Über projektive Ebenen, in denen jede Fahne von einer nicht-trivialen Elation invariant gelassen wird[1])

Herrn Prof. Dr. EMANUEL SPERNER zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Von HEINZ LÜNEBURG in Mainz

Einleitung

Nennt man ein inzidentes Punkt-Geradenpaar einer projektiven Ebene eine Fahne, so gilt der folgende Satz (PIPER [17] Theorem 2): Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche projektive Ebene und ist Π eine Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$ mit der Eigenschaft, daß jede Fahne von $\mathfrak{E}$ von einer nicht-trivialen Elation aus Π invariant gelassen wird, so hat Π entweder eine Fixgerade und $\mathfrak{E}$ ist eine Translationsebene bezüglich dieser Geraden oder Π hat einen Fixpunkt und $\mathfrak{E}$ ist eine zu einer Translationsebene duale Ebene oder aber Π hat kein Fixelement und $\mathfrak{E}$ ist desarguessch. Es erhebt sich nun die Frage, ob es nichtdesarguessche Ebenen gibt, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir in Abschnitt 6 zeigen werden. Bevor wir jedoch die Existenz solcher Ebenen zeigen, untersuchen wir die Struktur der endlichen projektiven Ebenen $\mathfrak{E}$, die eine Kollineationsgruppe Π mit den folgenden Eigenschaften besitzen: (1) Π hat eine Fixgerade g, (2) jede Fahne von $\mathfrak{E}$ wird von einer nicht-trivialen Elation aus Π festgelassen, (3) Π wird von seinen Elationen erzeugt und (4) jede Kollineation aus Π, die auf g drei verschiedene Fixpunkte hat, ist eine Perspektivität mit der Achse g. Ist $\Delta = \Pi_P$ die Standuntergruppe des Punktes P, so lauten die Folgerungen aus diesen Annahmen (Satz 7): $\mathfrak{E}$ ist entweder desarguessch und Δ ist isomorph zur $SL(2, N)$ mit $N = o(\mathfrak{E})$ oder $N = 5$ und $o(\mathfrak{E}) = 9$ oder Δ ist eine Diedergruppe der Ordnung $2(o(\mathfrak{E}) + 1)$ und $o(\mathfrak{E})$ ist gerade, oder aber $\mathfrak{E}$ ist eine nicht-desarguessche Ebene der Ordnung $q^2 = 2^{2(2r+1)} \geqq 64$ und Δ ist isomorph zur Suzukigruppe $S(q)$.

Dieser Satz führt uns zur Untersuchung der Frage, wie eine zur Suzukigruppe $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe Δ einer projektiven Ebene der Ordnung q^2 auf dieser Ebene operieren kann. Unter der Voraussetzung, daß alle Involutionen aus Δ zentrale Kollineationen sind, konnten wir diese Frage vollständig beantworten (Satz 9). Offen bleibt

[1]) Teile dieser Arbeit waren Gegenstand eines Vortrages im Kolloquium des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg am 2. Juni 1964.

jedoch die Frage nach einer vollständigen Klassifikation der Ebenen der Ordnung q^2, die eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe besitzen. Wie wir in Abschnitt 6 sehen werden, wird eine solche Ebene durch die Suzukigruppe nicht bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, allenfalls bis auf Isomorphie und Dualität.

In Abschnitt 4 untersuchen wir, wie eine zur Suzukigruppe $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe Δ des dreidimensionalen projektiven Raumes $\mathfrak{S}$ über $GF(q)$ auf $\mathfrak{S}$ operiert. Satz 8 zeigt, daß alle diese Kollineationsgruppen in der projektiven Gruppe von $\mathfrak{S}$ liegen und bereits innerhalb dieser Gruppe konjugiert sind. Da Δ genau ein Geradentransitivitätsgebiet besitzt, welches eine Kongruenz von $\mathfrak{S}$ ist, folgt, daß auch alle diese Kongruenzen projektiv äquivalent sind. Diese Kongruenzen liefern nun eine Klasse von nicht-desarguesschen Ebenen mit den oben genannten Eigenschaften (1) bis (4). Alle diese Ebenen scheinen neu zu sein.

Die Untersuchungen der Abschnitte 1 und 2 über Ovale in endlichen desarguesschen Ebenen gerader Ordnung dienen zur Vorbereitung des Beweises von Satz 7. Da sie jedoch auch für sich gesehen nicht ohne Interesse sind, habe ich diese Entwicklungen etwas allgemeiner gehalten, als es im Hinblick auf den Abschnitt 3 nötig gewesen wäre.

Bezeichnungen und Definitionen

$|\mathfrak{M}|$ = Anzahl der Elemente in der Menge $\mathfrak{M}$.

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

$\mathfrak{Z}G$ = Zentrum der Gruppe G.

$\mathfrak{U}G$ = größter Normalteiler ungerader Ordnung von G.

$\mathfrak{N}_G U$ = Normalisator der Untergruppe U von G in G. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir statt $\mathfrak{N}_G U$ auch $\mathfrak{N} U$.

$N \trianglelefteq G$ bedeutet: N ist Normalteiler in G.

$[G:U]$ = Index von U in G.

$\langle \cdots | \cdots \rangle$ = die von ... mit ... erzeugte Gruppe.

Eine Gruppe D heißt Diedergruppe, falls

$$D = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle$$

ist.

Eine 2-Gruppe S heißt Semidiedergruppe, falls

$$S = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = b^2 = 1,\ bab = a^{-1+2^{m-2}} \rangle$$

ist.

Eine 2-Gruppe Q heißt (verallgemeinerte) Quaternionengruppe, falls

$$Q = \langle a, b \mid a^{2^{m-1}} = 1,\ b^2 = a^{2^{m-2}},\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

ist.

Ist G eine Gruppe und U eine echte Untergruppe von G mit $g^{-1}Ug \cap U = 1$ für alle $g \in G$ mit $g \notin U$, so heißt G Frobeniusgruppe. Diejenigen Elemente von G, die nicht in einer zu U konjugierten Untergruppe liegen, bilden zusammen mit der Identität eine charakteristische Untergruppe K von G. Die Gruppe K heißt der Frobeniuskern und jede zu U konjugierte Untergruppe Frobeniuskomplement von G. Es ist $G = KV$ und $K \cap V = 1$ für alle zu U konjugierten Untergruppen V von G.

$GF(q)$ = Galoisfeld mit q Elementen.

$GL(2, q)$ = lineare Gruppe in zwei Variablen über $GF(q)$ = Gruppe aller 2×2-Matrizen mit Elementen aus $GF(q)$ und Determinante ungleich 0.

$SL(2, q)$ = spezielle lineare Gruppe in zwei Variablen über $GF(q)$ = Gruppe aller 2×2-Matrizen mit Elementen aus $GF(q)$ und Determinante gleich 1.

$S(q)$ = Suzukigruppe. Zur Definition dieser Gruppe siehe SUZUKI [23] Abschnitt 13.

Ist G eine Permutationsgruppe und X ein Element der permutierten Menge, so ist $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ und $X^G = \{X^g \mid g \in G\}$.

Affine und projektive Ebenen werden in der üblichen Weise definiert (s. etwa PICKERT [16]). Die Geraden fassen wir stets als Punktmengen auf.

Ein inzidentes Punkt-Geradenpaar einer affinen bzw. projektiven Ebene nennen wir Fahne.

Eine Menge $\mathfrak{o}$ von $q + 1$ Punkten in einer affinen bzw. projektiven Ebene der Ordnung q heißt ein Oval, falls keine drei Punkte von $\mathfrak{o}$ kollinear sind. Eine Gerade g heißt Passante, Tangente bzw. Sekante von $\mathfrak{o}$, je nachdem $|g \cap \mathfrak{o}| = 0, 1$ oder 2 ist. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{o}$ geht genau eine Tangente an $\mathfrak{o}$. Ist q gerade, so gehen alle Tangenten an $\mathfrak{o}$ durch einen Punkt, den Knoten von $\mathfrak{o}$ (QVIST [18]).

Ist P ein Punkt und g eine Gerade einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ und ist σ eine Kollineation von $\mathfrak{E}$, die P geradenweise und g punktweise festläßt, so heißt σ eine (P, g)-Perspektivität oder auch kurz Perspektivität. P heißt Zentrum und g Achse von σ. Daher wird σ auch zentral bzw. axial genannt. Ist $P \in g$, so sagen wir statt Perspektivität auch Elation, und ist $P \notin g$, so sagen wir statt Perspektivität auch Streckung. Eine nicht-triviale Perspektivität hat genau ein Zentrum und genau eine Achse. Die Menge aller (P, g)-Perspektivitäten ist eine Untergruppe der Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$. Diese Gruppe werden wir mit $\Gamma(P, g)$ bezeichnen. Ist K irgendeine Kollineationsgruppe, so ist $\mathsf{K}(P, g) = \mathsf{K} \cap \Gamma(P, g)$. Ist $\mathfrak{A}$ eine affine Ebene und ist τ eine Elation des projektiven Abschlusses $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$ mit uneigentlichem Zentrum und uneigentlicher Achse, so nennen wir τ eine Translation von $\mathfrak{A}$. Die Menge T der Translationen einer affinen Ebene $\mathfrak{A}$ ist eine Untergruppe der Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Ist T auf den Punkten von $\mathfrak{A}$ transitiv, so heißt $\mathfrak{A}$ eine Translationsebene. Der Kern K einer Translationsebene $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller der Endomorphismen η der Translationsgruppe T von $\mathfrak{A}$, für die $(\Gamma(U, g_\infty))^\eta \subseteqq \Gamma(U, g_\infty)$ ist für alle Punkte U auf der uneigentlichen Geraden g_∞ von $\mathfrak{A}$. Nach ANDRÉ [1], Satz 10 ist K ein Körper und die multiplikative Gruppe von K ist isomorph zu der Gruppe $\Gamma(P, g_\infty)$ für $P \notin g_\infty$.

Die projektiven Räume, die wir betrachten, sind alle dreidimensional. Geraden und Ebenen fassen wir auch hier als Punktmengen auf.

Ein Ovoid $\mathfrak{O}$ ist eine Menge von $q^2 + 1$ Punkten in einem projektiven Raum $\mathfrak{S}$ über $GF(q)$, von denen keine drei kollinear sind. Eine Gerade g von $\mathfrak{S}$ heißt Passante, Tangente bzw. Sekante von $\mathfrak{O}$, je nachdem $|g \cap \mathfrak{O}| = 0, 1$ oder 2 ist. Eine Ebene $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{S}$ heißt Tangentialebene von $\mathfrak{O}$, falls $|\mathfrak{e} \cap \mathfrak{O}| = 1$ ist. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{O}$ geht genau eine Tangentialebene.

Eine Menge von paarweise windschiefen Geraden eines projektiven Raumes $\mathfrak{S}$, die ganz $\mathfrak{S}$ überdecken, nennen wir eine Geradenkongruenz oder auch kurz Kongruenz.

Eine taktische Konfiguration mit den Parametern v, b, k, r ist eine Inzidenzstruktur, bestehend aus v Punkten und b Blöcken, so daß jeder Block mit genau k Punkten und jeder Punkt mit genau r Blöcken inzidiert. Offensichtlich ist $vr = bk$.

Ein Blockplan mit den Parametern v, b, k, r, λ ist eine taktische Konfiguration mit den Parametern v, b, k, r, für die zusätzlich gilt, daß zwei verschiedene Punkte stets mit genau λ Blöcken inzidieren. Außer $vr = bk$ gilt dann auch, daß $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$ ist.

Eine (endliche) Möbiusebene ist ein Blockplan mit den Parametern $v = q^2 + 1$, $b = q(q^2 + 1)$, $k = q + 1$, $r = q(q + 1)$ und $\lambda = q + 1$, für den außerdem gilt, daß durch drei verschiedene Punkte höchstens ein und damit genau ein Block geht. Ist P ein Punkt einer Möbiusebene $\mathfrak{M}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(P, \mathfrak{M})$ die Inzidenzstruktur, die aus $\mathfrak{M}$ entsteht, wenn man aus $\mathfrak{M}$ den Punkt P und alle Blöcke entfernt, die nicht mit P inzidieren. Man sieht leicht, daß $\mathfrak{A}(P, \mathfrak{M})$ eine affine Ebene der Ordnung q ist.

1. Die Blockpläne $\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{o})$

$\mathfrak{E}$ sei eine endliche desarguessche projektive Ebene der Ordnung $q = 2^r$. Ferner sei $\mathfrak{o}$ ein Oval in $\mathfrak{E}$ und K der Knoten von $\mathfrak{o}$. Schließlich sei g eine Gerade von $\mathfrak{E}$ mit $g \cap \mathfrak{o} = \emptyset$. Da alle Geraden durch K Tangenten an $\mathfrak{o}$ sind, ist $K \notin g$. Die Gruppe aller axialen Kollineationen mit der Achse g bezeichnen wir mit Γ. Außerdem sei $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{o}^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

(1.1) *Es ist* $|\mathfrak{K}| = o(\Gamma) = q^2(q-1)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}$ und $\gamma \in \Gamma$ mit $\mathfrak{x}^\gamma = \mathfrak{x}$. Ist $K(\mathfrak{x})$ der Knoten von $\mathfrak{x}$, so ist auch $(K(\mathfrak{x}))^\gamma = K(\mathfrak{x})$. Folglich ist γ, da wegen $K \notin g$ auch $K(\mathfrak{x}) \notin g$ ist, eine $(K(\mathfrak{x}), g)$-Streckung. Ist $K(\mathfrak{x}) \in h$, so ist $|h \cap \mathfrak{x}| = 1$. Folglich ist $P = h \cap \mathfrak{x} = h^\gamma \cap \mathfrak{x}^\gamma = P^\gamma$. Daher ist $\gamma = 1$, q. e. d.

Da offensichtlich $(K(\mathfrak{x}))^\gamma = K(\mathfrak{x}^\gamma)$ ist, gilt

(1.2) *Sind* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \notin \mathfrak{K}$ *und ist* $\mathfrak{x}^\gamma = \mathfrak{y}$ *mit* $\gamma \in \Gamma$, *so ist* $K(\mathfrak{x}) = K(\mathfrak{y})$ *genau dann, wenn* γ *eine* $(K(\mathfrak{x}), g)$*-Streckung ist.*

Ferner gilt

(1.3) *Ist* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}$ *und* $\Sigma = \Gamma(K(\mathfrak{x}), g)$, *so liegt ein Punkt* Q *mit* $K(\mathfrak{x}) \neq Q \notin g$ *auf genau einem Oval aus* $\mathfrak{x}^\Sigma$.

Beweis. Es ist $K(\mathfrak{x})Q \cap \mathfrak{x}$ ein Punkt P mit $K(\mathfrak{x}) \neq P \notin g$ und $K(\mathfrak{x})Q = K(\mathfrak{x})P$. Folglich gibt es ein und nur ein $\sigma \in \Sigma$ mit $P^\sigma = Q$. Hieraus folgt die Behauptung.

Es sei $\mathfrak{A}$ die affine Ebene, die aus $\mathfrak{E}$ entsteht, wenn man aus $\mathfrak{E}$ die Gerade g und alle mit g inzidierenden Punkte entfernt. Wir betrachten nun die beiden folgendermaßen definierten Inzidenzstrukturen $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ und $\mathcal{J}(\mathfrak{o})$:

(i′) *Die Punkte von* $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ *sind die Punkte von* $\mathfrak{A}$.

(ii′) *Die Blöcke von* $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ *sind die Ovale aus* $\mathfrak{K}$.

(iii′) *Ein Punkt* P *und ein Block* $\mathfrak{b}$ *sind genau dann inzident, wenn* $P \in \mathfrak{b}$ *ist.*

(i) *Die Punkte von* $\mathcal{J}(\mathfrak{o})$ *sind die Punkte von* $\mathfrak{A}$ *und ein Symbol* U.

(ii) *Die Blöcke von* $\mathcal{J}(\mathfrak{o})$ *sind die Ovale aus* $\mathfrak{K}$ *und die Geraden von* $\mathfrak{A}$.

(iii) *Der Punkt* U *inzidiert genau dann mit dem Block* $\mathfrak{b}$, *wenn* $\mathfrak{b}$ *eine Gerade von* $\mathfrak{A}$ *ist. Ein Punkt* $P \neq U$ *inzidiert genau dann mit* $\mathfrak{b}$, *wenn* $P \in \mathfrak{b}$ *ist.*

Setzt man $U^\gamma = U$ für alle $\gamma \in \Gamma$, so gilt

(1.4) Γ *ist sowohl Automorphismengruppe von* $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ *als auch von* $\mathcal{J}(\mathfrak{o})$.

Aus (1.4) folgt zunächst, daß $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ eine taktische Konfiguration ist. Also ist $vr = bk$, wenn v die Anzahl der Punkte, b die Anzahl der Blöcke, r die Anzahl der Blöcke durch einen Punkt und k die Anzahl der Punkte auf einem Block ist. Nun ist $v = q^2$, $b = q^2(q-1)$ und $k = q+1$. Also ist $r = q^2 - 1$. Darüber hinaus gilt der

Satz 1. *$\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ ist ein Blockplan mit den Parametern $v = q^2$, $b = q^2(q-1)$, $k = q+1$, $r = q^2-1$ und $\lambda = q$.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß durch zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ stets genau q Blöcke gehen. P und Q seien zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ und $h = PQ$ die Verbindungsgerade von P und Q in $\mathfrak{A}$. Durch P gehen $r = (q+1)(q-1)$ Blöcke von $\mathfrak{S}(\mathfrak{o})$ und zwei verschiedene Blöcke durch P haben nach (1.2) und (1.3) verschiedene Knoten. Folglich ist jeder von P verschiedene Punkt von $\mathfrak{A}$ Knoten eines Blockes durch P, da ja die Anzahl der von P verschiedenen Punkte von $\mathfrak{A}$ gleich $q^2 - 1$ ist. Nun liegen auf h insgesamt $q-1$ von P verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$. Es gibt also genau $q-1$ Blöcke durch P, die h nur in P treffen. Die übrigen $q(q-1)$ Blöcke treffen h noch in einem von P verschiedenen Punkt. Nun ist $\Gamma(P, g)$ auf den von P verschiedenen affinen Punkten von h transitiv. Folglich gehen durch jeden von P verschiedenen affinen Punkt von h gleich viele der Blöcke durch P. Somit gehen durch P und jeden von P verschiedenen Punkt X von h genau q Blöcke, insbesondere also auch durch P und Q, q. e. d.

Aus Satz 1 folgt sofort der

Satz 2. *$\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ ist ein Blockplan mit den Parametern $v = q^2+1$, $b = q(q^2+1)$, $k = q+1$, $r = q(q+1)$ und $\lambda = q+1$.*

Ist $\mathfrak{M}$ eine endliche Möbiusebene der Ordnung q, so ist $\mathfrak{M}$ ein Blockplan, der dieselben Parameter wie $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ besitzt. Es erhebt sich also die Frage, ob $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ etwa eine Möbiusebene ist. Wir werden sehen, daß dies nicht immer der Fall ist.

Ist g eine Gerade von $\mathfrak{E}$ und sind A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 zwei Dreiecke mit $A_i \neq B_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und $A_iA_j \neq B_iB_j$ und $A_iA_j \cap B_iB_j \in g$ für $i, j = 1, 2, 3$ und $i < j$, so heißen die beiden Dreiecke *g-axial*. Gibt es einen Punkt C in $\mathfrak{E}$ mit $C \in A_iB_i$ für $i = 1, 2, 3$, so heißen die beiden Dreiecke *C-perspektiv*. In desarguesschen Ebenen sind zwei *g-axiale* Dreiecke stets auch C-perspektiv. Es gilt nun, wenn g wieder die ursprüngliche Bedeutung hat, der

Satz 3. *$\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ ist genau dann eine Möbiusebene, wenn es keine zwei g-axialen, dem Oval $\mathfrak{o}$ einbeschriebenen Dreiecke gibt.*

Beweis. Offensichtlich ist $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ genau dann eine Möbiusebene, wenn durch drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ höchstens ein Block geht, und dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn durch drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$ höchstens ein Oval aus $\mathfrak{K}$ geht.

Es seien $A_i, B_i \in \mathfrak{o}$ $(i = 1, 2, 3)$ zwei g-axiale Dreiecke. Dann gibt es einen Punkt C mit $C \in A_i B_i$ für alle i. Ferner gibt es in Γ eine (C, g)-Perspektivität γ mit $A_1^\gamma = B_1$. Hieraus folgt, daß $A_i^\gamma = B_i$ ist für $i = 1, 2, 3$. Folglich ist $|\mathfrak{o} \cap \mathfrak{o}^\gamma| \geqq 3$. Wegen $A_1 \neq B_1$ ist $\gamma \neq 1$ und daher nach (1.1) auch $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}^\gamma$. Folglich ist $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ keine Möbiusebene.

Angenommen es gibt keine dem Oval $\mathfrak{o}$ einbeschriebenen g-axialen Dreiecke. Dann enthält kein Oval $\mathfrak{x} \in \mathfrak{K}$ solche g-axialen Dreiecke. Sei nun $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{K}$ und $|\mathfrak{x} \cap \mathfrak{y}| \geqq 3$. Da $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^\gamma$ ist, gibt es drei Punkte $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{x}$ mit $A_i^\gamma \in \mathfrak{x}$. Wäre $A_i \neq A_i^\gamma$ für alle i, so wären A_1, A_2, A_3 und $A_1^\gamma, A_2^\gamma, A_3^\gamma$ zwei g-axiale Dreiecke, die dem Oval $\mathfrak{x}$ einbeschrieben sind. Dies widerspricht jedoch unserer Annahme. Es gibt also ein i mit $A_i^\gamma = A_i$. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $i = 1$ ist. Dann ist A_1 Zentrum von γ. Folglich sind A_1, A_2 und A_2^γ kollinear. Nun ist $A_1, A_2, A_2^\gamma \in \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}$ ein Oval. Ferner ist $A_1 \neq A_2, A_2^\gamma$. Daher ist $A_2 = A_2^\gamma$ und somit $\gamma = 1$, d.h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$. Damit ist bereits alles bewiesen.

Der nächste Satz ist eine Kennzeichnung der Kegelschnitte in endlichen desarguesschen Ebenen gerader Ordnung.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{o}$ ein Oval in einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene gerader Ordnung und ist K der Knoten von $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{o}$ genau dann ein Kegelschnitt, wenn die Achse irgendzweier $\mathfrak{o}$ einbeschriebener C-perspektiver Dreiecke die Gerade KC ist.*

Beweis. $\mathfrak{o}$ sei ein Kegelschnitt und $A_i, B_i \in \mathfrak{o}$ $(i = 1, 2, 3)$ seien zwei C-perspektive Dreiecke. Wegen $A_1 \neq B_1$ und $C \in A_1 B_1$ ist $K \neq C \notin \mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{o}$ ein Kegelschnitt ist, gibt es eine Elation τ mit dem Zentrum C, der Achse KC und mit $\mathfrak{o}^\tau = \mathfrak{o}$ (s. z.B. Lüneburg [14] Korollar 1(b)). Dann ist aber $A_i^\tau = B_i$ und folglich sind die beiden Dreiecke A_i und B_i axial mit der Achse KC.

Sei umgekehrt $\mathfrak{o}$ ein Oval, welches die Bedingungen des Satzes erfüllt. Sei C ein Punkt mit $K \neq C \notin \mathfrak{o}$. Ferner sei $P \in \mathfrak{o}$ und $\{P, P'\} = \mathfrak{o} \cap CP$. Hieraus folgt, daß $P \neq P'$ ist. Ferner sei τ eine Elation mit der Achse KC, dem Zentrum C, die P auf P' abbildet. Da alle $\mathfrak{o}$ einbeschriebenen C-perspektiven Dreiecke KC-axial sind, folgt, daß $\mathfrak{o}^\tau = \mathfrak{o}$ ist. Da C beliebig war, folgt, daß die von allen Elationen τ mit $\mathfrak{o}^\tau = \mathfrak{o}$ erzeugte Gruppe isomorph zur $PSL(2, q)$ ist, wenn q gleich der Ordnung der zugrunde liegenden Ebene ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{o}$ ein Kegelschnitt ist (s. z.B. Lüneburg [14] Korollar 1(b)).

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt unmittelbar das vermutlich bekannte

Korollar 1. *Ist $\mathfrak{o}$ ein Kegelschnitt, so ist $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ eine (miquelsche) Möbiusebene.*

Wir wollen nun noch eine Klasse von Ovalen $\bar{\mathfrak{o}}$ angeben, für die $\mathfrak{J}(\bar{\mathfrak{o}})$ keine Möbiusebene ist.

$\mathfrak{o}$ sei ein Kegelschnitt und $\bar{\mathfrak{o}}$ entstehe aus $\mathfrak{o}$ durch Weglassen eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{o}$ und Hinzunahme des Knotens von $\mathfrak{o}$. Dann gilt

Satz 5. *Ist $q \geq 8$, so ist $\mathfrak{J}(\bar{\mathfrak{o}})$ keine Möbiusebene.*

Beweis. Da alle nicht entarteten Kegelschnitte von $\mathfrak{E}$ projektiv äquivalent sind, können wir annehmen, daß

$$\mathfrak{o} = \{F(0, 1, 0), F(k, k^2, 1) \mid k \in F\}$$

ist, wobei $F = GF(q)$ ist. Der Knoten von $\mathfrak{o}$ ist der Punkt $K = F(1, 0, 0)$. Da die Gruppe, die $\mathfrak{o}$ invariant läßt, auf $\mathfrak{o}$ transitiv ist, können wir annehmen, daß $\bar{\mathfrak{o}} = \{F(1, 0, 0), F(k, k^2, 1) \mid k \in F\}$ ist. Um Satz 5 zu beweisen, genügt es nach Satz 3 zu zeigen, daß es zu jeder Geraden g mit $g \cap \bar{\mathfrak{o}} = \emptyset$ stets g-axiale $\bar{\mathfrak{o}}$ einbeschriebene Dreiecke gibt.

Es sei $r \in F$ und $r \neq 0, 1$. Ferner sei $f(x) = (r + 1)x^2 + rx$. Die Abbildung $x \to f(x)$ von F in sich ist nicht eineindeutig. Vielmehr gilt: Ist $x \neq y$, so ist genau dann $f(x) = f(y)$, wenn $x + y = r(r + 1)^{-1}$ ist. Hieraus folgt, wenn man $\mathfrak{B} = \{f(x) \mid x \in F\}$ setzt, daß $|\mathfrak{B}| = \frac{1}{2}q$ ist. Da $q \geqq 8$ und $0 = f(0) \in \mathfrak{B}$ ist, gibt es ein $a \in F$ mit

(a) $$a \neq 0, 1, r, r + 1 \text{ und } a^2 \notin \mathfrak{B}.$$

Wir wählen nun $r \in F$ so, daß das Polynom $g(x) = x^2 + x + r$ über F irreduzibel ist. Dann ist $g(a) \neq 0$ und daher $a^2 \neq a + r$. Setze

(b) $$b = a^2(r + a)^{-1}.$$

Dann ist

(c) $$b \neq 0, 1, a.$$

Denn es ist $a^2 \notin \mathfrak{B}$ und daher $a^2 \neq 0$. Ferner ist $a^2 \neq a + r$ und daher $b \neq 1$. Wäre $b = a$, so wäre $r = 0$ und daher $g(x)$ nicht irreduzibel über F.

Aus (a) folgt, daß $r + a \neq 1$ ist. Folglich ist $b \neq a^2$. Wir können daher $c = a^2(b + 1)(a^2 + b)^{-1}$ setzen. Dann ist

(d) $$a^2(b + c + 1) + bc = 0.$$

Wir betrachten nun die beiden Dreiecke $A = F(1, 0, 0)$, $B = F(0, 0, 1)$, $C = F(1, 1, 1)$ und $A' = F(a, a^2, 1)$, $B' = F(b, b^2, 1)$, $C' = F(c, c^2, 1)$. Dann haben die Geraden AB, BC, CA und $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ die Gleichungen:

AB: $$x_2 = 0,$$

BC: $$x_1 + x_2 = 0,$$

$$\begin{array}{ll} CA: & x_2 + x_3 = 0, \\ A'B': & (a+b)x_1 + x_2 + abx_3 = 0, \\ B'C': & (b+c)x_1 + x_2 + bcx_3 = 0, \\ C'A': & (c+a)x_1 + x_2 + cax_3 = 0. \end{array}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P &= AB \cap A'B' = F(ab, 0, a+b), \\ Q &= BC \cap B'C' = F(bc, bc, b+c+1) = F(a^2, a^2, 1) \ \big(\text{nach (d)}\big), \\ R &= CA \cap C'A' = F(1+ca,\ c+a,\ c+a). \end{aligned}$$

Ist schließlich g die Gerade mit der Gleichung

$$(a^2 + ab)x_1 + (b + a^2 + ab)x_2 + a^2 b x_3 = 0,$$

so zeigt eine elementare Rechnung, daß $P, Q, R \in g$ ist. Die beiden Dreiecke sind also g-axial. Nun ist $g \cap \bar{\mathfrak{o}} = \emptyset$. Wäre nämlich $X \in g \cap \bar{\mathfrak{o}}$, so ist sicher $X \neq F(1, 0, 0)$, da nach (a) und (b) ja $a^2 + ab \neq 0$ ist. Also ist $X = F(x, x^2, 1)$ und $(a^2 + ab)x + (b + a^2 + ab)x^2 + a^2 b = 0$. Aus $b \neq 0$ folgt daher, daß $(a^2 b^{-1} + a + 1)x^2 + (a^2 b^{-1} + a)x + a^2 = 0$ ist. Aus (b) folgt weiter, daß $r = a^2 b^{-1} + a$ ist. Folglich ist $a^2 = f(x) \in \mathfrak{B}$ im Widerspruch zu (a). Also ist $\bar{\mathfrak{o}} \cap g = \emptyset$. Sei

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ l & l^2 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ k, l \in F \text{ und } k \neq 0 \right\}.$$

und Γ die von $\tilde{\Gamma}$ in $\mathfrak{E}$ induzierte Kollineationsgruppe[2]). Dann ist $\bar{\mathfrak{o}}^{\Gamma} = \bar{\mathfrak{o}}$. Da die Passanten von $\bar{\mathfrak{o}}$ mit den Passanten von $\mathfrak{o}$ übereinstimmen, folgt nach LÜNEBURG [14] S. 430, daß Γ auf den Passanten von $\bar{\mathfrak{o}}$ transitiv ist. Ist h eine Passante von $\bar{\mathfrak{o}}$, so gibt es daher stets zwei h-axiale $\bar{\mathfrak{o}}$ einbeschriebene Dreiecke, q. e. d.

2. Scharf fahnentransitive Kollineationsgruppen mit zyklischem Komplement

Hilfssatz 1. *Es sei $q = 2^r$. Ist $\mathfrak{E}$ die desarguessche projektive Ebene der Ordnung q, so sind alle zyklischen Untergruppen der Ordnung $q+1$ der projektiven Gruppe Π von $\mathfrak{E}$ in Π konjugiert. Ist Z eine zyklische Untergruppe der Ordnung $q+1$ von Π, so läßt Z ein nicht-inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) von $\mathfrak{E}$ invariant. Ferner ist Q^Z ein Kegelschnitt, falls nur $P \neq Q \notin g$ ist.*

Beweis. Es sei $\zeta \in Z$ und $o(\zeta) = p$ eine Primzahl sei. Ferner (Q, h) eine Fahne mit $Q^{\zeta} = Q$ und $h^{\zeta} = h$. Wegen $|h - \{Q\}| = q$ und $\big(q+1, q(q-1)\big) = 1$

---

[2]) Man beachte, daß die Matrizen als Rechtsfaktoren zu schreiben sind.

folgt, daß ζ auf h mindestens drei Fixpunkte hat. Da ζ in der projektiven Gruppe Π von $\mathfrak{E}$ liegt, läßt daher ζ alle Punkte auf h fest. Somit ist ζ eine Perspektivität mit der Achse h und daher p ein Teiler von $q(q-1)$: ein Widerspruch. Folglich kann kein von 1 verschiedenes Element aus Z eine Fahne invariant lassen. ζ sei weiterhin ein Element von Primzahlordnung aus Z. Aus $(q^2+q+1, q+1) = 1$ folgt, da ja q^2+q+1 die Punkteanzahl von $\mathfrak{E}$ ist, daß ζ einen und damit nach dem eben Bewiesenen genau einen Fixpunkt P hat. Nun ist Z abelsch und daher ist P auch ein Fixpunkt von Z. Ebenso folgt, daß Z auch eine Fixgerade g hat. Da kein von 1 verschiedenes Element aus Z eine Fahne von $\mathfrak{E}$ invariant läßt, folgt, daß P nicht auf g liegt, und daß Z auf den Geraden durch P bzw. den Punkten auf g transitiv ist. Nun ist die Untergruppe von Π, die sowohl P als auch g invariant läßt, isomorph zur $GL(2, q)$. Ferner ist wegen $q = 2^r$ die Gruppe $GL(2, q)$ isomorph dem direkten Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung $q-1$ und der $SL(2, q)$. Somit enthält $\Pi_{P,g}$ einen zur $SL(2, q)$ isomorphen Normalteiler Δ. Aus der Normalität von Δ in $\Pi_{P,g}$ folgt weiter, daß Δ alle Elemente mit zu $q-1$ teilerfremder Ordnung aus $\Pi_{P,g}$ enthält. Hieraus folgt, daß Z in Δ enthalten ist. Nach Dickson [7] §§ 243 und 244 sind alle Untergruppen der Ordnung $q+1$ von Δ in Δ konjugiert. Da Π auf den nicht-inzidenten Punkt-Geradenpaaren von $\mathfrak{E}$ transitiv ist, folgt daher, daß alle zyklischen Untergruppen der Ordnung $q+1$ von Π in Π konjugiert sind.

Nun ist $\mathsf{H} = \mathsf{Z}\Gamma(P, g)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung q^2-1, die auf den Punkten X von $\mathfrak{E}$ mit $P \neq X \notin g$ transitiv operiert. Da H abelsch ist, werden die Punkttransitivitätsgebiete von Z von $\Gamma(P, g)$ untereinander permutiert. Hieraus und aus der Transitivität von $\Gamma(P, g)$ auf $PQ - \{P, Q\}$ für $Q \in g$ folgt, daß $\Gamma(P, g)$ auf den von $\{P\}$ und g verschiedenen Punkttransitivitätsgebieten von Z transitiv ist. Ist nun $\mathfrak{c}$ ein Kegelschnitt von $\mathfrak{E}$, so ist bekanntlich $\Pi_{\mathfrak{c}}$ isomorph zur $SL(2, q)$ (s. etwa Lüneburg [14] Korollar 1). $\Pi_{\mathfrak{c}}$ enthält folglich eine zyklische Untergruppe der Ordnung $q+1$, die auf den Punkten von $\mathfrak{c}$ transitiv ist. Hieraus und aus dem bereits Bewiesenen folgt auch die letzte Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *Es sei $q = 2^r \neq 8$ und $\mathfrak{E}$ die desarguessche projektive Ebene der Ordnung q. Ist Z eine zyklische Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$, besitzt Z einen universellen Fixpunkt P und ist Z auf den Geraden durch P scharf transitiv, so ist Z in der projektiven Gruppe von $\mathfrak{E}$ enthalten.*

Der Beweis folgt sofort aus Karzel [13], wenn man noch bemerkt, daß aus den Voraussetzungen folgt, daß Z auch eine universelle Fixgerade besitzt.

$\mathfrak{A}$ sei eine endliche affine Ebene der Ordnung q. Ferner sei Δ eine scharf fahnentransitive Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Außerdem seien die nicht-trivialen Punkttransitivitätsgebiete von Δ_P Ovale. Wir betrachten nun die beiden folgendermaßen definierten Inzidenzstrukturen $\mathfrak{I}(\Delta)$ und $\mathfrak{J}(\Delta)$.

(i′) *Die Punkte von* $\mathfrak{I}(\Delta)$ *sind die Punkte von* $\mathfrak{A}$.

(ii′) *Die Blöcke von* $\mathfrak{I}(\Delta)$ *sind die nicht-trivialen Punkttransitivitätsgebiete von* Δ_P *für alle Punkte* P *von* $\mathfrak{A}$.

(iii′) *Ein Punkt* P *und ein Block* $\mathfrak{b}$ *sind genau dann inzident, wenn* $P \in \mathfrak{b}$ *ist.*

(i) *Die Punkte von* $\mathfrak{J}(\Delta)$ *sind die Punkte von* $\mathfrak{A}$ *und ein Symbol* U.

(ii) *Die Blöcke von* $\mathfrak{J}(\Delta)$ *sind die Blöcke von* $\mathfrak{I}(\Delta)$ *und die Geraden von* $\mathfrak{A}$.

(iii) U *inzidiert genau dann mit dem Block* $\mathfrak{b}$, *wenn* $\mathfrak{b}$ *eine Gerade von* $\mathfrak{A}$ *ist. Ist* $P \neq U$, *so inzidiert* P *genau dann mit* $\mathfrak{b}$, *wenn* $P \in \mathfrak{b}$ *ist.*

Setzt man $U^\delta = U$ für alle $\delta \in \Delta$, so gilt entsprechend (1.4) die Aussage

(2.1) Δ *ist sowohl Automorphismengruppe von* $\mathfrak{I}(\Delta)$ *als auch von* $\mathfrak{J}(\Delta)$.

Ferner folgt aus der scharfen Fahnentransitivität von Δ, daß $\Delta_{P,Q} = 1$ ist, das heißt

(2.2) Δ *ist eine Frobeniusgruppe.*

Ist $Q^{\Delta_P} = Q^{\Delta_R} = \mathfrak{b}$ und $P \neq Q \neq R$, so ist $\mathfrak{b}$ nach Voraussetzung ein Oval. Ferner ist sowohl P als auch R gleich dem Knoten von $\mathfrak{b}$. Somit ist $P = R$. Da es genau $q^2 - 1$ von P verschiedene Punkte in $\mathfrak{A}$ gibt, folgt daher, daß die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{I}(\Delta)$ gleich $q^2(q-1)$ ist. Ferner folgt aus (2.1), daß $\mathfrak{I}(\Delta)$ eine taktische Konfiguration ist. Sind v, b, k, r die Parameter von $\mathfrak{I}(\Delta)$, so ist also $v = q^2$, $b = q^2(q-1)$, $k = q+1$ und $r = q^2 - 1$. Darüber hinaus gilt

(2.3) $\mathfrak{I}(\Delta)$ *ist ein Blockplan mit den Parametern* $v = q^2$, $b = q^2(q-1)$, $k = q+1$, $r = q^2 - 1$ *und* $\lambda = q$.

B e w e i s. Δ ist nach (2.2) eine Frobeniusgruppe. K sei der Frobeniuskern von Δ. Ferner seien P und Q zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$. Es gibt genau ein $\varkappa \in \mathsf{K}$ mit $P^\varkappa = Q$. Ist nun $\Lambda = \{\delta \in \Delta \mid P^\delta = Q\}$, so ist $\Lambda = \Delta_P \varkappa$. Da Δ eine Frobeniusgruppe ist, hat jedes von $\varkappa$ verschiedene Element aus Λ einen Fixpunkt. Sei $\varkappa \neq \lambda$, μ und $\lambda, \mu \in \Lambda$. Ist $X^\lambda = X = X^\mu$, so ist wegen $P \neq Q = P^\lambda = P^\mu$ einmal $X \neq P$. Zum andern ist $X^{\lambda\mu^{-1}} = X$ und $P^{\lambda\mu^{-1}} = P$. Folglich ist $\lambda = \mu$, da ja Δ eine Frobeniusgruppe ist. Somit gehen durch P und Q genau $|\Lambda| - 1$ Blöcke. Nun ist $|\Lambda| = o(\Delta_P) = q + 1$ und daher $\lambda = q$, q. e. d.

Aus (2.3) folgt nun sofort

(2.4) *$\mathfrak{J}(\Delta)$ ist ein Blockplan mit den Parametern $v = q^2 + 1$, $b = q(q^2 + 1)$, $k = q + 1$, $r = q(q + 1)$ und $\lambda = q + 1$.*

$\mathfrak{J}(\Delta)$ ist also ebenso wie $\mathfrak{J}(\mathfrak{o})$ ein Blockplan mit den gleichen Parametern wie eine Möbiusebene der Ordnung q. Im allgemeinen wird jedoch $\mathfrak{J}(\Delta)$ keine Möbiusebene sein. Wir interessieren uns daher für notwendige und hinreichende Bedingungen, die garantieren, daß $\mathfrak{J}(\Delta)$ eine Möbiusebene ist.

Offensichtlich ist $\mathfrak{J}(\Delta)$ genau dann eine Möbiusebene, wenn durch drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{J}(\Delta)$ höchstens ein Block geht. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ seien zwei verschiedene Blöcke von $\mathfrak{J}(\Delta)$ mit $|\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}| \geqq 3$. Es gibt also drei paarweise verschiedene Punkte $R, S, T \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Ferner gibt es zwei Punkte P und Q mit $\mathfrak{b} = R^{\Delta_P}$ und $\mathfrak{c} = R^{\Delta_Q}$. Da $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \neq \emptyset$ ist, muß $P \neq Q$ sein. Es gibt dann zwei Elemente $\delta, \eta \in \Delta_P$ und zwei Elemente $\varepsilon, \zeta \in \Delta_Q$ mit $R^\delta = S = R^\varepsilon$ und $R^\eta = T = R^\zeta$. Wegen $R \neq S \neq T \neq R$ ist $1 \neq \delta \neq \eta \neq 1$ und $1 \neq \varepsilon \neq \zeta \neq 1$. Ferner ist $\delta\varepsilon^{-1}, \eta\zeta^{-1} \in \Delta_R$ und $\delta\varepsilon^{-1} \neq \eta\zeta^{-1}$, da sonst wegen $\eta^{-1}\delta = \zeta^{-1}\varepsilon \in \Delta_P \cap \Delta_Q = 1$ auch $\eta = \delta$ und $\varepsilon = \zeta$ wäre.

Ist umgekehrt $P \neq Q$ und $\delta, \eta \in \Delta_P$ mit $1 \neq \delta \neq \eta \neq 1$ und $\varepsilon, \zeta \in \Delta_Q$ mit $1 \neq \varepsilon \neq \zeta \neq 1$ und ist $\delta\varepsilon^{-1}, \eta\zeta^{-1} \in \Delta_R$, so sind R, $R^\delta = R^\varepsilon$ und $R^\eta = R^\zeta$ drei paarweise verschiedene Punkte, da offensichtlich $R \neq P, Q$ ist. Somit ist $|R^{\Delta_P} \cap R^{\Delta_Q}| \geqq 3$ und $R^{\Delta_P} \neq R^{\Delta_Q}$, da ja $P \neq Q$ ist. Somit gilt

(2.5) *$\mathfrak{J}(\Delta)$ ist genau dann eine Möbiusebene, falls aus $1 \neq \delta, \eta \in \Delta_P$ und $1 \neq \varepsilon, \zeta \in \Delta_Q$ und $\delta\varepsilon^{-1}, \eta\zeta^{-1} \in \Delta_R$ und $\delta\varepsilon^{-1} \neq \eta\zeta^{-1}$ und $P \neq Q \neq R \neq P$ folgt, daß entweder $\delta = \eta$ oder $\varepsilon = \zeta$ ist.*

Es gilt nun der

Satz 6. *Ist $\mathfrak{A}$ eine endliche desarguessche affine Ebene der Ordnung $q = 2^r$, ist Δ eine scharf fahnentransitive Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ mit zyklischem Δ_P, ist schließlich Δ_P im Falle $q = 8$ eine Untergruppe der Gruppe aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{J}(\Delta)$ eine (miquelsche) Möbiusebene.*

Beweis. Δ ist nach (2.2) eine Frobeniusgruppe und der Frobeniuskern K von Δ ist die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Aus $\Delta = \mathsf{K}\Delta_P$ folgt daher nach Hilfssatz 2, daß Δ eine Untergruppe der Gruppe aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{A}$ ist. Nach Hilfssatz 1 sind daher, da Δ_P zyklisch ist, die nicht-trivialen Punkttransitivitätsgebiete von Δ_P für alle P Kegelschnitte. Ist g die uneigentliche Gerade von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathsf{H} = \Delta_P\Gamma(P, g)$ eine zyklische Gruppe, die auf den von P verschiedenen Punkten von $\mathfrak{A}$

transitiv ist. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt, daß $\Gamma(P, g)$ eine auf den nicht-trivialen Punkttransitivitätsgebieten von Δ_P transitive Permutationsgruppe ist. Hieraus folgt, falls $P \neq Q$ ist, daß $\mathfrak{J}(Q^{\Delta_P}) = \mathfrak{J}(\Delta)$ ist. Da Q^{Δ_P} ein Kegelschnitt ist, ist $\mathfrak{J}(Q^{\Delta_P})$ nach Korollar 1 eine Möbiusebene, q. e. d.

Korollar 2. *Ist $\mathfrak{A}$ eine endliche affine Ebene, ist Δ eine scharf fahnentransitive Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ mit zyklischem Δ_P und sind alle nicht-trivialen Punkttransitivitätsgebiete von Δ_P Ovale, so ist $\mathfrak{A}$ desarguessch.*

Beweis. Ist $\mathfrak{J}(\Delta) = \mathfrak{M}$ eine Möbiusebene, so ist $\mathfrak{A}(U, \mathfrak{M}) = \mathfrak{A}$. Da die Ordnung von $\mathfrak{A}$ notwendig gerade ist, folgt daher nach DEMBOWSKI [6] Satz 3, daß $\mathfrak{A}$ desarguessch ist. Um Korollar 2 zu beweisen, müssen wir daher nur noch zeigen, daß $\mathfrak{J}(\Delta)$ eine Möbiusebene ist.

Nach FOULSER [9] Corollary 2.2 und dem letzten Absatz von Abschnitt 4 operiert Δ auch als scharf fahnentransitive Kollineationsgruppe auf einer desarguesschen Ebene $\bar{\mathfrak{A}}$ der Ordnung $q = o(\mathfrak{A})$. Ist nun $\bar{\mathfrak{J}}(\Delta)$ der der Gruppe Δ in $\bar{\mathfrak{A}}$ zugeordnete Blockplan, so ist $\bar{\mathfrak{J}}(\Delta)$ im Falle $q \neq 8$ nach Hilfssatz 2 und Satz 6 eine Möbiusebene. Hieraus und aus (2.5) folgt dann, daß auch $\mathfrak{J}(\Delta)$ eine Möbiusebene ist. Da eine affine Ebene der Ordnung 8 stets desarguessch ist, ist Korollar 2 daher bewiesen.

3. Translationsebenen mit vielen Elationen

In diesem Abschnitt beweisen wir den Hauptsatz der vorliegenden Arbeit, nämlich den

Satz 7. *Ist $\mathfrak{A}$ eine endliche affine Ebene der Ordnung q und ist Π eine Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften*

(a) *Es ist $\Pi(U, g) \neq 1$ für alle Fahnen (U, g) mit $g \neq g_\infty$ und $U \in g_\infty$.*

(b) *Ist $\delta \in \Delta = \langle \Pi(U, g) \mid U = g \cap g_\infty \rangle$ und läßt δ drei paarweise verschiedene uneigentliche Punkte einzeln invariant, so ist δ eine Dilatation von $\mathfrak{A}$,*

so ist $\mathfrak{A}$ entweder desarguessch und Δ_P ist isomorph zur $SL(2, N)$ mit $N = q$ oder $N = 5$ und $q = 9$ oder es ist $q = 2^r$ und Δ_P eine Diedergruppe der Ordnung $2(q+1)$ oder aber $\mathfrak{A}$ ist eine nicht-desarguessche Translationsebene der Ordnung $q = 2^{2(2r+1)} \geqq 64$ und Δ_P ist isomorph zur $S(2^{2r+1})$.

Bevor wir jedoch mit dem Beweis beginnen, beweisen wir noch den folgenden

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ eine endliche Translationsebene und ist Δ eine Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften:* (1) *Δ besitzt einen Fixpunkt P und* (2) *jedes Element aus Δ, welches eine Gerade durch P festläßt, liegt* *in $\Delta(P, g_\infty)$, so sind die p-Sylowgruppen ungerader Ordnung von Δ zyklisch, während die 2-Sylowgruppen von Δ entweder zyklisch oder (verallgemeinerte) Quaternionengruppen sind.*

Beweis. Da jede Untergruppe von Δ ebenfalls die Eigenschaften (1) und (2) hat, können wir annehmen, daß Δ eine p-Gruppe ist. Die von Δ auf g_∞ induzierte Permutationsgruppe Δ^* operiert wegen (2) regulär auf g_∞. Folglich ist $o(\Delta^*)$ ein Teiler von $q+1$, wenn q die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist. Andrerseits ist der Kern des Homomorphismus von Δ auf Δ^* gleich $\Delta(P, g_\infty)$ und die Ordnung von $\Delta(P, g_\infty)$ ist ein Teiler von $q-1$. Ist nun $p > 2$, so ist daher wegen $(q-1, q+1) \leqq 2$ entweder $\Delta(P, g_\infty) = 1$ oder $\Delta^* = 1$. Sei $\Delta^* = 1$. Dann ist $\Delta = \Delta(P, g_\infty)$ und daher nach André [1] Zusatz 2, S. 169, zyklisch. Sei also $\Delta(P, g_\infty) = 1$. In diesem Fall operiert Δ auf den Geraden durch P regulär. Wir betrachten die Gruppe $\mathsf{T}\Delta$, wobei T die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$ sei. Es sei (Q, h) eine Fahne von $\mathfrak{A}$ und σ sei ein Element aus $\mathsf{T}\Delta$, welches die Fahne (Q, h) invariant läßt. Da T auf den Punkten von $\mathfrak{A}$ transitiv ist, können wir annehmen, daß $Q = P$ ist. Ist nun $\sigma = \tau\delta$ mit $\tau \in \mathsf{T}$ und $\delta \in \Delta$, so ist daher $P^\tau = P^{\delta^{-1}} = P$ und folglich $\tau = 1$, Somit ist $\sigma \in \Delta$. Da Δ auf den Geraden durch P regulär operiert, ist daher $\sigma = 1$. Somit operiert $\mathsf{T}\Delta$ auf den Fahnen von $\mathfrak{A}$ regulär. Hieraus folgt, daß einzig die Identität aus $\mathsf{T}\Delta$ zwei verschiedene Fixpunkte hat. Somit ist $\mathsf{T}\Delta$ eine Frobeniusgruppe. Offensichtlich ist T der Frobeniuskern und Δ ein Frobeniuskomplement. Da Δ eine p-Gruppe und $p > 2$ ist, ist Δ daher zyklisch. Es sei daher $p = 2$. Ferner sei σ eine Involution aus Δ. Dann läßt σ mindestens eine Gerade durch P fest. Folglich ist $\sigma \in \Delta(P, g_\infty)$. Nun ist $\Delta(P, g_\infty)$ nach André [1] Zusatz 2, S. 169 zyklisch. Somit ist σ die einzige Involution in Δ. Daher ist Δ entweder zyklisch oder eine (verallgemeinerte) Quaternionengruppe, q. e. d.

Beweis von Satz 7. $\mathfrak{A}$ sei eine endliche affine Ebene der Ordnung q und Π sei eine Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ mit den beiden Eigenschaften (a) und (b). Nach Piper [17] Theorem 2, (ii) ist dann $\mathfrak{A}$ eine Translationsebene und Π enthält die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Da wir uns im wesentlichen nur für die Gruppe Δ_P interessieren und da Δ wegen $\Delta(U, g) = \Pi(U, g)$ ebenfalls die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, werden wir annehmen, daß $\Pi = \Delta$ ist. Ist M irgendeine Untergruppe von Π, so bezeichnen wir mit M^* die von M auf g_∞ induzierte Permutationsgruppe. Es gilt nun

(3.1) *Ist P ein eigentlicher Punkt von $\mathfrak{A}$, so ist $\Pi_P^* = \Pi^*$.*

Beweis. Ist T die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$, so ist $\Pi = \mathsf{T}\Pi_P$ und daher $\Pi^* = \mathsf{T}^*\Pi_P^* = \Pi_P^*$, q. e. d.

Da $\mathfrak{A}$ eine Translationsebene ist, ist $q = p^r$ Potenz einer Primzahl p. Nun ist $o(\Pi(U, g))$ ein von 1 verschiedener Teiler von q. Folglich gibt es in $(\Pi^*)_U$ ein Element der Ordnung p, welches U und nur U als Fixpunkt hat. Aus GLEASON [10] Lemma 1.7 folgt daher, daß Π^* auf den Punkten von g_∞ transitiv ist. Ferner folgt aus (b), daß nur die Identität aus Π^* drei verschiedene Fixpunkte auf g_∞ hat.

1. Fall. $q = 2^r$. Weil nur die Identität aus Π^* drei verschiedene Fixpunkte hat, folgt, daß $(\Pi^*)_U$ entweder eine 2-Gruppe oder aber eine Frobeniusgruppe ist, deren Kern eine 2-Gruppe ist. Hieraus folgt, daß der Zentralisator einer Involution aus $(\Pi^*)_U$ eine 2-Gruppe ist. Da andrerseits wegen $q + 1 \equiv 1 \bmod 2$ jede Involution einen Fixpunkt hat, folgt, daß der Zentralisator jeder Involution aus Π^* eine 2-Gruppe ist. Schließlich folgt ebenfalls aus $q + 1 \equiv 1 \bmod 2$ und $(\Pi^*)_{U,V,W} = 1$, daß zwei verschiedene 2-Sylowgruppen von Π^* trivialen Durchschnitt haben. Nach SUZUKI [22] Theorem 5 gilt daher, wenn Σ^* eine 2-Sylowgruppe von Π^* ist, eine der folgenden Aussagen:

(i) Σ^* ist normal in Π^*;

(ii) Σ^* enthält genau eine Involution;

(iii) Π^* ist zweifach transitiv auf g_∞, enthält jedoch keinen Normalteiler der Ordnung $q + 1$.

Da Σ^* einen universellen Fixpunkt hat und Π^* transitiv ist, kann Σ^* nicht normal in Π^* sein. Der Fall (i) kann also nicht auftreten.

Enthält Σ^* genau eine Involution σ, so ist $\langle\sigma\rangle$ charakteristisch in Σ^* und damit normal in $(\Pi^*)_U$, falls U der Fixpunkt von Σ^* ist. Hieraus folgt, daß σ im Zentrum von $(\Pi^*)_U$ liegt. Somit ist $\Sigma^* = (\Pi^*)_U$, da ja der Zentralisator einer Involution eine 2-Gruppe ist. Folglich ist $(\Pi^*)_{U,V} = 1$ für alle $U, V \in g_\infty$, d. h. Π^* ist eine Frobeniusgruppe. Ferner folgt, daß $o(\Pi(U, g)) = 2$ ist, falls $g \neq g_\infty$ und $U = g \cap g_\infty$ ist, weil ja $\Pi(U, g)$ eine elementarabelsche 2-Gruppe ist. K^* sei der Frobeniuskern von Π^*. Dann ist $\Pi^* = \mathsf{K}^* \Pi^*(U, g)$ und daher $o(\Pi^*) = 2(q + 1)$. Nach (3.1) ist $\Pi_P^* = \Pi^*$ und Π_P wird, wie wir beim Beweis von (3.1) gesehen haben, von den Elationen aus Π_P erzeugt. Der Kern Λ des Homomorphismus von Π_P auf Π_P^* besteht aus (P, g_∞)-Streckungen. Daher ist $o(\Lambda)$ ein Teiler von $q - 1$ und somit ist $(o(\Lambda), o(\Pi_P^*)) = 1$. Die Gruppe Π_P zerfällt daher nach einem Satz von SCHUR (s. z.B. ZASSENHAUS [27] Theorem 25 S. 162) über Λ. Folglich ist $\Lambda = 1$, d.h. Π_P und Π_P^* sind isomorph. Π_P ist also eine Frobeniusgruppe der Ordnung $2(q + 1)$. Es sei K der Frobeniuskern von Π_P. Dann besitzt K einen Automorphismus der Ordnung 2, der außer der Identität kein Element von K festläßt. Folglich ist K abelsch. Nun ist

K auf den Geraden durch P transitiv und aus Ordnungsgründen sogar scharf transitiv. Somit erfüllt K die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3. Da K abelsch ist, gilt daher

(3.2) K *ist zyklisch.*

Es sei Q ein von P verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}$ und $\Phi = \Pi_P$. Dann ist

(3.3) $|Q^\Phi| = q + 1.$

Beweis. Da Φ auf den Geraden durch P transitiv ist, ist $|Q^\Phi| \geqq q + 1$. Es gibt jedoch eine Elation $\tau \neq 1$ in Φ mit $Q^\tau = Q$. Also ist $2(q + 1) = o(\Phi) > |Q^\Phi| \geqq q + 1$, q. e. d.

Aus (3.3) folgt, daß K die gleichen Punkttransitivitätsgebiete wie Φ hat. Ist nun Q ein von P verschiedener Punkt von $\mathfrak{A}$ und ist $Q \in h \neq PQ$, so gibt es eine Elation $\tau \neq 1$ in Φ, die die Achse $P(h \cap g_\infty)$ und das Zentrum $h \cap g_\infty$ hat. Dann ist $h^\tau = h$ aber $Q^\tau \neq Q$. Folglich ist $|h \cap Q^\mathsf{K}| = |h \cap Q^\Phi| \geqq 2$ für jede von PQ verschiedene Gerade h durch Q. Aus (3.3) folgt dann, daß $|h \cap Q^\mathsf{K}| = 2$ ist. Somit gilt

(3.4) Q^K *ist ein Oval.*

Da $\mathsf{T}\mathsf{K}$ scharf fahnentransitiv ist, folgt daher wegen (3.2) und (3.4) aus Korollar 2, daß $\mathfrak{A}$ desarguessch ist.

Im Falle (iii) ist Π^* nach Suzuki [23] Theorem 1 und Theorem 8 entweder isomorph zur $SL(2, q)$ oder aber isomorph zur $S(n)$ mit $n^2 = q$. Ferner folgt, wie in Lüneburg [14] am Ende des Beweises von Satz 5 gezeigt, daß in beiden Fällen Π_P und Π_P^* isomorph sind. Somit ist also Π_P entweder isomorph zur $SL(2, q)$ und daher $\mathfrak{A}$ nach Lüneburg [14] Satz 2 desarguessch oder aber Π_P ist isomorph zur $S(n)$ mit $n^2 = q$.

2. Fall. $q \equiv 1 \bmod 2$. In diesem Fall beweisen wir als erstes

(3.5) *Ist Π^* auflösbar, so ist $q = 3$.*

Beweis. Π^* sei auflösbar. Da der Kern des Homomorphismus von Π auf Π^* nur aus Dilatationen von $\mathfrak{A}$ besteht, und da die Gruppe aller Dilatationen einer Translationsebene auflösbar ist, so ist auch Π auflösbar. Nun enthält Π die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Ferner ist Π_P auf den uneigentlichen Punkten von $\mathfrak{A}$ transitiv. Daher ist Π fahnentransitiv auf $\mathfrak{A}$. Aus der Auflösbarkeit und der Fahnentransitivität von Π folgt nach Foulser [9], daß Π auch als fahnentransitive Gruppe auf einer desarguesschen affinen Ebene der Ordnung q operiert, und zwar so, daß die Darstellung von Π als Permutationsgruppe auf den Punkten von $\mathfrak{A}$ zu der Darstellung von Π als Permutationsgruppe auf den Punkten der desarguesschen Ebene $\mathfrak{A}_d$ äquivalent ist. Ist nun $1 \neq \tau \in \Pi(U, g)$, so hat τ genau q Fixpunkte in $\mathfrak{A}$ und daher auch genau q Fixpunkte in $\mathfrak{A}_d$. Wären diese Fixpunkte in $\mathfrak{A}_d$ nicht kollinear, so ließe τ eine Unterebene der Ordnung s mit $s^2 = q$ elementweise fest. Da $\mathfrak{A}_d$ desarguessch ist, ist daher $\tau^2 = 1$ ein Widerspruch. Somit ist τ eine Elation. Hieraus folgt, daß Π^* einer Untergruppe der $PSL(2, q)$ isomorph ist. Ist $q = p^r$, so ist überdies $p(q+1)$ ein Teiler der Ordnung von Π^*. Nach Dickson [7] § 262 ist dann entweder $\Pi^* \cong \mathfrak{A}_4$ oder $\cong \mathfrak{S}_4$. Dann ist aber $p = 3$ und $q = 3$ oder $= 7$. Da p ein Teiler von q ist, ist $q = 3$, q. e. d.

Da eine Ebene der Ordnung 3 desarguessch ist, nehmen wir im folgenden an, daß $q > 3$ ist. Dann gilt also

(3.5′) *Π^* ist nicht auflösbar.*

Weiterhin gilt

(3.6) *Π^* enthält keinen Normalteiler vom Index 2.*

Beweis. Sei $\mathsf{N} \trianglelefteq \Pi^*$ und $[\Pi^* : \mathsf{N}] \leq 2$. Wegen $q \equiv 1 \bmod 2$ ist auch $o(\Pi(U, g)) \equiv 1 \bmod 2$ und daher $\Pi^*(U, g) \subseteqq \mathsf{N}$ und somit $\Pi^* \subseteqq \mathsf{N}$, q. e. d.

Eine einfache Folgerung aus (3.6) ist

(3.7) *Ist $q \equiv 3 \bmod 4$, so hat keine Involution aus Π^* einen Fixpunkt. Ist $q \equiv 1 \bmod 4$, so hat jede Involution aus Π^* genau zwei Fixpunkte.*

Beweis. Ist σ eine Involution aus Π^* und hat σ einen Fixpunkt, so hat σ wegen der Voraussetzung (b) unseres Satzes genau zwei Fixpunkte. Die restlichen $q - 1$ Punkte werden in $\frac{1}{2}(q-1)$ Zyklen der Länge 2 zerlegt. Wäre $\frac{1}{2}(q-1)$ ungerade, so hätte daher Π^* einen Normalteiler vom Index 2 im Widerspruch zu (3.6). Also ist $q \equiv 1 \bmod 4$. Hat σ keinen Fixpunkt, so werden die $q+1$ Punkte von g_∞ von σ in $\frac{1}{2}(q+1)$ Zyklen der Länge 2 zerlegt. Aus (3.6) folgt wieder, daß $\frac{1}{2}(q+1)$ gerade, d.h. $q \equiv 3 \bmod 4$ ist, q. e. d.

(3.8) *Es ist $\mathfrak{U}\Pi^* = 1$.*

Beweis. Angenommen (3.8) wäre falsch. Da $\mathfrak{U}\Pi^*$ nach Feit und Thompson [8] auflösbar ist, gibt es daher eine charakteristische abelsche Untergruppe $\mathsf{A} \neq 1$ in $\mathfrak{U}\Pi^*$. Folglich ist A ein Normalteiler von Π^*. Hieraus und aus der Transitivität von Π^* folgt, daß alle Transitivitätsgebiete von A die gleiche Länge haben und da diese Länge ein Teiler von $o(\mathsf{A})$ ist, folgt, daß alle Transitivitätsgebiete von A mindestens drei Elemente enthalten. Ist nun $Q \in g_\infty$ und $\alpha \in \mathsf{A}$ mit $Q^\alpha = Q$, so hat α mindestens drei Fixpunkte, da ja A abelsch ist. Aus (b) folgt daher, daß $\alpha = 1$ ist.

Sei wieder $Q \in g_\infty$. Die Gruppe $(\Pi^*)_Q$ ist eine Frobeniusgruppe. K sei der Frobeniuskern von $(\Pi^*)_Q$. Dann ist $\mathsf{A}\,\mathsf{K}$ ebenfalls eine Frobeniusgruppe: Ist $(\alpha\varkappa)^{-1}\mathsf{K}\alpha\varkappa \cap \mathsf{K} \neq 1$, so gibt es ein $\varkappa' \neq 1$ in K mit $\alpha^{-1}\varkappa'\alpha \in \mathsf{K}$. Folglich ist $Q^\alpha = Q$ und daher nach dem oben Bewiesenen $\alpha = 1$. Es ist also $\gamma^{-1}\mathsf{K}\gamma \cap \mathsf{K} = 1$ für alle $\gamma \in \mathsf{A}\,\mathsf{K}$ mit $\gamma \notin \mathsf{K}$. Wäre nun $\mathsf{K} \neq (\Pi^*)_Q$, so gäbe es einen Punkt $R \neq Q$ mit $(\Pi^*)_{Q,R} \neq 1$. Sei $1 \neq \delta \in (\Pi^*)_{Q,R}$ und $\delta\alpha\varkappa = \alpha\varkappa\delta$ für ein $\alpha \in \mathsf{A}$ und ein $\varkappa \in \mathsf{K}$. Da Q und R die einzigen Fixpunkte von δ sind und da, weil $o(\mathsf{K})$ ein Teiler von q ist, die Ordnung von $\alpha\varkappa$ ungerade ist, ist $Q^{\alpha\varkappa} = Q$ und $R^{\alpha\varkappa} = R$. Da $Q^\varkappa = Q$ ist, ist $Q^\alpha = Q$ und somit $\alpha = 1$. Also ist $Q^\varkappa = Q$ und $R^\varkappa = R$ und daher auch $\varkappa = 1$. Hieraus folgt, daß $(\Pi^*)_{Q,R}$ eine Gruppe von fixpunktfreien Automorphismen von $\mathsf{A}\,\mathsf{K}$ treu induziert. Nach THOMPSON [24] ist $\mathsf{A}\,\mathsf{K}$ daher nilpotent. Nun ist aber $\mathsf{A} \neq 1$ und $\mathsf{K} \neq 1$ und $\mathsf{A}\,\mathsf{K}$ eine Frobeniusgruppe: ein Widerspruch. Somit ist $(\Pi^*)_{U,V} = 1$ für alle $U, V \in g_\infty$, für die $U \neq V$ ist. Hieraus folgt, daß Π^* eine Frobeniusgruppe ist. Der Frobeniuskern einer Frobeniusgruppe ist nach THOMPSON loc. cit. nilpotent. Ferner ist $o\big((\Pi^*)_Q\big)$ ein Teiler von q. Folglich ist $(\Pi^*)_Q$ eine p-Gruppe, da ja q eine Primzahlpotenz ist, und daher zyklisch. Hieraus folgt, daß Π^* auflösbar ist im Widerspruch zu (3.5′).

(3.9) *Die 2-Sylowgruppen von Π^* sind weder zyklisch noch (verallgemeinerte) Quaternionengruppen.*

Beweis. Ist eine 2-Sylowgruppe von Π^* zyklisch, so gibt es nach BURNSIDE [4] Theorem II auf S. 327 und S. 115 ein normales 2-Komplement. Nach (3.8) ist Π^* daher eine 2-Gruppe im Widerspruch zu (3.5′). Ist die 2-Sylowgruppe von Π^* eine (verallgemeinerte) Quaternionengruppe, so enthält $\Pi^*/\mathfrak{U}\,\Pi^*$, in unserem Falle also Π^* nach BRAUER und SUZUKI [3] genau eine Involution. σ sei diese Involution. Dann ist $\sigma \in \mathfrak{Z}\Pi^*$ und daher $\Pi^*(U, g) = \sigma^{-1}\Pi^*(U, g)\sigma = \Pi^*(U^\sigma, g^\sigma)$. Hieraus folgt, daß $U = U^\sigma$ ist. Da $U \in g_\infty$ beliebig war, ist $\sigma = 1$, q. e. a.

Die Hauptschwierigkeit beim Beweise von Satz 7 liegt im Nachweis von

(3.10) *Die 2-Sylowgruppen von Π^* sind Diedergruppen.*

Beweis. Da $q + 1$ gerade und ein Teiler von $o(\Pi_P)$ ist, gibt es in Π_P eine Involution. Angenommen Π_P enthält genau eine Involution. Dann ist die 2-Sylowgruppe von Π_P nach BURNSIDE [4] Theorem VI, S. 132, entweder zyklisch oder eine (verallgemeinerte) Quaternionengruppe. Wäre sie zyklisch, so wäre auch die 2-Sylowgruppe von Π^* zyklisch im Widerspruch zu (3.9). Also ist die 2-Sylowgruppe von Π_P eine Quaternionengruppe. Nun ist der Kern des Homomorphismus von Π_P auf Π^* gerade gleich $\Pi(P, g_\infty)$. Da Π_P von seinen Elationen erzeugt wird, ist $\Pi(P, g_\infty) = \mathfrak{Z}\Pi_P$. Hieraus folgt, daß der Durchschnitt einer 2-Sylowgruppe von Π_P mit $\Pi(P, g_\infty)$ höchstens die Ordnung 2 hat, da das Zentrum einer Quaternionengruppe genau die Ordnung 2 hat. Da es in Π_P aber nur eine Involution gibt, hat der Durchschnitt die Ordnung 2. Hieraus folgt, da die Zentrumsfaktorgruppe einer Quaternionengruppe eine Diedergruppe ist, die Behauptung.

Im folgenden nehmen wir daher an, daß Π_P mehr als eine Involution enthält. Nun ist $\Pi(P, g_\infty)$ nach André [1] Zusatz 2, S. 169, zyklisch. Folglich enthält $\Pi(P, g_\infty)$ höchstens eine Involution. In Π_P gibt es daher eine involutorische Streckung mit uneigentlichem Zentrum. Hieraus folgt, daß es zwei Punkte Q und R auf g_∞ gibt, so daß $(\Pi^*)_{Q,R}$ gerade Ordnung hat. Aus (3.7) folgt dann, daß $q \equiv 1 \bmod 4$ ist. Nun ist $(\Pi^*)_U$ eine Frobeniusgruppe und daher sind alle Untergruppen $(\Pi^*)_{U,V}$ von $(\Pi^*)_U$ mit $(\Pi^*)_{U,V} \neq 1$ in $(\Pi^*)_U$ konjugiert. Aus der Transitivität von Π^* folgt daher, daß alle Gruppen $(\Pi^*)_{U,V}$ für die $(\Pi^*)_{U,V} \neq 1$ ist, in Π^* konjugiert sind. Da $(\Pi^*)_{U,V}$ höchstens eine Involution enthält, folgt, daß alle Involutionen in Π^* konjugiert sind. Und hieraus folgt wiederum, daß alle Involutionen aus Π^* durch involutorische Streckungen induziert werden, da dies ja für wenigstens eine Involution der Fall war.

Die 2-Sylowgruppen von $(\Pi^*)_{Q,R}$ sind entweder zyklisch oder (verallgemeinerte) Quaternionengruppen. Nach (3.9) sind daher die 2-Sylowgruppen von $(\Pi^*)_{Q,R}$ echt in 2-Sylowgruppen von Π^* enthalten. Es gibt folglich ein Element $\pi \in \Pi_P$ mit $Q^\pi = R$ und $R^\pi = Q$. Hieraus folgt, daß die Involution in $(\Pi^*)_{Q,R}$ sowohl von einer involutorischen (Q, PR)-Streckung ϱ als auch von einer involutorischen (R, PQ)-Streckung σ induziert wird. Offensichtlich ist $\pi^{-1}\varrho\pi = \sigma$. Da eine Involution von Π^* durch höchstens zwei involutorische Streckungen aus Π_P induziert wird, folgt, daß alle Involutionen aus Π_P, die ein uneigentliches Zentrum besitzen, in Π_P konjugiert sind. Ist σ eine involutorische Streckung aus Π_P mit der Achse QP, $(Q \in g_\infty)$, so ist das Erzeugnis aller involutorischen Streckungen aus Π_P, die die Achse QP haben, nach André [2] Satz 3 gleich $\langle\sigma\rangle\Pi(Q, PQ)$. Hieraus folgt, daß Π_P von seinen involutorischen Streckungen, die ein uneigentliches Zentrum besitzen, erzeugt wird. Π_P ist also das Erzeugnis einer Klasse konjugierter Involutionen. Hieraus folgt, daß die Kommutatorgruppe von Π_P höchstens den Index 2 in Π_P hat. Da Π_P von Elementen ungerader Ordnung erzeugt wird, folgt daher, daß Π_P gleich seiner Kommutatorgruppe ist. Nach Schur [20] Satz III ist daher das Zentrum von Π_P homomorphes Bild des Multiplikators von Π^*[3]). Nun wird, wie wir

---

[3]) Zur Definition des Multiplikators einer Gruppe siehe Schur [19] S. 23.

sahen, jede Involution aus Π^* durch zwei verschiedene involutorische Streckungen aus Π_P induziert. Das Produkt zweier solcher Streckungen ist eine involutorische (P, g_∞)-Streckung, so daß also $\mathfrak{Z}\Pi_P = \Pi(P, g_\infty)$ gerade Ordnung hat. Nach SCHUR [20] Satz V ist daher die 2-Sylowgruppe von Π^* keine Semidiedergruppe.

Sei nun T eine 2-Sylowgruppe von Π^*. Ferner sei τ eine Involution aus dem Zentrum von T. Nach (3.7) hat τ wegen $q \equiv 1 \bmod 4$ genau zwei Fixpunkte Q und R. Hieraus folgt, daß das Quadrat eines jeden Elementes aus T die Punkte Q und R festläßt. Folglich ist $[\mathsf{T} : \mathsf{T}_{Q,R}] \leq 2$. Da nun $\mathsf{T}_{Q,R}$, wie wir gesehen haben, keine 2-Sylowgruppe von Π^* sein kann, folgt, daß $[\mathsf{T} : \mathsf{T}_{Q,R}] = 2$ ist. Ferner können nicht alle Involutionen aus T in $\mathsf{T}_{Q,R}$ liegen, da es in $\mathsf{T}_{Q,R}$ nur eine Involution gibt, und T folglich zyklisch oder eine (verallgemeinerte) Quaternionengruppe sein müßte. Es gibt also eine Involution $\varrho \in \mathsf{T}$ mit $\mathsf{T} = \langle\varrho\rangle \mathsf{T}_{Q,R}$. Wiederum wegen $q \equiv 1 \bmod 4$ hat ϱ zwei Fixpunkte S und T. Offensichtlich ist $\{Q, R\} \cap \{S, T\} = \emptyset$. Ist nun $\sigma \in \mathsf{T}_{Q,R}$ und $\sigma\varrho = \varrho\sigma$, so ist $\{S, T\}^\sigma = \{S, T\}$ und daher $S^{\sigma^2} = S$ und $T^{\sigma^2} = T$. Folglich ist $\sigma^2 = 1$, da ja σ^2 mindestens vier Fixpunkte hat. Hieraus folgt entweder, daß T eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4, d.h. eine Diedergruppe ist, oder aber, daß das Zentrum von T die Ordnung 2 hat, da ja $\mathsf{T}_{Q,R}$ nur eine Involution enthält.

Als nächstes zeigen wir, daß T eine zyklische Untergruppe vom Index 2 besitzt. Angenommen dies wäre falsch. Nach ZASSENHAUS [26] Satz 5 gibt es einen in $\mathsf{T}_{Q,R}$ enthaltenen zyklischen Normalteiler N von T mit $[\mathsf{T} : \mathsf{N}] = 4$. Angenommen T/N wäre zyklisch. Dann hat T nach BURNSIDE [4] S. 138 Erzeugende α und β mit

$$\alpha^{2^{m-2}} = \beta^4 = 1 \quad \text{und} \quad \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^t.$$

Nun ist $\beta^2 \in \mathsf{T}_{Q,R}$. Daher ist β^2 die einzige Involution in $\mathsf{T}_{Q,R}$. Somit ist $\beta^2 \in \mathsf{N}$: ein Widerspruch. Daraus folgt, daß $\tau^2 \in \mathsf{N}$ ist für alle $\tau \in \mathsf{T}$. Nun ist, wie wir oben sahen, $o(\mathfrak{Z}\mathsf{T}) = 2$. Ferner ist $\mathfrak{Z}\mathsf{T} \subsetneqq \mathsf{N}$. Schließlich kann T keine abelsche Gruppe enthalten, die ein direktes Produkt von N und einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 ist. Nach BURNSIDE [4] S. 139 hat T daher Erzeugende α, β und γ mit

$$\alpha^{2^{m-2}} = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \; \beta\alpha\beta = \alpha^{1+2^{m-3}}$$

und weiteren Relationen, die uns hier nicht interessieren. Ferner ist $m > 4$. Nun ist

$$\beta\alpha^2\beta = \alpha^{2+2^{m-2}} = \alpha^2.$$

Ferner folgt aus $\beta^2 = 1$, daß $\beta \notin T_{Q,R}$ ist. Somit ist $\alpha^2 \in \mathfrak{Z}\mathsf{T}$ und daher $\alpha^4 = 1$, d.h. $m = 4$: ein Widerspruch. Aus diesem Widerspruch folgt, daß T eine zyklische Untergruppe vom Index 2 besitzt.

Ist T abelsch, so ist T, wie wir gesehen haben, eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4. Sei also T nicht abelsch. Da T weder eine Quaternionengruppe noch eine Semidiedergruppe sein kann, ist T nach BURNSIDE [4] S. 135 entweder eine Diedergruppe oder aber T hat Erzeugende α und β mit

$$\alpha^{2^{m-1}} = 1 = \beta^2 \quad \text{und} \quad \beta\alpha\beta = \alpha^{1+2^{m-2}}.$$

Dann ist aber wieder $\beta\alpha^2\beta = \alpha^2$ und daher $\alpha^4 = 1$, d.h. $m = 3$. Dann ist aber $\beta\alpha\beta = \alpha^3 = \alpha^{-1}$ und T ist eine Diedergruppe. Damit ist (3.10) bewiesen.

Die 2-Sylowgruppen von Π^* sind nach (3.10) Diedergruppen. Nach GORENSTEIN und WALTER (s. GORENSTEIN [11] Theorem 1) ist daher entweder

1⁰ $\Pi^*/\mathfrak{U}\Pi^*$ isomorph einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, N)$, die die $PSL(2, N)$ enthält. Überdies ist N ungerade.

oder

2⁰ $\Pi^*/\mathfrak{U}\Pi^*$ ist isomorph zur $\mathfrak{A}_7$.

oder

3⁰ $\Pi^*/\mathfrak{U}\Pi^*$ ist isomorph einer 2-Sylowgruppe von Π^*.

Nun ist $\mathfrak{U}\Pi^* = 1$ nach (3.8). Ferner ist Π^* nach (3.5′) nicht auflösbar. Somit kann der Fall 3⁰ nicht auftreten. Also ist Π^* entweder isomorph zur $\mathfrak{A}_7$ oder zu einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, N)$, die die $PSL(2, N)$ enthält.

Sei $\Pi^* \cong \mathfrak{A}_7$. Ferner sei Σ eine Untergruppe von Π_P mit der Eigenschaft, daß Σ^* eine 3-Sylowgruppe von Π^* ist. Dann ist Σ^* eine elementarabelsche 3-Gruppe der Ordnung 9. Es sei $1 \neq \sigma \in \Sigma^*$. Ferner seien Q und R zwei verschiedene Punkte auf g_∞ mit $Q^\sigma = Q$ und $R^\sigma = R$. Aus $o(\Sigma^*) \equiv 1 \bmod 2$ und aus der Voraussetzung (b) unsres Satzes folgt, daß Q und R Fixpunkte von Σ^* sind. Da $(\Pi^*)_Q$ eine Frobeniusgruppe ist, ist daher Σ^* zyklisch: ein Widerspruch. Daraus folgt, daß ein von der Identität verschiedenes Element aus Σ^* höchstens einen Fixpunkt hat.

Es sei $1 \neq \sigma \in \Sigma^*$ und σ habe einen und damit genau einen Fixpunkt Q. Dann ist Q wiederum Fixpunkt von Σ^*, da Σ^* ja abelsch ist. Daher liegt Σ^* im Frobeniuskern von $(\Pi^*)_Q$. Hieraus folgt, daß 9 ein Teiler von q ist. Folglich ist q eine Potenz von 3, da ja q eine Primzahlpotenz ist. Nun ist $q + 1$ ein Teiler von $o(\mathfrak{A}_7) = \frac{1}{2} \cdot 7!$. Hieraus folgt, daß $q = 9$ oder $= 27$ ist. Nach HALL [12] Appendix II gibt es nur eine nichtdesarguessche Translationsebene der Ordnung 9. Da diese bekanntlich nicht die Voraussetzung (a) unsres Satzes erfüllt, folgt, daß $\mathfrak{A}$ im Falle

$q = 9$ desarguessch ist. Dann ist aber die $\mathfrak{A}_7$ zu einer Untergruppe der $PSL(2, 9)$ isomorph: ein Widerspruch. Also ist $q = 27$. Nun ist $27 \equiv 3 \bmod 4$. Aus (3.7) folgt daher, daß $o((\Pi^*)_Q)$ ungerade ist. Andrerseits ist $\frac{1}{2} \cdot 7! = o(\mathfrak{A}_7) = 28 \cdot o((\Pi^*)_Q)$. Hieraus folgt, daß $o((\Pi^*)_Q)$ gerade ist: ein Widerspruch.

Σ^* operiert also regulär auf g_∞. Hieraus folgt, daß Σ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 erfüllt. Die 3-Sylowgruppe von Σ ist daher zyklisch. Da homomorphe Bilder zyklischer Gruppen wieder zyklisch sind, ist also auch Σ^* zyklisch: ein Widerspruch.

Es kann also nur noch sein, daß Π^* einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, N)$ isomorph ist, die die $PSL(2, N)$ enthält. Π^* enthält also einen zur $PSL(2, N)$ isomorphen Normalteiler Π_0^*. Es sei $N = p^r$. Wir setzen zunächst voraus, daß $r > 1$ ist. Ferner sei Σ^* eine p-Sylowgruppe von Π_0^*. Dann ist Σ^* eine elementarabelsche p-Gruppe der Ordnung $N > p$. Insbesondere ist Σ^* also nicht zyklisch. Hieraus folgt dann wieder, daß Σ^* weder regulär operieren noch zwei Fixpunkte haben kann. Daraus folgt dann, daß Σ^* genau einen Fixpunkt U hat. Wäre T^* eine von Σ^* verschiedene p-Sylowgruppe von Π_0^* und wäre U auch Fixpunkt von T^*, so wäre U wegen $\Pi_0^* = \langle \Sigma^*, \mathrm{T}^* \rangle$ auch Fixpunkt von Π_0^*. Aus $\Pi_0^* \trianglelefteq \Pi^*$ und aus der Transitivität von Π^* folgt dann, daß $\Pi_0^* = 1$ ist: ein Widerspruch. Also haben zwei verschiedene p-Sylowgruppen von Π_0^* verschiedene Fixpunkte. Aus der Transitivität von Π^* und aus der Normalität von Π_0^* in Π^* folgt daher, daß jeder Punkt von g_∞ Fixpunkt einer p-Sylowgruppe von Π_0^* ist. Da aber jede p-Sylowgruppe genau einen Fixpunkt hat und da die Gruppe der inneren Automorphismen der $PSL(2, N)$ auf den p-Sylowgruppen der $PSL(2, N)$ zweifach transitiv operiert, folgt, daß Π_0^* auf g_∞ zweifach transitiv ist. Und da die Anzahl der p-Sylowgruppen der $PSL(2, N)$ gleich $N + 1$ ist, folgt auch noch, daß $N = q$ ist. Wie am Ende des Beweises von Satz 6 in Lüneburg [14] gezeigt wurde, ist dann $(\Pi_0)_P \cong SL(2, q)$ und $\mathfrak{A}$ desarguessch. Nach [14] Korollar 1 (a) enthält daher $(\Pi_0)_P$ alle Elationen von $\mathfrak{A}$, deren Zentren auf g_∞ liegen und deren Achsen durch P gehen. Somit ist $\Pi(U, g) = \Gamma(U, g)$ für alle inzidenten Punkt-Geradenpaare (U, g) mit $U \in g_\infty$.

Sei schließlich $N = p$. Dann ist $P\Gamma L(2, p) = PGL(2, p)$. Folglich ist der Index von Π_0^* in Π^* kleiner oder gleich 2. Nach (3.6) ist daher $\Pi^* \cong PSL(2, p)$. Sei nun p ein Teiler von q, d.h. $q = p^s$. Hieraus folgt, daß eine p-Sylowgruppe von Π^* einen und dann auch genau einen Fixpunkt hat. Wir schließen dann wieder wie im Falle $N = p^r > p$, daß $q = p$, $\mathfrak{A}$ desarguessch und $\Pi_P \cong SL(2, q)$ ist.

Sei schließlich p kein Teiler von q. Da die Sylowgruppen ungerader Ordnung der $PSL(2, p)$ alle zyklisch sind, folgt, daß auch $\Pi^*(U, PU)$

zyklisch ist. Nach DICKSON [7] § 244 liegt $\Pi^*(U, PU)$ in einer zyklischen Gruppe entweder der Ordnung $\frac{1}{2}(p-1)$ oder p oder $\frac{1}{2}(p+1)$. Da p kein Teiler von q ist, bleiben nur die Möglichkeiten $\frac{1}{2}(p-1)$ und $\frac{1}{2}(p+1)$. Ist nun Z eine zyklische Gruppe, die $\Pi^*(U, PU)$ enthält, so hat jedes Element $\neq 1$ aus Z genau einen Fixpunkt, da Z sonst als abelsche Gruppe außer dem Fixpunkt U noch einen weiteren Fixpunkt hätte. Dann wäre aber $\Pi^*(U, PU) = 1$. Somit ist also entweder $\frac{1}{2}(p-1)$ oder $\frac{1}{2}(p+1)$ ein Teiler von q. Da q die Ordnung einer Translationsebene ist, ist $q = s^t$ Potenz einer Primzahl s. Es ist daher $p - 1 = 2s^{t_0}$, falls $\frac{1}{2}(p-1)$ ein Teiler von q ist. Ferner ist $(q+1)\,o\big((\Pi^*)_U\big) = \frac{1}{2}p(p^2-1)$. Nun ist $(\Pi^*)_U$ eine Diedergruppe der Ordnung $p-1$ (bzw. $p+1$ im Falle, daß $\frac{1}{2}(p+1)$ ein Teiler von q ist), da ja $\Pi^*(U, PU)$ in einer Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(p-1)$ (bzw. $\frac{1}{2}(p+1)$) liegt. Folglich ist $2(q+1) = p(p+1)$. Hieraus folgt, daß $s^{t-t_0}(p-1) = 2q = (p+2)(p-1)$ ist. Also ist $s^{t-t_0} = p+2$. Nun ist $\frac{1}{2}(p-1) \geqq o\big(\Pi^*(U, g)\big) \geqq s > 2$ und daher $t_0 > 0$. Ferner ist $t - t_0 > 0$, da ja $p + 2 \geqq 5$ ist. Also ist s ein Teiler von $p-1$ und $p+2$. Hieraus folgt, daß $s = 3$ ist. Ferner ist $3 = p + 2 - (p-1) = 3^{t-t_0} - 2 \cdot 3^{t_0}$. Folglich ist $t_0 = 1$ und $t - t_0 = 2$. Also ist $q = 3^3 = 27$. Nun ist $o\big((\Pi^*)_U\big) = p - 1$ gerade. Es gibt also eine Involution in Π^*, die einen Fixpunkt besitzt, im Widerspruch zu (3.7), da ja $27 \equiv 3 \bmod 4$ ist.

Somit ist $\frac{1}{2}(p+1)$ ein Teiler von $q = s^t$. Es ist also $p + 1 = 2s^{t_0}$. Ferner ist $2q = (p-2)(p+1)$, da $o\big((\Pi^*)_U\big) = p + 1$ ist. Folglich ist $s^{t-t_0} = p - 2$. Ist $t = t_0$, so ist $p = 3$. Dann ist aber $p + 1 = 4 = 2s^{t_0}$: ein Widerspruch, da $s > 2$ ist. Also ist $t - t_0 > 0$ und daher, da $p + 1 > p - 2$ ist, auch $t_0 > 0$. Somit ist $s = 3$. Hieraus folgt, daß $t_0 = 1$ und $t = 2$ ist. Dann ist aber $p = 5$ und $q = 9$. Nach dem bereits erwähnten Resultat von M. HALL ist dann $\mathfrak{A}$ desarguessch. Dann ist aber Π_P in einer zur $SL(2, 9)$ isomorphen Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ enthalten. Hieraus folgt dann, daß $\Pi_P \cong SL(2,5)$ ist. Damit ist Satz 7 bewiesen.

4. $S(q)$ als Kollineationsgruppe des 3-dimensionalen projektiven Raumes über $GF(q)$

Es sei $q = 2^{2r+1} \geqq 8$ und $\mathfrak{S}$ sei der 3-dimensionale projektive Raum über $GF(q)$. Ferner sei Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$. Dann gilt

(4.1) *Δ hat keinen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen P sei ein Punkt von $\mathfrak{S}$ mit $P^\Delta = P$. Dann induziert Δ eine Permutationsgruppe auf der Menge der Geraden durch

P. Die Anzahl dieser Geraden ist gleich $q^2 + q + 1$. Nun ist der Grad einer minimalen transitiven Darstellung von $S(q)$ gleich $q^2 + 1$, da die Untergruppen maximaler Ordnung in $S(q)$ den Index $q^2 + 1$ haben (Suzuki [23] Theorem 9). Da $q^2 + q + 1$ und $q(q + 1)$ keine Teiler von $(q^2 + 1)\, q^2(q - 1) = o(\Delta)$ sind, folgt, daß Δ mindestens zwei verschiedene Geraden durch P festläßt. Somit läßt Δ eine Ebene durch P fest und damit alle Geraden durch P, die in dieser Ebene liegen, da deren Anzahl $q + 1$ ist. Die restlichen q^2 Geraden durch P bleiben dann aber auch einzeln unter Δ fest. Da auf jeder Geraden von $\mathfrak{S}$ genau $q + 1$ Punkte liegen und $q + 1 < q^2 + 1$ ist, bleiben die Geraden durch P punktweise fest: ein Widerspruch. Folglich gilt (4.1).

(4.2) *Δ ist in der projektiven Gruppe von $\mathfrak{S}$ enthalten.*

Dies folgt aus der Tatsache, daß Δ einfach ist, während die Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$ modulo der projektiven Gruppe zyklisch ist.

Ist Σ eine 2-Sylowgruppe von Δ, so hat Σ einen Fixpunkt, da die Punkteanzahl von $\mathfrak{S}$, die ja gleich $(q + 1)(q^2 + 1)$ ist, ungerade ist. Da zwei verschiedene 2-Sylowgruppen bereits Δ erzeugen, folgt aus (4.1), daß zwei verschiedene 2-Sylowgruppen von Δ keinen gemeinsamen Fixpunkt haben. Hat nun Σ genau einen Fixpunkt, so hat daher Δ ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$, da die Anzahl der 2-Sylowgruppen von Δ gleich $q^2 + 1$ ist.

Angenommen Σ habe zwei verschiedene Fixpunkte P und Q. Wegen $|PQ - \{P, Q\}| = q - 1$ hat Σ auf PQ mindestens drei verschiedene Fixpunkte. Aus (4.2) folgt daher, daß PQ von Σ punktweise festgelassen wird. Hätte nun Σ außerhalb PQ noch einen weiteren Fixpunkt, so ließe Σ eine Ebene von $\mathfrak{S}$ punktweise fest. Da sich zwei Ebenen in $\mathfrak{S}$ stets treffen, hätten dann zwei verschiedene 2-Sylowgruppen einen gemeinsamen Fixpunkt: ein Widerspruch. Σ läßt also genau eine Gerade punktweise fest und hat sonst keine weiteren Fixpunkte. Da zwei verschiedene 2-Sylowgruppen keinen gemeinsamen Fixpunkt haben, folgt, daß es eine Menge $\mathfrak{G}$ von $q^2 + 1$ paarweise windschiefen Geraden gibt, derart, daß ein $g \in \mathfrak{G}$ von genau einer 2-Sylowgruppe von Δ punktweise festgelassen wird, während keine 2-Sylowgruppe von Δ zwei Geraden von $\mathfrak{G}$ festläßt. Hieraus folgt, daß Δ auf $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv operiert. Sei nun Z eine Untergruppe der Ordnung $q - 1$ von Δ. Dann ist Z nach Suzuki [23] Theorem 9 zyklisch. Ferner gibt es zwei verschiedene Geraden g und h in $\mathfrak{G}$ mit $g^{\mathsf{Z}} = g$ und $h^{\mathsf{Z}} = h$. Es sei $P_i \in g$ $(i = 1, 2, 3)$ und $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$. Ferner sei $\zeta \in \mathsf{Z}$ und $P_i^{\zeta} = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ist $\mathsf{H} = \langle \zeta \rangle$, so ist auch $P_i^{\mathsf{H}} = P_i$. Da Δ auf $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv operiert, gibt es ein $\tau \in \Delta$ mit $g^{\tau} = h$ und $h^{\tau} = g$. Dann ist $\tau^{-1}\mathsf{Z}\tau = \mathsf{Z}$, da ja $\mathsf{Z} = \Delta_{g,h}$ ist. Nun ist H charakteristisch in Z, da Z zyklisch ist. Somit ist $\tau^{-1}\mathsf{H}\tau = \mathsf{H}$

und daher $P_i^{\tau\zeta} = P_i^{\tau}$ für alle i. Hieraus und aus (4.2) folgt dann, daß $\zeta = 1$ ist. Ist nun $\zeta \in \mathrm{Z}$ ein Element von Primzahlordnung p, so hat ζ daher wegen $\big(q - 1, q(q+1)\big) = 1$ genau zwei Fixpunkte auf g. Und da $o(\mathrm{Z}) = q - 1 \equiv 1 \bmod 2$ ist, folgt, daß auch Z genau zwei Fixpunkte auf g hat. Ist nun P ein Fixpunkt von Z auf g und ist Σ die 2-Sylowgruppe von Δ, die g punktweise festläßt, so ist also $\Delta_P \supseteqq \Sigma\mathrm{Z} = \mathfrak{N}\Sigma$. Andrerseits ist $\Delta \neq \Delta_P$. Also ist $\Delta_P = \Sigma\mathrm{Z}$, da $\mathfrak{N}\Sigma$ in Δ maximal ist. Aus $(q^2+1)\, o(\mathfrak{N}\Sigma) = o(\Delta) = |P^\Delta| \cdot o(\Delta_P)$ folgt daher, daß Δ auch in diesem Falle ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$ hat. Es gilt also

(4.3) *Δ besitzt ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$.*

Als nächstes beweisen wir

(4.4) *Ist $\mathfrak{O}$ ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$ von Δ, so sind keine drei Punkte von $\mathfrak{O}$ kollinear, m. a. W. $\mathfrak{O}$ ist ein Ovoid.*

Beweis. Da $|\mathfrak{O}| = q^2 + 1$ ist, ist Δ auf $\mathfrak{O}$ zweifach transitiv und nur die Identität läßt drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{O}$ fest. Wir betrachten nun den folgenden Blockplan $\mathfrak{B}$.

(a) Die Punkte von $\mathfrak{B}$ sind die Punkte von $\mathfrak{O}$.

(b) Die Blöcke von $\mathfrak{B}$ sind die Geraden von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{O}$ in mehr als einem Punkte treffen.

(c) Ein Punkt und ein Block sind genau dann inzident, wenn der Punkt und die dem Block entsprechende Gerade in $\mathfrak{S}$ inzidieren.

Da Δ auf den Punkten von $\mathfrak{B}$ zweifach transitiv ist und zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{B}$ genau einen Block bestimmen, folgt, daß alle Blöcke von $\mathfrak{B}$ gleich viele Punkte tragen. Die Anzahl der Punkte auf einem Block sei k. Angenommen es sei $k > 2$. Ferner sei g ein Block von $\mathfrak{B}$. Dann gibt es drei paarweise verschiedene Punkte P, Q, R im Durchschnitt von g und $\mathfrak{O}$. Nun ist $o(\Delta_{P,Q}) = q - 1$. Wegen $R \in g$ ist daher $g \subseteqq \mathfrak{O}$, da ja nur die Identität aus Δ drei verschiedene Fixpunkte in $\mathfrak{O}$ hat. Folglich ist $k = q + 1$. Da $\mathfrak{B}$ ein Blockplan ist, ist $vr = bk$ und $v - 1 = r(k-1)$, wenn v die Anzahl der Punkte, r die Anzahl der Blöcke durch einen Punkt und b die Gesamtzahl der Blöcke von $\mathfrak{B}$ ist. Aus $v = q^2 + 1$ und $k = q + 1$ folgt, daß $r = q$ ist. Also ist $q(q^2+1) = b(q+1)$, woraus $q = 1$ folgt: ein Widerspruch. Somit ist $k = 2$, q. e. d.

Nach (4.3) und (4.4) läßt Δ ein Ovoid $\mathfrak{O}$ invariant. Nun bilden die Punkte von $\mathfrak{O}$ zusammen mit den nichttrivialen Ebenenschnitten eine Möbiusebene $\mathfrak{M}(\mathfrak{O})$ der Ordnung q. Die Anzahl der Kreise einer Möbiusebene der Ordnung q ist gleich $q(q^2+1)$. Ferner gibt es genau $q^2 + 1$ Tangentialebenen an $\mathfrak{O}$. Folglich trifft jede Ebene von $\mathfrak{S}$ das Ovoid $\mathfrak{O}$

entweder in einem oder in $q+1$ Punkten. Hieraus folgt dann nach LÜNEBURG [15] Corollary 1, daß die von den Tangentialebenen verschiedenen Ebenen von $\mathfrak{S}$ ein Transitivitätsgebiet unter Δ bilden. Es gibt also genau zwei Ebenentransitivitätsgebiete unter Δ, da ja die Tangentialebenen ebenfalls ein Transitivitätsgebiet bilden. Nach DEMBOWSKI [5] Satz 1 und Satz 2 gibt es dann auch genau zwei Punkttransitivitätsgebiete. Folglich bilden die Punkte von $\mathfrak{S}$, die nicht auf $\mathfrak{O}$ liegen, ein Transitivitätsgebiet unter Δ.

Ist nun X ein Punkt von $\mathfrak{S}$, der nicht auf $\mathfrak{O}$ liegt, so ist wegen $q^3+q^2+q+1-|\mathfrak{O}|=q^3+q$, die Ordnung von Δ_X gleich $q(q-1)$. Nach SUZUKI [23] Theorem 9 ist daher Δ_X im Normalisator einer geeigneten 2-Sylowgruppe von Δ enthalten. Folglich ist Δ_X eine Frobeniusgruppe. Der Frobeniuskern K_X von Δ_X ist dann wegen $o(\Delta_X)=q(q-1)$ eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung q und daher nach SUZUKI [23] Theorem 6 und Lemma 1 gleich dem Zentrum einer geeigneten 2-Sylowgruppe von Δ. Da der Normalisator einer 2-Sylowgruppe gleich der Standuntergruppe eines Punktes aus $\mathfrak{O}$ ist, gibt es also einen Punkt $P\in\mathfrak{O}$ mit $\Delta_X\subseteqq\Delta_P$. Folglich ist $\mathsf{K}_X=\mathsf{K}_{X,P}$ und somit $\mathsf{K}_X\subseteqq\Delta_{PX}$. Da K_X eine 2-Gruppe ist und da $|PX-\{P,X\}|=q-1$ ungerade ist, hat K_X auf PX mindestens drei verschiedene Fixpunkte. Aus (4.2) folgt daher, daß K_X die Gerade PX punktweise fest läßt. Ferner läßt K_X die Tangentialebene $\mathfrak{t}$ an $\mathfrak{O}$ in P invariant. Schließlich ist $\mathfrak{t}\supseteqq PX$, da ja K_X auf $\mathfrak{O}-\{P\}$ regulär operiert. Ist $\varkappa\in\mathsf{K}_X$ und $Q\notin PX$ und $Q^\varkappa=Q$, so läßt $\varkappa$ die von P,Q und X aufgespannte Ebene punktweise fest. Da $\varkappa$ auf $\mathfrak{O}-\{P\}$ regulär operiert, kann diese Ebene nur den Punkt P mit $\mathfrak{O}$ gemeinsam haben. Folglich ist $\varkappa$ eine Elation mit der Achse $\mathfrak{t}$. Ist Z das Zentrum von $\varkappa$ und ist $\varkappa\neq 1$, so ist $Z\neq P$, da ja jede Gerade durch P das Ovoid in höchstens einem von P verschiedenen Punkt trifft. Da $Z\neq P$ ist, gehen durch P genau q Tangenten an $\mathfrak{O}$, die nicht in $\mathfrak{t}$ liegen (SEGRE [21] S. 322). Folglich hat $\varkappa$ mindestens q Fixpunkte außerhalb $\mathfrak{t}$: ein Widerspruch. Hieraus folgt, daß K_X keinen Fixpunkt außerhalb PX hat. Zu jeder 2-Sylowgruppe Σ von Δ gehört also eine geometrisch ausgezeichnete Gerade, nämlich die eindeutig bestimmte Gerade, die von $\mathfrak{Z}\Sigma$ punktweise festgelassen wird. Da die Zentren zweier verschiedener 2-Sylowgruppen bereits ganz Δ erzeugen, folgt, daß die zu zwei verschiedenen 2-Sylowgruppen gehörigen Geraden zueinander windschief sind, da ja Δ nach (4.1) keinen Fixpunkt hat. Ist weiterhin g die zu Σ gehörige Gerade, $P=\mathfrak{O}\cap g$ und $\mathfrak{t}$ die Tangentialebene an $\mathfrak{O}$ in P, so ist $\mathfrak{Z}\Sigma$, wie wir gesehen haben, auf den Punkten von $\mathfrak{t}-g$ regulär. Somit ist Σ aus Ordnungsgründen auf den Punkten von $\mathfrak{t}-g$ transitiv und folglich auch auf den von g verschiedenen Geraden durch P, die in $\mathfrak{t}$ liegen. Folglich gilt

(4.5) *Die Tangenten an $\mathfrak{O}$ zerfallen unter Δ in genau zwei Transitivitätsgebiete $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ der Länge $q(q^2+1)$ bzw. q^2+1. Die Geraden von $\mathfrak{K}$ bilden eine Kongruenz von $\mathfrak{S}$.*

Da Δ auf $\mathfrak{O}$ zweifach transitiv ist, bilden auch die Sekanten von $\mathfrak{O}$ ein Transitivitätsgebiet unter Δ. Nun bestimmt $\mathfrak{O}$ nach SEGRE [21] Theorem III eine Nullpolarität, die einmal mit allen Kollineationen vertauschbar ist, die $\mathfrak{O}$ invariant lassen, und die zum andern die Sekanten von $\mathfrak{O}$ mit den Passanten vertauscht. Folglich gilt

(4.6) *Die Passanten und die Sekanten von $\mathfrak{O}$ bilden je für sich ein Transitivitätsgebiet unter Δ.*

Nach TITS [25] gibt es ein Ovoid $\mathfrak{O}_0$ in $\mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft, daß die Menge der Kollineationen der projektiven Gruppe Π von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{O}_0$ invariant lassen, eine zur $S(q)$ isomorphe Gruppe Δ_0 bilden. Nun folgt aus LÜNEBURG [15] Theorem 1 und DEMBOWSKI [6] Hauptsatz, daß es eine Kollineation λ von $\mathfrak{S}$ gibt mit $\mathfrak{O}^\lambda = \mathfrak{O}_0$. Hieraus und aus $\Pi_{\mathfrak{O}_0} = \Delta_0$ folgt, daß $\lambda^{-1}\Delta\lambda = \Delta_0$ ist. Somit sind alle zur $S(q)$ isomorphen Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$ innerhalb der Kollineationsgruppe Λ von $\mathfrak{S}$ konjugiert.

Es ist also auch $\Pi_{\mathfrak{O}} = \Delta$. Da die Punkte von $\mathfrak{S}$ unter Δ in genau zwei Transitivitätsgebiete $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ mit $|\mathfrak{O}| = q^2+1$ und $|\mathfrak{O}'| = q(q^2+1)$ zerfallen, folgt, daß $\mathfrak{N}_\Pi\Delta \subseteqq \Pi_{\mathfrak{O}}$ ist. Wegen $\Pi_{\mathfrak{O}} = \Delta$ ist daher Δ normalisatorgleich in Π. Aus dem gleichen Grund, aus dem $\mathfrak{N}_\Pi\Delta \subseteqq \Pi_{\mathfrak{O}}$ gilt, gilt auch $\mathfrak{N}_\Lambda\Delta \subseteqq \Lambda_{\mathfrak{O}}$ und aus $\Delta = \Pi_{\mathfrak{O}} \lhd \Lambda_{\mathfrak{O}}$ folgt sogar, daß $\mathfrak{N}_\Lambda\Delta = \Lambda_{\mathfrak{O}}$ ist. Schließlich folgt aus TITS [25] Proposition 5.3 und Abschnitt 6, daß $o(\mathfrak{N}_\Lambda\Delta) = o(\Delta)[\Lambda:\Pi] = o(\mathfrak{N}_\Pi\Delta)[\Lambda:\Pi]$ ist. Somit ist $[\Lambda:\mathfrak{N}_\Lambda\Delta] = [\Pi:\mathfrak{N}_\Pi\Delta]$, d.h. alle zur $S(q)$ isomorphen Untergruppen von Π sind bereits in Π konjugiert. Zusammenfassend haben wir also den

Satz 8. *Ist $\mathfrak{S}$ ein 3-dimensionaler projektiver Raum über $GF(q)$ mit $q = 2^{2r+1} \geqq 8$, so liegen alle Untergruppen der Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$, die zur $S(q)$ isomorph sind, bereits in der projektiven Gruppe von $\mathfrak{S}$ und sind innerhalb dieser Gruppe konjugiert. Ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$, so zerlegt Δ die Menge der Punkte von $\mathfrak{S}$ in zwei Transitivitätsgebiete. Eines dieser Transitivitätsgebiete ist ein Ovoid $\mathfrak{O}$. Die Menge der Ebenen von $\mathfrak{S}$ wird von Δ ebenfalls in zwei Transitivitätsgebiete zerlegt: die Menge der Tangentialebenen an $\mathfrak{O}$ und die Menge der übrigen Ebenen. Die Sekanten von $\mathfrak{O}$ und die Passanten bilden jede für sich ein Geradentransitivitätsgebiet von Δ. Die Tangenten an $\mathfrak{O}$ zerfallen in zwei Transitivitätsgebiete, eines davon bildet eine Geradenkongruenz von $\mathfrak{S}$.*

5. $S(q)$ als Kollineationsgruppe einer projektiven Ebene der Ordnung q^2

Es sei $q = 2^{2r+1} \geqq 8$ und $\mathfrak{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung q^2. Ferner sei Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$ und alle Involutionen aus Δ seien zentral. Dann gilt

(5.1) *Δ besitzt ein Fixelement.*

Beweis. Σ sei eine 2-Sylowgruppe von Δ und σ eine Involution aus Σ. Nach Suzuki [23] Theorem 9 und Lemma 1 ist dann $\sigma \in \mathfrak{Z}\Sigma$. Ferner ist σ nach Voraussetzung zentral. Ist C das Zentrum und a die Achse von σ, so ist wegen $\sigma \in \mathfrak{Z}\Sigma$ der Punkt C ein Fixpunkt und a eine Fixgerade von Σ. Ist τ eine von σ verschiedene Involution aus Σ und hat τ eine von a verschiedene Achse b, so liegt C wegen $C^\tau = C$ auf b. Wegen $a^\tau = a$ ist daher C das Zentrum von τ. M. a. W., gibt es in Σ zwei Involutionen, die verschiedene Achsen haben, so haben alle Involutionen aus Σ das gleiche Zentrum. Aus Dualitätsgründen gilt daher: entweder haben alle Involutionen aus Σ das gleiche Zentrum oder die gleiche Achse oder das gleiche Zentrum und die gleiche Achse. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß alle Involutionen die gleiche Achse s haben. T sei eine von Σ verschiedene 2-Sylowgruppe von Δ. Dann haben auch alle Involutionen aus T die gleiche Achse. Diese heiße t. Ist $s = t$, so ist wegen $s^\Sigma = s = t = t^\mathsf{T}$ und $\Delta = \langle \Sigma, \mathsf{T} \rangle$ die Gerade s eine Fixgerade von Δ. Sei also $s \neq t$. Dann ist $s \cap t$ ein Fixpunkt von $\mathfrak{Z}\Sigma$ und $\mathfrak{Z}\mathsf{T}$. Nun ist nach Suzuki [23] Theorem 9 die Gruppe Δ das Erzeugnis von $\mathfrak{Z}\Sigma$ und $\mathfrak{Z}\mathsf{T}$ und daher $s \cap t$ ein Fixpunkt von Δ, q. e. d.

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß Δ einen Fixpunkt P hat.

(5.2) *Δ ist auf den Geraden durch P zweifach transitiv und nur die Identität läßt drei verschiedene dieser Geraden fest.*

Beweis. Ließe Δ alle Geraden durch P einzeln fest, so bestünde Δ nur aus Perspektivitäten mit dem Zentrum P. Somit wäre $(q^2 + 1)\, q^2(q - 1) = o(\Delta)$ ein Teiler von $q^4(q^2 - 1)$: ein Widerspruch. Folglich besitzt Δ ein nicht triviales Transitivitätsgebiet aus Geraden durch P. Die Aussage (5.2) folgt daher aus der Bemerkung, daß durch P genau $q^2 + 1$ Geraden gehen.

(5.3) *Sind g und h zwei verschiedene Geraden durch P, so besitzt $\Delta_{g,h}$ auf g genau zwei Fixpunkte (von denen einer gleich P ist). Die restlichen Punkte von g zerfallen unter $\Delta_{g,h}$ in $q + 1$ Transitivitätsgebiete der Länge $q - 1$.*

Beweis. $\Delta_{g,h}$ hat die Ordnung $q - 1$ und ist daher nach Suzuki [23] Theorem 9 zyklisch. Sei $\delta \in \Delta_{g,h}$ und $Q, R \in g - \{P\}$ und $Q \neq R$ und $Q^\delta = Q$, $R^\delta = R$. Schließlich sei $\mathsf{H} = \langle \delta \rangle$. Dann ist auch $Q^\mathsf{H} = Q$ und

$R^{\mathsf{H}} = R$. Nach (5.2) gibt es ein $\sigma \in \Delta$ mit $g^\sigma = h$ und $h^\sigma = g$. Dann ist aber $\sigma^{-1}\Delta_{g,h}\sigma = \Delta_{g,h}$ und folglich, da H wegen der Zyklizität von $\Delta_{g,h}$ in $\Delta_{g,h}$ charakteristisch ist, auch $\sigma^{-1}\mathsf{H}\sigma = \mathsf{H}$. Somit sind Q^σ und R^σ Fixpunkte von H und damit von δ. Die Punkte Q, R, Q^σ, R^σ bilden ein nicht ausgeartetes Viereck. Da alle diese Punkte von δ festgelassen werden, läßt δ eine nicht ausgeartete Teilebene $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{E}$ elementweise fest. Wegen $P^\delta = P$ ist P ein Punkt von $\mathfrak{F}$. Daher läßt δ mindestens drei Geraden durch P fest und ist folglich nach (5.2) die Identität. Eine nicht triviale Kollineation aus $\Delta_{g,h}$ hat somit höchstens einen Fixpunkt auf $g - \{P\}$. Ist δ ein Element von Primzahlordnung aus $\Delta_{g,h}$, so hat daher δ wegen $|g - \{P\}| = q^2$ und $(q, q-1) = 1$ genau einen Fixpunkt Q auf $g - \{P\}$. Da $\Delta_{g,h}$ abelsch ist, ist somit Q ein Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$. Die Gruppe $\Delta_{g,h}$ hat also auf g genau die Fixpunkte P und Q und $q + 1$ Transitivitätsgebiete der Länge $q - 1$, da ja kein nicht triviales Element einen von P und Q verschiedenen Fixpunkt hat, q. e. d.

(5.4) *P ist niemals Zentrum einer Involution aus Δ.*

Beweis. Sei σ eine Involution und damit eine involutorische Elation aus Δ. Ferner sei P das Zentrum von σ. Da alle Involutionen in Δ konjugiert sind, ist P Zentrum aller Involutionen aus Δ. Da Δ von seinen Involutionen erzeugt wird, besteht Δ daher nur aus Elationen mit dem Zentrum P. Folglich ist die Ordnung von Δ ein Teiler von q^4, q. e. d.

(5.5) *Ist Σ eine 2-Sylowgruppe von Δ und ist $P \in g = g^\Sigma$, so hat Σ auf g mindestens $q + 1$ Fixpunkte.*

Beweis. P ist ein Fixpunkt von Σ auf g. Sei σ eine Involution aus Σ. Da nach (5.4) der Punkt P nicht das Zentrum von σ sein kann, ist g wegen $g^\sigma = g$ die Achse von σ und das Zentrum Q von σ ist ein von P verschiedener Punkt auf g. Wegen $\sigma \in \mathfrak{Z}\Sigma$ ist dann auch Q ein Fixpunkt von Σ. Aus $|g - \{P, Q\}| = q^2 - 1$ folgt, daß Σ noch einen Fixpunkt $R \in g - \{P, Q\}$ hat. Nach (5.3) ist höchstens einer der Punkte Q und R ein Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$, wenn h eine von g verschiedene Gerade durch P ist. Sei etwa Q kein Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$. Dann liegt Q in einem Transitivitätsgebiet der Länge $q - 1$ von $\Delta_{g,h}$. Da P nicht in diesem Transitivitätsgebiet liegt und $\Delta_{g,h}$ im Normalisator von Σ enthalten ist, folgt, daß Σ mindestens q Fixpunkte hat. Aus $|g| - q \equiv 1 \bmod q$ folgt dann, daß Σ mindestens $q + 1$ Fixpunkte auf g hat, q. e. d.

1. Fall: *Es gibt zwei Involutionen mit verschiedenen Zentren in Σ.* Diese beiden Zentren liegen auf der eindeutig bestimmten Geraden g durch P, die von Σ festgelassen wird. Da nach (5.4) beide Zentren von P verschieden sind, ist nach (5.3) höchstens eines dieser Zentren Fixpunkt von

$\Delta_{g,h}$. Da nun alle Involutionen aus Σ unter $\Delta_{g,h}$ konjugiert sind, folgt aus (5.3), daß es genau $q - 1$ Punkte auf g gibt, die Zentren von Involutionen aus Σ sind. Da es andrerseits in Σ genau $q - 1$ Involutionen gibt, ist also jeder Punkt von g Zentrum höchstens einer Involution aus Σ. Ist h eine von g verschiedene Gerade und ist $h \cap g$ kein Zentrum einer Involution aus Σ, so ist $|h^\Sigma| = q^2$. Wäre nämlich $|h^\Sigma| < q^2$, so gäbe es eine Involution σ in Σ mit $h^\sigma = h$. Da g die Achse von σ ist, wäre dann $h \cap g$ das Zentrum von σ. Nun gibt es auf g genau $q^2 + 1 - (q - 1) = q^2 - q + 2$ Nichtzentren und daher $q^2(q^2 - q + 2)$ von g verschiedene Geraden, die g in einem Nichtzentrum treffen. Die Menge dieser Geraden zerfällt also unter Σ in $q^2 - q + 2$ Transitivitätsgebiete der Länge q^2. Ist $h \cap g$ das Zentrum einer Involution aus Σ, so wird h nach dem oben Bemerkten von genau einer Involution aus Σ festgelassen. Da der Exponent von Σ gleich 4 ist und da Σ nach Suzuki [23] Lemma 3 keine Quaternionengruppe enthält, hat Σ_h entweder die Ordnung 2 oder die Ordnung 4. Folglich ist $|h^\Sigma| = \frac{1}{2}q^2$ oder gleich $\frac{1}{4}q^2$. Sei $|h^\Sigma| = \frac{1}{2}q^2$ für alle Geraden h, für die $h \cap g$ ein Zentrum ist. Da es auf g insgesamt $q - 1$ Zentren gibt, gibt es genau $2(q - 1)$ Geradentransitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}q^2$. Da g unter Σ festbleibt, bildet $\{g\}$ ebenfalls ein Transitivitätsgebiet von Σ. Insgesamt gibt es also $1 + q^2 - q + 2 + 2(q - 1) = q^2 + q + 1$ Geradentransitivitätsgebiete. Da die Involutionen aus Σ Elationen mit der Achse g sind, hat kein von 1 verschiedenes Element von Σ außerhalb g einen Fixpunkt. Folglich zerfällt die Menge der Punkte außerhalb g unter Σ in q^2 Transitivitätsgebiete der Länge q^2. Da Σ nach (5.5) auf g mindestens $q + 1$ Fixpunkte hat, folgt wegen $q + 1 < q^2 + 1 = |g|$, daß Σ mehr als $q^2 + q + 1$ Punkttransitivitätsgebiete hat. Σ hat also mehr Punkt- als Geradentransitivitätsgebiete im Widerspruch zu Dembowski [5] Satz 1 und Satz 2. Es gibt also eine Gerade h mit $|h^\Sigma| = \frac{1}{4}q^2$. Angenommen es gibt noch eine Gerade j mit $|j^\Sigma| = \frac{1}{2}q^2$. Da $\Delta_{g,h} \subseteqq \mathfrak{N}\Sigma$ und außerdem auf den auf g liegenden Zentren transitiv ist, folgt, daß es genau $q - 1$ Geradentransitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}q^2$ und $2(q - 1)$ Geradentransitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{4}q^2$ gibt. Insgesamt gibt es also $1 + q^2 - q + 2 + 3(q - 1) = q^2 + 2q$ Geradentransitivitätsgebiete. Da Σ außerhalb g genau q^2 Punkttransitivitätsgebiete und auf g mindestens $q + 1$ Fixpunkte hat, folgt nach Dembowski [5] Satz 1 und Satz 2, daß Σ auf g noch $q - 1$ weitere Punkttransitivitätsgebiete hat. Numeriert man diese Transitivitätsgebiete von 1 bis $q - 1$ und bezeichnet man die Länge des i-ten Transitivitätsgebietes mit l_i, so ist $1 \leq l_i \leq q$ für alle i und $\sum_{i=1}^{q-1} l_i = q(q - 1)$. Folglich ist $l_i = q$ für alle i. Somit hat Σ auf g genau $q + 1$ Fixpunkte. Hieraus folgt, daß außer P noch ein weiterer Fixpunkt von Σ auch Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$

ist. Hieraus und aus (5.3) folgt dann, daß $\Delta_{g,h}$ die Transitivitätsgebiete von Σ, die die Länge q haben, transitiv untereinander permutiert. Somit hat Δ ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $(q^2+1)\,q(q-1)$. Ist ferner Q der gemeinsame von P verschiedene Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$ und Σ, so ist $|Q^\Delta| = q^2+1$. Die Menge der Punkte von $\mathfrak{E}$ zerfällt also unter Δ in vier Transitivitätsgebiete. Wir zeigen nun, daß Q^Δ ein Oval ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß Q mit keinen zwei weiteren Punkten von Q^Δ kollinear ist. Angenommen Q, R und S wären drei verschiedene kollineare Punkte aus Q^Δ. Dann gibt es ein $\sigma \in \Sigma$ mit $R^\sigma = S$. Wegen $R \neq S$ ist $\sigma \neq 1$. In $\langle\sigma\rangle$ gibt es daher eine Involution τ. Nun ist offensichtlich $(RS)^\tau = RS$ und folglich Q das Zentrum von τ: ein Widerspruch. Folglich ist Q^Δ ein Oval. Da Δ auf Q^Δ zweifach transitiv ist, ist Δ auf den Sekanten von Q^Δ transitiv. Ferner ist Δ auf den Geraden durch P transitiv. Nun gibt es, wie wir gesehen haben, vier Punkttransitivitätsgebiete und daher nach Dembowski [5] Satz 1 und Satz 2 auch vier Geradentransitivitätsgebiete. Somit zerfallen die Passanten von Q^Δ in genau zwei Transitivitätsgebiete. Es sei j eine Passante von Q^Δ. Dann ist $o(\Delta_j) = 4m$ mit ungeradem m, da ja eine 2-Sylowgruppe von Δ_j auf j einen Fixpunkt hat und dieser Fixpunkt Zentrum genau einer Involution ist. Andrerseits ist 4 ein Teiler der Ordnung von Δ_j, wie wir weiter oben bereits bemerkten. Nach Suzuki [23] Theorem 9 ist daher m ein Teiler von $q+r+1$ oder $q-r+1$, wobei $r^2 = 2q$ ist. Die Anzahl der Passanten von Q^Δ ist gleich $\frac{1}{2}q^2(q^2-1)$. Die Längen der beiden Transitivitätsgebiete, in die die Passanten von Q^Δ zerfallen, seien l_1 bzw. l_2. Dann ist nach dem eben Bemerkten $(q^2+1)\,q^2(q-1) = o(\Delta) = 4l_im_i$ für $i = 1, 2$, wobei m_i ein Teiler von $q+r+1$ oder $q-r+1$ ist. Ferner ist $l_1 + l_2 = \frac{1}{2}q^2(q^2-1)$. Somit ist $(q^2+1)\,q^2(q-1)(m_1+m_2) = 2q^2(q^2-1)m_1m_2$ und folglich $(q^2+1)(m_1+m_2) = 2(q+1)m_1m_2$. Hieraus folgt, daß q^2+1 ein Teiler von m_1m_2 ist. Nun ist $q^2+1 = (q+r+1)(q-r+1)$ und $(q+r+1,\ q-r+1) = 1$. Wären nun m_1 und m_2 beides Teiler von $q+r+1$ bzw. $q-r+1$, so könnte q^2+1 kein Teiler von m_1m_2 sein. Wir können daher o. B. d. A. annehmen, daß m_1 ein Teiler von $q+r+1$ und m_2 ein Teiler von $q-r+1$ ist. Somit ist m_1m_2 ein Teiler von q^2+1. Folglich ist $q^2+1 = m_1m_2$ und daher $m_1 = q+r+1$ und $m_2 = q-r+1$. Dann ist $l_1 = \frac{1}{4}(q-r+1)q^2(q-1)$ und $l_2 = \frac{1}{4}(q+r+1)\,q^2(q-1)$.

Angenommen es sei $|j^\Sigma| = \frac{1}{2}q^2$ für alle Geraden j, die g in einem Zentrum treffen. Dann gibt es insgesamt q^2+3q-1 Geradentransitivitätsgebiete und somit außer den bereits aufgezählten noch $2(q-1)$ weitere Punkttransitivitätsgebiete, die alle auf g liegen. Ist Q der von P verschiedene Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$ auf g und ist Q außerdem Fixpunkt von Σ, so ist, wie wir gesehen haben, Q^Δ ein Oval. Ist nun $R \in g$ ein Zentrum und j eine Sekante von Q^{Δ} durch R, so ist wegen der Transitivität von Σ auf $Q^{\Delta} - \{Q\}$ die Länge von j^{Σ} gleich $\frac{1}{2}q^2$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit liegt Q in einem nicht trivialen Transitivitätsgebiet t von Σ. Wegen $\Delta_{g,h} \subseteq \mathfrak{N}\Sigma$ bleibt daher t unter $\Delta_{g,h}$ invariant. Nun ist $2 \leqq |t| \leqq q$. Aus (5.3) folgt daher, daß $|t| = q$ ist. Die übrigen Transitivitätsgebiete von Σ, die in g enthalten sind, werden von $\Delta_{g,h}$ in Zyklen der Länge $q - 1$ permutiert, da ihre Länge eine Potenz von 2 ist und somit kein Element $\neq 1$ aus $\Delta_{g,h}$ wegen (5.3) ein von $\{P\}$ und t verschiedenes in g enthaltenes Transitivitätsgebiet von Σ festlassen kann. Da P der einzige gemeinsame Fixpunkt von Σ und $\Delta_{g,h}$ ist, gibt es nach (5.2) $2q - 1$ Transitivitätsgebiete der Länge 1. Ferner gibt es $q - 1$ Transitivitätsgebiete der Länge 2^a und ein Transitivitätsgebiet der Länge q. Folglich ist $3q - 1 + 2^a(q - 1) = q^2 + 1$. Hieraus folgt, daß $q = 2(2^{a-1} + 1)$ ist: ein Widerspruch. Wir haben also

(5.6) *Gibt es in Σ zwei Involutionen mit verschiedenen Zentren, so hat Δ außer dem Fixpunkt P noch drei weitere Punkttransitivitätsgebiete. Diese haben die Längen $q^2 + 1$, $(q^2 + 1)(q - 1)$ bzw. $(q^2 + 1)q(q-1)$. Das Transitivitätsgebiet der Länge $q^2 + 1$ ist ein Oval $\mathfrak{o}$. Die Tangenten und die Sekanten von $\mathfrak{o}$ bilden je für sich ein Geradentransitivitätsgebiet. Die Passanten von $\mathfrak{o}$ werden von Δ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{4}(q + r + 1)\, q^2(q - 1)$ bzw. $\frac{1}{4}(q - r + 1)q^2(q - 1)$ zerlegt, wobei $r^2 = 2q$ ist.*

2. Fall: *Alle Involutionen aus Σ haben das gleiche Zentrum.* In diesem Falle gilt

(5.7) *Δ läßt ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) invariant. Die von P verschiedenen Punkte, die nicht auf g liegen, zerfallen unter Δ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$ bzw. $(q^2 + 1)\, q(q - 1)$. Die von g verschiedenen Geraden, die nicht durch P gehen, zerfallen ebenfalls in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$ bzw. $(q^2 + 1)\, q(q - 1)$.*

Beweis. Σ und T seien zwei verschiedene 2-Sylowgruppen von Δ und h und j die beiden Geraden durch P, die von Σ bzw. T invariant gelassen werden. Q sei das Zentrum aller Involutionen aus Σ und R das Zentrum aller Involutionen aus T. Dann ist $Q \in h$ und $R \in j$ und wegen $h \neq j$ ist $P \notin QR$. Setzt man $QR = g$, so ist offensichtlich $g^{\mathfrak{Z}\Sigma} = g = g^{\mathfrak{Z}\mathrm{T}}$ und daher wegen $\Delta = \langle \mathfrak{Z}\Sigma, \mathfrak{Z}\mathrm{T} \rangle$ auch $g^{\Delta} = g$. Ist Σ eine 2-Sylowgruppe von Δ und Q ein Punkt mit $P \neq Q \notin g$ und $Q^{\Sigma} = Q$, so folgt aus (5.2) und (5.3), daß $|Q^{\Delta}| = (q^2 + 1)(q - 1)$ ist, da der von P verschiedene Fixpunkt von $\Delta_{PQ,j}$ auf PQ notwendig gleich $PQ \cap g$ ist. Aus dieser Bemerkung und aus (5.5) folgt also die Existenz eines

Punkttransitivitätsgebietes der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$. Da Δ im vorliegenden Falle eine Fixgerade besitzt, zeigen die dualen Schlüsse, daß es auch ein Geradentransitivitätsgebiet der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$ gibt. $\mathfrak{p}$ sei ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$. Es seien h und j zwei Geraden mit $P \notin h, j$ und $h \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset \neq j \cap \mathfrak{p}$. Um zu zeigen, daß es ein $\delta \in \Delta$ mit $h^\delta = j$ gibt, können wir annehmen, daß es einen Punkt Q in $\mathfrak{p}$ gibt, der sowohl auf h als auch auf j liegt. Nun ist Δ_Q eine 2-Sylowgruppe von Δ und da $g^\Delta = g$ ist, folgt, daß Q nicht das Zentrum einer Involution aus Δ_Q sein kann. Somit ist Δ_Q auf den von PQ verschiedenen Geraden durch Q transitiv. Die Geraden, die $\mathfrak{p}$ treffen, bilden also ein Transitivitätsgebiet $\mathfrak{g}$. Wir bilden nun eine taktische Konfiguration $\mathfrak{T}$:

(i) Die Punkte von $\mathfrak{T}$ sind die Punkte von $\mathfrak{p}$.

(ii) Die Blöcke von $\mathfrak{T}$ sind die Geraden von $\mathfrak{g}$.

(iii) Ein Punkt X und ein Block y sind genau dann inzident, wenn $X \in y$ ist.

Es sei $v = |\mathfrak{p}|$, $b = |\mathfrak{g}|$, r die Anzahl der Blöcke durch einen Punkt von $\mathfrak{T}$ und k die Anzahl der Punkte auf einem Block von $\mathfrak{T}$. Dann ist $vr = bk$. Zwei Punkte von $\mathfrak{T}$ sind durch höchstens einen Block verbindbar und es gilt, daß zwei Punkte X und Y in $\mathfrak{T}$ genau dann nicht verbindbar sind, wenn P, X und Y in $\mathfrak{E}$ kollinear sind. Ist h eine Gerade durch P, so ist $|h \cap \mathfrak{p}| = q - 1$. Folglich ist $v - (q - 1) = r(k - 1)$. Nun ist $v = (q^2 + 1)(q - 1)$ und $r = q^2$. Also ist $q^2(q - 1) = q^2(k - 1)$, d.h. es ist $k = q$. Somit ist $b = (q^2 + 1)\, q(q - 1)$. Es gibt also genau vier Geradentransitivitätsgebiete der Länge resp. $1, q^2 + 1, (q^2 + 1)(q - 1)$ und $(q^2 + 1)\, q(q - 1)$. Nach Dembowski [5] Satz 1 und Satz 2 gibt es daher auch genau vier Punkttransitivitätsgebiete. Drei von diesen haben, wie wir bereits wissen, die Länge resp. 1, $q^2 + 1$ und $(q^2 + 1)(q - 1)$. Das vierte hat also die Länge $(q^2 + 1) q(q - 1)$. Damit ist (5.7) bewiesen. Wir haben also den

Satz 9. *Ist $q = 2^{2r+1} \geqq 8$ und ist $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene der Ordnung q^2, ist ferner Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$ und sind alle Involutionen aus Δ zentral, so operiert Δ auf eine der folgenden Arten auf $\mathfrak{E}$:*

(1) *Δ läßt ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) invariant. Δ ist auf den Geraden durch P und den Punkten auf g zweifach transitiv. Die von P verschiedenen Punkte von $\mathfrak{E}$, die nicht auf g liegen, werden von Δ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2 + 1)(q - 1)$ bzw. $(q^2 + 1)\, q(q - 1)$ zerlegt. Ebenso werden die von g verschiedenen Ge-*

raden, die nicht durch P gehen, von Δ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2+1)(q-1)$ bzw. $(q^2+1)\,q(q-1)$ zerlegt.

(2) *Δ läßt ein Oval $\mathfrak{o}$ invariant und zerlegt die Menge der Punkte, die nicht auf $\mathfrak{o}$ liegen und die von dem Knoten von $\mathfrak{o}$ verschieden sind, in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2+1)(q-1)$ bzw. $(q^2+1)q(q-1)$. Ferner bilden die Tangenten und die Sekanten von $\mathfrak{o}$ je für sich ein Geradentransitivitätsgebiet. Die Passanten von $\mathfrak{o}$ werden in zwei Transitivitätsgebiete der Länge*

$$\tfrac{1}{4}(q+r+1)\,q^2(q-1) \quad \textit{bzw.} \quad \tfrac{1}{4}(q-r+1)\,q^2(q-1)$$

zerlegt, wobei $r^2 = 2q$ ist.

(3) *Δ hat eine Fixgerade g. Ferner hat Δ ein Geradentransitivitätsgebiet $\mathfrak{g}$ der Länge q^2+1, mit der Eigenschaft, daß keine drei Geraden von $\mathfrak{g}$ konfluent sind. Die restlichen Geraden werden in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $(q^2+1)(q-1)$ bzw. $(q^2+1)\,q(q-1)$ zerlegt. Die Punkte von g und die Schnittpunkte zweier Geraden aus $\mathfrak{g}$ bilden je für sich ein Punkttransitivitätsgebiet. Die restlichen Punkte werden in zwei Transitivitätsgebiete der Länge*

$$\tfrac{1}{4}(q+r+1)\,q^2(q-1) \quad \textit{bzw.} \quad \tfrac{1}{4}(q-r+1)\,q^2(q-1)$$

zerlegt, wobei wiederum $r^2 = 2q$ ist.

Δ hat also in jedem Falle vier Punkt- und vier Geradentransitivitätsgebiete.

6. Eine neue Klasse von affinen Ebenen

In diesem Abschnitt zeigen wir nun, daß es nicht-desarguessche Ebenen gibt, die die Bedingungen des Satzes 7 erfüllen. Wir beweisen zunächst den

Satz 10. *Ist $q = 2^{2r+1} \geqq 8$, so gibt es eine und bis auf Isomorphie nur eine Translationsebene $\mathfrak{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist gleich q^2.*

(b) *Der Kern von $\mathfrak{A}$ enthält einen zu $GF(q)$ isomorphen Teilkörper.*

(c) *$\mathfrak{A}$ besitzt eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe.*

Beweis. Zuerst beweisen wir die Existenzaussage dieses Satzes. Nach Satz 8 gehört zur $S(q)$ eine Geradenkongruenz des dreidimensionalen projektiven Raumes über $GF(q)$. Nach André [1] § 8.1 gibt es daher eine Translationsebene $\mathfrak{A}$, die (a) und (b) erfüllt und die überdies die Eigenschaft hat, daß die Standuntergruppe eines affinen Punktes eine Untergruppe Δ enthält, die auf der uneigentlichen Geraden von $\mathfrak{A}$ eine

Permutationsgruppe Δ^* induziert, die zur $S(q)$ isomorph ist. Wie in LÜNEBURG [14] am Ende des Beweises von Satz 5 gezeigt wurde, sind Δ und Δ^* isomorph. Somit besitzt $\mathfrak{A}$ auch die Eigenschaft (c).

Sei nun umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine Translationsebene mit den Eigenschaften (a), (b) und (c). Ferner sei Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ und T sei die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}$. Da T ein Normalteiler in der vollen Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ ist, ist $\Pi = \mathsf{T}\Delta$ eine Gruppe. Da Δ einfach ist, ist überdies $\mathsf{T} \cap \Delta = 1$. Nun ist andrerseits $\Pi = \mathsf{T}\Pi_P$. Hieraus und aus $\mathsf{T} \cap \Pi_P = 1$ folgt, daß Δ und Π_P isomorph sind. Wir können also annehmen, daß Δ einen Fixpunkt hat. T ist ein Vektorraum über seinem Kern K und daher nach (b) auch ein Vektorraum über $F = GF(q)$. Ferner ist jede Abbildung $\delta \in \Delta$ nach ANDRÉ [1] Satz 19 eine semilineare Abbildung des K-Vektorraumes T und damit auch eine semilineare Abbildung von T aufgefaßt als Vektorraum über F. Nennt man die Unterräume vom Rang 1 Punkte, vom Rang 2 Geraden und vom Rang 3 Ebenen und nimmt man die Enthaltenseinbeziehung als Inzidenz, so ist die so definierte Inzidenzstruktur $\mathfrak{S}(\mathsf{T}, F)$ ein dreidimensionaler projektiver Raum über F und da jedes $\delta \in \Delta$ eine semilineare Abbildung des F-Vektorraumes T ist, induziert δ eine Kollineation δ^* von $\mathfrak{S}(\mathsf{T}, F)$. Die Abbildung η, die δ auf δ^* abbildet, ist ein Homomorphismus von Δ in die Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}(\mathsf{T}, F)$. Wäre η kein Isomorphismus, so wäre wegen der Einfachheit von Δ sogar $\Delta^\eta = 1$. Dann wäre aber $o(\Delta)$ ein Teiler von $q - 1$: ein Widerspruch. Also ist η ein Isomorphismus. Nun ist $\mathfrak{K} = \{\mathsf{T}(U, g_\infty) \mid U \in g_\infty\}$ eine Geradenkongruenz von $\mathfrak{S}(\mathsf{T}, F)$, die überdies von einer zur $S(q)$ isomorphen Kollineationsgruppe invariant gelassen wird. Nach Satz 8 sind alle diese Kongruenzen projektiv äquivalent. Hieraus folgt die Eindeutigkeitsaussage von Satz 10.

Im folgenden werden wir noch einige Eigenschaften von Translationsebenen der Ordnung q^2 herleiten, die eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe besitzen. Es sei also stets $\mathfrak{T}$ eine Translationsebene der Ordnung q^2, die eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe besitzen möge. $\mathfrak{T}^*$ sei der projektive Abschluß von $\mathfrak{T}$. Der Beweis von Satz 10 zeigt dann die Gültigkeit von

(6.1) *Die Standuntergruppe eines Punktes von $\mathfrak{T}$ enthält eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe.*

Da die $S(q)$ einfach ist und da eine transitive Darstellung von minimalem Grad der $S(q)$ den Grad $q^2 + 1$ hat, folgt

(6.2) *Ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T}$, so läßt nur die Identität drei verschiedene uneigentliche Punkte von $\mathfrak{T}$ fest.*

Aus (6.2) folgt nun sofort

(6.3) *Ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T}$, so enthält Δ keine von 1 verschiedenen Kollineationen, die eine echte Teilebene von $\mathfrak{T}$ elementweise invariant lassen. Insbesondere sind alle Involutionen aus Δ zentral.*

Ferner gilt

(6.4) *$\mathfrak{T}$ ist nicht-desarguessch.*

Beweis. Angenommen $\mathfrak{T}$ wäre desarguessch. Ist P ein affiner Punkt von $\mathfrak{T}$, so ist die von allen Elationen mit einer Achse durch P erzeugte Gruppe Π isomorph zur $SL(2, q^2)$. Andrerseits gibt es nach (6.1) eine zur $S(q)$ isomorphe Gruppe Δ mit $P^\Delta = P$. Aus (6.3) folgt, daß alle Involutionen aus Δ Elationen mit einer Achse durch P sind. Da Δ von seinen Involutionen erzeugt wird, ist somit Δ in Π enthalten. Nun sind die 2-Sylowgruppen von Π elementarabelsche 2-Gruppen, während Δ Elemente der Ordnung 4 enthält, q. e. a.

(6.5) *Jede Fahne von $\mathfrak{T}^*$ wird von einer nicht-trivialen Elation invariant gelassen.*

Dies folgt aus (6.1), (6.3) und der Tatsache, daß $\mathfrak{T}$ eine Translationsebene ist.

(6.6) *Ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T}$ und läßt Δ einen Punkt P invariant, so ist Δ auf den Geraden durch P zweifach transitiv. Insbesondere ist also $\mathfrak{T}$ fahnenhomogen.*

Dies folgt aus (6.2) und der Bemerkung, daß durch P genau $q^2 + 1$ Geraden gehen.

(6.7) *$\mathfrak{T}^*$ ist nicht selbstdual.*

Beweis. Angenommen $\mathfrak{T}^*$ wäre selbstdual. Da $\mathfrak{T}^*$ nicht-desarguessch ist, ist daher $\mathfrak{T}$ eine Ebene über einem echten distributiven Quasikörper. Dann gibt es aber einen uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{T}$, der unter allen Kollineationen von $\mathfrak{T}$ fest bleibt. Dies widerspricht jedoch (6.6).

Da die uneigenliche Gerade einer nicht-desarguesschen Translationsebene unter allen Kollineationen des projektiven Abschlusses dieser Ebene fest bleibt, folgt aus (6.3), (6.7) und Satz 9

(6.8) *Ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T}^*$, so operiert Δ entweder auf die unter* (1) *oder auf die unter* (3) *in Satz* 9 *beschriebene Weise auf $\mathfrak{T}^*$.*

Die in Satz 10 beschriebenen Translationsebenen sind nach (6.4) nicht-desarguessch. Folglich kann der Kern einer solchen Ebene nicht isomorph zu $GF(q^2)$ sein. Nach (b) ist der Kern daher isomorph zu $GF(q)$. Der Rang des zugehörigen Quasikörpers über dem Kern ist also gleich 2. Wir bezeichnen daher diese Ebene mit $\mathfrak{T}(2, S(q))$. Alle diese Ebenen scheinen neu zu sein. Mir zumindest waren bisher nur drei nicht-desarguessche fahnentransitive affine Ebenen bekannt: die Fastkörperebene der Ordnung 9 und zwei von Foulser in [9] beschriebene Ebenen der Ordnung 25.

Ist $\mathfrak{S}$ der dreidimensionale projektive Raum über $GF(q)$ und ist Δ eine zur $S(q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$, so gehört zu Δ nach Satz 8 eine eindeutig bestimmte Geradenkongruenz $\mathfrak{K}$. Aus Satz 8 und Tits [25] Proposition 3.3 und Corollaire 8.3 folgt daher, daß Δ aus all den Kollineationen der projektiven Gruppe von $\mathfrak{S}$ besteht, die $\mathfrak{K}$ invariant lassen. Somit ist die von Δ in $\mathfrak{T}(2, S(q))$ induzierte Kollineationsgruppe ein Normalteiler in der Standuntergruppe des Punktes P, falls nur P der universelle Fixpunkt von Δ ist. Nun wird die volle Automorphismengruppe von Δ durch Kollineationen von $\mathfrak{S}$ induziert (s. Suzuki [23] Beweis von Theorem 11). Ferner folgt aus Satz 8, daß der Normalisator von Δ in der Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$ ebenfalls die Kongruenz $\mathfrak{K}$ invariant läßt. Da die äußere Automorphismengruppe von Δ nach Suzuki [23] Theorem 11 zur Automorphismengruppe von $GF(q)$ isomorph ist, gilt daher nach André [1] Satz 19

(6.9) *Ist Π die volle Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(2, S(q))$, so besitzt Π die Normalreihe $1 \lhd \mathsf{T} \lhd \mathsf{H} \lhd \mathsf{K} \lhd \Pi$, dabei ist T die Translationsgruppe und H die Gruppe aller Dilatationen von $\mathfrak{T}$. Ferner ist $\mathsf{K} = \mathsf{H}\Delta$ mit $\mathsf{H} \cap \Delta = 1$ und $\Delta \cong S(q)$ und schließlich Π/K isomorph zur Automorphismengruppe von $GF(q)$.*

Zum Schluß dieses Abschnitts noch einige Bemerkungen über unendliche Translationsebenen mit einer Suzukigruppe als Kollineationsgruppe.

Es sei K ein perfekter Körper der Charakteristik 2. Ferner sei σ ein Automorphismus von K mit $x^{\sigma^2} = x^2$ für alle $x \in K$. Nach Tits [25] Abschnitt 6 gibt es dann Gruppen $S(K, \sigma)$, die im Falle $K = GF(q)$ mit $S(q)$ übereinstimmen und sonst unendliche Analoga der Suzukigruppen sind. Ferner gibt es nach Tits [25] Proposition 3.3 eine Geradenkongruenz $\mathfrak{K}$ des 3-dimensionalen projektiven Raumes $\mathfrak{S}$ über K mit der Eigenschaft, daß $\Pi_{\mathfrak{K}} \cong S(K, \sigma)$ ist, falls Π die projektive Gruppe von $\mathfrak{S}$ ist. Ferner ist $S(K, \sigma)$ auf den Geraden von K zweifach transitiv. Es gibt also für jeden perfekten Körper K der Charakteristik 2, der einen Automorphismus σ mit $x^{\sigma^2} = x^2$ für alle $x \in K$ besitzt, eine Translationsebene $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ mit der Eigenschaft, daß die Standuntergruppe eines Punktes P eine zur $S(K, \sigma)$ isomorphe Kollineationsgruppe Δ enthält. Die Gruppe Δ ist auf den Geraden durch P zweifach transitiv.

Der Kern von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ ist isomorph zu K. Wegen $\Pi_{\mathfrak{R}} \cong S(K, \sigma)$ ist $\Gamma(Q, PQ) \subseteq \Delta$ für jeden uneigentlichen Punkt Q. Folglich ist $\Gamma(Q, PQ)$ auf den von Q verschiedenen uneigentlichen Punkten von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ nicht transitiv. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ weder desarguessch noch eine Moufang-Ebene ist. Hieraus folgt wiederum, daß $\mathfrak{T}^*(K, \sigma)$ nicht selbstdual ist.

7. Die Quasikörper der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Ebenen

Zu jedem perfekten Körper K der Charakteristik 2, der einen Automorphismus σ mit $x^{\sigma^2} = x^2$ für alle $x \in K$ besitzt, gibt es, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, eine Translationsebene $\mathfrak{T}(K, \sigma)$, die eine zur $S(K, \sigma)$ isomorphe Kollineationsgruppe besitzt, die auf den Punkten der uneigentlichen Geraden zweifach transitiv operiert. Wir werden nun in diesem Abschnitt für jede Ebene $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ einen zugehörigen Quasikörper bestimmen. Dazu benötigen wir explizit die Kongruenzpartition der Translationsgruppe von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$, die wir daher zuerst zu bestimmen suchen. (Für die im folgenden benutzten Begriffe siehe Tits [25].)

Es sei $\mathfrak{S}$ der 3-dimensionale projektive Raum über K. Die Koordinaten des Punktes X von $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit (x_0, x_1, x_2, x_3). Die Punkte außerhalb der Ebene mit der Gleichung $x_0 = 0$ beschreiben wir außerdem noch mit den inhomogenen Koodinaten $s = x_3 x_0^{-1}$, $t = x_2 x_0^{-1}$ und $r = x_1 x_0^{-1}$. Die Menge der Punkte mit den Koordinaten (s, t, r), für die $r = st + s^{\sigma+2} + t^\sigma$ ist, zusammen mit dem Punkt mit den Koordinaten $(0, 1, 0, 0)$ bilden ein Ovoid $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{S}$. Die Untergruppe der projektiven Gruppe von $\mathfrak{S}$, die $\mathfrak{O}$ invariant läßt, ist gerade $S(K, \sigma)$ (s. Tits [25]). Die den Punkten von $\mathfrak{O}$ unter der σ-Polarität, die durch $x_i^* = x_i^\sigma$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ in $\mathfrak{S}$ induziert wird, zugeordneten Geraden bilden nun gerade die von uns gesuchte Geradenkongruenz von $\mathfrak{S}$. Das Bild des Punktes mit den Koordinaten $(0, 1, 0, 0)$ ist die Gerade mit den Plückerkoordinaten

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{13} = g_{23} = 0, \; g_{12} = 1. \tag{7.1}$$

Das Bild des Punktes mit den Koordinaten $(1, r, t, s)$, für die $r = st + s^{\sigma+2} + t^\sigma$ ist, ist die Gerade mit den Plückerkoordinaten

$$\begin{gathered} g_{01} = g_{23} = s^{1+\sigma} + t, \; g_{02} = s^\sigma, \; g_{03} = 1, \; g_{13} = t^\sigma, \\ g_{12} = s^\sigma t^\sigma + s^{2(1+\sigma)} + t^2. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Jede dieser Geraden bestimmt nun einen Unterraum vom Range 2 in dem $\mathfrak{S}$ zugrunde liegenden Vektorraum V. Um die Elemente von V, die zu diesen Unterräumen gehören, zu bestimmen, müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$
(7.3)\qquad
\begin{aligned}
x_1 g_{23} + x_2 g_{13} + x_3 g_{12} &= 0,\\
x_0 g_{23} \qquad\quad + x_2 g_{03} + x_3 g_{02} &= 0,\\
x_0 g_{13} + x_1 g_{03} \qquad\quad + x_3 g_{01} &= 0,\\
x_0 g_{12} + x_1 g_{02} + x_2 g_{01} \qquad\quad &= 0.
\end{aligned}
$$

Für (7.1) liefert (7.3) die Lösungsmannigfaltigkeit

$$(7.4)\qquad U_\infty = \{(0, x, y, 0) \mid x, y \in K\}$$

und für (7.2) die Lösungsmannigfaltigkeit

$$(7.5)\quad U_{s,t} = \{\big(x, t^\sigma x + (s^{1+\sigma} + t) y, (s^{1+\sigma} + t) x + s^\sigma y, y\big) \mid x, y \in K\}.$$

Wir nehmen nun als Koordinatenviereck O, E, U, V von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ die folgenden Punkte: $O = (0, 0, 0, 0)$, $E = (0, 1, 0, 1)$, U ist der uneigentliche Punkt der Geraden $U_{0,0}$ und V ist der uneigentliche Punkt der Geraden U_∞. Den Punkt $(0, x, y, 0) \in U_\infty$ identifizieren wir mit (x, y). Die Elemente des zu O, E, U, V gehörigen Quasikörpers Q sind also alle Paare (x, y) mit $x, y \in K$. Ferner ist $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$, da ja, falls $O^\tau = (u, v)$ ist, $(x, y)^\tau = (x, y) + (u, v)$ ist. Es bleibt also nur noch die Multiplikation in Q zu bestimmen. Nach Pickert [16] (51), S. 39, ist nun

$$(x, y)(u, v) = \big((E V \cap (x, y) U) O \cap ((u, v) U \cap O E) V\big) U \cap O V.$$

Mit Hilfe von (7.4) und (7.5) erhält man dann leicht, daß

$$(7.6)\qquad (x, y)(u, v) = \big((x^\sigma + y^{1+\sigma}) v + x(u + v),\ x v + y(u + v)\big)$$

ist.

Bezeichnet man mit $K(Q)$ den Kern von Q, so gilt

(7.7) *Es ist* $K(Q) = \{(k, 0) \mid k \in K\}$.

Ferner rechnet man leicht nach, daß auch das folgende partielle Distributivitätsgesetz gilt.

(7.8) *Es ist* $(x + k) y = x y + k y$ *für alle* $x, y \in Q$ *und alle* $k \in K(Q)$.

Dies ist gleichbedeutend damit, daß die $(V, O V)$-Elationen von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ in der von $K(Q)$ koordinatisierten desarguesschen Unterebene $(V, O V)$-Elationen induzieren.

Anmerkung: Nimmt man statt $(0, 1, 0, 1)$ irgendeinen anderen Punkt als Einheitspunkt, so erhält man bis auf Isomorphie alle zu $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ gehörigen Quasikörper, da die Kollineationsgruppe von $\mathfrak{T}(K, \sigma)$ auf den uneigentlichen Punkten zweifach transitiv ist.

Literatur

[1] J. ANDRÉ, Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 60 (1954) 156—186.

[2] J. ANDRÉ, Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen. Arch. Math. 6 (1954) 29—32.

[3] R. BRAUER und M. SUZUKI, On finite groups of even order whose Sylow 2-group is a quaternion group. Proc. Nat. Ac. Sci. USA 45 (1959) 1757—1759.

[4] W. BURNSIDE, Theory of groups of finite order. New York, Dover Publ. 1955.

[5] P. DEMBOWSKI, Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. 69 (1958) 59—89.

[6] P. DEMBOWSKI, Möbiusebenen gerader Ordnung. Math. Ann. 157 (1964) 179—205.

[7] L. E. DICKSON, Linear groups. New York, Dover Publ. 1958.

[8] W. FEIT und J. G. THOMPSON, Solvability of groups of odd order. Pac. J. Math. 13 (1963) 775—1029.

[9] D. FOULSER, Solvable flag transitive affine groups. Math. Z. 86 (1964) 191—204.

[10] A. M. GLEASON, Finite Fano planes. Am. J. Math. 78 (1956) 797—808.

[11] D. GORENSTEIN, The classification of finite groups with dihedral Sylow 2-groups. Symposium on Group Theory. Harvard 1963, 10—15.

[12] M. HALL, Projective planes. Trans. Am. Math. Soc. 54 (1943) 229—277.

[13] H. KARZEL, Normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe. Abh. math. Seminar Hamburg. Univ. 28 (1965) 124—132.

[14] H. LÜNEBURG, Charakterisierungen der endlichen desarguesschen projektiven Ebenen. Math. Z. 85, (1964) 419—450.

[15] H. LÜNEBURG, Finite Möbius-planes admitting a Zassenhaus group as group of automorphisms. Ill. J. Math. 8 (1964) 586—592.

[16] G. PICKERT, Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1955.

[17] F. C. PIPER, Elations of finite projective planes. Math. Z. 82 (1963) 247—258.

[18] B. QVIST, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Ac. Sci. Fenn. 134 (1952).

[19] I. SCHUR, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. r. a. Math. 127 (1904) 20—50.

[20] I. SCHUR, Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. r. a. Math. 132 (1907) 85—137.

[21] B. SEGRE, On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two. Acta Arithmetica 5 (1959) 315—332.

[22] M. SUZUKI, Finite groups with nilpotent centralizers. Trans. Am. Math. Soc. 99 (1961) 425—470.

[23] M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups. Ann. Math. 75 (1962) 105—145.

[24] J. G. THOMPSON, Normal p-complements for finite groups. Math. Z. 72 (1960) 332—354.

[25] J. TITS, Ovoides et groupes de Suzuki. Arch. Math. 13 (1962) 187—198.

[26] H. ZASSENHAUS, Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ. 11 (1936) 187—220.

[27] H. ZASSENHAUS, The theory of groups. 2nd ed. New York, Chelsea 1958.

Eingegangen im Oktober 1964