Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper (I)

Von Rolf Schneider in Berlin

Einleitung

Ein bedeutender Teilbereich der Theorie der konvexen Körper, insbesondere des klassischen Bestandes dieser Disziplin, befaßt sich mit reellwertigen Funktionalen, die den Körpern in geometrischer Weise zugeordnet werden können. Eine zentrale Stellung, zumal im Rahmen der Brunn-Minkowskischen Theorie, nehmen die Quermaßintegrale ein. Sie sind spezielle gemischte Volumina, können aber, worauf schon ihr Name hinweist, auch auf andere Weise erklärt werden.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit vektorwertigen Funktionalen konvexer Körper. In ähnlicher Weise wie man aus dem Begriff des Volumens die gemischten Volumina und daraus durch Spezialisierung die Quermaßintegrale bekommt, gelangt man, ausgehend vom Schwerpunkt, zu einer Serie weiterer Punkte, die jedem konvexen Körper mit inneren Punkten in natürlicher Weise zukommen. Wir bezeichnen diese Punkte als *Krümmungsschwerpunkte*, da sie sich deuten lassen als Schwerpunkte einer Massenverteilung auf dem Rande des konvexen Körpers, deren Dichte (bezüglich des Oberflächenmaßes) im Fall eines hinreichend glatten Körpers mit einer Krümmungsfunktion übereinstimmt, das heißt mit einer elementarsymmetrischen Funktion der Hauptkrümmungen der Randfläche. Die zugehörigen Gesamtmassen sind gerade die Quermaßintegrale. Zu den Krümmungsschwerpunkten gehören insbesondere der *Oberflächenschwerpunkt* und der *Steinerpunkt*.

Es scheint, daß die Krümmungsschwerpunkte, abgesehen vom Steinerpunkt, noch nicht sehr ausführlich untersucht worden sind. In diesem Sinne äußert sich auch Grünbaum [18], S. 241; und es war diese Bemerkung, die den Anstoß zur vorliegenden Arbeit gegeben hat. Ihrem Charakter nach passen sich unsere Betrachtungen eher dem klassischen Rahmen der Theorie der konvexen Körper ein, wie er etwa durch Bonnesen-Fenchel [5] und Hadwiger [21], Kap. 6, abgesteckt ist. Die Analogien der Krümmungsschwerpunkte zu den Quermaßintegralen sind so vielfältig und weitgehend, daß sich die einschlägigen Methoden aus den beiden genannten Büchern häufig in naheliegender Weise übertragen lassen.

Es erweist sich sehr schnell, daß im Sinne der erwähnten Analogie das genaue Gegenstück zum Volumen nicht durch den Schwerpunkt selbst, sondern durch den mit dem Volumen multiplizierten Schwerpunktsvektor gegeben wird. Diesen Vektor bezeichnen wir als *Zielvektor*. In § 1 leiten wir daraus die *gemischten Zielvektoren* ab, die den gemischten Volumina entsprechen, und stellen ihre wichtigsten Eigenschaften fest. Durch Spezialisierung erhalten wir dann in § 2 zunächst die *Quermaßvektoren* als Gegenstücke der Quermaßintegrale und hieraus durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren Vektoren die, wie sich zeigen wird, die *Krümmungsschwerpunkte* darstellen. Eine Untersuchung von Eigenschaften dieser Krümmungsschwerpunkte schließt sich an. § 3 enthält den Nachweis, daß bei Körpern konstanter Breite zwischen den Krümmungsschwerpunkten gewisse affine Abhängigkeiten bestehen. Unser Hauptergebnis wird in der in Kürze in diesen Abhandlungen erscheinenden Fortsetzung der vorliegenden Arbeit bewiesen. Es bringt eine Kennzeichnung der Krümmungsschwerpunkte bzw. der Quermaßvektoren durch funktionale Eigenschaften zum Ausdruck und ist damit ein Gegenstück zu den „Funktionalsätzen" von Hadwiger [21], S. 221, die im wesentlichen eine axiomatische Charakterisierung der Quermaßintegrale zum Inhalt haben. Als Anwendung eines weiteren, verwandten Eindeutigkeitssatzes erhält man eine Serie integralgeometrischer Relationen für Krümmungsschwerpunkte, die sich den Croftonschen Formeln und der kinematischen Hauptformel als vektorielle Gegenstücke an die Seite stellen lassen.

Wie sich im Verlauf der Fertigstellung dieser Arbeit zeigte, ist das Konzept der Quermaßvektoren unabhängig zur gleichen Zeit auch von Herrn H. Hadwiger begründet und in seinen Auswirkungen untersucht worden Die gemeinsam verfaßte Note [23] gibt eine knapp gehaltene Darstellung, die sich speziell auf Quermaßvektoren (anstelle der allgemeineren gemischten Zielvektoren) beschränkt, dadurch andersartige Definitionen und demzufolge einen raschen Zugang zu den wesentlichen Eigenschaften der Quermaßvektoren ermöglicht sowie, gestützt auf einen in Teil II dieser Arbeit nachzuweisenden Eindeutigkeitssatz für den Steinerpunkt (Satz 2), auf einen „Funktionalsatz" für Quermaßvektoren und die daraus ableitbaren vektoriellen integralgeometrischen Formelsysteme eingeht.

1. Gemischte Zielvektoren.

Unser Arbeitsgebiet ist der n-dimensionale euklidische Vektorraum E^n. $\mathfrak{K}^n$ bezeichne die Menge der konvexen Körper (nicht leere, kompakte, konvexe Teilmengen) des Raumes E^n; wie üblich sei $\mathfrak{K}^n$ mit der Minkowskischen Addition und der Hausdorffschen Metrik versehen. Wir definieren eine Abbildung $z\colon \mathfrak{K}^n \to E^n$ durch

$$z(K) = \begin{cases} \int\limits_K x\,d\,V(x), & \text{falls } \dim K = n, \\ 0, & \text{falls } \dim K < n. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet x den variablen Ortsvektor und $d\,V$ das Volumenelement. Der Vektor $z(K)$ entsteht also aus dem Ortsvektor des Schwerpunktes durch Multiplikation mit dem Volumen des Körpers; wir bezeichnen ihn als *Zielvektor* des Körpers K. Indem man den Zielvektor einer Linearkombination konvexer Körper betrachtet, wird man auf den Begriff des „gemischten Zielvektors" geführt. Wir werden zunächst diese gemischten Zielvektoren betrachten und aus ihnen später translationsäquivariante Vektorfunktionen herleiten, denen dann ein größeres geometrisches Interesse zukommt.

Die folgenden Eigenschaften des Zielvektors ergeben sich unmittelbar aus der Definition.

Ist $\mathsf{A}\colon E^n \to E^n$ eine homogene lineare Abbildung, so ist

$$z(\mathsf{A}K) = |\det \mathsf{A}|\,\mathsf{A}z(K). \tag{1}$$

Für $a \in E^n$ gilt

$$z(K + a) = z(K) + V(K)a. \tag{2}$$

Dabei haben wir wie üblich statt $K + \{a\}$ abkürzend $K + a$ geschrieben; das ist der Körper, der aus K durch Translation um den Vektor a hervorgeht. V bezeichnet das Volumen.

(3) *Die Abbildung* $z\colon \mathfrak{K}^n \to E^n$ *ist stetig.*

Ferner gilt

$$z(K \cup \bar{K}) + z(K \cap \bar{K}) = z(K) + z(\bar{K}), \tag{4}$$

falls $K, \bar{K}, K \cup \bar{K} \in \mathfrak{K}^n$ gilt. Es ist also z additiv auf $\mathfrak{K}^n$. Dabei wird allgemein ein auf einer Klasse $\mathfrak{S}$ von Mengen des E^n erklärtes Funktional φ mit Werten in einer abelschen Gruppe als *additiv auf* $\mathfrak{S}$ bezeichnet, wenn $\varphi(K \cup \bar{K}) + \varphi(K \cap \bar{K}) = \varphi(K) + \varphi(\bar{K})$ gilt, sobald $K, \bar{K}, K \cup \bar{K}, K \cap \bar{K} \in \mathfrak{S}$ sind.

Ist $K \in \mathfrak{K}^n$ ein $(n-1)$-dimensionaler Körper, so setzen wir

$$z'(K) = \int\limits_K x\,d\,V'(x),$$

wo $d\,V'$ das $(n-1)$-dimensionale Volumenelement in der Trägerebene von K bezeichnet. Es gilt für $a \in E^n$

$$z'(K + a) = z'(K) + V'(K)a, \tag{5}$$

wenn V' das $(n - 1)$-dimensionale Volumen ist. Sei

$$\Omega = \{u \in E^n \,|\, \langle u, u\rangle = 1\}$$

die Einheitssphäre des E^n. Ferner sei $h\colon \mathfrak{K}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ die Stützfunktion, also $h(K, u) = \sup\{\langle x, u\rangle \,|\, x \in K\}$.

Sei $P \in \mathfrak{K}^n$ ein n-dimensionales Polytop mit den $(n - 1)$-dimensionalen Seiten $F_1, \ldots, F_N$. Wir schreiben $h(P, u_i) = h_i$, wo u_i der zu F_i gehörende äußere Normaleneinheitsvektor ist. Der bekannten Darstellung

$$V(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} h_i V'(F_i)$$

des Volumens läßt sich nun die folgende Darstellung des Zielvektors an die Seite stellen:

$$z(P) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{N} h_i z'(F_i). \tag{6}$$

Zum Beweis sei zunächst $C \in \mathfrak{K}^n$ ein n-dimensionaler Kegel der Höhe a mit Basis F und mit der Spitze im Nullpunkt. Bezeichnet dV'_λ das $(n - 1)$-dimensionale Volumenelement in der Ebene λE, wo E die Trägerebene von F ist, so ist

$$\begin{aligned} z(C) &= \int_C x\,dV(x) = \int_0^1 \Big\{ \int_{\lambda F} x\,dV'_\lambda(x)\Big\}\, a\,d\lambda \\ &= \int_0^1 \lambda^n \Big\{ \int_F x\,dV'_1(x)\Big\}\, a\,d\lambda = \frac{1}{n+1}\, a z'(F). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die konvexe Hülle der Vereinigung der Seite F_i und des Nullpunktes mit C_i und setzen wir $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} h_i$ (so daß also $\varepsilon_i h_i$ die Höhe von C_i ist), so ergibt sich die Behauptung (6) aus

$$z(P) = \int_P x\,dV(x) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \int_{C_i} x\,dV(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{N} h_i z'(F_i).$$

Nun seien $K_1, \ldots, K_r \in \mathfrak{K}^n$ konvexe Körper und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ nichtnegative reelle Zahlen. Bekanntlich ist das Volumen des Körpers $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r$ ein homogenes Polynom n-ten Grades in den Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Ein analoger Sachverhalt besteht für Zielvektoren: Der Zielvektor von $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r$ ist ein homogenes Polynom $(n + 1)$-ten Grades in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Es gilt also

$$z(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r) = \sum z_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n+1}} \lambda_{\varrho_1} \ldots \lambda_{\varrho_{n+1}}, \tag{7}$$

wo die Summation über alle ϱ_i unabhängig von 1 bis r zu erstrecken ist. Die vektoriellen Koeffizienten $z_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n+1}}$ seien dabei als symmetrisch in allen Indizen angenommen; sie sind dann eindeutig bestimmt. Daß

$z(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r)$ ein homogenes Polynom vom Grade $n+1$ ist, wurde für $n = 3$ bereits von MINKOWSKI [29], § 23, gezeigt. Ein einfacherer Beweis läßt sich führen in enger Anlehnung an den entsprechenden Beweis für die Volumina in BONNESEN-FENCHEL [5], S. 39:

Wir beweisen die Existenz einer Darstellung (7) durch Induktion nach der Dimension. Für $n = 1$ ist die Behauptung sofort einzusehen, denn ist $K \subset E^1$ das Intervall $[a, b]$, so ist $z(K) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, und es ist $\sum \lambda_i [a_i, b_i] = [\sum \lambda_i a_i, \sum \lambda_i b_i]$. Sei nun $n > 1$ und die Behauptung für die Dimension $n - 1$ bereits bewiesen. Seien $P_1, \ldots, P_r \in \mathfrak{K}^n$ n-dimensionale Polytope und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ nichtnegative reelle Zahlen. Wir setzen $P = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r$. Sei E eine Hyperebene, die eine $(n-1)$-dimensionale Seite F von P enthält, und sei E_i die zu E gleichsinnig parallele Stützebene an $P_i (i = 1, \ldots, r)$. Schreiben wir $P_i \cap E_i = F_i$, so gilt $F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_r F_r$. Sei nun E_0 die zu E parallele Ebene durch den Nullpunkt von E^n, sei $a_i \in E^n$ ein Vektor mit $E_i + a_i = E_0$. Wird $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$ gesetzt, so ist $E + a = E_0$. Die höchstens $(n-1)$-dimensionalen Polytope $F_i + a_i$ liegen in $E_0 (i = 1, \ldots, r)$, desgleichen das $(n-1)$-dimensionale Polytop

$$F + a = \lambda_1 (F_1 + a_1) + \cdots + \lambda_r (F_r + a_r).$$

Nach Induktionsannahme ist also $z'(F + a)$ ein homogenes Polynom n-ten Grades in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Wegen

$$V'(F)a = V'(\lambda_1(F_1 + a_1) + \cdots + \lambda_r(F_r + a_r))(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r)$$

ist auch $V'(F)a$ ein homogenes Polynom n-ten Grades in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$; wegen der nach (5) bestehenden Relation

$$z'(F) = z'(F + a) - V'(F)a$$

gilt das gleiche daher auch für $z'(F)$. Aus (6) und der Linearität der Stützfunktion folgt nun, daß $z(P)$ ein homogenes Polynom $(n+1)$-ten Grades in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ist. Durch ein bekanntes Approximationsargument (vgl. BONNESEN-FENCHEL [5], S. 39) erhält man die entsprechende Aussage für allgemeine konvexe Körper.

Der in (7) auftretende Koeffizient $z_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n+1}} = z(K_{\varrho_1}, \ldots, K_{\varrho_{n+1}})$ wird als *gemischter Zielvektor* der Körper $K_{\varrho_1}, \ldots, K_{\varrho_{n+1}}$ bezeichnet. Wir setzen

$$z(\underbrace{K_1, \ldots, K_1}_{i_1}, \ldots, \underbrace{K_r, \ldots, K_r}_{i_r}) = z(K_1, i_1, \ldots, K_r, i_r)$$

und können dann Gleichung (7) auch in der Form

$$z(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r) = \sum \frac{(n+1)!}{i_1! \ldots i_r!} z(K_1, i_1, \ldots, K_r, i_r) \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r} \tag{8}$$

schreiben, wo unabhängig über alle nichtnegativen $i_1, \ldots, i_r$ mit $i_1 + \cdots + i_r = n + 1$ zu summieren ist.

Wir stellen nun einige Eigenschaften der soben definierten Abbildung

$$z : \underbrace{\mathfrak{K}^n \times \cdots \times \mathfrak{K}^n}_{n+1} \to E^n$$

zusammen. Die Beweise ergeben sich, soweit sie nicht angedeutet sind, analog zu den Beweisen der entsprechenden Eigenschaften gemischter Volumina.

Ist $\mathsf{A}: E^n \to E^n$ eine homogene lineare Abbildung, so ist

$$z(\mathsf{A}K_1, \ldots, \mathsf{A}K_{n+1}) = |\det \mathsf{A}|\,\mathsf{A}z(K_1, \ldots, K_{n+1}). \tag{9}$$

Es ist

$$z(K, \ldots, K) = z(K). \tag{10}$$

Ist $p \leq n + 1$ eine natürliche Zahl und ist $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} &z(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_s K_s, p, \bar{K}_{p+1}, \ldots, \bar{K}_{n+1}) \\ &\quad = \sum \frac{p!}{i_1! \ldots i_s!}\, z(K_1, i_1, \ldots, K_s, i_s, \bar{K}_{p+1}, \ldots, \bar{K}_{n+1})\, \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_s^{i_s}, \end{aligned} \tag{11}$$

wo über alle $i_j \geq 0$ mit $i_1 + \cdots + i_s = p$ zu summieren ist.

(12) $\quad z(K_1, \ldots, K_{n+1})$ *hängt stetig von* $K_1, \ldots, K_{n+1}$ *ab.*

Ist $p \leq n + 1$ eine natürliche Zahl und ist $K, \bar{K}, K \cup \bar{K} \in \mathfrak{K}^n$, so gilt (bei beliebig gewählten Körpern $K_{p+1}, \ldots, K_{n+1} \in \mathfrak{K}^n$)

$$\begin{aligned} &z(K \cup \bar{K}, p, K_{p+1}, \ldots, K_{n+1}) + z(K \cap \bar{K}, p, K_{p+1}, \ldots, K_{n+1}) \\ &\quad = z(K, p, K_{p+1}, \ldots, K_{n+1}) + z(\bar{K}, p, K_{p+1}, \ldots, K_{n+1}); \end{aligned} \tag{13}$$

das Funktional $z(K, p, K_{p+1}, \ldots, K_{n+1})$ ist also, als Funktion von K, auf $\mathfrak{K}^n$ additiv. Zum Beweis benutzt man die bei konvexen Körpern $K, \bar{K}$ mit konvexer Vereinigung für beliebige Körper $K' \in \mathfrak{K}^n$ gültigen Beziehungen $(K \cup \bar{K}) + K' = (K + K') \cup (\bar{K} + K')$ sowie $(K \cap \bar{K}) + K' = (K + K') \cap (\bar{K} + K')$ und findet wegen (4) für $\lambda, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ (zu summieren ist jeweils über i von $p + 1$ bis $n + 1$)

$$\begin{aligned} &z(\lambda(K \cup \bar{K}) + \textstyle\sum \lambda_i K_i) + z(\lambda(K \cap \bar{K}) + \textstyle\sum \lambda_i K_i) \\ &= z((\lambda K + \textstyle\sum \lambda_i K_i) \cup (\lambda \bar{K} + \textstyle\sum \lambda_i K_i)) + z((\lambda K + \textstyle\sum \lambda_i K_i) \cap (\lambda \bar{K} + \textstyle\sum \lambda_i K_i)) \\ &= z(\lambda K + \textstyle\sum \lambda_i K_i) + z(\lambda \bar{K} + \textstyle\sum \lambda_i K_i). \end{aligned}$$

Entwicklung der Summanden in der ersten und der letzten Zeile gemäß (8) und Vergleich der Koeffizienten von $\lambda^p \lambda_{p+1} \ldots \lambda_{n+1}$ ergibt die Behauptung (13).

Wir stellen nun das Verhalten der gemischten Zielvektoren bei Translationen der eingehenden Körper fest. Für $a_1, \ldots, a_{n+1} \in E^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$ gilt wegen (2)

$$\begin{aligned} &z(\lambda_1(K_1 + a_1) + \cdots + \lambda_{n+1}(K_{n+1} + a_{n+1})) \\ &\quad = z(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_{n+1} K_{n+1}) \\ &\qquad + V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_{n+1} K_{n+1})(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir entwickeln beide Seiten der Gleichung gemäß (8) und berücksichtigen die Darstellung

$$\begin{aligned} &V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_{n+1} K_{n+1}) \\ &\quad = \sum \frac{n!}{i_1! \ldots i_{n+1}!} V(K_1, i_1, \ldots, K_{n+1}, i_{n+1}) \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_{n+1}^{i_{n+1}}, \end{aligned}$$

wo $V(K_1, i_1, \ldots, K_{n+1}, i_{n+1})$ das gemischte Volumen

$$V(\underbrace{K_1, \ldots, K_1}_{i_1}, \ldots, \underbrace{K_{n+1}, \ldots, K_{n+1}}_{i_{n+1}})$$

bezeichnet. Nach geeigneter Zusammenfassung ergibt ein Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &z(K_1 + a_1, \ldots, K_{n+1} + a_{n+1}) \\ &\quad = z(K_1, \ldots, K_{n+1}) + \frac{1}{n+1}[V(K_2, \ldots, K_{n+1}) a_1 + \cdots \\ &\qquad + V(K_1, \ldots, K_n) a_{n+1}]. \end{aligned} \tag{14}$$

Nun geben wir für den gemischten Zielvektor $z(K, P_1, \ldots, P_n)$ von Polytopen $P_1, \ldots, P_n \in \mathfrak{K}^n$ und einem beliebigen Körper $K \in \mathfrak{K}^n$ eine nützliche Darstellung an. Für einen Einheitsvektor $u \in \Omega$ und einen Körper $\bar{K} \in \mathfrak{K}^n$ bezeichne $\bar{K}(u)$ die Stützmenge von $\bar{K}$ in Richtung u, d. h. den Durchschnitt von $\bar{K}$ mit der Stützebene an $\bar{K}$ mit äußerem Normalenvektor u. Dann gilt für Polytope $P_1, \ldots, P_n \in \mathfrak{K}^n$

$$z(K, P_1, \ldots, P_n) = \frac{1}{n+1} \sum_u h(K, u)\, z'(P_1(u), \ldots, P_n(u)). \tag{15}$$

Zu summieren ist darin über alle Einheitsvektoren u, für die

$$z'(P_1(u), \ldots, P_n(u)) \neq 0$$

ist. Das sind nur endlich viele, denn $z'(P_1(u), \ldots, P_n(u))$ kann, wie man sofort der Definition der gemischten Zielvektoren entnimmt, nur dann vom Nullvektor verschieden sein, wenn $P_1(u) + \cdots P_n(u)$ von der Dimension $n - 1$ ist. Die Formel (15) ist analog zur Gleichung

$$V(K, P_1, \ldots, P_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_u h(K, u)\, V'(P_1(u), \ldots, P_{n-1}(u)) \tag{16}$$

(s. Bonnesen-Fenchel [5], S. 42); sie läßt sich auch ganz ähnlich herleiten, weshalb wir auf den Beweis nicht weiter eingehen.

Ist $K_1, \ldots, K_{n+1}$ ein $(n+1)$-tupel, so bezeichnen wir mit

$$K_1, \ldots, \langle K_i \rangle, \ldots, K_{n+1}$$

das nach Weglassen von K_i verbleibende n-tupel. Wir zeigen für konvexe Körper $K_1, \ldots, K_{n+1}$

(17) Ist $V(K_1, \ldots, \langle K_i \rangle, \ldots, K_{n+1}) = 0$ für $i = 1, \ldots, n+1$, so ist $z(K_1, \ldots, K_{n+1}) = 0$.

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, die Körper $K_1, \ldots, K_{n+1} \in \mathfrak{K}^n$ seien Polytope. Wir schließen durch Induktion nach der Dimension. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial; sei also $n > 1$ und die Behauptung bereits bewiesen für die Dimension $n - 1$. Wegen (14) und der Voraussetzung $V(K_2, \ldots, K_{n+1}) = 0$ ist

$$z(K_1 + a, K_2, \ldots, K_{n+1}) = z(K_1, K_2, \ldots, K_{n+1})$$

für beliebige $a \in E^n$. Wir können daher o. B. d. A. annehmen, daß K_1 den Nullpunkt im relativen Inneren enthält. Nach (16) und nach Voraussetzung gilt für $i = 2, \ldots, n+1$

$$\begin{aligned} &\sum h(K_1, u)\, V'(K_2(u), \ldots, \langle K_i(u) \rangle, \ldots, K_{n+1}(u)) \\ &\quad = n\, V(K_1, K_2, \ldots, \langle K_i \rangle, \ldots, K_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Da der Nullpunkt im relativen Inneren von K_1 liegt, ist $h(K_1, u) \geq 0$ für alle $u \in \Omega$. Für jeden Vektor $u \in \Omega$ mit $h(K_1, u) \neq 0$ gilt also

$$V'(K_2(u), \ldots, \langle K_i(u) \rangle, \ldots, K_{n+1}(u)) = 0$$

für $i = 2, \ldots, n+1$. Nach Induktionsannahme folgt daraus

$$z'(K_2(u), \ldots, K_{n+1}(u)) = 0,$$

so daß sich aus (15) die Behauptung

$$z(K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}) = 0$$

ergibt. Seien nun $K_1, \ldots, K_{n+1} \in \mathfrak{K}^n$ beliebige konvexe Körper mit $V(K_1, \ldots, \langle K_i \rangle, \ldots, K_{n+1}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Man approximiere K_j $(j = 1, \ldots, n+1)$ durch eine Folge $P_j^1, P_j^2, \ldots$ konvexer Polytope derart, daß P_j^k in K_j enthalten ist $(k = 1, 2, \ldots)$. Wegen der Monotonie der gemischten Volumina (Bonnesen-Fenchel [5], S. 41) gilt dann $V(P_1^k, \ldots, \langle P_i^k \rangle, \ldots, P_{n+1}^k) = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ und folglich, wie eben gezeigt wurde, $z(P_1^k, \ldots, P_{n+1}^k) = 0$. Aus der Stetigkeit der gemischten Zielvektoren folgt dann die Behauptung $z(K_1, \ldots, K_{n+1}) = 0$.

Für eine Serie spezieller gemischter Zielvektoren, die von nun an mit Vorrang betrachtet werden sollen, führen wir noch eine besondere Bezeichnung ein. Es sei $B = \{x \in E^n \mid \langle x, x\rangle \leq 1\}$ die Einheitskugel des E^n mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt. Wir setzen für $r = 1, \ldots, n + 1$

$$q_r(K) = \frac{n+1}{n+1-r} z(K, n + 1 - r, B, r).$$

Die dadurch definierte Abbildung $q_r : \mathfrak{K}^n \to E^n$ hat die folgenden Eigenschaften:

Für jede Drehung $\mathsf{T} : E^n \to E^n$ um den Nullpunkt gilt

$$q_r(\mathsf{T}K) = \mathsf{T}q_r(K). \tag{18}$$

Dies folgt aus (9) und der für Abbildungen der genannten Art gültigen Gleichung $\mathsf{T}B = B$. Ferner ist die Gleichung

$$q_r(K + a) = q_r(K) + W_r(K)a \tag{19}$$

für $a \in E^n$ ein Spezialfall von (14). Darin tritt als Faktor des Vektors a das Quermaßintegral

$$W_r(K) = V(K, n - r, B, r)$$

auf. Aus (11) ergibt sich sofort für $\lambda \geq 0$

$$q_r(\lambda K) = \lambda^{n+1-r} q_r(K), \tag{20}$$

und die folgenden Aussagen sind wieder Spezialfälle bereits bekannter Resultate:

(21) *q_r ist additiv auf $\mathfrak{K}^n$.*

(22) *q_r ist stetig.*

Wir bezeichnen $q_r(K)$ als den *r-ten Quermaßvektor* des Körpers K. Die Motivation für diese Benennung wird später ersichtlich werden.

2. Schwerpunkte

An Gleichung (14) läßt sich ablesen, wie man aus den gemischten Zielvektoren translationsäquivariante vektorwertige Funktionale gewinnen kann. Hierzu seien $n + 1 - r$ (mit $1 \leq r \leq n + 1$) Körper $K_{r+1}, \ldots, K_{n+1} \in \mathfrak{K}^n$ fest gewählt; dieses $(n + 1 - r)$-tupel bezeichnen wir für den Moment mit K^*. Sodann sei $\mathfrak{K}(K^*)$ die Menge derjenigen konvexen Körper, für die $V(K, r - 1, K^*) \neq 0$ ist. Welche Körper zu $\mathfrak{K}(K^*)$ gehören, läßt sich anhand des Kriteriums in Bonnesen-Fenchel [5], S. 41, leicht entscheiden. Sind insbesondere die Körper $K_{r+1}, \ldots, K_{n+1}$ sämtlich n-dimensional, so gehören genau die mindestens

$(r-1)$-dimensionalen Körper zu $\mathfrak{K}(K^*)$. Für alle $K \in \mathfrak{K}(K^*)$ können wir nun

$$s_r(K, K^*) = \frac{(n+1)\, z(K, r, K^*)}{r\, V(K, r-1, K^*)}$$

definieren. Für $r = n + 1$ (in diesem Fall ist K^* leer) ergibt sich gerade der Ortsvektor des gewöhnlichen Schwerpunktes; er ist definiert auf der Menge der n-dimensionalen Körper. Der durch $s_r(K, K^*)$ dargestellte Punkt ist dem Körper K in einer von der Lage des Körpers zum Nullpunkt unabhängigen Weise zugeordnet; nach (14) gilt nämlich für jeden Vektor $a \in E^*$ die Gleichung $s_r(K + a, K^*) = s_r(K, K^*) + a$.

Wir betrachten von nun an nur den Spezialfall, daß

$$K_{r+1} = \cdots = K_{n+1} = B$$

(= Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt) ist. Wir schreiben dann abkürzend $s_r(K, K^*) = p_{n+1-r}(K)$. Dann lautet also die Definitionsgleichung von $p_r(K)$

$$p_r(K) = \frac{q_r(K)}{W_r(K)} = \frac{(n+1)\, z(K, n+1-r, B, r)}{(n+1-r)\, V(K, n-r, B, r)}. \tag{23}$$

Die Menge der mindestens m-dimensionalen konvexen Körper des E^n bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}^n_m (0 \leq m \leq n)$. Die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung $p_r \colon \mathfrak{K}^n_{n-r} \to E^n$ sind die folgenden; sie ergeben sich aus (18) bis (22). Für jede Ähnlichkeit $\mathsf{A} \colon E^n \to E^n$ gilt

$$p_r(\mathsf{A}K) = \mathsf{A}p_r(K). \tag{24}$$

$$p_r \textit{ ist auf } \mathfrak{K}^n_{n-r} \textit{ stetig}. \tag{25}$$

Ist $K, \bar{K}, K \cup \bar{K} \in \mathfrak{K}^n_{n-r}$, so ist

$$\begin{aligned} W_r(K \cup \bar{K}) p_r(K \cup \bar{K}) + W_r(K \cap \bar{K}) p_r(K \cap \bar{K}) \\ = W_r(K) p_r(K) + W_r(\bar{K}) p_r(\bar{K}). \end{aligned} \tag{26}$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für $\dim(K \cap \bar{K}) \geq n - r$ sinnvoll, da andernfalls $p_r(K \cap \bar{K})$ nicht erklärt ist. Ist aber

$$\dim(K \cap \bar{K}) < n - r,$$

so ist $W_r(K \cap \bar{K}) = 0$, also bleibt die Gleichung auch in diesem Fall sinnvoll, wenn unter $p_r(K \cap \bar{K})$ ein beliebiger Vektor verstanden wird. Die Gleichung bleibt dann auch richtig, wie aus (21) und (17) hervorgeht. Die in der Gleichung (26) zum Ausdruck kommende Eigenschaft des Funktionals p_r wollen wir als „gewogene Additivität mit dem Gewicht W_r" bezeichnen.

Aus (11) und der analogen Eigenschaft der gemischten Volumina (BONNESEN-FENCHEL [5], S. 40) ergibt sich ein Gegenstück zur „Steinerformel“ für Parallelkörper; für $\lambda \geq 0$ gilt nämlich

$$p_r(K + \lambda B) = \frac{\sum_{i=r}^{n} \binom{n-r}{i-r} \lambda^{i-r} W_i(K)\, p_i(K)}{\sum_{i=r}^{n} \binom{n-r}{i-r} \lambda^{i-r} W_i(K)}. \tag{27}$$

Den Punkt $p_r(K)$ bezeichnen wir als den *r-ten Krümmungsschwerpunkt* von $K\,(1 \leq r \leq n)$; p_0 ist der gewöhnliche Schwerpunkt. Die Bezeichnung „Krümmungsschwerpunkt“ wird durch die nachfolgenden Überlegungen gerechtfertigt. Einen konvexen Körper $K \in \mathfrak{K}_n^n$ wollen wir *glatt* nennen, wenn sein Rand ∂K eine zweimal stetig differenzierbare Hyperfläche mit nirgends verschwindenden Hauptkrümmungen ist. Ist nun $K \in \mathfrak{K}_n^n$ ein glatter Körper, so gilt

$$p_r(K) = \frac{\int_{\partial K} x H_{r-1}\, dF}{\int_{\partial K} H_{r-1}\, dF}, \qquad 1 \leq r \leq n. \tag{28}$$

Darin ist x der Ortsvektor auf dem Rand ∂K von K; H_k bezeichnet die (normierte) k-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen (mit $H_0 = 1$) von ∂K und dF das Oberflächenelement. Durch (28) kommt zum Ausdruck, daß der Punkt $p_r(K)$ $(1 \leq r \leq n)$ sich als Schwerpunkt ergibt, wenn der Rand des glatten Körpers K mit einer Masse belegt wird, deren Dichte (bezüglich des Oberflächenmaßes) proportional ist zur $(r-1)$-ten elementarsymmetrischen Funktion der Hauptkrümmungen. Insbesondere ist $p_1(K)$ der *Oberflächenschwerpunkt* und $p_n(K)$ der *Steinerpunkt* von K.

Beweis von (28). Ist $P \in \mathfrak{K}^n$ ein Polytop, so besagt ein Spezialfall von (15)

$$q_1(P) = \frac{n+1}{n} z(P, \ldots, P, B) = \frac{1}{n} \sum_u z'(K(u), \ldots, K(u)) = \frac{1}{n} \int_{\partial P} x\, dF.$$

Durch Approximation erhält man die Gültigkeit der Darstellung

$$q_1(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} x\, dF \tag{29}$$

für beliebige Körper $K \in \mathfrak{K}_n^n$. Hierzu ist F aufzufassen als ein auf den Borelmengen des Randes von K erklärtes Maß. Eine exakte Einführung dieses „Flächenmaßes“ für allgemeine konvexe Körper sowie die zur Rechtfertigung des Approximationsargumentes erforderlichen Überlegungen findet man bei ALEKSANDROV [1], § 1. Ist jetzt K insbesondere ein glatter konvexer Körper, so ist die Formel (29) richtig, wenn man unter dF das Oberflächenelement im differentialgeometrischen Sinne versteht. Wegen der vorausgesetzten Glattheit ist die durch parallele äußere Normalenvektoren vermittelte sphärische Abbildung von ∂K auf die Sphäre Ω ein Diffeomorphismus; wir können daher das in (29) auftretende Integral transformieren in ein Integral über Ω:

$$q_1(K) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} x(K, u) S_{n-1}(K, u)\, d\omega(u). \tag{30}$$

Darin bedeutet $S_{n-1}(K, u)$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien im (eindeutig bestimmten) Randpunkt von K mit äußerem Normalenvektor u; $x(K, u)$ ist der Ortsvektor dieses Punktes, $d\omega$ ist das Oberflächenelement auf Ω. In (30) ersetzen wir nun den Körper K durch den äußeren Parallelkörper $K + \lambda B (\lambda \geq 0)$. Wegen

$$x(K + \lambda B, u) = x(K, u) + \lambda u$$

und

$$S_{n-1}(K + \lambda B, u) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \lambda^{n-1-r} S_r(K, u),$$

wo S_r die r-te (normierte) elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungsradien bezeichnet, ergibt sich

$$q_1(K + \lambda B) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \lambda^{n-1-r} \int_{\Omega} x(K, u)\, S_r(K, u)\, d\omega(u).$$

Hier wurde die bekannte Identität

$$\int_{\Omega} u S_r(K, u)\, d\omega(u) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{31}$$

benutzt. In Anbetracht eines Spezialfalles von (11) ergibt nun ein Koeffizientenvergleich die Darstellung

$$q_r(K) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} x(K, u)\, S_{n-r}(K, u)\, d\omega.$$

Transformieren wir dieses Integral wieder in ein Integral über ∂K, so erhalten wir wegen $S_i/S_{n-1} = H_{n-i-1}$ die Beziehung

$$q_r(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} x H_{r-1} dF.$$

Zusammen mit der bekannten Darstellung

$$W_r(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} H_{r-1} dF$$

ergibt das gemäß der Definition (23) die Behauptung (28).

Der durch (28) gegebenen Darstellung des Punktes p_r als Schwerpunkt läßt sich eine für Polytope gültige Darstellung an die Seite stellen. Hierzu müssen wir zunächst die äußeren Winkel eines Polytops $P \in \mathfrak{K}_n^n$ erklären: Ist F_i^k eine k-dimensionale Seite von $P(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, so sei Ω_i^k der Durchschnitt der Sphäre Ω mit derjenigen $(n-k)$-dimensionalen Ebene des E^n durch den Nullpunkt, die total orthogonal ist zu F_i^k. Sei $\bar{\Omega}_i^k \subset \Omega_i^k$ die Teilmenge der Einheitsvektoren, die äußere Normalenvektoren von Stützebenen an P sind, welche die Seite F_i^k enthalten. Die Menge $\bar{\Omega}_i^k$, das „sphärische Bild" der Seite F_i^k, ist also ein sphärisches Polytop auf der $(n-1-k)$-dimensionalen Sphäre Ω_i^k. Bezeichnet nun ω_i^k das $(n-1-k)$-dimensionale Lebesguesche Maß auf Ω_i^k, so sei

$$\psi(F_i^k, P) = \omega_i^k(\bar{\Omega}_i^k)/\omega_i^k(\Omega_i^k)$$

gesetzt. Die Zahl $\psi(F_i^k, P)$ wird als der *äußere Winkel* von P bei F_i^k bezeichnet. Ferner sei $v(F_i^k)$ das k-dimensionale Volumen der Seite F_i^k und $s(F_i^k)$ der gewöhnliche Schwerpunkt von F_i^k, bezogen auf die k-dimensionale Trägerebene von F_i^k. Wir behaupten nun: Ist $P \in \mathfrak{K}_n^n$ ein Polytop, so gilt für $1 \leq r \leq n$

$$p_r(P) = \frac{\sum_i \psi(F_i^{n-r}, P)\, v(F_i^{n-r})\, s(F_i^{n-r})}{\sum_i \psi(F_i^{n-r}, P)\, v(F_i^{n-r})}. \tag{32}$$

Zu summieren ist dabei über alle $(n-r)$-dimensionalen Seiten F_i^{n-r} des Polytops P $(i = 1, 2, \ldots, f_{n-r}(P))$.

Beweis. Wir wenden die Gleichung (29) auf den Parallelkörper $K = P + \lambda B$ $(\lambda \geq 0)$ an und zerlegen das Integrationsgebiet in geeigneter Weise

$$q_1(P + \lambda B) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{f_r(P)} \int_{F_i^r(\lambda)} x\,dF\,; \tag{33}$$

dabei ist die Menge $F_i^r(\lambda) \subset \partial(P + \lambda B)$ erklärt durch

$$F_i^r(\lambda) = \{x \in E^n \,|\, x = x_0 + \lambda u \quad \text{mit} \quad x_0 \in F_i^r \quad \text{und} \quad u \in \bar{\Omega}_i^r\}.$$

Schreiben wir den Vektor $x \in F_i^r(\lambda)$ in der Form $x = x_0 + \lambda u_x$ mit $x_0 \in F_i^r$ und $u_x \in \bar{\Omega}_i^r$, so lassen sich die in (33) auftretenden Integrale folgendermaßen berechnen: Bezeichnet dv_i^r das r-dimensionale Volumenelement in der Trägerebene von F_i^r, so ist

$$\begin{aligned}\int_{F_i^r(\lambda)} x\,dF(x) &= \lambda^{n-1-r} \int_{\bar{\Omega}_i^r} \int_{F_i^r} (x_0 + \lambda u_x)\, dv_i^r(x_0)\, d\omega_i^r(u_x) \\ &= \lambda^{n-1-r} \int_{\bar{\Omega}_i^r} d\omega_i^r \int_{F_i^r} x_0\, dv_i^r(x_0) + \lambda^{n-r} \int_{\bar{\Omega}_i^r} u\, d\omega_i^r(u) \int_{F_i^r} dv_i^r.\end{aligned}$$

Nach Definition des äußeren Winkels ist

$$\int_{\bar{\Omega}_i^r} d\omega_i^r = \omega_{n-1-r}\, \psi(F_i^r, P),$$

wenn $\omega_{n-1-r} = \omega_i^r(\Omega_i^r)$ das $(n-1-r)$-dimensionale Gesamtmaß der Sphäre Ω_i^r bezeichnet. Damit erhält man aus (33):

$$q_1(P + \lambda B) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \lambda^{n-1-r} \omega_{n-1-r} \sum_{i=1}^{f_r(P)} \psi(F_i^r, P)\, v(F_i^r)\, s(F_i^r), \tag{34}$$

wenn man noch die Identität

$$\sum_{i=1}^{f_r(P)} v(F_i^r) \int_{\bar{\Omega}_i^r} u\, d\omega_i^r(u) = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{35}$$

beachtet. Diese Gleichung ist ein Gegenstück zur Formel (31) und gleich ihr ein Spezialfall der allgemeineren Identität

$$\int_{\Omega} u\, d\sigma_r(u) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{36}$$

Hier ist σ_r die sogenannte r-te Oberflächenfunktion (s. Fenchel-Jessen [14]). Die Gleichung (36) ergibt sich bekanntlich aus der Translationsinvarianz der Quermaßintegrale (s. [14], S. 13, für den Fall $r = n-1$; die allgemeine Aussage folgt analog). Daß sich die Gleichungen (36) im Falle eines Polytops in der Tat auf die Gleichungen (35) reduzieren, sieht man unschwer ein, wenn man, etwa unter Verwendung der letzten Formel in Fenchel-Jessen [14], S. 31, die r-te Oberflächenfunktion eines Polytops bestimmt.

Aus (34) und (11) folgt nun durch Koeffizientenvergleich

$$r\binom{n}{r} q_r(P) = \omega_{r-1} \sum_i \psi(F_i^{n-r}, P)\, v(F_i^{n-r})\, s(F_i^{n-r}) \quad (r = 1, \ldots, n).$$

Dies ist ein Gegenstück zu der für die Quermaßintegrale eines Polytops gültigen Darstellung

$$r\binom{n}{r} W_r(P) = \omega_{r-1} \sum_i \psi(F_i^{n-r}, P)\, v(F_i^{n-r}) \quad (r = 1, \ldots, n),$$

die man auf ähnliche, aber einfachere Art herleiten kann. Aus beiden Gleichungen zusammen ergibt sich die Behauptung (32).

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß die Krümmungsschwerpunkte (bis auf die Numerierung) nicht von der Dimension des umgebenden Raumes abhängen. Genauer gesagt, es besteht der folgende Sachverhalt: Sei $K \in \mathfrak{K}^n$ und $\dim K = k < n$. Dann liegt K in einer Hyperebene E

des Raumes E^n, und man kann die bezüglich E gebildeten Krümmungsschwerpunkte $p'_{n-1-k}, \ldots, p'_{n-1}$ des Körpers K betrachten. Es gilt dann

$$p_r(K) = p'_{r-1}(K) \qquad (r = n - k, \ldots, n). \tag{37}$$

Der Beweis verläuft analog zu dem Nachweis der entsprechenden Eigenschaft der Quermaßintegrale (s. HADWIGER [21], S. 215): O. B. d. A. gehe die Hyperebene E durch den Nullpunkt; $u \in E^n$ sei ein auf E senkrechter Einheitsvektor. Sei $\lambda > 0$. Für $-\lambda \leq \tau \leq \lambda$ gilt dann

$$(K + \lambda B) \cap (E + \tau u) = K + (\lambda^2 - \tau^2)^{1/2} B' + \tau u, \tag{38}$$

wo $B \cap E = B'$ gesetzt ist. Bezeichnet z' die bezüglich des Unterraumes E gebildeten Zielvektoren und V', W'_i entsprechend Volumina bzw. Quermaßintegrale, so gilt

$$\begin{aligned}
z(K + \lambda B) &= \int_{K+\lambda B} x\, d V = \int_{-\lambda}^{\lambda} z'[(K + \lambda B) \cap (E + \tau u)]\, d\tau \\
&= \int_{-\lambda}^{\lambda} z'(K + (\lambda^2 - \tau^2)^{1/2} B' + \tau u)\, d\tau \\
&= \int_{-\lambda}^{\lambda} [z'(K + (\lambda^2 - \tau^2)^{1/2} B') + V'(K + (\lambda^2 - \tau^2)^{1/2} B')\tau u)]\, d\tau \\
&= \int_{-\lambda}^{\lambda} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\lambda^2 - \tau^2)^{i/2} z'(K, n - i, B', i)\, d\tau \\
&= \sum_{r=n-k}^{n} \binom{n}{r} \lambda^r W_r(K)\, p'_{r-1}(K).
\end{aligned}$$

Dabei wurde neben (38), (5), (8) und (23) die Gleichung (50) in [21], S. 215, benutzt. Andererseits ist

$$z(K + \lambda B) = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} \lambda^r z(K, n + 1 - r, B, r) = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \lambda^r W_r(K)\, p_r(K),$$

wobei $z(B) = z(K) = 0$ zu beachten war. Koeffizientenvergleich ergibt die Behauptung (37).

3. Krümmungsschwerpunkte von Körpern konstanter Breite

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß bei einem konvexen Körper konstanter Breite zwischen den oben definierten Schwerpunkten gewisse affine Abhängigkeiten bestehen. Im einfachsten Fall lautet dieses Resultat: Bei einem ebenen konvexen Bereich konstanter Breite fallen Steinerpunkt und Umfangsschwerpunkt zusammen. Dies ist zuerst von MEISSNER [28], S. 327, bemerkt und auf andere Weise von BOSE und ROY [7] bewiesen worden. Für dreidimensionale Körper konstanter Breite haben BOSE und Roy [9], Kap. VIII, gezeigt, daß der Steinerpunkt gleich dem Schwerpunkt der mittleren Krümmung ist. Nun bestehen bekanntlich zwischen den Quermaßintegralen eines Körpers mit konstanter Breite b gewisse lineare Beziehungen, nämlich

$$(39) \qquad 2\,W_{n-k} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} b^{k-i} W_{n-i} = 0 \quad (1 \leq k \leq n,\ k \text{ ungerade}),$$

wie für $n = 3$ von Blaschke und allgemeiner von Dinghas, Santaló (Literaturangaben siehe [10]) und Debrunner [10] bewiesen worden ist. In Analogie hierzu liegt die Vermutung nahe, daß auch die oben für $n = 2, 3$ erwähnte Gleichheit $p_n = p_{n-1}$ für Krümmungsschwerpunkte Bestandteil eines allgemeineren Relationensystems ist. In der Tat gilt: *Zwischen den Schwerpunkten $p_0, \ldots, p_n$ eines Körpers $K \in \mathfrak{K}_n$ mit konstanter Breite b bestehen die linear unabhängigen affinen Relationen*

$$(40) \quad 2\,W_{n-k} p_{n-k} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{r} b^{k-i} W_{n-i} p_{n-i} = 0 \quad (1 \leq k \leq n, k \text{ ungerade}).$$

Wenn solche linearen Relationen bestehen, muß es sich wegen der Translationsäquivarianz der Schwerpunkte notwendig um affine Relationen handeln, d. h. die Koeffizientensummen müssen verschwinden. Somit folgen aus (40) erneut die Relationen (39).

Für $k = 1$ ergibt sich aus (40) und (39) gerade $p_{n-1} = p_n$, also die n-dimensionale Verallgemeinerung des Ergebnisses von Meissner und Bose-Roy. Für $n = 3$ erhält man noch genau eine weitere Relation zwischen der Schwerpunkten. Sie bringt (bei Beachtung von $p_3 = p_2$) zum Ausdruck, daß gewöhnlicher Schwerpunkt, Oberflächenschwerpunkt und Steinerpunkt bei einem Körper konstanter Breite auf einer Geraden liegen.

Der Beweis von (40) erfolgt in enger Anlehnung an den von Debrunner [10] angegebenen Beweis der Relationen (39): Nach (18) gilt für beliebige konvexe Körper $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_n$ und für $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$$(41) \quad z(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{n+1-i} z(K_1, i, K_2, n+1-i).$$

Zu einem Körper K bezeichne $\bar{K}$ den durch Spiegelung am Nullpunkt hervorgehenden Körper. Wenden wir (41) zunächst mit $K_1 = K, K_2 = \bar{K}$, sodann mit $K_1 = \bar{K},\ K_2 = K$ an und beachten die Gleichungen

$$z(\lambda_1 K + \lambda_2 \bar{K}) = -z(\overline{\lambda_1 K + \lambda_2 \bar{K}}) = -z(\lambda_1 \bar{K} + \lambda_2 K),$$

so erhalten wir

$$(42) \quad z(K, i, \bar{K}, n+1-i) = -z(K, n+1-i, \bar{K}, i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Ist nun K ein Körper der konstanten Breite 1, so ist $K + \bar{K} = B$ und daher nach (41)

$$\begin{aligned} z(\lambda K + \mu B) &= z((\lambda + \mu) K + \mu \bar{K}) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \binom{i}{j} \lambda^j \mu^{n+1-j} z(K, i, \bar{K}, n+1-i). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (41) ergibt

$$\binom{n+1}{i} z(K, i, B, n+1-i) = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \binom{j}{i} z(K, j, \bar{K}, n+1-j). \tag{43}$$

Wie bei DEBRUNNER ergeben sich mit Benutzung von (43), (42) und wieder (43) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1}{k+1} \binom{k+1}{i} z(K, i, B, n+1-i) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1-i}{k+1-i} \binom{n+1}{i} z(K, i, B, n+1-i) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1-i}{k+1-i} \binom{j}{i} \binom{n+1}{j} z(K, j, \bar{K}, n+1-j) \\ &\qquad = -\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1-j}{k+1} \binom{n+1}{j} z(K, n+1-j, \bar{K}, j) \\ &\qquad = -\binom{n+1}{k+1} z(K, k+1, B, n-k). \end{aligned}$$

Ist nun K von der konstanten Breite b, so erhält man wegen (20) und unter Beachtung von $z(B) = 0$ die Beziehung

$$z(K, k+1, B, n-k) - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k+1}{i+1} b^{k-i} z(K, i+1, B, n-i) = 0,$$

die gemäß der Definition der Krümmungsschwerpunkte für ungerades k mit der Behauptung (40) übereinstimmt.

4. Historische Bemerkungen

Der Punkt p_n ist, wie bereits erwähnt, nichts anderes als der bekannte *Steinerpunkt*. Der Steinerpunkt $p_n(K)$ eines beliebigen konvexen Körpers $K \in \mathfrak{K}^n$ wird nach dem Vorschlag von SHEPHARD [38] am zweckmäßigsten erklärt durch die Gleichung

$$p_n(K) = \frac{n}{\omega_n} \int_{\Omega} u h(K, u) \, d\omega. \tag{44}$$

Zuerst ist dieser Punkt im Falle der Ebene von STEINER [40] betrachtet worden, und zwar als Schwerpunkt der Massenverteilung, die bei einem konvexen Polygon durch Belegung der Ecken mit den äußeren Winkeln als Massen oder bei einer glatten konvexen Kurve durch eine zur Krümmung proportionale Massendichte (bezüglich der Bogenlänge) gegeben ist. Nach KUBOTA [26] ergeben sich die kartesischen Koordinaten dieses Punktes als die Koeffizienten von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in der Fourier-Entwicklung der Stützfunktion $h(K, \varphi)$ des Bereiches (dies steht implizit auch bereits in der Arbeit von MEISSNER [28], S. 311, Gln. (6) und (7)). Diese Tatsache ist gleichbedeutend damit, daß für ebene glatte konvexe Bereiche der Krümmungsschwerpunkt durch (44) dargestellt wird. Für glatte Körper $K \in \mathfrak{K}^3$ haben BOSE und ROY [9] analog nachgewiesen, daß der Schwerpunkt bezüglich einer zur Gaußschen Krümmung proportionalen Massendichte auf ∂K auch durch (44) dargestellt werden kann. Ein (leicht auf höhere Dimensionen zu verallgemeinernder) Beweis hierfür findet sich auch bei GERICKE [17]. BOSE und ROY [9] haben auch entsprechende (aber kompliziertere) Darstellungen für die übrigen Schwerpunkte (im E^3) gefunden; einfachere Beweise hierfür hat ROY [34] angegeben. Eine Ausdehnung der Darstellung des Schwerpunktes der Gaußschen Krümmung durch (44) auf nichtkonvexe Hyperflächen findet man bei FLANDERS [16]. Daß bei einem konvexen Polytop $P \in \mathfrak{K}^n_n$ der durch (44) dargestellte Punkt auch als Schwerpunkt erhalten wird, wenn man in den Ecken von P die äußeren Winkel als Massen anbringt, ist von SHEPHARD [39] gezeigt worden. Übrigens kann man nicht nur bei glatten Körpern und Polytopen den Steinerpunkt als „Krümmungsschwerpunkt" auffassen, sondern bei beliebigen Körpern $K \in \mathfrak{K}^n_n$. Der Steinerpunkt eines Körpers K ergibt sich nämlich als Schwerpunkt derjenigen Massenverteilung auf ∂K, die jeder Borelmenge M auf ∂K den Inhalt des sphärischen Bildes von M als Gesamtmasse zuordnet (daß hierdurch ein Borelmaß auf ∂K erklärt ist, wird (für $n = 3$) bei ALEKSANDROV [2], Kap. V, § 2, nachgewiesen). Schließlich lassen sich auch die in (28) und (32) angegebenen Darstellungen der Punkte $p_r(K)$ als Spezialfälle eines für beliebige konvexe Körper gültigen Ausdruckes erkennen, wenn man die von FEDERER [13] eingeführten *Krümmungsmaße* heranzieht.

Die ursprüngliche Fragestellung, durch die STEINER [40] auf den Krümmungsschwerpunkt geführt worden ist, bestand in gewissen Extremalproblemen. Andere Beweise der von ihm gefundenen kennzeichnenden Extremaleigenschaften des Steinerpunktes sowie weitere Eigenschaften dieser Art findet man bei FERRERS [15], MEISSNER [28], NAKAJIMA [31], HAYASHI [24], SU [41], [42].

Die Additivitätseigenschaft (26) findet man andeutungsweise bei BLASCHKE [4], S. 118. Im Fall $r = n$ lautet sie einfach

$$(45) \qquad p_n(K \cup \bar{K}) + p_n(K \cap \bar{K}) = p_n(K) + p_n(\bar{K}).$$

Für einen einfachen Nachweis dieser Identität aufgrund der (an (44) abzulesenden) Minkowskischen Additivität des Steinerpunktes sowie daran anknüpfende Betrachtungen sehe man Sallee [35].

Die Gleichungen (27) finden sich in Spezialfällen (zumeist für $n = 2$) bei Kubota [26], Blaschke [3], [4], S. 86—87, Bose und Roy [7], [8], [9]. Aus diesen Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Aussagen über die gegenseitige Lage von Schwerpunkten, Oberflächenschwerpunkten (bzw. Umfangsschwerpunkten in der Ebene) und Krümmungsschwerpunkten eines konvexen Körpers bzw. der Körper einer Parallelschar. Derartige Aussagen sind, zum Teil auch auf anderem Wege, von Duporcq [11], [12], Kubota [26], Nicliborc [32], Blaschke [3], Bose und Roy [7], [8], [9] hergeleitet worden.

Es sei noch auf einen weiteren Fragenkreis hingewiesen, der sich mit Eigenschaften von Krümmungs- und anderen Schwerpunkten ebener konvexer Bereiche befaßt. Ein typisches Ergebnis lautet: Durch den Steinerpunkt eines glatten konvexen Bereiches gehen wenigstens vier Normalen der Randkurve. Für diese und verwandte Aussagen sehe man Meissner [28], Hayashi [25], Bose [6], Bose und Roy [7], [8], Guggenheimer [19].

Literatur

[1] A. D. Aleksandrov, Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. I. Verallgemeinerung einiger Begriffe der Theorie der konvexen Körper (russisch). Mat. Sbornik N. S. 2 (1937) 947—972.

[2] A. D. Aleksandrov, Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin 1955.

[3] W. Blaschke, Über die Schwerpunkte von Eibereichen. Math. Zeitschr. 36 (1932) 106.

[4] W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie. 2. Heft. Leipzig-Berlin 1937.

[5] T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der Konvexen Körper. Berlin 1934.

[6] R. C. Bose, A note on the convex oval. Bull. Calcutta Math. Soc. 27 (1935) 55—60.

[7] R. C. Bose und S. N. Roy, Some properties of the convex oval with reference to its perimeter centroid. Bull. Calcutta Math. Soc. 27 (1935) 79—86.

[8] R. C. Bose und S. N. Roy, A note on the area centroid of a closed convex oval. Bull. Calcutta Math. Soc. 27 (1935) 111—118.

[9] R. C. Bose und S. N. Roy, On the four centroids of a closed convex surface. Bull. Calcutta Math. Soc. 27 (1935) 119—146.

[10] H. Debrunner, Zu einem maßgeometrischen Satz über Körper konstanter Breite. Math. Nachr. 13 (1955) 165—167.

[11] E. Duporcq, Sur les centres de gravité des courbes parallèles. Bull. Soc. Math. France 24 (1896) 192—194.

[12] E. Duporcq, Sur les centres de gravité des surfaces parallèles a une surface fermée. C. R. Acad. Sci., Paris 124 (1897) 492—493.

[13] H. FEDERER, Curvature measures. Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959) 418—491.

[14] W. FENCHEL und B. JESSEN, Mengenfunktionen und konvexe Körper. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **16, 3** (1938) 1—31.

[15] N. M. FERRERS, Note on a geometrical theorem of Mr. Steiner. Quarterly J. Math. 4 (1861) 92—94.

[16] H. FLANDERS, The Steiner point of a closed hypersurface. Mathematika **13** (1966) 181—188.

[17] H. GERICKE, Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen. Math. Zeitschr. **46** (1940) 55—61.

[18] [18] B. GRÜNBAUM, Measures of symmetry for convex bodies. Proc. Symp. Pure Math. 7 (Convexity), 233—270. Providence 1963.

[19] H. GUGGENHEIMER, Does there exist a "four normals triangle"? Amer. Math. Monthly **77** (1970) 177—179.

[20] H. HADWIGER, Altes und Neues über konvexe Körper. Basel-Stuttgart 1955.

[21] H. HADWIGER, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

[22] H. HADWIGER, Zur axiomatischen Charakterisierung des Steinerpunktes konvexer Körper; Berichtigung und Nachtrag. Israel J. Math. (erscheint).

[23] H. HADWIGER und R. SCHNEIDER, Vektorielle Integralgeometrie. Elem. Math. **26** (1971) 49—57.

[24] T. HAYASHI, On Steiner's curvature centroid. Sci. Rep. Tôhoku Univ. **13** (1924) 109—132.

[25] T. HAYASHI, Some geometrical applications of Fourier series. Rend. Circ. Mat. Palermo **50** (1926) 96—102.

[26] T. KUBOTA, Über die Schwerpunkte der konvexen geschlossenen Kurven und Flächen. Tôhoku Math. J. **14** (1918) 20—27.

[27] P. MANI, On angle sums and Steiner points of polyhedra. Israel J. Math. **9** (1971) 380—388.

[28] E. MEISSNER, Über die Anwendung von Fourierreihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Vierteljahresschr. Naturf. Ges. Zürich **54** (1909) 309—329.

[29] H. MINKOWSKI, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. Bd. II, Leipzig-Berlin 1911.

[30] H. R. MÜLLER, Über Momente ersten und zweiten Grades in der Integralgeometrie. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., **2** (1953) 119—140.

[31] S. NAKAJIMA, The circle and the straight line nearest to n given points, n given straight lines or a given curve. Tôhoku Math. J. **19** (1921) 11—20.

[32] W. NIKLIBORC, Über die Lage des Schwerpunktes eines ebenen konvexen Bereiches und die Extrema des logarithmischen Flächenpotentials eines konvexen Bereiches. Math. Zeitschr. **36** (1932) 161—165.

[33] M. A. PERLES und G. T. SALLEE, Cell complexes, valuations and the Euler relation. Canadian J. Math. **22** (1970) 235—241.

[34] S. N. ROY, On the vector derivation of the invariants and centroid formulae for convex surfaces. Bull. Calcutta Math. Soc. **28** (1936) 79—88.

[35] G. T. SALLEE, A valuation property of Steiner points. Mathematika **13** (1966) 76—82.

[36] R. SCHNEIDER, On Steiner points of convex bodies. Israel J. Math. **9** (1971) 241—249.

[37] R. SCHNEIDER, Eine Verallgemeinerung des Differenzenkörpers. Monatsh. Math. **74** (1970) 258—272.

[38] G. C. SHEPHARD, Approximation problems for convex polyhedra. Mathematika **11** (1964) 9—18.
[39] G. C. SHEPHARD, The Steiner point of a convex polytope. Canadian J. Math. **18** (1966) 1294—1300.
[40] J. STEINER, Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven. Ges. Werke Bd. **2**, 99—159. Berlin 1882.
[41] B. SU, On Steiner's curvature centroid, Japan. J. Math. **4** (1927) 195—201.
[42] B. SU, On Steiner's Curvature centroid. II. Japan. J. Math. **4** (1927) 265—269.
[43] W. VOLLAND, Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum. Arch. Math. **8** (1957) 144—149.

Eingegangen am 8. 3. 1971