Fanosche metrische affine Ebenen[1])

Von Helmut Karzel in München

Durch gruppentheoretische Beschreibungen absoluter Ebenen ist man zu weitgehenden Verallgemeinerungen des Begriffs absolute Ebene gelangt, vor allem durch ein von E. Sperner angegebenes Axiomensystem [7], durch das erstmalig auch absolute Ebenen über Körpern der Charakteristik 2 erfaßt wurden [2]. Es ergibt sich daher das Problem, diese neu erfaßten absoluten Ebenen durch Kongruenzaxiome zu kennzeichnen.

Die bekannte algebraische Beschreibung der „klassischen“ euklidischen Ebene als Koordinatenebene über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ führt ebenfalls zu einer Erweiterung des Begriffs euklidische Ebene, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen, quadratisch nicht abgeschlossenen kommutativen Körper K ersetzt und die Metrik durch eine nullteilige quadratische Form $Q: K^2 \to K$ beschreibt. Über endlichen Körpern sind solche Geometrien besonders von P. Kustaanheimo betrachtet worden, und für den Fall, daß die Charakteristik von K ungleich 2 ist, hat Kustaanheimo ihre Metrik durch Kongruenzaxiome beschrieben. Für den Fall der Charakteristik 2 hat Kustaanheimo [6] die folgende Vermutung geäußert:

Es sei K ein endlicher Körper der Charakteristik 2, $(E, \mathfrak{G}) := A(K^2)$ die affine Koordinatenebene über K (d.h. $E := K^2$ ist die Punktmenge und $\mathfrak{G} := \{\mathfrak{a} + K\mathfrak{b} : \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in K^2, \mathfrak{b} \neq 0\}$ die Geradenmenge) und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf E^2, die den hier unter **K1, 2, 3, W1*, 2, 3, 4** (§ 1, 2) aufgeführten Kongruenzaxiomen genügt. Dann läßt sich $\equiv$ durch eine quadratische Form $Q : (x_1, x_2) \to x_1^2 + c x_1 x_2 + x_2^2$ beschreiben:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \Leftrightarrow Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{c} - \mathfrak{d}).$$

Eine affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ in der auf E^2 eine Kongruenzrelation $\equiv$ erklärt ist, so daß **K1, K2, K3, W1*, W2, W3, W4** gelten, nennen wir *fanosche metrische affine Ebene*.

Daß die Vermutung von Kustaanheimo sogar unter schwächeren Voraussetzungen richtig ist, ergibt sich aus dem Hauptsatz, zu dessen Formulierung die folgenden Begriffe (vgl. z.B. [5]) benötigt werden:

---

[1]) Über diese Untersuchungen habe ich auf der vom Mathematischen Seminar der Universität Hamburg am 15. 2. 1974 veranstalteten Tagung über Geometrie berichtet.

Es sei Γ eine Gruppe, $J := \{\gamma \in \Gamma : \gamma^2 = 1, \gamma \neq 1\}$ und $\mathfrak{D} \subset J$. Für $\gamma \in \Gamma$ sei $\overline{\gamma} := \{X \in \mathfrak{D} : \gamma X \in J\}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{D}$ heißt *Büschel*, wenn es $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \neq B$ und $\mathfrak{b} = \overline{AB}$ gibt. Zwei Büschel $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ heißen *verbindbar*, wenn $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \neq \emptyset$ ist und ein Büschel $\mathfrak{b}$ heißt *eigentlich*, wenn es mit allen anderen Büscheln verbindbar ist. Es sei $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}_0$ die Menge aller Büschel bzw. aller eigentlichen Büschel. Das Paar $\Gamma, \mathfrak{D}$ heißt *Spiegelungsgruppe*, wenn gilt:

S1 $\langle \mathfrak{D} \rangle = \Gamma$.

S2 Es seien $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ und $A, B, C \in \mathfrak{b}$, dann gilt $ABC \in \mathfrak{D}$.

S3 $\mathfrak{B}_0 \neq \emptyset$.

S4 Für jedes $X \in \mathfrak{D}$ gilt $|\{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_0 : X \in \mathfrak{b}\}| \neq 1, 2$.

Jeder Spiegelungsgruppe $\Gamma, \mathfrak{D}$ ordnet man die *Spiegelungsgeometrie* $(\Gamma, \mathfrak{D}) := (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in, \perp)$ zu, indem man die eigentlichen Büschel *Punkte* und die Elemente aus $\mathfrak{D}$ *Geraden* nennt und $\perp := \{(A, B) \in \mathfrak{D}^2 : AB \in J\}$ setzt. Eine Spiegelungsgeometrie heißt *Lotkerngeometrie*, wenn für ein $A \in \mathfrak{D}$ gilt $A \cup \overline{A} \in \mathfrak{B}$. (Nach [1] gilt dann $X \cup \overline{X} \in \mathfrak{B}$ für alle $X \in \mathfrak{D}$, die nicht im Zentrum von Γ liegen).

Hauptsatz

1. *Es sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine fanosche metrische affine Ebene. Dann gilt:*
   a) *Zu jeder Geraden $A \in \mathfrak{G}$ gibt es genau eine Bewegung $\tilde{A} \neq \mathrm{Id}$, die A punktweise festläßt ($\tilde{A}$ ist dann involutorisch).*
   b) *Für $\tilde{\mathfrak{G}} := \{\tilde{X} : X \in \mathfrak{G}\}$ und $\Gamma := \langle \tilde{\mathfrak{G}} \rangle$ ist $(\Gamma, \tilde{\mathfrak{G}})$ eine Lotkerngeometrie, die hinsichtlich ihrer Inzidenzstruktur $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{G}, \in)$ eine affine Ebene ist, die zu $(E, \mathfrak{G})$ isomorph ist.*
   c) *Zu je zwei Elementen $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ gibt es ein $\sigma \in \Gamma$ mit $\sigma \tilde{A} \sigma^{-1} = \tilde{B}$.*

2. *Es sei $(\Gamma, \mathfrak{D})$ eine Lotkerngeometrie, deren Inzidenzstruktur $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in)$ eine affine Ebene ist und für die* 1c) *erfüllt ist. Dann gibt es genau einen kommutativen quadratisch nicht abgeschlossenen vollkommenen Körper K der Charakteristik 2 und genau eine nullteilige nicht quasilineare quadratische Form $Q : K^2 \to K$, so daß gilt:*
   a) *$(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in)$ ist als affine Koordinatenebene $A(K^2) = (K^2, \mathfrak{G})$ darstellbar.*
   b) *Für* $\widetilde{(\mathfrak{a} + K\mathfrak{b})} : \begin{cases} K^2 \to K^2 \\ \mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + \dfrac{f(\mathfrak{b}, \mathfrak{x} + \mathfrak{a})}{Q(\mathfrak{b})} \cdot \mathfrak{b} \end{cases}$ *mit* $\mathfrak{a} + K\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$
   und $f : K^2 \to K : (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \to Q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) - Q(\mathfrak{x}) - Q(\mathfrak{y})$,
   $\tilde{\mathfrak{G}} := \{\widetilde{(\mathfrak{a} + K\mathfrak{b})} : \mathfrak{a} + K\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}\}$ *und* $\tilde{\Gamma} := \langle \tilde{\mathfrak{G}} \rangle$ *ist* $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\mathfrak{G}})$ *eine zu* $(\Gamma, \mathfrak{D})$ *isomorphe Lotkerngeometrie.*

3. *Zu jeder fanoschen metrischen affinen Ebene* $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ *gibt es einen kommutativen quadratisch nicht abgeschlossenen vollkommenen Körper K der Charakteristik 2 und eine nicht quasilineare quadratische Form* $Q: K^2 \to K$, *so daß* $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ *als affine Koordinatenebene* $A(K^2)$ *darstellbar ist und* $\equiv$ *durch* „$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \Leftrightarrow Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})$“ *beschrieben wird.*
4. *Es sei K ein kommutativer quadratisch nicht abgeschlossener vollkommener Körper der Charakteristik 2 und* $x^2 + ax + b \in K[x]$ *mit* $a \neq 0$ *ein (nach Voraussetzung existierendes) irreduzibles Polynom. Dann gilt:*

   a) $Q: \begin{cases} K^2 \to K \\ (x_1, x_2) \to x_1^2 + a x_1 x_2 + b x_2^2 \end{cases}$ *ist eine nullteilige quadratische Form.*

   b) *Die affine Koordinatenebene* $A(K^2)$ *mit* $\equiv : \{((\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{c}, \mathfrak{d})) \in K^2 \times K^2 : Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})\}$ *ist eine fanosche metrische affine Ebene.*

Hinsichtlich der Vermutung von Kustaanheimo sei noch bemerkt, daß jeder endliche Körper der Charakteristik 2 quadratisch nicht abgeschlossen und vollkommen ist.

Der Beweis des Hauptsatzes wird in den folgenden Paragraphen erbracht.

§ 1. Metrische affine Ebenen

Es sei $(E, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit der Punktmenge E und der Geradenmenge $\mathfrak{G}$. Für $a, b \in E$ mit $a \neq b$ bezeichne $\overline{a, b}$ die *Verbindungsgerade* der Punkte a, b. Für $A, B \in \mathfrak{G}$ bedeute $A \parallel B$ entweder $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$. Für $p \in E$ und $A \in \mathfrak{G}$ sei $\{p \parallel A\}$ die *Parallele* zu A durch p und es sei $[A] := \{X \in \mathfrak{G} : X \parallel A\}$. Ein Quadrupel (a, b, c, d) von vier verschiedenen nicht kollinearen Punkten mit $\overline{a, b} \parallel \overline{c, d}$ und $\overline{b, c} \parallel \overline{d, a}$ heißt *Parallelogramm.* Die Aussage, daß (a, b, c, d) ein Parallelogramm ist, kürzen wir durch $\square\,(a, b, c, d)$ ab.

Eine binäre Relation $\equiv$ auf der Menge E^2 heißt *Kongruenzrelation,* wenn die folgenden Axiome gelten:

K1 $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

K2 Für alle $a, b \in E$ gilt $(a, b) \equiv (b, a)$ und $(a, a) \equiv (b, b)$.

K3 Für alle $a, b, c \in E$ mit $(a, a) \equiv (b, c)$ gilt $b = c$.

Das Tripel $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ heißt *metrische affine Ebene,* wenn $(E, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf E^2 ist und die folgenden Verträglichkeitsaxiome erfüllt sind:

W1 Es seien a, b, c, d vier verschiedene nicht kollineare Punkte mit $\overline{a, b} \parallel \overline{c, d}$. Dann gilt:
$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow \square\,(a, b, d, c)$ oder $\square\,(a, b, c, d)$.

W2 Es seien $a, b, c \in E$ drei nicht kollineare Punkte mit $(a, b) \equiv (a, c)$ und $d \in \overline{a, b}$, $e \in \overline{a, c}$ mit $\overline{d, e} \parallel \overline{b, c}$. Dann ist $(a, d) \equiv (a, e)$.

W3 Es seien $a, b, c, d, a', b', c', d' \in E$ mit $\{a, b, c\}$ kollinear, $\{a', b', c'\}$ kollinear, $a \neq b$, $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$, $(a, d) \equiv (a', d')$ und $(b, d) \equiv \equiv (b', d')$. Dann gilt auch $(c, d) \equiv (c', d')$.

W4 Es gibt $a_0, b_0 \in E$ mit $a_0 \neq b_0$ und der Eigenschaft: Für jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit $a_0 \in G$ gilt $G \cap \{x \in E : (a_0, x) \equiv (a_0, b_0)\} \neq \emptyset$.

Im folgenden sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine metrische affine Ebene. Jede Menge der Gestalt $K(a, (b, c)) := \{x \in E : (a, x) \equiv (b, c)\}$ mit $a, b, c \in E$ heißt *Kreis*. Falls $a = b$ ist, setzen wir $K(a, c) := K(a, (a, c))$.

(1.1) *Für alle $x, y, z \in E$ mit $x \neq y$ und jedes $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$ gilt $1 \leqq |K(z, (x, y)) \cap G| \leqq 2$.*

Beweis: Falls $a_0 \in \overline{x, y}$ ist, so seien $x' \in E \setminus \overline{x, y}$ und y' so bestimmt, daß $\square\,(x, y, x', y')$ gilt. Nach **W1** gilt $(x, y) \equiv (x', y')$. Daher dürfen wir $a_0 \notin \overline{x, y}$ voraussetzen. Es sei $c \in E$ durch $\square\,(a_0, x, y, c)$ bestimmt, $G' := \{a_0 \parallel G\}$, $d \in K(a_0, b_0) \cap \overline{a_0, c}$, $e \in G' \cap K(a_0, b_0)$ (vgl. **W4**), $f := G' \cap \cap \{c \parallel \overline{d, e}\}$ falls $G' \neq \overline{a_0, c}$ und $f := c$ falls $G' = \overline{a_0, c}$. Nach **W1** ist $(a_0, c) \equiv (x, y)$ und nach **W2** ist $(a_0, f) \equiv (a_0, c)$.

Falls $G' \neq G$ ist, sei $u := G \cap \{f \parallel \overline{a_0, z}\}$. Dann ist $\square\,(z, a_0, f, u)$ und nach **W1** gilt $(z, u) \equiv (a_0, f) \equiv (a_0, c) \equiv (x, y)$.

Falls $G = G'$ ist, so sei $g \in E \setminus G$, $G'' = \{g \parallel G\}$, h durch $\square\,(g, a_0, f, h)$ und u durch $\square\,(h, g, z, u)$ bestimmt. Dann gilt $(z, u) \equiv (h, g) \equiv (a_0, f) \equiv \equiv (a_0, c) \equiv (x, y)$ und $u \in G$. In beiden Fällen ist $u \in K(z, (x, y)) \cap G$.

Es sei $t \in E \setminus G$ und s durch $\square\,(u, z, t, s)$ bestimmt, nach **W1** gilt $(u, z) \equiv (t, s)$. Da es höchstens zwei verschiedene Punkte u, u' mit $\square\,(u, z, t, s)$ und $\square\,(z, u', t, s)$ geben kann, gilt mit **W1** $|K(z, (x, y)) \cap \cap G| \leqq 2$ (in einer affinen Koordinatenebene über einem Körper der Charakteristik 2 gilt $u = u'$).

Nach [6] gilt:

(1.2) *Jeder Kreis und jede Gerade haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.*

Beweis nach [6]: Angenommen es gibt drei verschiedene kollineare Punkte $a, b, c \in E$ und ein $m \in E$ mit $(m, a) \equiv (m, b) \equiv (m, c)$. Nach (1.1) ist $m \notin \overline{a, b}$. Es sei $d := \{m \parallel \overline{a, b}\} \cap \{b \parallel \overline{m, c}\}$, $e := \overline{m, a} \cap \{b \parallel \overline{m, c}\}$ und $f := \{e \parallel \overline{a, b}\} \cap \overline{m, c}$. Dann gilt nach **W1** $(m, f, c) \equiv (d, e, b)$ und nach **W2** $(m, e) \equiv (m, f)$. Da auch $(m, b) \equiv (m, c)$ ist, folgt wegen **W3** $(m, d) \equiv (m, m)$, also nach **K3** $m = d$ und damit $b = c$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Eine Affinität α von $(E, \mathfrak{G})$ heißt *Bewegung* oder *Isometrie* von $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$, wenn für alle $x, y \in E$ gilt $(\alpha(x), \alpha(y)) \equiv (x, y)$. $\mathfrak{A}$ sei die Menge aller Bewegungen von $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$. Ein Element $\sigma \in \mathfrak{A}$ heißt *Spiegelung an der Geraden* $A \in \mathfrak{G}$, wenn $\sigma \neq \mathrm{Id}$ und $\sigma(x) = x$ für alle $x \in A$ gilt.

(1.3) *Jede Translation* τ *von* $(E, \mathfrak{G})$ *ist eine Bewegung.*

Beweis: Es sei $\tau \neq \mathrm{Id}$ und $x, y \in E$ mit $x \neq y$.

1. $\tau(x) \notin \overline{x, y}$. Dann gilt $\square\,(x, y, \tau(y), \tau(x))$ und nach **W1** $(x, y) \equiv \equiv (\tau(x), \tau(y))$.

2. $\tau(x) \in \overline{x, y}$. Wenn $|\overline{x, y}| = 2$ ist, so gilt $\tau(x) = y$ und $\tau(y) = x$, also $(x, y) \equiv (\tau(x), \tau(y))$. Es sei $|\overline{x, y}| \geqq 3$. Da $|X| = |\overline{x, y}| \geqq 3$ für alle $X \in \mathfrak{G}$ gilt, gibt es $u, v \in E \backslash \overline{x, y}$, so daß $\{x, u, v\}$ kollinear und verschieden sind. Nach 1. gilt $(x, u, v) \equiv (\tau(x), \tau(u), \tau(v))$, $(u, y) \equiv (\tau(u), \tau(y))$ und $(v, y) \equiv (\tau(v), \tau(y))$, nach **W3** also $(x, y) \equiv (\tau(x), \tau(y))$.

§ 2. Fanosche metrische affine Ebenen

Eine metrische affine Ebene $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ heißt *fanosch*, wenn statt **W1** das stärkere Axiom **W1*** erfüllt ist:

W1* Es seien $a, b, c, d \in E$ vier verschiedene nicht kollineare Punkte mit $\overline{a, b} \parallel \overline{c, d}$. Dann gilt:
$(a, b) \equiv (d, c) \Leftrightarrow \square\,(a, b, c, d)$.

Im folgenden sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine fanosche metrische affine Ebene und $\mathfrak{A}$ die Gruppe ihrer Bewegungen.

(2.1) *In* $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ *gilt das Fano-Axiom:*
F. *Aus* $\square\,(a, b, c, d)$ *folgt* $\overline{a, c} \parallel \overline{b, d}$

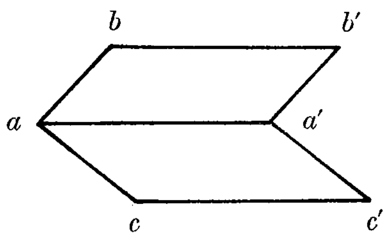

Fig. 1

Beweis: $\square\,(a, b, c, d) \Rightarrow (a, b) \equiv (d, c) \equiv (c, d)$ (nach **W1*** und **K2**)$\Rightarrow$ $\Rightarrow \square\,(a, b, d, c)$, d.h. $\overline{a, c} \parallel \overline{b, d}$.

Aus (1.1) und dem Beweis von (1.1) folgt:

(2.2) *Zu allen* $x, y, z \in E$ *mit* $x \neq y$ *und zu jedem* $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $z \in G$ *gibt es genau ein* $u \in G$ *mit* $(x, y) \equiv (z, u)$.

(2.3) $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ *ist eine Translationsebene und jede Translation* $\tau \neq \mathrm{Id}$ *von* $(E, \mathfrak{G})$ *ist eine involutorische Bewegung.*

Beweis: Es seien $a, b, c, a', b', c' \in E$ mit $\square\,(a, a', b', b)$, $\square\,(a, a', c', c)$ (vgl. Fig. 1). Nach **W1*** gilt daher $(a, a') \equiv (b, b') \equiv (c, c')$ und hieraus folgt wieder mit **W1*** $\square\,(b, b', c', c)$, d.h. $\overline{b, c} \parallel \overline{b', c'}$. Also gilt in $(E, \mathfrak{G})$ das kleine affine Axiom von Desargues. Nach (1.3) gilt $\tau \in \mathfrak{A}$ und wegen (2.1) $\tau^2 = \mathrm{Id}$.

(2.4) *Es seien* $\sigma \in \mathfrak{A}$, $a, b, c \in E$ *drei nicht kollineare Punkte und* $A \in \mathfrak{G}$. *Dann gilt:*

a) *Aus* $a \in A$, $\sigma(a) = a$ *und* $\sigma(A) = A$ *folgt* $\sigma(x) = x$ *für alle* $x \in A$.

b) *Wenn* $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b$, $\sigma(c) = c$ *ist, so gilt* $\sigma = \mathrm{Id}$.

Beweis: a) Für $x \in A$ gilt $\sigma(x) \in \sigma(A) = A$ und $(a, x) \equiv (a, \sigma(x))$, nach (2.2) also $\sigma(x) = x$.

b) Es sei $x \in E$ mit $x \neq a$. Wenn $\overline{x, a} \cap \overline{b, c} =: d \neq \emptyset$ ist, gilt nach a) $\sigma(d) = d$ und daher $\sigma(x) = x$. Wenn $\overline{x, a} \parallel \overline{b, c}$ ist, gilt $\sigma(\overline{x, a}) \parallel \sigma(\overline{b, c}) = \overline{b, c}$ und $a \in \sigma(\overline{x, a})$, also $\sigma(\overline{x, a}) = \overline{x, a}$ und damit $\sigma(x) = x$ nach a).

(2.5) *Es seien* $a, b, c \in E$ *nicht kollinear mit* $(a, b) \equiv (a, c)$ *und* $A := \{a \parallel \overline{b, c}\}$. *Dann gilt für alle* $x \in A : (x, b) \equiv (x, c)$.

Beweis: Es sei $d := A \cap \{c \parallel \overline{a, b}\}$. Dann gilt $\square\,(a, b, c, d)$ und $\square\,(a, c, d, b)$. Nach **W1*** gilt $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(a, c) \equiv (d, b)$, also $(d, b) \equiv (d, c)$ wegen $(a, b) \equiv (a, c)$. Wenden wir **W3** auf (a, d, x, b) und (a, d, x, c) an, so erhalten wir $(x, b) \equiv (x, c)$.

(2.6) *Zu jeder Geraden* $A \in \mathfrak{G}$ *gibt es höchstens ein* $\sigma \in \mathfrak{A}$, *so daß* σ *eine Spiegelung an* A *ist. Für alle* $a \in A$, $x \in E \backslash A$ *gilt dann* $\{\sigma(x)\} = (\{x \parallel A\} \cap K(a, x)) \setminus \{x\} \neq \{x\}$ *und* $\sigma \in J$.

Beweis: Es sei σ eine Spiegelung an A. Für alle $x \in E \backslash A$ gilt nach (2.4): $\sigma(x) \neq x$, $\overline{\sigma(x), x} \cap A = \emptyset$ (denn $y := \overline{\sigma(x), x} \cap A$ hätte $\sigma(\overline{\sigma(x), x}) = \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), y} = \overline{\sigma(x), x}$ und damit $\sigma(x) = x$ nach (2.4a) zur Folge), also $\sigma(x) \in \{x \parallel A\}$. Für $a \in A$ gilt $\sigma(x) \in K(a, x)$ und nach (1.2): $\{\sigma(x)\} = (\{x \parallel A\} \cap K(a, x)) \backslash \{x\}$, d.h. σ ist eindeutig bestimmt und vertauscht die zwei Punkte aus $\{x \parallel A\} \cap K(a, x)$, woraus $\sigma \in J$ folgt.

Wenn es an einer Geraden $A \in \mathfrak{G}$ eine Spiegelung gibt, so bezeichnen wir diese — nach (2.6) eindeutig bestimmte — mit $\tilde{A}$.

(2.7) *Es seien $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ zwei Geradenspiegelungen mit $A \nparallel B$ und $p := A \cap B$. Dann ist p der einzige Fixpunkt der Bewegung $\tilde{A}\tilde{B}$.*

Beweis: Nach (2.6) gilt für jedes $x \in E$:
$\tilde{A}(x) \in \{x \parallel A\}$, $\tilde{B}(x) \in \{x \parallel B\}$. Aus $\tilde{A}\tilde{B}(x) = x$ folgt also $\tilde{A}(x) = \tilde{B}(x) = \{x \parallel A\} \cap \{x \parallel B\} = x$ und hieraus $x = A \cap B = p$ nach (2.6).

(2.8) *Es sei $\sigma \in \mathfrak{A}$ involutorisch und $p \in E$ ein Fixpunkt von σ. Dann ist σ eine Geradenspiegelung.*

Beweis: Es sei $x \in E \setminus \{p\}$. Wenn $\sigma(x) = x$ ist, so ist σ nach (2.4) die Spiegelung an der Geraden $\overline{p, x}$. Es sei $\sigma(x) \neq x$. Da σ involutorisch ist, ist $\overline{x, \sigma(x)}$ eine Fixgerade und für $A := \{p \parallel \overline{x, \sigma(x)}\}$ gilt $\sigma(A) = \{\sigma(p) \parallel \sigma(\overline{x, \sigma(x)})\} = \{p \parallel \overline{x, \sigma(x)}\} = A$, also $\sigma = \tilde{A}$ nach (2.4).

(2.9) *Wenn es zu einer Geraden A drei nicht kollineare Punkte $a, b, c \in E$ mit $a \in A$, $\overline{b, c} \parallel A$ und $(a, b) \equiv (a, c)$ gibt, so existiert $\tilde{A}$, und $\tilde{A}$ ist eine involutorische Scherung von $(E, \mathfrak{G})$, die b und c vertauscht.*

Beweis:

1. Für alle $x \in E \setminus (A \cup \overline{b, c})$ gilt $|K(a, x) \cap \{x \parallel A\}| = 2$; denn für $a' := \overline{b, x} \cap A$ und $x' := \overline{a', c} \cap \{x \parallel A\}$ gilt $(a', b) \equiv (a', c)$ nach (2.5), daher $(a', x) \equiv (a', x')$ nach **W2** und also $(a, x) \equiv (a, x')$ nach (2.5), d.h. $K(a, x) \cap \{x \parallel A\} = \{x, x'\}$ mit (1.2).

Aus 1. und (2.2) folgt sofort:

2. $|K(a, x) \cap \{x \parallel A\}| = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 2 \text{ falls } x \notin A \end{cases}$

Aus (2.5) folgt für alle $a' \in A$:
$K(a, x) \cap \{x \parallel A\} = K(a', x) \cap \{x \parallel A\}$. Es sei daher $\tilde{A}$ die eindeutig bestimmte Bijektion, die jeden Punkt von A festläßt und für $x \notin A$ die zwei Punkte aus $K(a, x) \cap \{x \parallel A\}$ vertauscht. Dann gilt:

3. Für jedes $B \in \mathfrak{G}$ mit $B \parallel A$ gilt $\tilde{A}(B) \parallel B$.

4. Für alle $x, y \in E$ mit $x \neq y$ und $a' := \overline{x, y} \cap A \neq \emptyset$ gilt $(x, y) \equiv (\tilde{A}(x), \tilde{A}(y))$ und $a' \in \overline{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)}$ (vgl. Fig. 2); denn nach 2. und 3. ist $(a', \tilde{A}(x)) \equiv (a', x)$, $(a', \tilde{A}(y)) \equiv (a', y)$ und $\overline{x, \tilde{A}(x)} \parallel \overline{y, \tilde{A}(y)} \parallel A$ falls $x, y \notin A$. Nach **W2** gilt für $y' := \overline{y, \tilde{A}(y)} \cap \overline{a', \tilde{A}(x)}$ dann $(a', y') \equiv (a', y)$, nach (1.2) also $y' = \tilde{A}(y)$, d.h. $a' \in \overline{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)}$. Nun sei $a'' := \{x \parallel \overline{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)}\} \cap A$ und $z := \{x \parallel \overline{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)}\} \cap \overline{y, \tilde{A}(y)}$. Nach **W 1** gilt $(\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)) \equiv (x, z)$ und $(a'', x) \equiv (a', \tilde{A}(x)) \equiv (a', x)$, also nach **W2** $(x, y) \equiv (x, z)$ und zusammen $(\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)) \equiv (x, y)$.

Aus 3. und 4. folgt:

5. Für jedes $X \in \mathfrak{G}$ gilt $\bar{A}(X) \in \mathfrak{G}$, d.h. $\bar{A}$ ist eine Affinität von $(E, \mathfrak{G})$, genauer eine involutorische Scherung mit der Achse A.

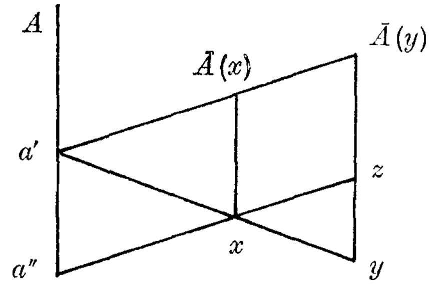

Fig. 2

6. Für alle $x, y \in E\setminus A$ mit $x \neq y$ und $\overline{x, y} \parallel A$ gilt $(x, y) \equiv (\bar{A}(x), \bar{A}(y))$; denn für $X := \overline{a, x}$, $Y := \{y \parallel X\}$, $a' := Y \cap A$ gilt $\square\,(x, a, a', y)$ nach 5. also auch $\square\,(\bar{A}(x), a, a', \bar{A}(y))$ und somit $(x, y) \equiv (a, a') \equiv (\bar{A}(x), \bar{A}(y))$ nach **W1**.

Aus 1. bis 6. folgt $\tilde{A} := \bar{A}$ ist eine Spiegelung an A.

(2.10) *Wenn für ein $A \in \mathfrak{G}$ die Spiegelung $\tilde{A}$ an A existiert, so auch an jeder Geraden $X \in [A]$, und für $X, Y \in [A]$ ist $\tilde{X}\,\tilde{Y}$ eine Translation in Richtung $[A]$.*

Beweis: Es sei $X \in [A]\setminus A$, $x \in X$ und τ die Translation, die $\tilde{A}(x)$ in x überführt (vgl. (2.3)). Dann gilt $\tau\tilde{A} \in \mathfrak{A}$, $\tau\tilde{A}(x) = x$, $\tau\tilde{A}(X) = X$ und $\tau\tilde{A}(a) \neq a$ für $a \in A$. Also ist $\tau\tilde{A}$ nach (2.4.a) eine Bewegung, die X punktweise festläßt und nach (2.6) gilt $\tilde{X} = \tau\tilde{A}$.

Aus (2.10) und seinem Beweis folgt:

(2.11) *Es seien $X, Y, Z \in \mathfrak{G}$ mit $X \parallel Y \parallel Z$ und es existiere $\tilde{X}$. Dann existieren auch $\tilde{Y}, \tilde{Z}$ und $\tilde{W} := \tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}$ ist eine Spiegelung an einer Geraden $W \in [X]$.*

(2.12) *Es seien $X, Y, Z \in \mathfrak{G}$, $p \in E$ mit $p \in X, Y, Z$ und es existieren $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$. Dann gibt es ein $W \in \mathfrak{G}$ mit $p \in W$, so daß $\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}$ die Spiegelung an W ist.*

Beweis: Es sei $z \in Z\setminus\{p\}$ und $z' := \tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}(z)$. Dann gilt $(z, p) \equiv (z', p)$. Für $z' \notin \overline{p, z} = Z$ existiert nach (2.9) an der Geraden $W := \{p \parallel \overline{z, z'}\}$ die Geradenspiegelung $\tilde{W}$ und es gilt $\tilde{W}(z') = z$. Für $z' \in \overline{p, z} = Z$ gilt $z' = z$ nach (2.2) und wir setzen $W = Z$. In beiden Fällen gilt $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}(z) = z$ und $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}(p) = p$, nach (2.4) also $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}\,\tilde{Z}(q) = q$ für alle $q \in Z$.

Also gilt nach (2.6) entweder $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}=\mathrm{Id}$, d.h. $\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}=\tilde{W}$ oder $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}=\tilde{Z}$, d.h. $\tilde{W}\,\tilde{X}\,\tilde{Y}=\mathrm{Id}$. Der letzte Fall kann nach (2.7) nicht eintreten.

(2.13) *Es seien $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ Geradenspiegelungen mit $\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}\in J$ und $X\neq Y$. Für $X\parallel Y$ gilt dann $Z\parallel Y$, für $p:=X\cap Y$ gilt $p\in Z$.*

Beweis: Es sei $p=X\cap Y$. Da $\tilde{X}$, $\tilde{Y},\tilde{Z}$, $\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}\in J$ ist, gilt $\tilde{X}\,\tilde{Y}\big(\tilde{Z}(p)\big)=$ $=\tilde{Z}\,\tilde{Y}\,\tilde{X}(p)=\tilde{Z}(p)$, nach (2.7) also $\tilde{Z}(p)=p$ und $p\in Z$ nach (2.4). Aus $Z\nparallel Y$ und $\tilde{X}\,\tilde{Y}\tilde{Z}=\tilde{Z}\,\tilde{Y}\,\tilde{X}\in J$ folgt also $X\nparallel Y$.

(2.14) *$\mathfrak{A}$ operiert transitiv auf der Geradenmenge $\mathfrak{G}$.*

Beweis: Es seien $A, B\in\mathfrak{G}$. Wenn $A\parallel B$ ist, so gibt es nach (2.3) eine Translation $\tau\in\mathfrak{A}$ mit $\tau(A)=B$. Wenn $A\nparallel B$ ist, so sei $p=A\cap B$, $a\in A\setminus\{p\}$ und $b\in B\setminus\{p\}$ mit $(b,p)\equiv(a,p)$ (vgl. (2.2)). Für $C:=\{p\parallel\overline{a,b}\}$ existiert $\widetilde{C}$ nach (2.9) und es gilt $\widetilde{C}(a)=b$, also $\widetilde{C}(A)=B$.

Wenn $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ Geradenspiegelungen sind, so ist $\tilde{A}\,\tilde{B}\,\tilde{A}$ eine Spiegelung an der Geraden $\tilde{A}(B)$. Daher folgt aus (2.6), (2.9) und (2.14):

(2.15) *An jeder Geraden $X\in\mathfrak{G}$ gibt es genau eine Geradenspiegelung $\tilde{X}$ und für $\sigma\in\mathfrak{A}$, $Y:=\sigma(X)$ gilt $\tilde{Y}=\sigma\,\tilde{X}\,\sigma^{-1}$.*

(2.16) *Es sei $\widetilde{\mathfrak{G}}:=\{\tilde{X}:X\in\mathfrak{G}\}$ und $\Gamma:=\langle\widetilde{\mathfrak{G}}\rangle$. Dann ist $(\Gamma,\widetilde{\mathfrak{G}})$ eine Lotkerngeometrie, die hinsichtlich ihrer Inzidenzstruktur zu $(E,\widetilde{\mathfrak{G}})$ isomorph ist.*

Beweis: Nach (2.11, 12, 13, 15) sind für jedes $a\in E$ und für jedes $A\in\mathfrak{G}$ die Mengen $\tilde{a}:=\{\tilde{X}:X\in\mathfrak{G},\ a\in X\}$ und $[\tilde{A}]:=\{\tilde{X}:X\in[A]\}$ Büschel. Da für A, $B\in\mathfrak{G}$ mit $A\neq B$ entweder $A\parallel B$ oder $p:=A\cap B\neq\emptyset$ ist und in $(E,\mathfrak{G})$ das Parallelenaxiom gilt, ist $\mathfrak{B}_0=\{\tilde{a}:a\in E\}$ und $\mathfrak{B}\setminus\mathfrak{B}_0=\{[\tilde{A}]:A\in\mathfrak{G}\}$. Hieraus folgt mit (2.13, 11, 12), daß S2 für Γ, $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gilt.

Also ist Γ, $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Spiegelungsgruppe. Nach (2.10) und (2.1) ist $[\tilde{A}]=\{\tilde{X}\in\widetilde{\mathfrak{G}}:\tilde{A}\,\tilde{X}\in J\}\cup\{\tilde{A}\}=\overline{\tilde{A}}\cup\{\tilde{A}\}\in\mathfrak{B}$, also ist $(\Gamma,\widetilde{\mathfrak{G}})$ eine Lotkerngeometrie und mit (2.15) folgt, daß $(\mathfrak{B}_0,\widetilde{\mathfrak{G}},\in)$ und $(E,\mathfrak{G})$ isomorph sind.

(2.17) *Es gilt $\Gamma=\mathfrak{A}$.*

Beweis:

1. Es sei $\tau\neq\mathrm{Id}$ eine Translation, $a\in E$, $A:=\overline{a,\tau(a)}$, $\sigma:=\tilde{A}\tau$, $b\in E\setminus A$ und $B:=\{b\parallel A\}$. Dann gilt: $\overline{a,\tau(a)}=\overline{\sigma(a)}\in A$, $\overline{\tau(b),\sigma(b)}=\tilde{A}\tau(b)\in B$ (vgl. (2.6)), $\tau(b)\neq\sigma(b)$ und $\overline{a,b}\parallel\overline{\tau(a)\,\tau(b)}$, also existiert $c:=\overline{a,b}\cap\overline{\sigma(a),\sigma(b)}$. Da auch $\sigma(c)=\tilde{A}\tau(c)\in C:=\{c\parallel A\}$ gilt, ist $\sigma(c)=c$ und $\sigma(C)=C$, d.h. $\sigma=\widetilde{C}$ nach (2.4), also $\tau=\tilde{A}\,\widetilde{C}$.

2. Es sei $\sigma \in \mathfrak{A}$ und $a, b \in E$ mit $a \neq b$, τ die Translation mit $\tau\sigma(a) = a$. Für $\tau\sigma(b) = b$ sei $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, für $\tau\sigma(b) \neq b$ sei $A := \{a \parallel \overline{b, \tau\sigma(b)}\}$ und $\sigma_1 = \tilde{A}$. Dann gilt $\sigma_1\tau\sigma(a) = a$, $\sigma_1\tau\sigma(b) = b$ und nach (2.4) $\sigma_1\tau\sigma = \mathrm{Id}$ oder $\sigma_1\tau\sigma = \tilde{B}$ mit $B := \overline{a, b}$. Zusammen mit 1. erkennt man, daß σ als Produkt von Geradenspiegelungen darstellbar ist.

Aus (2.15), (2.16) und (2.17) folgt der 1. Teil des Hauptsatzes.

§ 3. Lotkerngeometrien

In diesem Paragraphen sei $(\Gamma, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}\ \in, \perp)$ eine Lotkerngeometrie, die hinsichtlich ihrer Inzidenzstruktur $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in)$ eine affine Ebene ist und in der je zwei Elemente aus $\mathfrak{D}$ konjugiert sind. Nach [3] ist für jede Spiegelungsgruppe $\Gamma, \mathfrak{D}$ das Zentrum Z von Γ in $\mathfrak{D} \cup \{1\}$ enthalten. Daher gilt hier $Z = \{1\}$ und die Abbildung

$\sim : \Gamma \to \tilde{\Gamma};\ \sigma \to \tilde{\sigma}: \begin{cases} \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \\ X \to \sigma X \sigma^{-1} \end{cases}$ ist ein Monomorphismus von Γ in die Automorphismengruppe der Lotkerngeometrie $(\Gamma, \mathfrak{D})$.

Nach [1] Hauptsatz 1 ist für jedes $X \in \mathfrak{D}$ die Menge $\overline{X} \cup \{X\}$ ein Büschel, genannt *Lotkern*, und es gilt $\{\overline{X} \cup \{X\} : X \in \mathfrak{D}\} \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_0$. Da $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in)$ eine affine Ebene ist, gilt also:

(3.1) *Für $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \neq B$ gilt:*
a) $A \parallel B \Leftrightarrow A\,B \in J$
b) $[A] := \{X \in \mathfrak{D} : X \parallel A\} = \overline{A} \cup A$
c) $\overline{A\,B} \in \mathfrak{B}_0 \Leftrightarrow A\,B \notin J$.

Aus (3.1c) und den Sätzen 12, 13, 14, 15 und 3 aus [2] folgt:

(3.2) a) $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{D}, \in)$ *ist eine pappussche affine Ebene, deren Koordinatenkörper K die Charakteristik 2 hat und ein irreduzibles separables Polynom zweiten Grades besitzt.*

b) *Für $A, B \in \mathfrak{D}$ ist die Abbildung* $\widetilde{A\,B}: \begin{cases} \mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \\ X \to A\,B\,X\,B\,A \end{cases}$ *eine Translation oder Drehung um den Punkt $\overline{A\,B}$, je nachdem ob $(A\,B)^2 = 1$ oder $(A\,B)^2 \neq 1$ ist.*

c) *Die Menge $T := \{X\,Y : X, Y \in \mathfrak{D}$ und $(X\,Y)^2 = 1\}$ ist ein kommutativer Normalteiler von Γ.*

Die Aussage c) ist eine Folge von b), Satz 3 aus [2] und der Tatsache, daß das Produkt zweier Translationen wieder eine Translation ist.

Im folgenden sei also $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{D}, \in)$ als affine Koordinatenebene $A(K^2) = (P, \mathfrak{G}) = (K^2, \{\mathfrak{a} + K\mathfrak{b} : \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in K^2, \mathfrak{b} \neq 0\})$ dargestellt, die vermöge der Vorschrift

$\begin{cases} K^2 & \to K^{3*}/K^* \\ (x_1, x_2) & \to K^*(1, x_1, x_2) \end{cases}$ in die projektive Koordinatenebene über K eingebettet sei. Nach [4] Seite 153 läßt sich dann für jedes $A \in \mathfrak{D}$ die Geradenspiegelung $\tilde{A} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D};\ U \to AUA$ in der Form $\tilde{A} : K^*\mathfrak{u} \to K^*\left(\mathfrak{u} + \frac{f'(\mathfrak{u}, \mathfrak{a})}{Q'(\mathfrak{a})} \cdot \mathfrak{a}\right)$ darstellen, wobei $Q' : K^3 \to K$ eine quadratische Form und $f'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = Q'(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + Q'(\mathfrak{x}) + Q'(\mathfrak{y})$ ist.

Es sei $\mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{B}_0$ der Punkt mit den affinen Koordinaten $(0, 0)$ und $\mathfrak{e}_0' := (1, 0, 0)$, $\mathfrak{e}_1' := (0, 1, 0)$, $\mathfrak{e}_2' := (0, 0, 1)$ sowie $\mathfrak{e}_1 := (1, 0)$, $\mathfrak{e}_2 := (0, 1)$. Dann ist $\mathfrak{e}_0'$ ein Koordinatenvektor der unendlichfernen Geraden und $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2'$ sind Koordinatenvektoren von zwei verschieden durch $0 = (0, 0)$ gehenden Geraden. Nach [4] § 3, 4 gilt $f'(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2') \neq 0$, $Q'(\mathfrak{u}') = u_1^2 Q'(\mathfrak{e}_1') + u_2^2 Q'(\mathfrak{e}_2') + u_1 u_2 f'(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2')$ für jedes $\mathfrak{u}' = (u_0, u_1, u_2) \in K^3$ und $Q'(\mathfrak{u}') = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0$. Daher ist $Q : K^2 \to K;\ (x_1, x_2) \to Q(x_1, x_2) := x_1^2 Q'(\mathfrak{e}_2') + x_2^2 Q'(\mathfrak{e}_1') + x_1 x_2 f'(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2')$ eine definite nicht quasilineare quadratische Form mit $Q(\mathfrak{e}_1) = Q'(\mathfrak{e}_2')$, $Q(\mathfrak{e}_2) = Q'(\mathfrak{e}_1')$ und $f(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = Q(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2) + Q(\mathfrak{e}_1) + Q(\mathfrak{e}_2) = f'(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2')$.

Jede Gerade von $A(K^2)$, die durch $(0, 0)$ geht, hat die Form $K\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (a_1, a_2) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und daher $\mathfrak{a}' := (0, a_2, a_1)$ als Koordinatenvektor. Da $Q'(\mathfrak{a}') = Q(\mathfrak{a})$ gilt, bestätigt man durch Nachrechnen, daß sich die Geradenspiegelung an $K\mathfrak{a}$ als Punktabbildung in der Form

$\widetilde{K\mathfrak{a}} : \begin{cases} K^2 \to K^2 \\ \mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + \frac{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{x})}{Q(\mathfrak{a})} \cdot \mathfrak{a} \end{cases}$ darstellen läßt. Setzt man $\Gamma_0 := \langle \mathfrak{b}_0 \rangle$, so ist $\Gamma = \Gamma_0 \cdot T$ ein subdirektes Produkt wegen Satz 9 aus [4]. Für die Geradenspiegelung an der Geraden $\mathfrak{b} + K\mathfrak{a}$ aus $A(K^2)$ erhält man deshalb die Darstellung:

$\widetilde{(\mathfrak{b} + K\mathfrak{a})} : \begin{cases} K^2 \to K^2 \\ \mathfrak{x} \to \mathfrak{x} + \frac{f(\mathfrak{a}, \mathfrak{x} + \mathfrak{b})}{Q(\mathfrak{a})} \cdot \mathfrak{a} \end{cases}$ und für $\sigma \in \tilde{\Gamma} := \langle \tilde{\mathfrak{G}} \rangle$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^2$ gilt $Q(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = Q(\sigma(\mathfrak{x}) - \sigma(\mathfrak{y}))$.

Da nach Voraussetzung insbesondere je zwei Elemente $X, Y \in \mathfrak{b}_0$ konjugiert sind und $\Gamma = \Gamma_0 \cdot T$ ist, gibt es ein $\sigma \in \Gamma_0$ mit $\sigma X \sigma^{-1} = Y$. Aus S2 folgt $\Gamma_0 = \mathfrak{b}_0 \cup \mathfrak{b}_0^2$. Für $\sigma = AB \in \mathfrak{b}_0^2$ ist $C := ABX = XBA \in \mathfrak{b}_0$ nach S2, also $Y = \sigma X \sigma^{-1} = ABXBA = CBA = CXXBA = CXC$, d.h. zu je zwei Elementen $X, Y \in \mathfrak{b}_0$ gibt es ein $C \in \mathfrak{b}_0$ mit $\tilde{C}(X) = CXC = Y$. Die Gerade X bzw. Y bzw. C sei die Punktmenge $K\mathfrak{x}$ bzw. $K\mathfrak{y}$ bzw. $K\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{c} \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann gilt $\widetilde{K\mathfrak{c}}(0) = 0$, $\widetilde{K\mathfrak{c}}(\mathfrak{x}) = \lambda\mathfrak{y}$ mit $\lambda \in K$ und $Q(\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x} - 0) = Q(\lambda\mathfrak{y} - 0) = \lambda^2 Q(\mathfrak{y})$. Für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in K^2 \setminus \{0\}$ ist also $Q(\mathfrak{x})\,(Q(\mathfrak{y}))^{-1} \in K^{(2)}$, wobei $K^{(2)} := \{\lambda^2 : \lambda \in K\}$. Es sei $\lambda \in K$ mit $Q(\mathfrak{e}_2) = \lambda^2 Q(\mathfrak{e}_1)$ und $\mu \in K$ mit $Q(\lambda\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2) = f(\lambda\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = \mu^2 Q(\mathfrak{e}_1)$. Für jedes $x \in K$ sei $\xi \in K$ mit $\xi^2 = Q(\lambda\mathfrak{e}_1 + x\mathfrak{e}_2)\,(Q(\mathfrak{e}_1))^{-1}$. Dann gilt:

$\xi^2 Q(\mathfrak{e}_1) = Q(\lambda\,\mathfrak{e}_1 + x\,\mathfrak{e}_2) = \lambda^2 Q(\mathfrak{e}_1) + x^2\lambda^2 Q(\mathfrak{e}_1) + x\mu^2 Q(\mathfrak{e}_1)$ also: $x = \mu^{-2}(\xi^2 + \lambda^2 + \lambda^2 x^2) = (\mu^{-1}(\xi + \lambda + \lambda x))^2 \in K^{(2)}$ d.h. K ist ein vollkommener Körper. Hiermit ist Teil 2. des Hauptsatzes vollständig bewiesen.

Der Teil 3. des Hauptsatzes folgt aus den Teilen 1. und 2., wenn man noch zeigt, daß $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ gleichbedeutend mit $Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})$ ist. Hierbei denken wir uns die Punkte aus E mit den Vektoren aus K^2 identifiziert. Da $(E, \mathfrak{G})$ eine Translationsebene (vgl. (2.3)) und jede Translation eine Bewegung ist, dürfen wir $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = 0$ voraussetzen. Es sei $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}$ und $B := \{0 \parallel \overline{\mathfrak{a}, \mathfrak{c}}\} = K(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})$. Dann gilt nach (2.9) und Teil (2.b) des Hauptsatzes:

$$(\mathfrak{a}, 0) \equiv (\mathfrak{c}, 0) \Leftrightarrow \tilde{B}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c} \Leftrightarrow \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \frac{f(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}, \mathfrak{a})}{Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{c})}(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = Q(\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) = Q(\mathfrak{a}) + Q(\mathfrak{c}) + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \Leftrightarrow Q(\mathfrak{a}) = Q(\mathfrak{c}).$$

§ 4. Algebraische Modelle von fanoschen metrischen affinen Ebenen

Es sei K ein kommutativer quadratisch nicht abgeschlossener vollkommener Körper der Charakteristik 2. Dann gibt es ein quadratisches irreduzibles Polynom $x^2 + ax + b \in K[x]$ mit $a \neq 0$ und die durch

$Q: \begin{cases} K^2 \to K \\ (x_1, x_2) \to x_1^2 + a x_1 x_2 + b x_2^2 \end{cases}$ definierte nicht quasilineare quadratische

Form ist definit. Definiert man in der affinen Koordinatenebene $A(K^2)$ durch „$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \Leftrightarrow Q(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = Q(\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$" eine Kongruenzrelation, so erhält man eine fanosche metrische affine Ebene, wie man durch Nachweis der Axiome **K1, 2, 3** und **W1*, 2, 3, 4** bestätigt. Beim Nachweis von **W4** benötigt man, daß Q definit und K vollkommen ist. Damit ist Teil 4. des Hauptsatzes bewiesen.

Literatur

[1] H. Karzel, Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. der Math. VI, 66—76 (1955).

[2] H. Karzel, Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. Arch. der Math. VI, 284—295 (1955).

[3] H. Karzel, Zentrumsgeometrien und elliptische Lotkerngeometrien. Arch. der Math. IX, 455—464 (1958).
[4] H. Karzel, Quadratische Formen von Geometrien der Charakteristik 2. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **23**, 144—162 (1959).
[5] H. Karzel, K. Sörensen, D. Windelberg, Einführung in die Geometrie. Göttingen (1973).
[6] P. Kustaanheimo, Über die Metrisierung der desarguesschen Ebenen über einem Zahlkörper der Charakteristik $p=2$. Vortrag gehalten an der Technischen Universität Hannover am 28. 6. 1973.
[7] E. Sperner, Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. der Math. **5**, 458—468 (1954).

Eingegangen am 8. 4. 1974