UN PROBLEMA DE NORMALIZACION DE MEDIDAS COMO BASE PARA UN PROBLEMA DE PRODUCCION E INVENTARIO

POR

S. RÍOS, J. BÉJAR y J. M. GARCÍA

(Instituto de Investigaciones Estadísticas e Ibérica Bedaux)

A partir de 1958 hemos realizado un estudio estadístico-antropométrico de una población masculina para resolver el problema de normalización de tallas y medidas de los trajes de caballero para su confección en serie por los grandes almacenes (*).

Varios trabajos relativos a normalización de medidas se han realizado en Inglaterra, Estados Unidos y Holanda (**) (que sepamos).

Este último, que se refiere concretamente a normalización de medidas de señoras, nos ha sido especialmente útil en algunas partes de nuestro estudio.

La orientación general de nuestro estudio se concreta en los siguientes puntos:

a) Encontrar un conjunto de medidas antropométricas que permita la determinación de un sistema de patrones que se adapte lo mejor posible a la población real de clientes de trajes confeccionados. Este sistema debe ser independiente de la moda, gustos, etc.

b) Reducir al mínimo el número de patrones distintos necesarios para cubrir prácticamente toda la población.

c) Reducción al mínimo los costes por rectificaciones de trajes que no se adaptan perfectamente.

d) Determinación del número de unidades a construir de

(*) Un resumen de los trabajos realizados fué expuesto por S. Ríos el 17 de julio de 1958 en el Coloquio Internacional de Cálculo de probabilidades y sus aplicaciones, de París, y publicado en las Actas de dicho Coloquio con el título: Quelques exemples de Recherche Operationelle. Agradecemos a la Dirección de la Ibérica Bedaux su autorización para la publicación de dicho trabajo, realizado por la Sección de Investigación Operativa de dicha Empresa.

(**) Debido a Sithg-Frendenthal.

los distintos patrones con vistas a reducir a un mínimo los *stocks* de trajes confeccionados que se han de poner a la venta.

Los pasos sucesivos en este estudio han sido:

A) Elección de un conjunto de medidas de longitud (x_i) y de perímetros (y_i) necesarias y suficientes para que un sastre pueda construir un patrón y posteriormente un traje a partir de las mismas. Las medidas elegidas han sido en total seis longitudinales y seis de perímetros.

B) Toma de la muestra de medidas de individuos de la población de clientes de trajes confeccionados.

Para fijar la extensión de la muestra total se comenzó por elegir una muestra piloto de 337 observaciones. Los datos correspondientes han servido de base para fijar como tamaño de la muestra 2.500 individuos. El trabajo de tomar medidas ha sido realizado por equipos especialmente entrenados en grandes almacenes de Madrid, que, por su situación y carácter, absorben una clientela perteneciente a todas las clases sociales y económicas.

C) Se estudiará la correlación y la regresión entre las variables de longitud x_i, así como entre las de perímetro. Esperamos que nuestros resultados confirmen un estudio de los factores de constitución de Burty Banks Ann. of Eugenics 1941.

Por el contrario, las correlaciones del tipo (x_i, y_j) deben ser débiles.

D) Antes de la elaboración posterior de los datos de esta muestra se han considerado tres categorías de errores que se presentan de manera natural: errores administrativos, errores sistemáticos y errores aleatorios.

La eliminación de errores administrativos, tales como el cambio de una cifra por otra en la copia de una ficha, cambio entre las medidas de un mismo individuo, etc., se ha realizado por representación, en seis diagramas bidimensionales, de pares de medidas de fuerte correlación, y haciendo un estudio casuístico de los puntos que quedan fuera de la elipse de concentración que contiene los puntos en una proporción de 0,999.

No se pueden descubrir por este método los pequeños errores administrativos, y se les considera como errores aleatorios.

En lo que concierte a errores sistemáticos, se han eliminado aquellos que son debidos a la imperfección en las cintas de medida, revisándolas cuidadosamente todos los días.

El error debido a la interpolación entre divisiones del metro, se ha evitado dando como regla tomar la lectura correspondiente a la última división visible por defecto, lo que introduce un error sistemático de 0,5 cm., que se tiene en cuenta en los resultados finales.

Los errores sistemáticos debidos a posibles diferencias entre los ocho equipos que han intervenido en la toma de la muestra, se han descubierto tomando submuestras aleatorias de 50 medidas de cada equipo y haciendo un análisis de la varianza. Para 8 de 12 medidas se han descubierto diferencias significativas entre las medias de ciertos pares de equipos, realizando la corrección correspondiente a este error sistemático.

La determinación de la desviación típica de errores aleatorios o errores de medida que resulta cuando se repite una misma medida permite, por medio de fórmulas conocidas, obtener los momentos de las verdaderas distribuciones a partir de las observadas.

Otro problema importante es el relativo a la determinación de la tolerancia de diversas medidas. Por ejemplo, en la manga la tolerancia es la diferencia entre el máximo y el mínimo de manga que un mismo brazo puede llevar sin rectificación. O, de otra forma, es la diferencia entre el brazo más largo y el más corto que pueden llevar una misma manga.

Basándonos en esta segunda interpretación, se ha registrado igualmente en las fichas de toma de datos para las personas que compran un traje, la talla (según el sistema utilizado actualmente) de la persona y las medidas que no necesitaban una rectificación para el cliente.

Este procedimiento nos ha permitido obtener para cada medida y cada talla una distribución de medidas de personas de que no han tenido necesidad de rectificación en esta medida, lo que constituye una base para la determinación de la tolerancia de cada medida.

Las tolerancias determinadas por este método experimental son contrastadas con aquellas que se consideran aceptables por varios expertos para llegar a un resultado definitivo.

La idea para construir un sistema bidimensional de patrones consiste en tomar dos medidas básicas (por ejemplo x_1, y_1) que presentan una correlación débil entre ellas y tales que las restantes x estén fuertemente correlacionadas con x_1, y las restantes y fuertemente correlacionadas con y_1.

Una vez escogidas (x_1 y_1), cubriremos la población de medidas (x_1 y_1) con un retículo de rectángulos cuyas dimensiones serán iguales a las tolerancias respectivas, y cuyos centros (x_1° y_1°) representarán los valores particulares de las dimensiones (x_1° y_1°) con las cuales se han construído los modelos. Las medidas restantes del modelo serán aquellas que correspondan a las fundamentales por las relaciones de regresión

$$z = a + bx_1 + cy_1 \ (z = x_2, x_3, \dots, x_6, y_2, \dots, y_6).$$

De esta manera, cuando un cliente compra un traje, se puede lograr que las dimensiones x_1 y_1 sean las que le convienen, pero puede suceder que las demás medidas no se adapten, y entonces será necesario realizar una reforma que implica un gasto que varía según sean las dimensiones.

El problema es, por consiguiente, calcular los gastos para las diversas posibles combinaciones de medidas básicas $x_1\ y_1$, y escoger la combinación que represente un gasto mínimo.

La proporción de reformas correspondiente a la dimensión z para el sector de la población cuyas medidas correspondan a un $(x_1\ y_1)$ del rectángulo de centro $(x_1^\circ\ y_1^\circ)$, será:

$$1 - Pr \left[c + a\, x_1^\circ + b\, y_1^\circ - \frac{T'_z}{2} < z < c + a\, x_1^\circ + b\, y_1^\circ + \frac{T_z}{2} \mid x_1\, y_1 \right]$$

Como la distribución $f\ (z/x_1\ y_1)$ es conocida por medio de una muestra, no se puede calcular exactamente esta probabilidad más que con un coeficiente de confianza. Para ello se utiliza la noción de intervalo de tolerancia introducido por Shewhart-Wilks. Por medio de estos porcentajes se puede calcular la proporción de reformas correspondientes a toda la población cuyas medidas $(x_1\ y_1)$ varían dentro del rectángulo de centro $(x_0,\ y_0)$ y, por suma ponderada, la que corresponde a todos los rectángulos del sistema.

Este porcentaje, multiplicado por el gasto unitario correspondiente a una rectificación z, nos dará el gasto esperado de las reformas de la dimensión z en este sistema. Sumando todos los correspondientes a

$$z = (x_2, x_3, x_4, x_5\ , x_6, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

se obtiene el gasto de reformas del sistema.

El gasto para reformas de medidas no básicas será tanto más reducido cuanto más elevado sea el número de modelos diferentes de un sistema de medidas básicas $(x_i\ y_j)$, así el gasto de manufacturas, *stocks*, etc., será igualmente más elevado. Para hacer la comparación de gastos, supondremos un mismo número fijo de modelos $(x_i\ y_j)$ para cada uno de los sistemas posibles, y, en consecuencia, los gastos de los citados en segundo lugar serán los mismos y haremos la comparación de gastos de reforma según el método indicado.

Finalmente, una vez escogido un sistema de medidas básicas, el problema consiste en cubrir la población con un sistema de rectángulos de dimensiones no superiores a las tolerancias correspondientes, buscando estas dimensiones de la manera más conveniente para que la suma de gastos relativos a las existencias, manufactura y aquellos relativos a las reformas esperadas de otras dimensiones no básicas, sea mínimo.

Los cálculos se simplifican cuando, como hemos verificado en nuestro caso, se pueden considerar como lineales y homocedásticas las regresiones entre las medidas, y normales las distribuciones residuales. En principio se deben comparar $6 \times 6 = 36$ sistemas bidimensionales posibles, y los cálculos resultan a primera vista muy laboriosos.

La consideración intuitiva de los gastos unitarios de reforma de las tolerancias y distribuciones de medida, nos permiten eliminar ciertas combinaciones. En realidad, teniendo en cuenta que de hecho el traje comprende dos piezas que tienen dos medidas comunes, y_4, y_5, y que en el pantalón tenemos que calcular x_5, x_6, y_6, y en la americana las que quedan, es sin duda más práctico construir un doble sistema de dos dimensiones. Conviene por razones evidentes que una dimensión sea común a los dos sistemas.

Esta podría ser y_4 o y_5, y habiendo escogido una de ellas para la americana, se debería escoger entre las otras cuatro de longitud y para el pantalón entre las otras dos.

SOMMAIRE

L'orientation générale de notre étude se résume dans les point suivantes:

a - Trouver un ensemble de mesures anthropométriques qui permette la détermination d'un système de patrons qui s'adapte le mieux possible à la population réelle des clients de vêtements confectionnés. Ce système doit être indépendant de la mode, des goûts, etc.

b - Réduire au minimum le nombre de patrons différents nécessaires pour couvrir pratiquement toute la population.

c - Réduction au minimum de coûts pour rectifications de costumes qui ne s'adaptent pas parfaitement.

d - Détermination du chiffre d'unités à construire des divers patrons en vue de réduire au minimum les stocks de vêtements confectionnés qui doivent être mis en vente.

La méthode à suivre dans cette étude est la suivante:

a - Election d'un ensemble de mesures de longueur (x_i) et de périmètre (y_i) nécessaires et suffisantes pour qu'un tailleur puisse construire un patron et postérieurement un costume à partir de ces mesures. Les mesures choisies ont été, au total, 6 longitudinales et 6 perimètres.

b - Prélèvement de l'échantillon de mesures des individus de la population d'acheteurs de costumes confecionnés. Pour fixer l'étendue de l'échantillon total on commença par prélever un échantillon pilote de 337 observations. Les calculs correspondants ont servi de base pour fixer

comme taille de l'échantillon 2 500 individus. Le travail de prendre les mesures a été realisé avec des équipes spécialement entrainées, dans les grands magasins de Madrid qui, par leur situation et leur caractère, absorbent une clientèle appartenant à toute l'échelle économique et sociale.

c - On étudiera la corrélation et la régression entre les variables x_i de longueur, ainsi qu'entre celles des périmètres. Nous espérons que cette étude confirme une étude des facteurs de constitution de Burt et Banks, Ann. of Eugenics 1941. Au contraire, les corrélation du type (x_i, y_j) doivent être faibles.

d - Avant l'élaboration postérieure des données de cet échantillon, on a considéré trois catégories d'erreurs qui se présentent de façon naturelle: erreurs administratives, erreurs systématiques et erreurs aléatoires.
L'élimination d'erreurs administratives telles que les changements d'un chiffre par un autre dans la copie d'une fiche, changement entre elles de deux mesures d'un même individu, etc. ont été réalisés par représentation, dans 6 diagrammes bidimensionnels, de paires de mesures à forte corrélation et, en faisant une étude casuistique de ces points qui restent en dehors de l'élipse de concentration qui contient les points dans une proportion de 0.999.

On ne peut pas découvrir par cette méthode les petites erreurs administratives, et on les considère comme des erreurs aléatoires.

En ce qui concerne les erreurs systématiques, on a éliminé celles qui sont dues au dérèglement des rubans de mesure en les révisant soigneusement tous les jours. L'erreur due à l'interpolation entre divisions du «mètre» a été évitée en donnant comme règle le fait de prendre la lecture correspondante à la dernière division visible par défaut, ce qui introduit une erreur systématique de 0,5 cm. On en tient compte dans les résultats finaux.

Les erreurs systématiques dues à de possibles différences entre les 8 équipes qui ont intervenu dans l'échantillon, ont été découverts en prenant des sous-échantillons aléatoires de 50 mesures de chaque équipe et en faisant une analyse de variance. Pour 8 des 12 mesures, on a découvert des différences significatives entre les moyennes de certaines paires d'équipes, réalisant la corréction correspondante à cette erreur systématique.

La détermination de l'écart-type des erreurs aléatoires ou erreurs de mesure, qui résultent lorsque l'on répète une même mesure permettent, au moyen de formules bien connues, d'obtenir les moments des véritables distributions à partir de celles observées.

Un autre problème important est celui qui a trait à la détermination des tolérances des diverses mesures. Par exemple, dans la manche, la *tolérance* c'est la différence entre le maximum et le minimum de manche qu'un même bras peut porter sans rectification. Ou, d'une autre façon, c'est la différence de longitudes entre le bras le plus court et plus long que peut porter une même manche.

En nous basant sur cette deuxième interprétation on a enregistré également, sur les fiches de relevé de données, pour les personnes qui achetaient un costume, la taille (d'après le système utilisé actuellement) de la personne et les mesures qui exigeaient une rectification pour le client. Ce procédé nous a permis d'obtenir pour chaque mesure et chaque taille une distribution des mesures de personnes qui n'ont pas besoin de rectification dans cette mesure, ce qui constitue une base pour la détermination de la tolérance de chaque mesure.

Les tolérances déterminées par cette méthode expérimentale sont actuellement contrastées avec celles qui sont considérées comme acceptables par plusieurs experts pour arriver à un résultat définitif.

L'idée pour construire un système bidimensionnel de patrons consiste à prendre deux mesures basiques (par exemple x_1, y_1) qui présentent une corrélation faible entre eux, et tels que les restants x soient fortement corrélationnés avec x_1 et les restants y fortement corrélationnés avec y_1. Ainsi choisies (x_1, y_1), nous couvririons la population de mesures (x_1, y_1) d'un réticule de rectangles dont les dimensions seraient égales aux tolérances respectives et dont les centres (x_1°, y_1°) représenteraient les valeurs particulières des dimensions (x_1°, y_1°) avec lesquels on a construit les modèles. Les mesures restantes du modèle seraient celles qui correspondent aux fondamentales par les relations de régression

$$z = a + bx_1 + cy_1 \ (z = x_2, x_3, \dots x_6, y_2, \dots y_6).$$

De cette façon, lorsqu'un client achète un vêtement, on peut réussir que les dimensions x_1, y_1 soient celles qui lui conviennent, mais il peut arriver que les autres mesures ne s'adaptent pas, et alors il sera nécessaire de réaliser une réforme qui implique un coût qui varie selon les dimensions.

Le problème est donc de calculer les coûts pour les diverses combinaisons possibles de mesures basiques x_1, y_1, et de choisir la combinaison qui représente un coût minimum.

On calcule la proportion de réformes correspondant à la dimension z pour le secteur de la population dont les mesures correspondent à un (x_1, y_1) du rectangle de centre (x_1°, y_1°). La proportion de réformes sera:

$$1 - \Pr\left[c + ax_1^\circ + by_1^\circ - \frac{T_z}{2} < z < c + ax_1^\circ + by_1^\circ + \frac{T_z}{2} \mid x_1, y_1 \right].$$

Comme la distribution $f\ (z/x_1, y_1)$ est connue au moyen d'un échantillon on ne peut pas calculer exactement ces probabilités, mais avec un coefficient de confiance. Pour cela on utilise la notion d'intervalle de tolérance introduite par Shewhart.

Au moyen de ces proportions on peut calculer la proportion de réformes correspondantes à toute la population dont les mesures (x_1, y_1) varient dans le rectangle de centre (x_0, y_0) et, par somme pondérée, celle correspondant à tous les rectangles du système.

Ce pourcentage multiplié par le coût unitaire correspondant à une rectification de z, nous donnerait le coût attendu de réformes de la dimension z dans ce système. En additionnant tous les correspondants a

$$z = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

on obtient le coût de réformes du système.
Le coût pour réformes des mesures non basiques sera d'autant plus réduit que le chifre des modèles différents d'un système de mesures basiques (x_i, y_j) sera plus élevé, ainsi que le coût de manufacture, *stocks*, etcétera, sera également plus élevé. Pour faire la comparaison des coûts, nous supposerons un même numéro fixe de modèles (x_i, y_j) pour chacun des systèmes possibles, et, en conséquence, les coûts de la deuxième catégorie seront les mêmes et nous ferons la comparaison des coûts de réforme d'après la méthode indiquée.

Finalement, une fois choisi un système de mesures basiques (x_1, y_1), le problème consiste à couvrir la population d'un système de rectangles à dimensions non supérieures aux tolérances correspondantes, en cherchant ces dimensions de la façon la plus convenable pour que la somme des coûts relatifs aux stocks, manufacture, et ceux relatifs aux réformes attendues des autres dimensions non basiques, soit minimum.

Les calculs se simplifient quand, comme nous l'avons vérifié partiellement, on peut considérer comme linéaires et homoscédastiques les régressions entre les mesures, et normales les distributions des résiduels. En principe on doit comparer $6 \times 6 = 36$ systèmes bidimensionnels possibles et les calculs sont assez longs à faire.

La considération intuitive des coûts unitaires de réforme des tolérances et des distributions des mesures, nous a permis d'éliminer certaines combinaisons. En realité, en tenant compte du fait que le costume comprend deux pièces qui ont deux mesures communes y_4, y_5, et que dans le pantalon nous trouvons en plus les x_5, x_6, y_6, et dans la veste celles qui restent, il est sans doute plus pratique de construire un double système à deux dimensions.
Il convient, pour des raisons évidentes, qu'une dimension soit commune aux deux systèmes. Cela pourrait être y_4 ou y_5 et, ayant choisi une d'elles, pour la veste on devrait choisir entre les autres quatre de longitude, et pour le pantalon entre les autres deux de longitude.