno dei gruppi

$$G_s,\quad G_{s+1},\quad G_{s+2},\ \ldots .$$

Certamante la misura di Γ_s tende a zero col tendere all'infinito di s, ed è

$$(1)\qquad \int_{\Gamma_s} \sum_{r=1}^{n_i} u_r(x)\,dx \geqq \int_{G_i} \sum_{r=1}^{n_i} u_r(x)\,dx > \sigma,$$

per ogni $i \geqq s$.

Di qui si vede subito che non possono aversi infiniti n_i uguali ad un medesimo numero n, perchè, se

$$i_1,\quad i_2,\ \ldots\ i_h,\ \ldots$$

fossero i valori di i corrispondenti, si avrebbe per ogni h

$$\int_{\Gamma_{i_h}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx > \sigma,$$

e poichè il limite per $h = \infty$ della misura di Γ_{i_h} è uguale a zero, l'integrale di $\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$ non sarebbe assolutamente continuo, contrariamente al risultato della mia Nota citata *Sulle funzioni integrali*.

Allora è senz'altro

$$\lim_{i=\infty} n_i = \infty,$$

e quindi, per l'ammessa integrabilità completa per serie,

$$\lim_{i=\infty} \int_{\Gamma_s} \sum_{r=1}^{n_i} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma_s} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

e per la (1)

$$\int_{\Gamma_s} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \geqq \sigma.$$

Ciò è impossibile, perchè il limite della misura di Γ_s per $s = \infty$ è uguale a zero, e l'integrale di $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx$ deve essere assolutamente continuo.

Ne consegue che gli integrali delle somme parziali della serie data devono essere equi-assolutamente continui. Cioè:

Se una serie convergente e integrabile completamente per serie ha le somme parziali positive, gli integrali delle somme parziali sono equi-assolutamente continui.

3. Ho già nella prefazione alluso al seguente teorema di Lebesgue:

Se le somme parziali di una serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ *convergente (in un gruppo misurabile* G *di punti a misura finita) sono ugualmente limitate, la serie è integrabile completamente per serie.*

La stessa dimostrazione di questo teorema serve manifestamente a provare che *per* *ogni numero* $\sigma > 0$ *esiste un numero intero positivo* n_σ *tale che, per ogni sottogruppo* Γ *misurabile di* G *si abbia*

$$\left|\int_\Gamma \sum_{r=1}^{n_\sigma+h} u_r(x)\,dx - \int_\Gamma \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx\right| < \sigma \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. Sia ora $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ una serie convergente, in tutti i punti di un gruppo misurabile G a misura finita, verso limiti positivi non nulli e integrabile completamente per serie. Sia K un numero maggiore di 1.

Indichiamo con G_n il gruppo dei punti in cui tutte le somme parziali

$$\sum_{r=1}^{n+h} u_r(x) \qquad (h \geqq 0)$$

sono maggiori di zero e minori di K^n.

I gruppi

$$G_1, \quad G_2, \ldots G_n, \ldots$$

sono tali che ciascuno è contenuto nel successivo, ed ogni punto di G è contenuto in qualcuno di essi.

Si ha subito che il limite della misura di $G - G_n$ per $n = \infty$ è uguale a zero.

Per quanto è detto al § 3, si può, fissato un numero $\sigma > 0$, trovare un numero $m_{n,\sigma}$ tale che per ogni sottogruppo Γ_n di G_n si abbia

$$\left|\int_{\Gamma_n} \sum_{r=1}^{m_{n,s}+h} u_r(x)\,dx - \int_{\Gamma_n} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx\right| < \sigma \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ora indico con

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_i, \ldots$$

una successione di numeri positivi decrescenti e tendente a zero.

Potremo trovare una successione di numeri interi crescenti

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \ldots, n_i, \ldots$$

tali che per ogni sottogruppo Γ_{n_i} di G_{n_i} si abbia

$$(\omega) \qquad \left|\int_{\Gamma_{n_i}} \sum_{r=1}^{n_{i+1}+h} u_r(x)\,dx - \int_{\Gamma_{n_i}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx\right| < \varepsilon_i.$$

Per ogni intero $n > n_2$ esisterà un i tale che

$$n_{i+1} \leqq n < n_{i+2}.$$

Per un tale n chiamerò $\sigma_n(x)$ una funzione uguale a

$$\sum_{r=1}^{n} u_r(x)$$

in G_{n_i} e nulla nei rimanenti punti di G.

Sia ora Γ un sottogruppo qualunque di G, e Γ_{n_i} la sua intersezione con G_{n_i}. Sarà

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} \sigma_n(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma_{n_i}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx.$$

Inoltre è

$$\int_{\Gamma_{n_i}} \sigma_n(x)\,dx = \int_{\Gamma} \sigma_n(x)\,dx,$$

per ogni n che soddisfi alle disuguaglianze

$$n_{i+1} \leqq n < n_{i+2},$$

e quindi, per le (ω),

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Gamma} \sigma_n(x)\,dx = \lim_{i=\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \int_{\Gamma} \lim_{n=\infty} \sigma_n(x)\,dx.$$

Si vede quindi che la serie

$$\sigma_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)]$$

è integrabile completamente per serie, e poichè le sue somme parziali $\sigma_n(x)$ sono positive, gli integrali di queste somme parziali sono equi-assolutamente continui (v. § 2).

Poniamo

$$\zeta_n(x) = \sum_{r=1}^{n} u_r(x) - \sigma_n(x).$$

La serie

$$\zeta_1(x) + \sum [\zeta_{n+1}(x) - \zeta_n(x)]$$

è integrabile completamente per serie. Se noi riusciamo a dimostrare che gli integrali delle somme parziali $\zeta_n(x)$ di questa serie sono equi-assolutamente continui, potremo concludere che anche gli integrali delle somme parziali della serie data $\sum u_n(x)$ sono equi-assolutamente continui.

Osserviamo subito che, se

$$n_{i+1} \leqq n < n_{i+2},$$

$\zeta_n(x)$ è nulla in tutto G_{n_i}. Dunque in ogni punto è

$$\lim_{n=\infty} \zeta_n(x) = 0,$$

e, se Ω è un qualunque sottogruppo misurabile di G, è

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Omega} \zeta_n(x)\,dx = 0,$$

pel fatto dell'integrabilità completa per serie.

Supponiamo che gli integrali delle $\zeta_n(x)$ non siano equi-assolutamente continui. Esisterà allora un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni $\mu > 0$, e per ogni numero intero N, si trova qualche sottogruppo Γ di G di misura minore di μ per cui, almeno per un valore di $n > N$, sia

$$\left| \int_{\Gamma} \zeta_n(x)\,dx \right| > \sigma.$$

Prefisso dei numeri positivi

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots \; \eta_\lambda, \ldots$$

tali che la serie $\sum \eta_\lambda$ converga verso un numero minore di $\dfrac{\sigma}{2}$.

Indico con Γ_1 un sottogruppo di G corrispondentemente al quale esista un intero t_1 tale che

$$\left|\int_{\Gamma_1} \zeta_{t_1}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Indicando con (H/K) l'intersezione di due gruppi H, K, ho

$$\lim_{i=\infty} \int_{(G_{n_i}/\Gamma_1)} \zeta_{t_1}(x)\,dx = \int_{\Gamma_1} \zeta_{t_1}(x)\,dx,$$

e quindi posso trovare un i_1 tale che

$$\left|\int_{(G_{n_{i_1}}/\Gamma_1)} \zeta_{t_1}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Esiste un numero $\mu_1 > 0$ tale che per ogni sottogruppo Γ di G, avente misura minore di μ_1, è

$$\left|\int_{\Gamma} \zeta_{t_1}(x)\,dx\right| < \eta_1.$$

Indico con Γ_2 un gruppo di misura minore di μ_1 corrispondentemente al quale esista un intero $t_2 \geqq n_{i_1+1}$, per cui

$$\left|\int_{\Gamma_2} \zeta_{t_2}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Analogamente a quanto si è osservato prima, si troverà un i_2 tale che

$$\left|\int_{(G_{n_{i_2}}/\Gamma_2)} \zeta_{t_2}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Esiste un numero $\mu_2 > 0$ tale che, per ogni sottogruppo Γ di G avente misura minore di μ_2, è

$$\left|\int_{\Gamma} \zeta_{t_\lambda}(x)\,dx\right| > \eta_2 \qquad (\lambda = 1, 2).$$

Indico con Γ_3 un gruppo di misura minore di μ_2, corrispondentemente al quale esista un intero $t_3 \geqq n_{i_2+1}$, per cui

$$\left|\int_{\Gamma_3} \zeta_{t_3}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Esisterà un i_3 per cui

$$\left|\int_{(G_{n_{i_3}}/\Gamma_3)} \zeta_{t_3}(x)\,dx\right| > \sigma.$$

Si può trovare un numero $\mu_3 > 0$ tale che, per ogni sottogruppo Γ di G avente misura minore di μ_3, sia

$$\left|\int_{\Gamma} \zeta_{t_\lambda}(x)\,dx\right| < \eta_3 \qquad (\lambda = 1, 2, 3),$$

ecc. ecc.

Sia Ω_j il gruppo di punti di $(G_{n_{i_j}}/\Gamma_j)$ in cui $\zeta_{t_j} \neq 0$.

I gruppi Ω_j sono a due a due perfettamente distinti.

Poniamo

$$\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j .$$

È

$$\int_{\Omega} \zeta_{t_j}(x)\,dx = \int_{\Omega_j} \zeta_{t_j}(x)\,dx + \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\Omega_{j+h}} \zeta_{t_j}(x)\,dx.$$

Ma

$$\left| \int_{\Omega_j} \zeta_{t_j}(x)\,dx \right| > \sigma,$$

e

$$\left| \int_{\Omega_{j+h}} \zeta_{t_j}(x)\,dx \right| < \eta_{j+h-1},$$

e quindi

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \int_{\Omega_{j+h}} \zeta_{t_j}(x)\,dx \right| < \sum \eta_{j+h-1} < \frac{\sigma}{2}.$$

Dunque

$$\left| \int_{\Omega} \zeta_{t_j}(x)\,dx \right| > \frac{\sigma}{2}$$

qualunque sia j. Ciò è impossibile, perchè per l'integrabilità completa per serie della

$$\zeta_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta_{n+1}(x) - \zeta_n(x)]$$

è, come abbiam visto,

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Omega} \zeta_n(x)\,dx = 0.$$

Dunque gli integrali delle somme parziali di questa serie, e quindi della serie $\sum u_r(x)$ sono equi-assolutamente continui.

Concludendo:

Se una serie converge verso una funzione maggiore di zero in tutti punti di un aggregato a misura finita G, e se in G è integrabile completamente per serie, gli integrali delle somme parziali della serie sono equi-assolutamente continui.

5. Dal precedente teorema si ricava subito che:

Se una serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ converge verso una funzione minore di zero in tutti i punti di un aggregato a misura finita G, e se in G è integrabile completamente per serie, gli integrali delle somme parziali delle serie sono equi-assolutamente continui.

Basta infatti osservare che la serie $\sum [-u_n(x)]$ si trova nel caso del teorema precedente.

6. Supponiamo ora che $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ sia una serie convergente qualunque in G e integrabile completamente per serie.

Esisteranno dei valori che non sono assunti da $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ che in un gruppo di punti di misura nulla. Sia tale il valore A.

La serie

$$-A + \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

assume il valore zero in un gruppo di punti di misura nulla G_0, assume valori maggiori di zero in un gruppo G_1 e valori minori di zero in un gruppo G_2. In G_1 la serie è integrabile completamente per serie e quindi (convergendo essa verso valori maggiori di zero) gli integrali delle sue somme parziali sono equi-assolutamente continui. Si vede allo stesso modo che in G_2 gli integrali delle somme parziali di

$$-A + \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

sono equi-assolutamente continui. Dunque in $G_1 + G_2$ gli integrali delle somme parziali di $-A + \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ sono pure equi-assolutamente continui. G_0 è di misura nulla. $G_0 + G_1 + G_2 = G$. Dunque $-A + \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ ha gli integrali delle somme parziali equi-assolutamente continui in G. Lo stesso allora è evidentemente di $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$. Perciò:

Se una serie convergente è integrabile completamente per serie, gli integrali delle sue somme parziali sono equi-assolutamente continui.

7. I risultati dei §§ 1 e 6 si riassumono nel seguente

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di funzioni finite e sommabili in un gruppo misurabile a misura finita sia integrabile completamente per serie è che essa converga e che gli integrali delle sue somme parziali siano equi-assolutamente continui.*

8. La convergenza di una serie e l'equi-assoluta continuità degli integrali delle sue somme parziali, pel fatto che sono condizioni sufficienti per l'integrabilità completa per serie, sono anche sufficienti per l'integrabilità per serie in senso ordinario.

Esse non sono però necessarie per l'integrabilità per serie nel senso ordinario, ossia dall'integrabilità per serie nel senso ordinario non consegue sempre l'integrabilità completa per serie. Basta a provar ciò un esempio.

Sia (a, b) un segmento, e sia

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots \ x_n, \ \ldots$$

una successione di numeri maggiori di a crescente e tendente a b.

Indichiamo con y_n il punto di mezzo del segmento (x_n, x_{n+1}), e indichiamo con σ_n la funzione uguale a $\dfrac{2k}{x_{n+1} - x_n}$ in (x_n, y_n), a $-\dfrac{2k}{x_{n+1} - x_n}$ in (y_n, x_{n+1}) e nulla nei rimanenti punti.

La serie

$$\sigma_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)] \tag{1}$$

converge verso zero in ogni punto di (a, b), ed è, per ogni $x \leqq b$,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x \sigma_n(x) = 0,$$

e quindi la serie (1) è integrabile per serie in senso ordinario, ma nel gruppo G somma degli intervalli (x_n, y_n) è

$$\int_G \sigma_n(x) = K,$$

per ogni n, e quindi

$$\lim_{n=\infty} \int_G \sigma_n(x)\,d\,x \neq 0.$$

La (1) non è dunque integrabile completamente per serie.

Vi sono però dei casi estesi, come proverò nel § seguente, in cui le due integrabilità per serie si equivalgono.

9. Supponiamo che la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

sia convergente verso una funzione $s(x)$ integrabile, ed abbia tutte le somme parziali positive in un gruppo G di misura m.

Fissato un numero ε piccolo a piacere, esiste un numero $\mu > 0$ tale che, per ogni gruppo Γ di misura minore di μ, si abbia

$$\left|\int_\Gamma s(x)\,d\,x\right| < \varepsilon.$$

Sappiamo che se G_n è il gruppo dei punti in cui tutte le

$$\sum_{r=1}^{n+h} u_r(x) \qquad (h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

differiscono da $s(x)$ per meno di ε, il limite della misura di G_n per $n = \infty$ è uguale ad m.

Esiste adunque un n_0 tale che il complemento Γ_{n_0} di G_{n_0} in G sia di misura minore di μ.

È certamente

$$\begin{aligned}\int_G \sum_{r=1}^{n_0+h} u_r(x)\,d\,x &> \int_{G_{n_0}} [s(x) - \varepsilon]\,d\,x \\ &> \int_{G_{n_0}} s(x)\,d\,x - \varepsilon\,m \\ &> \int_G s(x)\,d\,x - \varepsilon - \varepsilon\,m,\end{aligned}$$

e, poichè ε è piccolo a piacere, ogni punto limite di

$$\int_G \sum_{r=0}^{n} u_r(x)\,d\,x \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

è maggiore o uguale ad

$$\int_G s(x)\,d\,x.$$

Ciò premesso, consideriamo una serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

convergente verso una funzione $s(x)$ ed avente tutte le somme parziali positive e supponiamo che essa sia integrabile per serie in senso ordinario.

Sia G un sottogruppo di (a, b), e Γ il suo complemento.

Per quanto precede, ogni punto limite di

$$\int_G \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

è uguale o maggiore di $\int_G s(x)\,dx$, e ogni punto limite di

$$\int_\Gamma \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

è uguale o maggiore di $\int_\Gamma s(x)\,dx$.

E poichè

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_G \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx + \int_\Gamma \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx\right)$$

$$= \lim_{n=\infty}\int_a^b \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx = \int_G s(x)\,dx + \int_\Gamma s(x)\,dx,$$

devono sussistere i limiti per $n = \infty$ di

$$\int_G \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Gamma \sum_{r=1}^{n} u_n(x)\,dx$$

ed essere uguali ad

$$\int_G s(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Gamma s(x)\,dx,$$

e perciò la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

è integrabile completamente per serie.

Si può dunque dire che *per una serie a somme parziali positive, l'integrabilità per serie nel senso ordinario porta l'integrabilità completa per serie.*

Anzi si può dire di più che *basta sapere che per una serie* $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ *a somme parziali positive vale la relazione*

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_a^b \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

per concludere che essa è integrabile completamente per serie.

È manifesto che le stesse cose valgono per le serie le cui somme parziali sono ugualmente limitate in un senso, cosicchè si può concludere che:

Per le serie le cui somme parziali sono egualmente limitate in un senso, la convergenza loro e l'equi-assoluta continuità degli integrali delle somme parziali sono condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità per serie $\Big($sia che questa integrabilità si voglia intendere nel senso completo, sia che si voglia intendere nel senso ordinario, sia infine che si riduca alla semplice uguaglianza $\int_a^b \sum_{r=1}^{\infty} dx = \lim_{n=\infty}\int_a^b \sum_{r=1}^{n} dx\Big)$.

OSSERVAZIONE. — Gli stessi ragionamenti precedenti possono essere usati per provare che se una serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ ha le sue somme parziali ugualmente limitate in un senso in un gruppo G e se $\int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_G \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx$, essa è integrabile completamente per serie, e quindi la convergenza di essa e l'equi-assoluta continuità degli integrali delle sue somme parziali sono necessarie e sufficienti anche perchè sia $\int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_G \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx$.

10. Le osservazioni del § precedente riducono l'integrazione completa delle serie a somme parziali ugualmente limitate in un senso alla condizione

$$\int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r\,dx = \lim_{n=\infty} \int_G \sum_{r=1}^{n} u_r\,dx,$$

dove G indica il gruppo totale.

È manifesto però che in questi casi non può bastare la sola convergenza di $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ e nemmanco la sua convergenza verso una funzione sommabile. Invero, se indichiamo con $s_n(x)$ la funzione uguale ad $n(n+1)$ nei punti del segmento $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ e nulla nei rimanenti punti di $(0, 1)$, vediamo subito che la serie

$$s_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [s_{n+1}(x) - s_n(x)]$$

ha le somme parziali positive e converge verso 0 in ogni punto di $(0, 1)$, eppure non è $\lim_{n=\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx = 0$, poichè per ogni n è $\int_0^1 s_n(x)\,dx = 1$.

11. Supponiamo che le $u_r(x)$ siano positive, che

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

converga in G, e che converga pure la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_G u_r(x)\,dx.$$

Si vede subito che

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

è integrabile, perchè se $K > 1$ e G_m è il gruppo in cui

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x) < K^m,$$

è

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_{G_m} u_r(x)\,dx = \int_{G_m} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \leqq \sum_{r=1}^{\infty} \int_G u_r(x)\,dx.$$

Ma il limite della misura di G_m per $m = \infty$ è uguale alla misura di G, dunque

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

è proprio integrabile.

Ma per ε piccolo a piacere esiste un n per cui

$$\sum_{r=n}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx < \varepsilon,$$

ed è

$$\sum_{r=1}^{n-1}\int_G u_r(x)\,dx < \int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

quindi

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx \leqq \int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx + \varepsilon,$$

e, poichè ε è piccolo a piacere,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx \leqq \int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx.$$

Ma dal § 9 risulta

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx \geqq \int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

dunque è proprio

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx = \int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx.$$

Ne consegue immediatamente che:

Una serie a termini positivi convergente è integrabile completamente per serie se la serie degli integrali dei suoi termini è convergente.

È facile vedere che la convergenza di una serie a termini positivi è una conseguenza della convergenza della serie degli integrali dei suoi termini. Infatti se $m > 0$ è la misura del gruppo di punti in cui la serie data diverge, si ha subito un gruppo Γ di misura maggiore di $\frac{1}{2}m$ in ogni punto del quale

$$\sum_{r=1}^{n} u_r(x) > H,$$

per un medesimo n, per cui $\int_G \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx > \frac{1}{2}Hm$.

Ma H si può prender grande a piacere ed allora non converge più la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_G u_r(x)\,dx.$$

Deve esser dunque $m = 0$, e $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ converge dappertutto fuori che in un gruppo di punti di misura nulla. Cosicchè:

Se la serie degli integrali dei termini di una serie a termini positivi converge, converge la serie stessa, fuori che in un aggregato di punti di misura nulla, ed è integrabile completamente per serie.

Come ho già osservato nella prefazione, l'integrazione delle serie a termini positivi è stata già studiata dal LEVI il quale giunge appunto al 1° dei precedenti risultati. Da tale risultato egli deduce che *se una serie è convergente e converge la serie degli integrali dei valori assoluti dei suoi termini essa è integrabile per serie.*

In modo analogo noi possiamo arrivare a quest'altro risultato:

Se la serie degli integrali dei valori assoluti dei termini di una serie converge, converge la serie stessa fuori che in un aggregato di punti di misura nulla ed è integrabile completamente per serie.

12. Noi abbiamo visto or ora che per le serie a termini positivi la convergenza delle serie degli integrali porta la convergenza della serie stessa fuori che in un gruppo di punti di misura nulla.

Ciò non avviene necessariamente per serie di altra specie, ed in particolare nemmeno per quelle le cui somme parziali sono positive.

Così per es., se si indica con $s_n(x)$ la funzione uguale ad 1 nei tratti

$$\left(\frac{2r}{2^n}, \frac{2r+1}{2^n}\right) \qquad (r = 0, 1, \ldots 2^{n-1} - 1)$$

e nulla nei rimanenti punti del segmento (0, 1), si vede che la serie

$$\int_0^x s_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x [s_{n+1}(x) - s_n(x)]\,dx$$

converge verso $\frac{x}{2}$, mentre per ogni n e per ogni p

$$|s_n(x) - s_{n+p}(x)| = 1$$

per un gruppo di punti di misura $\frac{1}{2}$ e quindi la serie

$$s_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [s_{n+1}(x) - s_n(x)]$$

non può convergere che al massimo in un gruppo di punti di misura $\frac{1}{2}$.

13. Facciamo ora un'osservazione:

L'equi-assoluta continuità è un caso particolare della equi-continuità *). Dai teoremi di ARZELÀ ricaviamo subito che, se le somme parziali di una serie convergente sono ugualmente continue, la serie è convergente in ugual grado.

Dunque l'equi-assoluta continuità delle somme parziali di una serie convergente porta alla convergenza in ugual grado della serie.

Cosicchè, perchè una serie sia integrabile completamente per serie è necessaria la convergenza in ugual grado della serie degli integrali.

Ora noi abbiamo visto che per le serie convergenti $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ le cui somme parziali sono ugualmente limitate in un senso in un gruppo G, basta che sussista la relazione

$$\int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_G u_r(x)\,dx,$$

perchè si abbia l'integrabilità completa per serie. Noi abbiamo dunque questo risultato curioso che, per le serie $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ a somme parziali ugualmente limitate in un senso, la condizione

$$\int_G \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_G u_r(x)\,dx$$

---

*) Cfr. C. ARZELÀ, *Sulle serie di funzioni* [Mem. Acc. Bologna, s. V, t. VIII (1899-1900), pp. 3-58, 91-134] e G. VITALI, *Sopra le serie di funzioni analitiche* [Annali di Matematica, s. III, t. X (1904), pp. 65-82].

trascina con sè la convergenza in ugual grado della serie

$$\int \sum_{r=1}^{\infty} \int u_r(x)\,dx$$

in tutto G, cosicchè in particolare per tali serie avviene questo, che, se esse sono integrabili termine a termine quando l'integrazione è *definita*, ossia estesa ad un segmento *fisso*, allora la serie degli integrali è uniformemente convergente in tutto il segmento; di più poi è valida l'integrazione indefinita per serie.

14. Per l'integrabilità per serie nel senso ordinario di una serie convergente

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

si richiedono tre condizioni:

1° la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_a^x u_r(x)\,dx$$

converge verso una funzione assolutamente continua;

2° la funzione

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$$

è integrabile;

3° $$\int_a^x \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_a^x u_r(x)\,dx.$$

Che la 1ª condizione debba essere soddisfatta è evidente pensando al risultato di una mia Nota più volte citata: *l'assoluta continuità è condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia un integrale.*

Dimostrerò che esiste un'ampia classe di serie per cui la 1ª condizione trascina con sè le altre due. Cosicchè *per tali serie l'assoluta continuità della somma della serie degli integrali è condizione necessaria e sufficiente perchè sia lecita l'integrazione per serie nel senso ordinario.*

Poniamo

$$R_n(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} u_r(x).$$

Diremo che un punto x_0 è un punto di *convergenza regolare* per la serie data, quando si può trovare un numero m e un intorno di x_0 tale che sia finito il limite superiore di $|R_n(x)|$ per n che varia da m ad ∞ e per x che varia nell'intorno.

Un punto che non sia di convergenza regolare sarà chiamato punto di *convergenza singolare.*

I punti di convergenza singolare formano evidentemente un gruppo chiuso.

È precisamente quando questo gruppo è di misura nulla che la prima delle condizioni per l'integrabilità per serie nel senso ordinario diventa una condizione sufficiente.

Supponiamo adunque che il gruppo dei punti di convergenza singolare sia di misura nulla e che sia verificata la prima condizione.

Poniamo

$$\Phi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_a^x u_r(x)\,dx.$$

Se (α, β) è un intervallo parziale di (a, b), è certamente

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_r(x)\,dx = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Se (α, β) è un intervallo di punti tutti regolari, estremi compresi, pel teorema di LEBESGUE sull'integrabilità per serie delle serie a somme parziali ugualmente limitate, è

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_r(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

poichè esiste certamente un numero m tale che sia finito il limite superiore di $|R_n(x)|$ per n che varia da m ad ∞ e per x che varia in (α, β) *).

Poichè $\Phi(x)$ è assolutamente continua, prefissato un numero $\sigma > 0$, possiamo trovare un numero $\varepsilon > 0$ tale che il modulo dell'incremento di $\Phi(x)$ in un gruppo di intervalli distinti di ampiezza minore di ε sia minore di μ.

Dividiamo (a, b) in un numero finito di parti di ampiezza così piccole che la somma di quelle che contengono (magari come estremo) qualche punto di convergenza singolare sia minore di ε **).

Indichiamo con $\bar{\delta}$ le parti che contengono punti di convergenza singolare e con $\bar{\bar{\delta}}$ le rimanenti.

Sarà

$$\int_a^b \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{\Sigma\bar{\delta}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx + \int_{\Sigma\bar{\bar{\delta}}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx.$$

Essendo

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Sigma\bar{\bar{\delta}}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \int_{\Sigma\bar{\bar{\delta}}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx,$$

per n abbastanza grande sarà

$$\left| \int_{\Sigma\bar{\bar{\delta}}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \int_{\Sigma\bar{\bar{\delta}}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx \right| < \sigma.$$

Poi, indicando con $\bar{\Delta}\Phi$ l'incremento di Φ in un tratto $\bar{\delta}$, abbiamo

$$\lim_{n=\infty} \int_{\Sigma\bar{\delta}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \sum \bar{\Delta}\Phi,$$

e quindi, per n abbastanza grande,

$$\left| \int_{\Sigma\bar{\delta}} \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \sum \bar{\Delta}\Phi \right| < \sigma.$$

Ma

$$\left|\sum \bar{\Delta}\Phi\right| < \sigma,$$

*) Difatti ogni punto di (α, β), estremi compresi, si può rinchiudere in un intorno per cui sia soddisfatta una tale condizione, e quindi esiste, per un teorema di BOREL-LEBESGUE (v. LEBESGUE, l. c., pag. 104) un numero finito di tali intervalli che racchiudono ogni punto di (α, β). Allora è evidente che, ecc. ecc.

**) Ciò è possibile perchè i punti di convergenza singolare formano per ipotesi un gruppo di misura nulla, che, essendo chiuso, è rinchiudibile.

quindi, per n abbastanza grande,

$$\left|\int_a^b \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx - \int_{\sum\overline{\overline{\delta}}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx\right| < 3\,\sigma,$$

e poichè

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \sum_{r=1}^{n} u_r(x)\,dx = \Phi(b),$$

si ha

$$\left|\Phi(b) - \int_{\sum\overline{\overline{\delta}}} \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx\right| \leqq 3\,\sigma.$$

Ma σ è piccola a piacere e $\sum \overline{\overline{\delta}}$ vicino a $b - a$ quanto si vuole, dunque esiste

$$\int_a^b \sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)\,dx$$

e questo è proprio $\Phi(b)$.

Dunque:

Se il gruppo dei punti di convergenza singolare di una serie convergente data è di misura nulla, l'assoluta continuità della somma della serie degli integrali è condizione necessaria e sufficiente perchè sia lecita l'integrazione per serie nel senso ordinario.

Questo risultato sotto forma meno generale io l'avevo già dato nella mia Nota *Sopra l'integrazione di serie di funzioni di variabile reale* (Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, maggio 1905).

Ora viene naturale la domanda: Quando il gruppo dei punti di convergenza singolare ha misura maggiore di zero, la precedente condizione è ancora sufficiente per l'integrabilità per serie nel senso ordinario?

La risposta è negativa.

Infatti, se si indica con $s_n(x)$ la funzione uguale ad n^2 nei tratti $\left(\frac{n^2 K}{n^3}, \frac{n^2 K + 1}{n^3}\right)$ $[K = 0, 1, 2, \ldots (n - 1)]$ e nulla nei rimanenti punti di $(0, 1)$, la serie

$$s_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [s_{n+1}(x) - s_n(x)]$$

converge dappertutto fuori che in un gruppo di punti di misura nulla *) verso lo zero.

La serie degli integrali dei termini di questa, estesi al tratto $(0, x)$, converge verso x, e quindi verso una funzione assolutamente continua, ma non è lecita l'integrabilità per serie nel senso ordinario.

Genova, 30 novembre 1906.

GIUSEPPE VITALI.

*) Poichè il gruppo dei punti in cui $s_n(x)$ è $\neq 0$ è di misura $\frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.