Existenz n-fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend großer Kantendichte

Von W. MADER, Berlin

§ 0. Einführung und Bezeichnungen

Unter einem Graphen verstehen wir hier einen ungerichteten, endlichen Graphen ohne mehrfache Kanten und ohne Schlingen. Mit $E(G)$ werde die Eckenmenge, mit $K(G)$ die Kantenmenge des Graphen $G = (E(G), K(G))$ bezeichnet; weiterhin sei $|G| = |E(G)|$ und $\varkappa(G) = |K(G)|$. Ein Graph G heißt n-fach zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Ecken des Graphen n bis auf die gemeinsamen Endpunkte disjunkte Wege existieren und $|G| > 1$ ist, falls $n \geqq 2$.

In [2], Teil II, (4) sahen wir, daß jeder Graph G mit $\varkappa(G) > n|G| - \binom{n+1}{2}$ und $|G| > n$ einen $\left[\frac{n+3}{2}\right]$-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthält. Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit mit der Frage beschäftigen, wie groß die Kantendichte $\frac{\varkappa(G)}{|G|}$ eines Graphen G sein muß, damit man sicher sein kann, daß G einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthält. Wir werden sehen, daß es sinnvoller ist, den Quotienten $\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)}$ zu betrachten und nur Graphen mit genügend vielen Ecken zuzulassen. Während man einerseits leicht unendlich viele (nicht isomorphe) Graphen G ohne n-fach zusammenhängenden Teilgraphen mit $\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} = \frac{3}{2}n - 2$ finden kann, werden wir andererseits hier beweisen, daß *jeder Graph G mit genügend vielen Ecken und mit*

$$\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n-1)$$

einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthält. Wie wir außerdem zeigen werden, enthält für $n \leqq 7$ jeder Graph G mit $\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} > \frac{3}{2}n - 2$ und genügend großer Eckenzahl einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen. Für $n \leqq 6$ werden auch die Graphen G ohne n-fach zusammenhängenden Teilgraphen mit $\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} = \frac{3}{2}n - 2$ charakterisiert.

Nun noch einige Bezeichnungen. Es sei $\gamma(x, G)$ der Grad der Ecke x in G. Eine Eckenmenge $U \subseteqq E(G)$ heiße unabhängig (in G), wenn für alle $\{x, y\} \in K(G)$ gilt $x \notin U$ oder $y \notin U$. Mit $\beta(G)$ werde die Unabhängigkeitszahl von G bezeichnet, d. h. $\beta(G) = \max\{|U| \mid U$ unabhängig in $G\}$. Die Taille $\tau(G)$ sei die Länge eines kürzesten Kreises von G; falls G ein Wald ist, setzen wir $\tau(G) = \infty$. Den vollständigen Graphen mit n Ecken bezeichnen wir mit V_n. Für $T \subseteqq E(G)$ sei $G(T)$ der von T in G aufgespannte (induzierte) Teilgraph.

Ein Graph G mit $|G| \geqq n + 1$ ist nach dem Mengerschen Satz genau dann n-fach zusammenhängend, wenn es keine trennende Eckenmenge T von G mit $|T| \leqq n - 1$ (oder gleichbedeutend: mit $|T| = n - 1$) gibt. Wir sagen, der Graph G ist längs (der trennenden Eckenmenge) T in G_1 und G_2 zerlegt oder G entsteht durch Zusammenheften von G_1 und G_2 längs T, wenn $G = G_1 \cup G_2$, $G(T) = G_1 \cap G_2$, $T \subset E(G_1)$ und $T \subset E(G_2)$ gilt[1]).

§ 1. Hinreichende Bedingungen für die Existenz n-fach zusammenhängender Teilgraphen für beliebiges $n \geqq 2$

Mit $\mathfrak{G}_n$ bezeichnen wir die Klasse aller Graphen, die keinen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthalten, und $\mathfrak{G}_n(m)$ bestehe aus allen $G \in \mathfrak{G}_n$ mit $|G| \geqq m$. Zunächst wollen wir mit einer kleinen Abänderung des in [2], Teil II, (4) dargestellten Beweises zeigen, daß die Kantendichte $\frac{\varkappa(G)}{|G|}$ für die Graphen $G \in \mathfrak{G}_n$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 1. *Sei G ein Graph mit $\varkappa(G) > (n + \nu)(|G| - (n - 1))$ und $|G| \geqq n + \nu + 2$; für jeden Teilgraphen H von G mit $|H| = n + \nu + 2$ gelte $\varkappa(H) \leqq (n + \nu)(|H| - (n - 1)) = (n + \nu)(\nu + 3)$.*

Dann enthält G einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen

$$(\nu = -1, 0, 1, \ldots).$$

Beweis. Sei H_0 ein Teilgraph von G mit möglichst wenig Ecken, der den Bedingungen $\varkappa(H_0) > (n + \nu)(|H_0| - (n - 1))$ und $|H_0| \geqq n + \nu + 2$ genügt. Nach Voraussetzung gilt dann sogar $|H_0| > n + \nu + 2$. Gäbe es eine Ecke a in H_0 mit $\gamma(a, H_0) \leqq n + \nu$, so würde auch $H_0 - \{a\}$ obigen Bedingungen genügen. Also gilt $\gamma(a, H_0) \geqq n + \nu + 1$ für alle $a \in E(H_0)$. Nehmen wir an, H_0 wäre nicht n-fach zusammenhängend. Da $|H_0| \geqq n + \nu + 2 \geqq n + 1$ ist, gibt es dann eine trennende Eckenmenge T von H_0 mit $|T| = n - 1$. Der Graph H_0 sei längs T in H_1 und H_2 zerlegt. Da $\gamma(a, H_0) \geqq n + \nu + 1$ für alle $a \in E(H_0)$ gilt, folgt $|H_\mu| \geqq n + \nu + 2$ für $\mu = 1, 2$. Wegen der Minimaleigenschaft von H_0 gilt also $\varkappa(H_\mu) \leqq (n + \nu)(|H_\mu| - (n - 1))$ für $\mu = 1, 2$. Durch Addition

[1]) $\subset$ bezeichne die echte Inklusion.

ergibt sich dann aber der Widerspruch $\varkappa(H_0) \leqq \varkappa(H_1) + \varkappa(H_2) \leqq (n+\nu)(|H_0| - (n-1))$. Also ist H_0 ein n-fach zusammenhängender Teilgraph von G.

Korollar 1. *Jeder Graph G mit $\varkappa(G) > (2n-3)(|G| - (n-1))$ und $|G| \geqq 2n-1$ enthält einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen.*

Zum Beweis braucht man nur $\nu = n-3$ in Satz 1 zu setzen und zu beachten, daß der einzige Graph H mit $|H| = 2n-1$ und $\varkappa(H) > (2n-3)n$ der V_{2n-1} ist.

Für $\nu = -1$ erhalten wir

Korollar 2. *Der Graph G mit $|G| \geqq n+1$ und*

$$\varkappa(G) > (n-1)(|G| - (n-1))$$

habe die Taille $\tau(G) \geqq n+1$. Dann enthält G einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen.

Der Beweis von Satz 1 funktioniert auch noch für $\nu = -2$, aber es kann keinen Graphen geben, der die Voraussetzungen von Satz 1 für $\nu = -2$ erfüllt. Denn ein solcher Graph müßte eine Ecke vom Grad $\geqq n-1$ besitzen, wie man wieder durch sukzessives Weglassen geeigneter Ecken sieht; dies ist aber nicht mit der Voraussetzung zu vereinbaren, daß $\varkappa(H) \leqq n-2$ für jeden Teilgraphen H mit $|H| = n$ gilt. Die Bedingung $\varkappa(H) \leqq (n+\nu)(\nu+3)$ für alle Teilgraphen H mit $|H| = n+\nu+2$ bedeutet, daß die Kanten von G „nirgends in G" zu stark konzentriert sein dürfen. Es fragt sich nun, ob man eine Bedingung für die Konzentration der Kanten finden kann, so daß es zwar noch unendlich viele Graphen G mit $\varkappa(G) > (n-2)(|G| - (n-1))$ gibt, die dieser Bedingung genügen, aber jeder solche Graph mit genügend vielen Ecken einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthält. Die stärkste, in Frage kommende Bedingung ist die, daß keine Kreise „kleiner" Länge vorkommen. Gibt es also für ein n ($\geqq 4$) Zahlen t_n und e_n, so daß jeder Graph G der Taille $\tau(G) \geqq t_n$ mit $|G| \geqq e_n$ und mit $\varkappa(G) > (n-2)(|G| - (n-1))$ einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen enthält? Zur Beantwortung dieser Frage werden wir den folgenden Satz benötigen, welcher eine natürliche Erweiterung der Existenzsätze für reguläre Graphen mit vorgegebener Taille darstellt.

Satz 2. *Seien $g, g', t = 2m \geqq 4$ und $e_0 > (g+g') \sum_{\mu=0}^{m-1} (g-1)^\mu (g'-1)^\mu$ natürliche Zahlen, so daß auch $\frac{e_0}{1+\frac{g}{g'}}$ eine ganze Zahl ist. Dann existiert ein zweichromatischer (paarer) Graph $P_t(g, g')$ mit e_0 Ecken und der Taille*

$\tau \geqq t$, *so daß alle Ecken der einen Farbklasse den Grad* g *und alle Ecken der anderen Farbklasse den Grad* g' *haben.*

Die Beweise für die Existenz von regulären Graphen vom Grad g mit der Taille $\geqq t$, wie sie etwa in [1] oder [3], Kap. 8.8 dargestellt sind, lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auf unseren Fall übertragen, ja vereinfachen sich teilweise sogar. Wir wollen hier einen Beweis skizzieren, ohne Wert auf eine möglichst gute Abschätzung der kleinsten Eckenzahl eines solchen Graphen zu legen.

Mit $\varrho_G(x, y)$ bezeichnen wir den Abstand der Ecken x und y in G und es sei $K_G(x, r) = \{y \in E(G) \mid \varrho_G(y, x) \leqq r\}$, wobei wir auch den Index G weglassen.

Sei die Menge M_0 mit $|M_0| = e_0$ zerlegt in zwei disjunkte Mengen M und M' mit $|M| = \frac{e_0}{1+\frac{g}{g'}}$ und

$$|M'| = e_0 - \frac{e_0}{1+\frac{g}{g'}} = \frac{e_0}{1+\frac{g'}{g}}.$$

Wir betrachten nun die Klasse $\mathfrak{K}$ aller Graphen G mit $E(G) = M_0$ und den drei folgenden Eigenschaften:

1. M und M' sind unabhängige Eckenmengen in G.
2. Es gilt $\gamma(x, G) \leqq g$ für alle $x \in M$ und $\gamma(y, G) \leqq g'$ für alle $y \in M'$.
3. Es ist die Taille $\tau(G) \geqq t$.

Sei $G_0 \in \mathfrak{K}$ mit möglichst großer Kantenzahl. Wir werden zeigen, daß G_0 die in Satz 2 geforderten Eigenschaften hat. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann existiert ein $a \in M$ mit $\gamma(a, G_0) < g$ oder ein $a' \in M'$ mit $\gamma(a', G_0) < g'$. Da aber $g|M| = g'|M'|$ gilt, existieren $a \in M$ mit $\gamma(a, G_0) < g$ *und* $a' \in M'$ mit $\gamma(a', G_0) < g'$. Man schätzt sofort ab

$$|K(a, t-1)| \leqq g \sum_{\mu=0}^{m-1} (g-1)^{\mu} (g'-1)^{\mu}$$

und somit

$$|K(a, t-1) \cup K(a', t-1)| \leqq (g + g') \sum_{\mu=0}^{m-1} (g-1)^{\mu} (g'-1)^{\mu}.$$

Also existiert eine Ecke $b \in E(G_0)$ mit $\varrho(b, a) \geqq t$ und $\varrho(b, a') \geqq t$; sei etwa $b \in M$. Es gilt $\gamma(b, G_0) \geqq 1$, da sonst ersichtlich $G_0' = (M_0, K(G_0) \cup \{b, a'\})$[2]) zu $\mathfrak{K}$ gehörte, aber $\varkappa(G_0') > \varkappa(G_0)$ ist. Sei $\{b, b'\} \in K(G_0)$, also $b' \in M'$ und $\varrho(b', a) \geqq t - 1$. Wir betrachten nun den Graphen

$$G = (M_0, (K(G_0) - \{b, b'\}) \cup \{a, b'\} \cup \{a', b\}).$$

[2]) Wir sparen uns die zweite geschweifte Klammer.

Man überlegt sich leicht analog zu [1], daß $\tau(G) \geqq t$, also $G \in \mathfrak{K}$ gilt im Widerspruch zu $\varkappa(G) > \varkappa(G_0)$.

Wenn man sich jede Kante eines regulären Graphen durch je eine neue Ecke „halbiert" denkt, sieht man, daß die Frage nach der kleinsten Eckenzahl eines regulären Graphen vom Grad g mit der Taille $\geqq t$ äquivalent ist zur Frage nach der kleinsten Eckenzahl eines Graphen $P_{2t}(g, 2)$.

Die vor Satz 2 gestellte Frage läßt sich nun schnell im negativen Sinne beantworten. Hierzu betrachten wir einen Graphen $P = P_t(g, n-1)$ mit $g > (n-1)(n-2)$. Man rechnet sofort $\frac{\varkappa(P)}{|P|} = \frac{g(n-1)}{n-1+g} > n-2$ nach. Andererseits ist aber $P \in \mathfrak{G}_n$, da jede Kante von P mit einer Ecke vom Grad $n-1$ inzidiert.

Wir betrachten nun für $n \geqq 2$ die Funktion

$$g(n) = \inf_m \sup \left\{\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} \,\middle|\, G \in \mathfrak{G}_n(m)\right\}.$$

Aus Korollar 1 ergibt sich $g(n) \leqq 2n - 3$.

Zunächst wollen wir uns überlegen, daß $g(n)$ schon durch endlich viele Graphen aus $\mathfrak{G}_n$ bestimmt ist.

Nach dem Satz von Ramsey enthält jeder Graph mit genügend großer Eckenzahl einen V_{n+1} (also erst recht einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen) oder eine unabhängige Eckenmenge U mit $|U| \geqq n-1$. Also existiert auch eine ganze Zahl $f(n) \geqq n$, so daß für jeden Graphen $G \in \mathfrak{G}_n(f(n))$ gilt $\beta(G) \geqq n-1$.

Mit $\mathfrak{G}_n^\beta$ bezeichnen wir die Klasse aller Graphen $G \in \mathfrak{G}_n$ mit $|G| \geqq n$ und $\beta(G) \geqq n-1$; weiterhin bestehe $\overline{\mathfrak{G}}_n^\beta$ aus allen $G \in \mathfrak{G}_n^\beta$ mit

$$\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} = g(n).$$

Wir zeigen nun

Satz 3. *Es gilt* $g(n) = \max\left\{\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} \,\middle|\, G \in \mathfrak{G}_n^\beta \wedge |G| < 2f(n)\right\}$.

Beweis. Dieses Maximum werde mit c bezeichnet und von $G_0 \in \mathfrak{G}_n^\beta$ angenommen. Seien die Graphen $G_1, \ldots, G_m$ isomorph zu G_0 und $E(G_\nu) \cap E(G_\mu) = T$ für $\nu \neq \mu$; dabei sei T unabhängig in $G_1, \ldots, G_m$ und $|T| = n-1$. Der Graph G entstehe aus $G_1, \ldots, G_m$ durch Zusammenheften längs T. Es ist dann $\varkappa(G) = m\varkappa(G_0)$ und

$$|G| = m(|G_0| - (n-1)) + n - 1$$

und somit auch

$$\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} = c.$$

Da auch $G \in \mathfrak{G}_n$ ist, ergibt sich somit $g(n) \geqq c$.

Nehmen wir nun an, es wäre $g(n) > c$. Dann existieren Graphen $H \in \mathfrak{G}_n(2f(n))$ mit $\frac{\varkappa(H)}{|H| - (n-1)} > c$ und es gilt sogar $H \in \mathfrak{G}_n^\beta$. Sei $H_0 \in \mathfrak{G}_n^\beta$ mit $\frac{\varkappa(H_0)}{|H_0| - (n-1)} > c$ und möglichst kleiner Eckenzahl. Nach Definition von c gilt also $|H_0| \geqq 2f(n)$. Da $H_0 \in \mathfrak{G}_n$ ist, existiert also eine trennende Eckenmenge T von H_0 mit $|T| = n-1$. Sei H_0 längs T in H_1' und H_2 zerlegt. O. B. d. A. sei $|H_2| \geqq f(n)$, also $H_2 \in \mathfrak{G}_n^\beta$. Der Graph[3]) $H_1 = H_1' - K(H_0(T))$ gehört ebenfalls zu $\mathfrak{G}_n^\beta$. Nach Wahl von H_0 gilt also $\varkappa(H_\nu) \leqq c(|H_\nu| - (n-1))$ für $\nu = 1, 2$. Durch Addition ergibt sich der Widerspruch $\varkappa(H_0) = \varkappa(H_1) + \varkappa(H_2) \leqq c(|H_0| - (n-1))$, womit Satz 3 bewiesen ist.

Wie man aus dem Beweis entnimmt, gilt auch

$$g(n) = \max\left\{\frac{\varkappa(G)}{|G| - (n-1)} \,\middle|\, G \in \mathfrak{G}_n^\beta\right\}$$

und also

$$\varkappa(G) \leqq g(n)(|G| - (n-1)) \quad \text{für alle } G \in \mathfrak{G}_n(f(n)).$$

Ein Graph G heiße n-abhängig von den Graphen $G_1, \ldots, G_m$, wenn

1. *G zu einem der Graphen $G_1, \ldots, G_m$ isomorph ist oder*
2. *G sich längs einer $(n-1)$-elementigen unabhängigen Eckenmenge in zwei Graphen G' und G'' zerlegen läßt, welche n-abhängig von $G_1, \ldots, G_m$ sind.*

Z.B. ist ein Graph genau dann 2-abhängig vom V_2, wenn er ein Baum mit mindestens zwei Ecken ist. Wenn die Graphen $G_1, \ldots, G_m$ alle $(n-1)$-fach zusammenhängend sind, ist auch jeder von ihnen n-abhängige Graph $(n-1)$-fach zusammenhängend. Wenn $G_1, \ldots, G_m$ aus $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ sind, sieht man leicht, daß auch jeder von diesen n-abhängige Graph zu $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ gehört. Bei passender Wahl von $G_1, \ldots, G_m$ besteht $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ sogar aus genau allen hiervon n-abhängigen Graphen.

Satz 3a. *Seien $G_1, \ldots, G_m$ alle verschiedenen*[4]) *Graphen aus $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ mit weniger als $2f(n)$ Ecken. Dann gilt $G \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ genau dann, wenn G n-abhängig ist von $G_1, \ldots, G_m$.*

Beweis. Seien $G \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ und $x, y \in E(G)$ mit $\{x, y\} \notin K(G)$. Wir betrachten zunächst $G' = (E(G), K(G) \cup \{x, y\})$ und zeigen $G' \notin \mathfrak{G}_n$. Seien $G_1 = G, G_2, \ldots, G_{n-1}$ isomorph zu G mit $E(G_\nu) \cap E(G_\mu) = T$ für $\nu \neq \mu$, wobei T eine unabhängige Eckenmenge von $G_1, \ldots, G_{n-1}$ mit $|T| = n-1$ ist. Durch Zusammenheften längs T entstehe H und es sei $H' = (E(H), K(H) \cup \{x, y\})$. Dann gilt $\beta(H') \geqq n-1$ und

$$\frac{\varkappa(H')}{|H'| - (n-1)} > g(n);$$

[3]) Für $K^0 \subseteq K(G)$ bezeichne $G - K^0$ den Graphen $(E(G), K(G) - K^0)$.

[4]) D. h. nicht isomorphen.

also ist $H' \notin \mathfrak{G}_n$ und somit auch $G' \notin \mathfrak{G}_n$. (Hieraus ergibt sich auch sofort, daß jeder Graph aus $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ die Zusammenhangszahl $n-1$ hat.)

Der Graph $G \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ mit $|G| \geqq 2f(n)$ sei längs T mit $|T| = n-1$ in G_1 und G_2' zerlegt. Wir werden zeigen, daß dann T unabhängig in G ist und G_1 und G_2' zu $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ gehören, womit Satz 3a bewiesen sein wird. Wenn etwa $|G_1| \geqq f(n)$ gilt, gehören G_1 und $G_2 = (E(G_2'), K(G_2') - K(G(T)))$ zu $\mathfrak{G}_n^\beta$; somit gilt $\varkappa(G_\nu) \leqq g(n)(|G_\nu| - (n-1))$ für $\nu = 1, 2$. Durch Addition sieht man, daß beidemal das Gleichheitszeichen gelten muß, also $G_1 \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ und $G_2 \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ sein muß. Da $G_2' \in \mathfrak{G}_n$ ist, gilt nach dem vorhergehenden Abschnitt wegen $G_2 \in \bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ also $\varkappa(G(T)) = 0$ und $G_2' = G_2$.

Für zwei eckendisjunkte Graphen G und H bezeichnen wir im folgenden mit $G * H$ denjenigen Graphen, welcher aus $G \cup H$ durch Hinzufügen aller Kanten $\{x, y\}$ mit $x \in E(G)$ und $y \in E(H)$ hervorgeht. Wenn dabei $H = (E(H), \emptyset)$ mit $|H| = n$ gilt, schreiben wir einfach $G * n$. Mit nG bezeichnen wir einen Graphen, welcher aus n Komponenten besteht, die alle isomorph zu G sind.

Betrachten wir den Graphen $H = (m V_{n-1}) * (n-1)$. Es gilt $H \in \mathfrak{G}_n^\beta$ und $\varkappa(H) = (\frac{3}{2}n - 2)(|H| - (n-1))$. Somit gilt also $g(n) \geqq \frac{3}{2}n - 2$. Andererseits wissen wir bereits $g(n) \leqq 2n - 3$. Wir werden nun versuchen, $g(n)$ besser nach oben abzuschätzen. Hierzu beweisen wir zunächst das folgende

Lemma 1. *Sei der Graph $G = (E, K)$ gegeben. Dann existiert eine Teilmenge $E' \subseteqq E$ mit $|E'| = \left[\frac{|E|}{2}\right]$, so daß gilt*

$$2\varkappa(G(E')) + 2\varkappa(G(E - E')) \leqq \varkappa(G).$$

Beweis. Für den Graphen $G(T)$ mit $T \subset E$ und $|T|$ gerade sei bereits eine Zerlegung der Eckenmenge in T' und T'' mit $|T'| = |T''| = \frac{|T|}{2}$ gefunden, für welche gilt

$$2\varkappa(G(T')) + 2\varkappa(G(T'')) \leqq \varkappa(G(T)).$$

Seien $e', e'' \in E - T$. Man kann dabei o. B. d. A. die Bezeichnung so wählen, daß

$$\begin{aligned}\gamma(e', G(T' \cup \{e'\})) &+ \gamma(e'', G(T'' \cup \{e''\})) \\ &\leqq \gamma(e', G(T'' \cup \{e'\})) + \gamma(e'', G(T' \cup \{e''\}))\end{aligned}$$

gilt. Dann bilden aber $S' = T' \cup \{e'\}$ und $S'' = T'' \cup \{e''\}$ eine Zerlegung der gewünschten Art für den Graphen $G(S)$ mit $S = T \cup \{e', e''\}$. Da man analog mit einer Ecke $e \in E - T$ verfahren kann, ergibt sich Lemma 1 durch Induktion.

Bemerkung. Wenn m Kanten in G existieren, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt haben, kann man sogar E' mit $|E'| = \left[\frac{|E|}{2}\right]$

finden, so daß $2\varkappa(G(E')) + 2\varkappa(G(E - E')) + m \leqq \varkappa(G)$ gilt. Um dies einzusehen, braucht man beim Beweis von Lemma 1 nur zwei durch eine Kante verbundene Ecken e' und e'' zu wählen.

Sei $\mathfrak{K}_n$ die Klasse aller Graphen, in denen zwei disjunkte unabhängige Eckenmengen U und U' mit $|U| = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ und $|U'| = \left[\frac{n}{2}\right]$ existieren.

Lemma 2. *Sei $G \in \mathfrak{K}_n$ mit $|G| \geqq \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + n$ und mit*

$$\varkappa(G) > (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|G| - (n-1)).$$

Dann enthält G einen n-fach zusammenhängenden Teilgraphen.

Beweis. Sei $H \in \mathfrak{K}_n$ ein Teilgraph von G mit möglichst wenig Ecken, der die Ungleichungen

$$|H| \geqq \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + n \quad \text{und} \quad \varkappa(H) > (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H| - (n-1))$$

erfüllt. Wir werden H als n-fach zusammenhängend nachweisen.

Sei $H' \in \mathfrak{K}_n$ mit $|H'| = \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + n$; dann gilt

$$\varkappa(H') \leqq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \binom{\left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + 1}{2} + (n-1)\left(\left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + 1\right)$$

und man rechnet leicht nach, daß dies

$$\leqq (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H'| - (n-1))$$

ist. Somit gilt also $|H| > \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + n$.

Da $H \in \mathfrak{K}_n$ ist, existieren disjunkte unabhängige Eckenmengen U und U' mit $|U| = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ und $|U'| = \left[\frac{n}{2}\right]$. Da H minimal gewählt ist, gilt also

a) $\gamma(x, H) > (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *für alle* $x \in E(H) - (U \cup U')$.

Der Graph $H - \{x\}$ mit $x \in U \cup U'$ gehört nach Streichen von höchstens $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ Kanten zu $\mathfrak{K}_n$. Also gilt

b) $\gamma(x, H) + \left[\frac{n}{2}\right] - 1 > (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *für alle* $x \in U \cup U'$.

Nehmen wir nun an, H wäre nicht n-fach zusammenhängend. Dann existiert eine trennende Eckenmenge T von H mit $|T| = n - 1$; der Graph H sei längs T zerlegt in H' und H''. Nach Lemma 1 existiert eine

Kantenmenge $M \subseteqq K(H(T))$ mit $2\,|M| \leqq \varkappa(H(T))$, so daß $H(T) - M$ zu $\mathfrak{K}_n$ gehört. Betrachten wir nun den Graphen $H_1 = H' - M$. Wegen $H(T) - M \in \mathfrak{K}_n$ gilt auch $H_1 \in \mathfrak{K}_n$. Wenn $E(H_1) - (T \cup U \cup U') \neq \emptyset$ ist, folgt nach a) $|H_1| \geqq \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] + n$ und wegen der Minimaleigenschaft von H somit

$$\varkappa(H_1) \leqq (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H_1| - (n-1)).$$

Nehmen wir andererseits an, es gelte $E(H_1) - T \subseteqq U \cup U'$. Sei etwa $x_0 \in (E(H_1) - T) \cap U$; dann ist[5] $N(x_0, H) - T \subseteqq U'$ und nach b) ergibt sich

$$|N(x_0, H) - T| \geqq \gamma(x_0, H) - (n-1) > \frac{n-1}{\sqrt{2}} - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 > 0.$$

Also ist auch $(E(H_1) - T) \cap U' \neq \emptyset$ und somit folgt analog

$$|(E(H_1) - T) \cap U| > \frac{n-1}{\sqrt{2}} - \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Also gilt

$$\alpha := |H_1 - T| > \sqrt{2}(n-1) - 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2.$$

Da $H_1 - T$ ein paarer Graph ist, gilt

$$\varkappa(H_1 - T) \leqq |(E(H_1) - T) \cap U|\,|(E(H_1) - T) \cap U'| \leqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Damit ergibt sich

$$\varkappa(H_1) \leqq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha(n-1) + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Da

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - x\frac{n-1}{\sqrt{2}} \leqq 0$$

für x aus dem Intervall $[(n-1)(\sqrt{2}-1);\ (n-1)(\sqrt{2}+1)]$ gilt, ergibt sich

$$\varkappa(H_1) \leqq (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\alpha = (n-1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H_1| - (n-1)),$$

da wir für α die Ungleichungen

$$(n-1)(\sqrt{2}-1) \leqq (n-1)\sqrt{2} - 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2 < \alpha \leqq \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right] \leqq (n-1)(\sqrt{2}+1)$$

annehmen können. $\Bigl($Für $\alpha > \left[\frac{n-1}{\sqrt{2}}\right]$ folgt die obige Ungleichung für $\varkappa(H_1)$ sofort wegen der Minimaleigenschaft von H.$\Bigr)$

---

[5]) Für $x \in E(G)$ sei $N(x, G) = \{y \mid \{x, y\} \in K(G)\}$.

Wir haben also gezeigt, daß in jedem Falle

$$\varkappa(H_1) \leqq (n-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H_1|-(n-1))$$

gilt; ebenso ergibt sich für den Graphen $H_2 = H'' - M$ die Ungleichung

$$\varkappa(H_2) \leqq (n-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|H_2|-(n-1)).$$

Der Widerspruch

$$\begin{aligned}\varkappa(H) &\leqq \varkappa(H) + \varkappa(H(T)) - 2\,|M| = \varkappa(H_1) + \varkappa(H_2)\\ &\leqq (n-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(|H|-(n-1))\end{aligned}$$

zeigt nun, daß H ein n-fach zusammenhängender Teilgraph von G ist, womit Lemma 2 bewiesen ist.

Da jeder Graph aus $\mathfrak{G}_n(f(n))$ auch zu $\mathfrak{K}_n$ gehört und da $g(n)$ nach Satz 3 rational ist, ergibt sich aus Lemma 2 sofort

Satz 4. *Es gilt* $g(n) < (n-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *für alle* $n \geqq 2$.

§ 2. Bestimmung von $g(n)$ für $n \leqq 7$.

In diesem Abschnitt wollen wir noch die Fälle $n = 2, \ldots, 7$ betrachten. Wie wir vor Lemma 1 gesehen haben, gilt $g(n) \geqq \frac{3}{2}n - 2$ für alle n. Für $n \leqq 7$ gilt nun sogar $g(n) = \frac{3}{2}n - 2$. Es ist mir leider nicht gelungen, zu entscheiden, ob $g(n) > \frac{3}{2}n - 2$ für irgendein n ist. Für $n \leqq 6$ wollen wir auch die „Basis" von $\overline{\mathfrak{G}}_n^{\beta}$ bestimmen. Dabei werden wir nur den Fall $n = 6$ genauer ausführen. Zunächst zeigen wir hierzu

Lemma 3. *Sei* $G \in \mathfrak{G}_n$ *mit* $|G| = n + \mu$ *und* $\beta(G) \geqq \mu \geqq 0$. *Dann gilt* $\varkappa(G) \leqq \binom{n}{2} + (n-1)\mu$.

Beweis. Für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ gilt die Behauptung. Wir können dann annehmen, daß $\gamma(x, G) \geqq n$ für alle $x \in E(G)$ gilt, da wir sonst auf den Fall $\mu - 1$ reduzieren können. Sei U eine unabhängige Eckenmenge von G mit $|U| = \mu$; dann ist also jede Ecke von U mit jeder Ecke von $E(G) - U$ durch eine Kante verbunden. Somit ist $\mu < n$ und $G' = G - U$ kann nicht $(n-\mu)$-fach zusammenhängend sein. Aus der Existenz einer trennenden Eckenmenge T von G' mit $|T| = n - \mu - 1$ folgt leicht $\varkappa(G') \leqq \binom{n}{2} - \mu$ und somit also $\varkappa(G) \leqq \binom{n}{2} + (n-1)\mu$.

Wir werden nun zeigen, daß $\varkappa(G) \leqq 7(|G| - 5)$ für jeden Graphen $G \in \mathfrak{G}_6$ mit $|G| \geqq 12$ gilt. In Tabelle 1 schätzen wir hierzu die Kantenzahl der Graphen aus $\mathfrak{G}_6$ mit kleiner Eckenzahl ab.

Tabelle 1

$\|G\|$	$\varkappa(G) \leqq$	$\beta(G) \geqq 5 \to \varkappa(G) \leqq$	$7(\|G\| - 5)$
6	15	5	7
7	20	11	14
8	25	18	21
9	31	26	28
10	36	35	35
11	43	40	42
12	49		49

Bezeichnen wir den Wert in der n-ten Zeile und m-ten Spalte mit $a_{n,m}$ $(1 \leqq n \leqq 7;\ 1 \leqq m \leqq 4)$. Dann gilt für die Werte der 2-ten Spalte: $a_{n,2} = \max\{a_{\nu,2} + a_{\mu,3} \mid \nu + \mu = n \wedge \nu \geqq \mu \geqq 1\}$. Der Wert $a_{6,3}$ ergibt sich aus Lemma 3.

Nehmen wir an, es existieren Graphen $G \in \mathfrak{G}_6$ mit $|G| \geqq 13$ und $\varkappa(G) > 7(|G| - 5)$ und sei G_0 ein solcher mit möglichst wenig Ecken. G_0 sei längs der 5-elementigen trennenden Eckenmenge T in G_1 und G_2 zerlegt und es sei $G'_\nu = G_\nu - K(G_0(T))$ für $\nu = 1, 2$. Da $\varkappa(G) \leqq 7(|G| - 5)$ nach Spalte 3 der Tabelle für $G \in \mathfrak{G}_6$ mit $|G| \leqq 12$ und $\beta(G) \geqq 5$ gilt, folgt mit der Minimaleigenschaft von G_0 also $\varkappa(G'_\nu) \leqq 7(|G'_\nu| - 5)$. Daraus ergibt sich $\varkappa(G_\nu) > 7(|G_\nu| - 5)$ und nach Definition von G_0 also $|G_\nu| \leqq 11$ für $\nu = 1, 2$ und $\varkappa(G_0(T)) > 0$. Wenn $|G_\nu| = 10$ gilt, folgt $\varkappa(G'_\nu) \leqq 34$ wegen $\varkappa(G_0(T)) > 0$. In jedem Fall gilt also $\varkappa(G'_\nu) \leqq 7(|G'_\nu| - 5) - 1$ und somit $\varkappa(G_\nu) \geqq 7(|G_\nu| - 5) + 2$, woraus sich $|G_\nu| \leqq 9$, also $|G_1| = |G_2| = 9$ ergibt. Da $\varkappa(G_0) > 7(|G_0| - 5) = 56$ gilt, folgt $\varkappa(G'_\nu) = 26$ und $\varkappa(G_0(T)) \geqq 5$ aus Tabelle 1 Zeile 4. Dann enthält aber $G_0(T)$ einen Kreis L und $G_\nu - (T - E(L))$ ist 6-fach zusammenhängend im Widerspruch zu $G_0 \in \mathfrak{G}_6$. Damit haben wir also $g(6) = 7$ gezeigt.

Wir werden nun noch folgern, daß jeder Graph $G \in \overline{\mathfrak{G}}_6^\beta$ 6-abhängig ist von dem Graphen $V_5 * 5$. Sei also $G_0 \in \overline{\mathfrak{G}}_6^\beta$ und G_ν, T und G'_ν mögen die gleiche Bedeutung haben wie bisher. Wenn $\varkappa(G_0(T)) = 0$ ist, folgt $G_1 \in \overline{\mathfrak{G}}_6^\beta$ und $G_2 \in \overline{\mathfrak{G}}_6^\beta$. Wir können also $\varkappa(G_0(T)) > 0$ voraussetzen. Wie schon gezeigt, gilt $\varkappa(G'_\nu) \leqq 7(|G'_\nu| - 5)$. Beim Beweis von Satz 3a sahen wir, daß jeder Graph aus $\overline{\mathfrak{G}}_n^\beta$ nach Hinzufügen einer beliebigen neuen Kante nicht mehr zu $\mathfrak{G}_n$ gehört. Da $\varkappa(G_0(T)) > 0$ ist, folgt somit

$\varkappa(G'_\nu) < 7(|G'_\nu| - 5)$ und also $\varkappa(G_\nu) > 7(|G_\nu| - 5)$; daher ist $|G_\nu| \leqq 11$. Sei U eine unabhängige Eckenmenge von G_0 mit $|U| = 5$ und sei etwa $|E(G_1) \cap U| \geqq |E(G_2) \cap U|$. Wegen $U \neq T$ gilt dann aber $E(G_1) \cap U \nsubseteq T$ und somit $\varkappa(G'_1) \leqq 7(|G'_1| - 5) - 2$, also $|G_2| \leqq 9$. Dann gilt aber auch $\varkappa(G'_2) \leqq 7(|G'_2| - 5) - 2$, also $|G_1| \leqq 9$. Dann ergibt sich weiter

$$\varkappa(G'_1) \leqq 7(|G'_1| - 5) - 5, \text{ also } |G_2| \leqq 7.$$

Damit ist also $|G_0| \leqq 11$ und aus Tabelle 1 ersieht man $G_0 = V_5 * 5$.

Wir wollen den entsprechenden Sachverhalt für $n \leqq 7$ in Satz 5 zusammenfassen, den wir somit für $n = 6$ vollständig bewiesen haben. Es sei dabei $e_n = \min\{m \mid G \in \mathfrak{G}_n(m) \to \varkappa(G) \leqq g(n)(|G| - (n-1))\}$.

Satz 5. *Für* $2 \leqq n \leqq 7$ *gilt* $g(n) = \frac{3}{2}n - 2$. *Dabei ist* $e_2 = 1$, $e_3 = 4$, $e_4 = 6$, $e_5 = 9$, $e_6 = 12$ *und* $e_7 = 19$. *Jeder Graph aus* $\bar{\mathfrak{G}}_n^\beta$ *ist für* $2 \leqq n \leqq 4$ *und für* $n = 6$ *n-abhängig von* $V_{n-1} * (n-1)$, *für* $n = 5$ *von den Graphen*[6]) $V_4 * 4$ *und* $(2V_4^-) * (2V_2)$.

Wir wollen auf den Beweis für $n \neq 6$ nicht eingehen, da er sich analog zum Fall $n = 6$ erledigen läßt. Zur „Basis" von $\bar{\mathfrak{G}}_7^\beta$ gehören schon mindestens drei Graphen, nämlich $V_6 * 6$, $(3V_6^-) * (3V_2)$ und $(2V_6^\triangle) * (2V_3)$.

Literatur

[1] P. Erdös und H. Sachs, Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl. Wiss. Z. Univ. Halle 12 (1963) 251—258.

[2] W. Mader, Homomorphiesätze für Graphen. Math. Ann. 178 (1968) 154—168.

[3] W. T. Tutte, Connectivity in graphs. Univ. of Toronto Press, Toronto 1966.

Eingegangen am 10. 5. 1970

[6]) V_n^- entstehe aus dem V_n durch Streichen einer Kante, $V_n^\triangle$ durch Weglassen von drei Kanten, welche im V_n ein Dreieck bilden.