L'ALGEBRE DE BOOLE ET SES APPLICATIONS EN RECHERCHE OPERATIONNELLE (*)

par R. FORTET (Paris)

1.° L'ALGEBRE DE BOOLE

L'Algèbre de Boole ne comporte que deux éléments (nombre booléens) qu'on conviendra d'appeler 0 et 1; l'addition (booléenne), représentée par le symbole $\dot{+}$ (pour la distinguer de l'addition ordinaire), est définie par la table d'addition suivante:

$$0 \dot{+} 0 = 0 \qquad 0 \dot{+} 1 = 1 \dot{+} 0 = 1 \qquad 1 \dot{+} 1 = 1 \qquad [1.1]$$

le produit $a . b$ ou ab de deux nombres booléens a et b est défini par la table de multiplication suivante:

$$0 . 0 = 0 . 1 = 1 . 0 = 0 \qquad 1 . 1 = 1 \qquad [1.2]$$

Une variable booléenne x est une variable qui vaut soit 0, soit 1. Il est commode d'introduire la définition et la notation suivante: la négation x' d'une variable booléenne x est la variable booléenne qui vaut 1 si $x = 0$ et 0 si $x = 1$.

Les nombres booléens 0 et 1 peuvent éventuellement être interprétés comme le 0 et le 1 de l'Algèbre ordinaire, et á ce titre soumis aux opérations de l'Algèbre ordinaire; par exemple, on peut multiplier (au sens ordinaire) la variable booléenne x par 7, ce qui donne le produit ordinaire $7x$; ou encore on peut additionner au sens ordinaire deux variables booléennes x et y, ce qui donne la somme $x + y$, a ne pas confondre avec $x \dot{+} y$.

Les interpretations de l'Algèbre de Boole en Théorie des ensembles, en Logique, en Théorie des circuits de commutation, sont bien connues; en particulier l'usage de l'Algèbre de Boole pour l'analyse et la synthése des circuits de commutation a été très développée depuis quinze ans dans de nombreux articles et ouvrages dont je cite seulement: Gavrilov (1), R. Higonnet et R. Grea (1), S. E. Caldwell (1). Inversement, machines á calculer

---

* Conferencia pronunciada por el autor en el Curso de I. O. celebrado en el Instituto de Investigaciones Estadísticas el pasado mes de marzo.

et circuits de commutation donnet de façon inmédiate des procédés de résolution logique ou analogique des problèmes d'Algèbre de Boole.

Etant donnés n variables booléennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il y a 2^n systémes distincts de valeurs pour les n x_j, formant un ensemble $\mathcal{V}_{(n)}$.

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble quelconque d'un nombre fini p d'éléments quelconques x, soit $x = \rho_{(v)}$ une application de $\mathcal{V}_{(n)}$ sur $\mathcal{D}$; une telle application existe a la seule condition de prendre n assez grand pour que $2^n = p$ et alors elle ramene tout problème concernant $\mathcal{D}$ à un problème d'Algèbre de Boole; si on ajoute que cette Algèbre est parfaitement adaptée a exprimer les alternatives, on comprend qu'elle, permet d'exprimer, de façon nécessaire et suffisante, toute une vaste categorie de problèmes.

Dans P. Camion (1), R. Fortet (1), (2), K. Maghout (1), (2), sont signalés de nombreux exemples de tels problèmes: problème des quatre couleurs; problème des blocs, problème de la théorie des graphes: recherche des circuits élémentaires et hamiltoniens, nombre de stabilité et nombre chromatique d'une graphe, connexité d'une graphe, etc. Encore que la théorie des graphes soit d'une grande utilité en Recherche Opérationnelle, particulierement dans les questions d'ordonnancement et d'affectation, je citerai ici des exemples qui sont plus purement de Recherche Opérationnelle.

Mais, auparavant, j'introduirai les notions suivantes:

Fonctions booléennes: On appelle fonction booléenne de n variables booléennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une fonction $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, c'est-à-dire qui est ellemême un nombre booléen, une telle fonction peut toujours s'exprimer algébriquement, a l'aide seulement des signes d'addition et de multiplication booléennes portant sur les x_j ou sur leurs négatives x'_j.

Une équation booléenne est une équation du type (ou se ramenant au type):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad [1.3]$$

Resolution d'une condition

Soient n variables booléennes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ et le $\mathcal{V}_{(n)}$, à éléments correspondant. Soit C une condition quelconque imposée aux x_j; parmi les 2^n éléments de $\mathcal{V}_{(n)}$, p seulement ($p < 2^n$) satisfant a C; si q est un entier tel que $2^q \geq p$ et si $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont q variables booléennes indépendantes, il existe par application d'une remarque faite plus haut, n fonctions booléennes g_j $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ telles que les x_j fournis par les formules:

$$x_j = g_j\,(y_1, \ldots, y_q) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad [1.4]$$

parcourent l'ensemble des p éléments de $\mathcal{U}_{(n)}$ qui satisfant C, lorsqu'on fait varier les y_k de toutes les façons possibles; autrement dit, [1 . 4] donne le solution la plus génerale de C; si on a obtenu les formules [1 . 4] on peut dire qu'on a résolu la condition C (noter que p n'est pas en général connu inmédiatement, et que sa recherche est une des parties du problème).

Resolution d'une equation booléenne

Dans le cas d'une condition C s'exprimant par une équation booléenne de la forme [1 . 3] la résolution peut s'opérer systématiquement; à la main ou sur un calculateur électronique. de la façon suivante:
en posant:

$$A = f\,(1, x_2, \ldots, x_n), \qquad B = f\,(0, x_2, \ldots, x_n) \qquad [1 . 3]$$

équivant à:

$$Ax_1 \dot{+} Bx_1 = 0 \qquad [1 . 5]$$

qui équivant au couple:

$$Ax_1 = 0 \qquad [1 . 6]$$

$$Bx'_1 = 0 \qquad [1 . 7]$$

La solution générale de [1 . 6] est évidemment:

$$x_1 = A'\,y_1 \qquad [1 . 8]$$

où y_1 est une variable booléenne indépendante (au moins pour le moment) que nous introduisons. De [1 . 8] on tire:

$$x'_1 = A \dot{+} y'_1$$

de sorte que [1 . 7] s'ecrit:

$$Bx'_1 = AB \dot{+} y'_1B = 0$$

qui équivant au couple:

$$y'_1\,B = 0 \qquad [1 . 9]$$

$$A\,B = 0 \qquad [1 . 10]$$

[1 . 10] est une équation booléenne du même type que [1 . 3], mais avec une inconnue de moins, si on suppose sa résolution obtenue [1 . 9], se résout par:

$$y'_1 = B'\,y_2$$

y_2 nouvelle variable indépendants.

Par récurrence, on arrivera à une équation booléenne, à une seule inconnue, qui se résoudra d'elle-même. On sait donc résoudre les équations booléennes, et plus généralement les conditions C qui se ramenent plus ou moins directemente à une équation booléenne, comme par exemple $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

2.° EXEMPLE D'UN PROBLEME D'AFFECTATION

Pour les problèmes d'affectation, les méthodes booléennes sont quelquefois les seules rigoureuses et complètes. Par exemple:

Soient s séries (de pièces) reparées par l'indice ($i = 1, 2 \ldots, s$) et m machines reparées par l'indice j ($j = 1, 2, \ldots, m$) et réparties en s groupes E_i non nécessairement disjoints.

L'axe des temps est rapporté à une origine 0 fixée et à une unité de temps fixée; j'appelle «époque» tout instant entier ≥ 0, tel que 0, 1, 2, ..., la serie i doit être affectés à une machine quelconque de E_i mais à une seule, elle occupera cette machine pendants une durée entière Δ_i donnée, non fractionnable; son affectation doit commencer à une époque t_i comprise entre deux époques données a_i et b_i:

$$a_i \leq t_i \leq b_i$$

Soit x_i^{α} la variable booléenne qui vaut 1 si $t_i - a_i = \alpha$ et 0 dans le cas contraire; soit y_i^j la variable booléenne qui vaut 1 si la série i est affectée à la machine j, 0 dans le cas contraire; on doit avoir:

$$\sum_{\alpha} x_i^{\alpha} = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, \beta) \qquad [2.1]$$

$$\sum_{j} y_i^j = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, \beta) \qquad [2.2]$$

soit d'autre part T_{ij}^n la variable booléenne qui vaut 1 si la série i occupe la machine j entre les époques $(n - 1)$ et n; et 0 dans le cas contraire; evidemment:

$$T_{ij}^n = (x_i^{\alpha'} + x_i^{\alpha''} + \ldots)\, y_i^j \qquad [2.3]$$

où α', α'' sont des valeurs déterminées de α; on doit avoir pour tout n et pour tout j:

$$\sum_{i} T_{ij}^n \leq 1 \qquad [2.4]$$

et les conditions [2.1], [2.2], [2.4], sont necessaires et suffisantes; elle ne sont pas exprimées par des équations booléennes, mais s'y ramènent facilement et peuvent alors être résolues.

3.° FONCTIONS ALGEBRIQUES ENTIERES

Une fonction f ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) de n variables booléennes x_j est une fonctions algébrique entière, si elle peut s'exprimer comme un polynôme au sens de l'Algèbre ordinaire par rapport aux x_j et aux x'_j. J'ai montré dans R. Fortet (1) que:

Théoréme: Une fonction algébrique entière f, ($x_1, \ldots, x_n$) peut toujours être transformée en une fonctionnelle linéaire (au sens de l'Algèbre ordinaire) à condition d'introduire des variables booléennes supplémentaires convenables et des conditions au contraintes linéaires et à coefficients entiers, portant sur ces variables supplémentaires et sur les variables initiales.

Programmes booléens algébriques

Soient n variables booléennes $x_1 \ldots, x_n$ eventuellement independantes, mais en général soumises à des restrictions dont je désigne l'ensemble sous le nom de condition $\mathcal{R}$; *soit* f ($x_1, \ldots, x_n$) *une fonction algébrique entière des* x_j; appelons *programme booléen algébrique* tout problème du type suivant.

Parmi les éléments de $\mathcal{V}_{(n)}$ qui satisfont à $\mathcal{R}$; trouver celui (ou ceux) qui maxime f.

L'expérience semble montrer que des programmes booléens se présentent très fréquemment, et pour le moment, ils semblent généralement difficiles à résoudre.

Si l'on sait résoudre la condition $\mathcal{R}$ et en la supposant résolue, ce qui revient à considérer les cas aù les n x_j sont indépendantes, une méthode peut être la suivante: à l'aide du théoremme précédent, on ramène le problème à un programme linéaire: il s'agira d'un programme linéaire en nombres entiers, puisque les inconnues booléennes n'ont comme valeurs possibles que les entiers 0 et 1; on pourra lui appliquer la méthode de R. E. Gomory (1); cette intéressante méthode est cependant lourde et on sera dans une situation d'autant plus difficile que le programme linéaire portera sur un nombre d'inconnues sensiblement supérieur à n (à cause de l'introduction des inconnues supplémentaires nécessaire pour linéariser). Nous verrons que réciproquement un programme linéaire en nombres entiers peut se ramener à un programme booléen.

Un procédé toujours applicable est d'essayer systématiquement les 2^n élément de $\mathcal{V}_{(n)}$ et de trier ceux déentre eux qui, en satisfaisant à $\mathcal{R}$, maximent f; cette méthode sommaire est praticable pour des valeurs de n plus grandes qu'on ne croirait aù premier abord; ce serait particulièrement vrai si on disposait de machines spécialement conçues à cet effet, et il semble que la question mériterait d'être étudiée; par ailleurs on résout facilement à la main des cas où n est petit:

Exemple: Une mine comporte $n = 7$ puits $p_1, p_2, \dots, p_7$ $m = 12$ quartier $q_1, q_2, \dots, q_{12}$. Les puits sont affectés aux quartiers selon une matrice d'affectation (n, m) $\mathcal{A}$ d'éléments A_j^k où A_j^k est un nombre booléen qui vaut 1 si le puits p_j est *nécessaire* pour le fonctionnement du quartier q_k, égal à 0 dans le cas contraire.

Par exemple nous supposerons que:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [3.1]$$

Le fonctionnement du quartier q_k rapporte un revenu r_k, le fonctionnement du puits p_j entraine une dépense d_j; soit f le bilan global de l'explotation; le problème est de savoir quels puits il faut maintenir en activité et quels puits il est préférable de fermer pour que f soit maximun.

Soient q_k, p_j des variables booléennes, égales à 1 si le quartier q_k (respectivement le puits p_j) fonctionne, à 0 dans le cas contraire; on a:

$$f = \sum_{k=1}^{12} r_k\, q_k - \sum_{j=1}^{7} d_j\, p_j$$

nous prendrons par exemple (en M F par mois)[1]:

$$r_1 = 16{,}8 \quad r_2 = 8{,}6 \quad r_3 = 6{,}1 \quad r_4 = 1 \quad r_5 = 0 \quad r_6 = 15 \quad r_7 = 2$$

$$r_8 = 4 \quad r_9 = 6 \quad r_{10} = 9 \quad r_{11} = 1 \quad r_{12} = 0$$

$$d_1 = 20{,}5 \; d_2 = 3{,}7 \; d_3 = 4{,}2 \; d_4 = 17 \; d_5 = 8{,}5 \; d_6 = 1{,}6 \; d_7 = 10{,}3$$

f est une fonction algèbrique entiére des q_k, p_j ; les variables q_k, p_j ne sont pas indépendantes, autrement dit il y aura une condition $\mathcal{R}$: mais celle-ci qui découle de $\mathcal{A}$, est inmédiatement résolue:

$$q_1 = p_1\, p_2 \;; \quad q_2 = p_1\, p_2 \;; \quad q_3 = p_1\, p_2 \;; \quad q_4 = p_1\, p_3 \;; \quad q_5 = p_1\, p_3\, p_5 ;$$

$$q_6 = p_2\, p_4 \;; \quad q_7 = p_3\, p_4 \;; \quad q_8 = p_4\, p_5 \;; \quad q_9 = p_4\, p_5 \;; \quad q_{10} = p_2\, p_5\, p_7 \;;$$

$$q_{11} = p_6\, p_7 \;; \quad q_{12}\, p_6\, p_7$$

après reduction de termes semblabes, f s'ecrit, en fonction des $n = 7$ variables indépendantes p_j:

$$f = 31{,}5\, p_1 p_2 + 1.\, p_1 p_3 + 15.\, p_2 p_4 + 2.\, p_3 p_4 + 10.\, p_4 p_5 + \\ + 9.\, p_2 p_5 p_7 + 1.\, p_6 p_7 - 20{,}5\, p_1 - 3{,}7\, p_2 - 4{,}2\, p_3 - 17{,}0\, p_4 - \\ - 8{,}5\, p_5 - 1{,}6\, p_6 - 10{,}3\, p_7$$

[1] Ces nombres, ainsi que la matrice [3.1], correspondent à une situation réelle.

L'examen des $2^n = 2^7 = 128$ cas possibles demande environ 3 heures à la main; l'optimun est obtenu pour:

$$p_1 = p_2 = 1, \quad p_3 = p_4 = \quad p_5 = p_6 = p_7 = 0 \qquad [3.2]$$

et correspond à $f = 7{,}5$.

Autres exemples: Problèmes des canons; problème des marins.

4.° INEGALITES OU EGALITES ALGEBRIQUES ENTIERES

Appelons inégalité (egalité) algèbrique entière une condition C qui s'exprime sous la forme:

$$f\ (x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad [4.1]$$

(où $f\ (x_1, \ldots, x_n) > 0$, où $f\ (x_1, \ldots, x_n) = 0$), où f est une fonction algèbrique entière.

On peut montrer que: *tout programme booléen algèbrique* où *la condition* $\mathcal{R}$ *s'exprime par des équations où inéquations algèbriques se ramène* à *un système d'équations où inéquations algèbriques entières.*

Or on peut résoudre une équation où inéquation algèbrique entière, en la ramenant à une équation booléenne, du moins lorsque les coefficients numériques sont des nombres entiers, ce qui est suffisant pour les applications pratiques; il suffit pour cela de suivre une idée envisagés par P. Camion (1), qui consiste à substituer à un coefficient numérique entier > 0 a son développement binaire:

$$a = \sum_{j=0} A_j\ 2^j$$

où les A_j sont des nombres booléens.

Premier exemple: On peut résoudre en quelques minutes par cette méthode le problème cidessus des puits-quartiers.

Deuxième exemple: La méthode s'applique en particulier aux programmes linéaires en nombres entiers (où les inconnues et les coefficients sont entiers); par exemple aû problème suivant emprunté à R. E. Gomokny (1): maximer:

$$f = 4\ x_1 + 5\ x_2 + x_3$$

sous les conditions:

1.° x_1, x_2, x_3 entiers ≥ 0 ;

2.° $3\ x_1 + x_2 \geq 10$;

3.° $x_1 + 4\ x_2 \leq 11$

4.° $3\ x_1 + 3\ x_2 + x_3 \leq 13$

Remarque: Par ailleurs, une application del'Algèbre de Boole aux programmes linéaires (quelconques c'est-à-dire non nécessairement en nombres entiers) à été mise en évidence dans K. Maghout (3); je ne puis donner des détails sur ce travail encore en cours et qui sera intégré à la Thèse en préparation de Mr. K. Maghout; mais je signale cette ingenieuse remarque, qui devrait être particulièrement utile pour la discussion des programmes où les coefficients sont fonctions de'un paramètre.

BIBLIOGRAPHIE

(1) GAVRILOV: *Analyse des circuits comportant des relais et des contacts* (en russe); Elektrichevo, 2, 1946, p. 54; 4, 1947, p. 5.

(1) R. HIGONNET et R. GREA: *Etude logique des circuits électriques et des systémes binaires.* Paris, 1955; Berger Levrault, édit.

(1) S. H. CALDWELL: *Switching circuits and logical design.* New York, 1958. J. Wiley, édit.

(1) R. FORTET: *L'Algèbre de Boole et ses applications en Recherche Opérationnelle* (Bruxelles), n.° 4, 1959, p. 5.

(2) R. FORTET: *Applications de l'Algèbre de Boole en Recherche Opérationnelle; Revue de la Société Française de Recherche Opérationnelle* (à l'impression).

(1) K. MAGHOUT: *Sur la détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe*K C. R., 248, 1959, p. 3522.

(2) K. MAGHOUT: *Matrice de transition et connexité d'un graphe* (non publié).

(3) K. MAGHOUT: *Algèbre de Boole été programmes linéaires* (non publié).

(1) P. CAMICH: *Application de l'Algèbre de Boole aux graphes et à la* Recherche Opérationnelle (non publié).

RESUMEN

El Algebra de Boole no consta más que de dos elementos: 0, y 1.

Los métodos booleanos son a veces los únicos rigurosos y completos para los problemas de afectación. Un ejemplo de estos problemas se estudia en el § 2.°

En el 3.° se estudian las funciones algebraicas enteras. Una función algebraica entera puede siempre ser transformada en una funcional lineal a condición de introducir variables booleanas suplementarias convenientes y condiciones lineales y de coeficientes enteros sobre las variables suplementarias y las iniciales. Estudia a continuación los programas booleanos algebraicos, poniendo un ejemplo.

En el § 4.° estudia las desigualdades o igualdades algebraicas enteras, proponiéndose dos ejemplos.