SUI POSTULATI FONDAMENTALI

DELLA

GEOMETRIA PROJETTIVA.

Corrispondenza.

Adunanza dell'11 novembre 1894.

I.

(Lettera del Dr. **G. Fano** al Dr. **F. Enriques**).

. . . .

La sua pregevolissima Nota « *Sui fondamenti della Geometria Projettiva* » (Rend. Ist. Lomb., s. II, vol. XXVII) mi suggerisce alcune osservazioni, anche in relazione al mio lavoro sullo stesso argomento escito due anni or sono (Giorn. di Battaglini, vol. XXX).

Dopo quei primi postulati sulle forme fondamentali di prima e seconda specie, postulati che si riducono in sostanza a *tre* distinti e necessari (*), e che bastano a stabilire, com'Ella osserva, i teoremi sulle *configurazioni,* due vie mi si erano presentate per procedere innanzi, e costruire una Geometria che fosse applicabile allo

(*) Vale a dire: *Due punti determinano* UNA *retta che li contiene; ogni piano contiene tutta la retta determinata da due suoi punti qualunque; due rette in un piano hanno sempre* UN *punto a comune.*

spazio quale i sensi ce lo presentano. La prima delle due (cfr. n[i] 4-13), essendo completamente nuova, fu da me più ampiamente sviluppata, mentre invece assai meno mi sono fermato sulla seconda (n° 14), che già prima era stata seguita dal sig. Amodeo (Atti R. Accademia di Torino, vol. XXVI)—per quanto nella pregevole Nota di lui qualche punto restasse ancora da completare—. A questa seconda via Lei pure si è attenuto (*). Infatti i suoi post. V e VI (tolte le due ultime condizioni del V) corrispondono *press'a poco* ai miei V*a* e VI*a* del n° 14. Ciò che io ho chiamatò *ordine* non è precisamente ciò che Lei ora indica con questo stesso nome, ma qualcosa che si avvicinerebbe piuttosto alle Sue *disposizioni circolari,* o meglio al Suo *senso di disposizione circolare,* e perciò appunto nel *carattere projettivo degli ordini naturali* potevano essere per me ed erano infatti ritenute implicite quelle *permutazioni circolari,* sulle quali Lei è stato così dettagliatamente preciso (**).

A Lei è però riescito più avanti di sopprimere il mio postulato VII*a*: « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». E la ragione di questo mi sembra stare nell'aver Lei ammesso fin da principio col post. IV (e anche implicitamente, come Lei pure osserva, nelle due ultime condizioni del post. V) *che i punti della retta siano in numero infinito.* In ogni modo però vedo ora con piacere risolta la questione, che era per me allora rimasta insoluta (l. c. pag. 22), se cioè, aggiungendo alle condizioni precedenti questa degli infiniti punti sulla retta, si potesse sopprimere quel mio ultimo postulato. E vedo dunque che (in questo caso) si può effettivamente sopprimerlo.

Ma v'ha di più. Non è nemmeno necessario di ammettere che i punti della retta siano in numero infinito; basta ammettere che

(*) È infatti la più semplice e la più naturale, per quanto la prima, quella delle *serie armoniche rientranti*, possa forse riescire più interessante. Ma di queste *serie armoniche* non si potrebbe certo parlare p. es. in un corso elementare!

(**) *L'ordine* era per me una specie di *anello* o *catena rientrante*, secondo la quale immaginavo disposti i punti di una retta, senza tuttavia accennare ad un particolare *primo elemento*. E il restare inalterato di un ordine così concepito, senza, ben inteso, che ogni punto rimanga fisso, conduce di necessità alle permutazioni circolari.

siano in numero superiore a *tre*. Lei vedrà infatti senza difficoltà che sopra una retta contenente un numero di punti finito ma non inferiore a *quattro* il Suo post. VI non potrebbe in alcun modo sussistere. Come mai si potrebbero allora portare due o, peggio ancora, tre punti dati in altri assegnati ad arbitrio, e ciò con una semplice *permutazione circolare*, più, forse, un'inversione? (*)—Nel solo caso di *tre* punti, le permutazioni cicliche colle loro inverse — *sei* in tutto — soddisfanno precisamente alle condizioni richieste da quel postulato.

Ammesso pertanto il Suo post. VI, e, per di più, l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta, rimane come solo caso possibile quello degli infiniti punti, e si può applicare di nuovo tutto il Suo ragionamento. Certo che, volendo togliere *ab initio* l'ipotesi degli infiniti punti sulla retta, bisogna anche togliere le condizioni 4^a e 5^a del Suo post. V, nelle quali detta ipotesi è implicitamente contenuta. Ma di queste due condizioni (**) si fa uso in un solo punto del Suo lavoro, nel quale anche (come Lei stesso ebbe a intravedere) un'osservazione semplicissima basta per farne a meno (***).

(*) Le Sue *permutazioni circolari* si riducono in questo caso a quelle stesse permutazioni di un numero finito di elementi—qui *punti*—che di solito si indicano con questo nome. Le mie configurazioni—e prima fra queste il *piano di* 13 *punti*, di cui al n° 8—dànno facili esempi di projettività che non conserverebbero gli ordini naturali secondo la data definizione.

(**) E più specialmente della 4^a; la 5^a è quasi un complemento della 4^a, ma complemento necessario per poter poi concludere che quest'ultima rimane verificata per tutti i diversi ordini *derivati* (con permutazioni circolari e inversioni).

(***) Alludo alla dimostrazione del teorema, che due coppie armoniche devono sempre separarsi, e tanto meno quindi l'una di esse può esser costituita da elementi coincidenti, a meno che questi non coincidano tutti due in uno dei limiti comuni. — Basta infatti dimostrare che questa proprietà sussiste per *un* gruppo armonico, perchè da quest'unico caso essa seguirà per ogni altro. E appunto per questo è anche permesso di scegliere i punti A, B, C (cfr. p. 11 della Sua Nota) in modo particolare; e conviene precisamente scegliere A e B in modo che siano separati da C e da un quarto punto della retta u, supposto esistente. Questo quarto punto si proietterà allora da F' sulla retta a in un punto che potremo assumere come H. E accertata così l'esistenza di questo punto H che con F separa la coppia AE, si può ripetere parola per parola tutto il Suo ragionamento, basato esclusivamente sopra successive proiezioni.

Mentre dunque il Suo lavoro completa effettivamente il mio (in certi punti), non sarà forse male l'osservare ancora che i postulati in esso veramente necessari si possono ridurre ai primi tre, alle prime tre condizioni del V, e al VI; più la condizione che la retta contenga almeno quattro punti. — D'altra parte anche i primi tre postulati del mio lavoro coincidono completamente con quelli del Suo; il IV dice che su ogni retta stanno più di due punti; il V*a* e il VI*a* corrispondono ai Suoi V e VI (nei quali tuttavia gli stessi concetti sono forse meglio precisati), e infine il VII*a* dice che « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». Quest'ultimo postulato porta con sè, naturalmente, l'esistenza di un quarto punto sulla retta, ma dice anche di più; questo *di più* è ora provato essere già una conseguenza delle cose precedenti.... (*) (**)

Colognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

G. Fano.

II.

(Lettera del Dr. **F. Enriques** al Dr. **G. Fano**).

. . . .

Leggo con piacere nella sua lettera le acute osservazioni suggeritele dalla mia Nota « *Sui fondamenti della Geometria Projettiva* ». In quella Nota io (ispirandomi al concetto intuitivo sperimentale dello spazio) ho fondato la Geometria projettiva sopra 6 postulati (***)

(*) E il piano di 7 punti, al quale a p. 21 del mio lav. cit. io ero ricorso come *esempio* per mostrare la necessità del post. VII*a*, è anche il solo caso *logicamente possibile* di un gruppo armonico $ABCC$ (dove A, B, C sono distinti).

(**) Non ho bisogno di aggiungere che i postulati di cui qui ho discorso conducono soltanto a una *Geometria projettiva lineare*, e a uno spazio (di punti razionali) che ancora non corrisponde del tutto a ciò che i sensi ci dicono (o a quello che noi crediamo ci dicano). L'ultimo passo che rimane da fare è quello appunto della *continuità* (§§ 9 e seg. del Suo lav.).

(***) I postulati ivi menzionati sono 7, ma il IV che afferma l'esistenza di infiniti punti su una retta è incluso nel V (come ivi pure è osservato) ed ammesso provvisoriamente innanzi per semplicità.

(composti), il 6° dei quali (riguardante la continuità) non comparisce in quella che Ella chiama la Geometria dei punti razionali.

Ora Ella opportunamente osserva che l'esistenza di infiniti punti sulla retta segue dal mio post. VI (concernente l'esistenza sulla retta d'una disposizione circolare *naturale* avente carattere proiettivo) *ammessa l'esistenza di almeno 4 punti sopra una retta,* e quindi introdotta questa ipotesi si possono sopprimere le due ultime condizioni del mio post. V (*) (le quali invero contengono anche qualcosa di più) e stabilire ugualmente che il quarto armonico D dopo *tre* punti A, B, C (sopra una retta) è distinto da essi ed insieme a C separa A, B (**).

Ciò basta, secondo Lei, a svolgere tutta la Geometria proiettiva dei punti razionali, e sta bene: ma nel seguito (cioè nella Geometria proiettiva dove si considera la retta continua) quelle due condizioni (fondamento del concetto di segmento) debbono essere invocate. Ora (ed è su questo che mi permetto di richiamare la sua attenzione perchè in un certo senso completa la sua osservazione), dopo avere dimostrato quel teorema sulla separazione delle coppie armoniche si può anche *dimostrare* che per gli ordini naturali dei punti d'una retta vengono soddisfatte le due ultime condizioni del mio post. V.

Invero si consideri sopra una retta un ordine naturale (ABC); l'esistenza d'un punto intermedio a B, C nel detto ordine, vien data dal fatto che il coniugato armonico di A rispetto a B, C, insieme ad A separa B, C. Parimente si deduce che non può esservi un punto (ad es. C) *ultimo* nel detto ordine; basta considerare il quarto armonico dopo $A\,B\,C$ che segue C in $(A\,B\,C)$.

Con questo siamo d'accordo nel ritenere stabilito che tutta la Geometria projettiva può fondarsi sui primi 3 postulati della mia Nota, sulla ipotesi che *sopra una retta vi sieno più di 3 punti,* e sui

(*) Queste condizioni enunciate per gli ordini naturali d'una retta dicono:
In un ordine naturale sopra una (certa) retta, tra due punti ve n'è sempre uno (e quindi infiniti) intermedio.

Questo ordine naturale non possiede un *ultimo* elemento.

(**) Con una lieve modificazione del ragionamento a pag. 11 della mia Nota.

post. V, VI, VII, della detta Nota, omesse le due ultime condizioni del V le quali *in base alla detta ipotesi* ed al post. VI *possono dimostrarsi*.

Questa è certo, dal punto di vista scientifico, una semplificazione, la quale per altro non sarebbe forse opportuna ove (come nella mia Nota) si volesse tener conto anche delle esigenze didattiche, e seguire la via indicata dall'intuizione sperimentale....

Castiglione dei Pepoli (Bologna), settembre 1894.

F. ENRIQUES.

III.

(Lettera del Dr. **G. Fano** al Dr. **F. Enriques**).

. . . .

A complemento della mia lettera dello scorso Settembre potrei aggiungere un'altra osservazione, che al momento non mi si era presentata, e che ora si collega anzi con quanto è detto nella Sua Risposta.

Se fra due punti A e B di una retta a non esistesse che un numero finito n ($\geqq 0$) di punti *intermedi* (riferita quest'espressione a uno dei due sensi di disposizione *naturale*), è chiaro che una projettività qualsiasi su a, nella quale ad A e B corrispondessero due punti A' e B' con un numero qualunque diverso da n di punti intermedi (nell'uno e nell'altro senso di disposizione naturale), sarebbe in contraddizione col post. VI della Sua Nota. E siccome una projettività così fatta si può sempre costruire (se la retta contiene più di tre punti) così possiamo anche concludere subito che (in questa stessa ipotesi) *non solo l'intiera retta deve contenere infiniti punti, ma infiniti devono pure esservene in ogni segmento* (definito il segmento nella disposizione circolare naturale, che ha carattere projettivo).

Anche le condizioni 4ª e 5ª del Suo post. V, *in quanto si riferiscono agli ordini naturali caratterizzati dal post. VI*, seguono dunque *immediatamente* da questo stesso post. (ammessa l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta); e siccome è in questo caso soltanto che la prima di esse occorre più avanti, per dimostrare la separazione delle coppie armoniche, mi sembra così rimediato anche all'inconveniente didattico, che giustamente Ella aveva scorto nella semplificazione propostale....

Colognola ai Colli (Verona), 3 ottobre 1894.

G. FANO.