Normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe

Von HELMUT KARZEL in Hamburg

Es sei F ein Fastkörper[1]) und K ein Teilschiefkörper von F. Dann heißt F *normal* über K und das Paar (F, K) ein *normaler Fastkörper* (vgl. [2]), wenn gilt:

I. $(\alpha + \beta)\mathfrak{c} = \alpha\mathfrak{c} + \beta\mathfrak{c}$ *für alle* $\alpha, \beta \in K$ *und alle* $\mathfrak{c} \in F$, *d.h.* F *ist ein Linksvektorraum über* K.

II. $K^*(\cdot) \lhd F^*(\cdot)$, d.h. $K^*(\cdot)$ *ist ein Normalteiler von* $F^*(\cdot)$.

Ist (F, K) ein normaler Fastkörper, so nennen wir die Faktorgruppe F^*/K^* (die wir wegen II bilden können) die *Inzidenzgruppe*[2]) des normalen Fastkörpers (F, K). In dieser Note sollen normale Fastkörper (F, K) mit kommutativer Inzidenzgruppe F^*/K^* betrachtet werden. Für diese gilt:

Satz 1. *Ist* (F, K) *ein normaler Fastkörper mit* $[F : K] \geqq 3$[3]) *und ist* F^*/K^* *kommutativ, so ist* F *ein kommutativer Körper.*

Dieser Satz ist für $3 < [F : K] < \infty$ in [4] und für $[F : K] = 3$ in [5] bewiesen worden. Hier soll gezeigt werden (§ 1), daß Satz 1 auch für $[F : K] = \infty$ richtig ist. Die Folgerungen, die sich aus Satz 1 für die Geometrie ergeben, findet man in [7]. Vor allem läßt sich mit Hilfe dieses Satzes und eines Satzes von A. BRANDIS [1] eine Vermutung von M. HALL beweisen (vgl. [7]), daß jede unendliche zyklische Ebene nicht desarguessch ist[4]).

Die Frage, ob Satz 1 auch unter der schwächeren Voraussetzung $[F : K] \geqq 2$ allgemein richtig ist, ist zu verneinen. Bisher sind aber erst

---

[1]) Eine Menge F, in der eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ erklärt sind, heißt *Fastkörper*, wenn gilt: 1. $F(+)$ und $F^*(\cdot)$ mit $F^* = \{\mathfrak{x} \in F;\ \mathfrak{x} \neq 0\}$ sind Gruppen, 2. $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in F$ und 3. $0 \cdot \mathfrak{a} = 0$ für alle $\mathfrak{a} \in F$.

[2]) Zu dem Begriff Inzidenzgruppe gehört noch eine projektive Struktur, die mit der Gruppenstruktur verträglich ist (siehe § 1).

[3]) Jedem normalen Fastkörper (F, K) entspricht nach Axiom I als *Rang* $[F\!:\!K]$ die Dimension des K-Linksvektorraums F.

[4]) Eine projektive Ebene heißt *zyklisch*, wenn die Kollineationsgruppe eine zyklische Untergruppe enthält, die transitiv auf den Punkten der projektiven Ebene operiert.

zwei Gegenbeispiele, die beide endlich sind, bekannt. Für endliche normale Fastkörper gilt nämlich (§ 2):

Satz 2. *Ist* (F, K) *ein endlicher normaler Fastkörper mit* $[F:K] = 2$ *und ist* F^*/K^* *kommutativ, so gilt:*

a) F *ist entweder ein endlicher Körper mit* $|F| = q^2$ *oder einer der Dicksonschen Fastkörper* $DF\,(9,3)$ *bzw.* $DF\,(64,4)$ *mit* 9 *bzw.* 64 *Elementen.*

b) *Ist* $F = DF\,(9,3)$, *so ist* F^*/K^* *die Kleinsche Vierergruppe; ist* F *ein endlicher Körper oder* $F = DF\,(64,4)$, *so ist* F^*/K^* *zyklisch.*

Ist Satz 2 auch ohne die Endlichkeitsvoraussetzung richtig? Dieses Problem konnte ich bisher nur unter der stärkeren Voraussetzung, daß K im Zentrum von F liegt, lösen (§ 3):

Satz 3. *Ist* (F, K) *ein zentraler Fastkörper (d.h.* K^* *liegt im Zentrum von* F^**) mit* $[F:K] \geqq 2$ *und ist* F^*/K^* *kommutativ, so ist* F *entweder ein kommutativer Körper oder der Dicksonsche Fastkörper* $DF\,(9,3)$ *mit neun Elementen.*

Durch die Forderung, daß K im Zentrum von F liegen soll, wird der in Satz 2 erwähnte Dicksonsche Fastkörper $DF\,(64,4)$ ausgeschlossen.

§ 1. Beweis von Satz 1 für $[F:K] = \infty$

Eine *Inzidenzgruppe* (vgl. [2]) ist eine Gruppe $G(\cdot)$, deren Elemente gleichzeitig Punkte eines projektiven Raumes $G(\pi)$ sind, so daß gilt:

(V) *Für jedes* $a \in G$ *ist die Abbildung* $a^* : x \to a x$ *von* G *in sich eine Kollineation des projektiven Raumes* $G(\pi)$.

Nach I ist jeder normale Fastkörper (F, K) ein K-Linksvektorraum. Also entspricht (F, K) ein projektiver Raum, dessen Punkte die eindimensionalen Teilräume $K\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} \in F^*$ sind. Identifizieren wir jeden Punkt $K\mathfrak{x}$ mit dem Element $K^*\mathfrak{x}$ der Faktorgruppe F^*/K^*, so wird F^*/K^* in dem eben definierten Sinne zu einer Inzidenzgruppe, da auch die Verträglichkeitsbedingung (V) erfüllt ist.

In [4] ist Satz 1 unter der Voraussetzung, daß $3 < [F:K] < \infty$ ist, bewiesen worden. Von der Voraussetzung $[F:K] < \infty$ wurde nur bei dem Beweis des Hilfssatzes (1) aus [4] Gebrauch gemacht. Daher genügt es hier — für den Beweis von Satz 1 für $[F:K] = \infty$ — nur zu zeigen, daß Hilfssatz (1) auch noch unter der schwächeren Voraussetzung $[F:K] > 3$ richtig ist.

Es sei also (F, K) ein normaler Fastkörper mit $[F:K) > 3$ und $G = F^*/K^*$ kommutativ. Dann ist die Dimension der Inzidenzgruppe

G mindestens gleich 3. Der zu beweisende Hilfssatz (1) aus [4] lautet:

(1) *Zu* $a, b \in G$ *mit* $a, b \neq 1$ *und* $\dim \overline{\{1, a, b, ab\}} \leqq 2$[5]) *gibt es stets ein* $c \in G$ *mit* $\dim \overline{\{1, a, c, ac\}} = \dim \overline{\{b, ab, c, ac\}} = 3$.

Beweis. Da $\dim G \geqq 3$ ist und da nach Voraussetzung $\dim \overline{\{1, a, b, ab\}} \leqq 2$ ist, gibt es in G eine Hyperebene H (die Hyperebenen fassen wir hier als Teilmengen von G und die Inzidenzrelation als Enthaltenseinsrelation auf) mit $1, a, b, ab \in H$. Nach (V) ist die Abbildung $(a^{-1})^*$: $x \to a^{-1}x$ eine Kollineation von G. Daher ist mit H auch die Menge $a^{-1}H$ eine Hyperebene. G läßt sich also als transitive Permutationsgruppe der Menge $M = \{xH;\ x \in G\}$ (diese enthält mehr als ein Element) darstellen. G ist nach Voraussetzung kommutativ und operiert daher regulär[6]) auf der Hyperebenenmenge M. Also sind, da $a \neq 1$ ist, die Hyperebenen H und $a^{-1}H$ verschieden. Folglich gibt es auf H einen Punkt c, der nicht auf $a^{-1}H$ und keiner der Geraden $\overline{\{1, a\}}$ und $\overline{\{b, ab\}}$ liegt. Aus $c \notin a^{-1}H$ folgt $ac \notin H$. Aus $1, a, c \in H$, $c \notin \overline{\{1, a\}}$ und $ac \notin H$ erhalten wir $\dim \overline{\{1, a, c, ac\}} = 3$. Aus $b, ab, c \in H$, $c \notin \overline{\{b, ab\}}$ und $ac \notin H$ folgt $\dim \overline{\{b, ab, c, ac\}} = 3$.

§ 2. Endliche normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe

Ein Fastkörper $F(+, \cdot)$ heißt *Dicksonscher Fastkörper*, wenn gilt (vgl. [3], [6]):

In F läßt sich eine dritte binäre Operation $\circ$ so erklären, daß $F(+, \circ)$ ein Schiefkörper ist und daß für jedes $\mathfrak{a} \in F$ die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{a}^{-1} \circ (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x})$ ein Automorphismus von $F(+, \circ)$ ist.

Jeder Schiefkörper ist auch ein Dicksonscher Fastkörper.

Über endliche Dicksonsche Fastkörper F lassen sich folgende Aussagen machen (vgl. [3], [8]):

Das Zentrum $Z(F)$ von F ist ein Körper.

Ist $|Z(F)| = q$ und $|F| = q^n$, so besitzt das Zahlenpaar $\{q, n\}$ folgende Eigenschaften: 1. q ist eine Primzahlpotenz; 2. Jeder Primteiler von n ist auch ein Teiler von $q - 1$; 3. Ist $q \equiv 3 \bmod 4$, so gilt $n \not\equiv 0 \bmod 4$.

---

[5]) Ist T eine Menge von Punkten aus G, so bezeichnen wir mit $\overline{T}$ den kleinsten projektiven Teilraum von G, der die Punkte aus T enthält.

[6]) Eine Gruppe G operiert auf einer Menge M *regulär*, wenn es zu zwei Elementen $a, b \in M$ genau ein $\alpha \in G$ gibt mit $\alpha(a) = b$.

Zu jedem Paar $\{q, n\}$ mit diesen Eigenschaften — wir nennen es *Dicksonsches Zahlenpaar* — gibt es mindestens einen Dicksonschen Fastkörper F mit $|F| = q^n$ und $|Z(F)| = q$; diesen Fastkörper bezeichnen wir mit $DF(q^n, q)$.

$DF(q^n, q)$ ist genau dann ein Körper, wenn $n = 1$ ist.

Wie Zassenhaus [8] gezeigt hat, sind bis auf sieben Ausnahmetypen alle endlichen Fastkörper Dicksonsche Fastkörper.

Zum Beweis von Satz 2 betrachten wir zunächst nur Dicksonsche Fastkörper $DF(q^n, q)$.

Unsere Aufgabe ist es, alle Dicksonschen Fastkörper $DF(q^n, q)$ zu bestimmen, die einen Teilkörper L enthalten, so daß die folgenden drei Bedingungen gelten:

(2) $DF(q^n, q)$ *ist normal über* L.

(3) $[DF(q^n, q) : L] = 2$.

(4) $DF(q^n, q)^*/L^*$ *ist kommutativ.*

In [3], Satz 5′ und Satz 6, ist für jeden Dicksonschen Fastkörper $DF(p^{\tau n}, p^\tau)$, wobei p eine Primzahl ist, gezeigt worden:

1. Ist $p^\sigma - 1$ ein Teiler von $\frac{p^{\tau n} - 1}{n}$, so besitzt $DF(p^{\tau n}, p^\tau)$ genau einen Teilkörper L mit $|L| = p^\sigma$, über dem $DF(p^{\tau n}, p^\tau)$ normal ist.

2. Ist $DF(p^{\tau n}, p^\tau)$ normal über L, so gilt:

a) $|L| = p^\sigma$ ist eine p-Potenz.

b) $|L| - 1$ ist ein Teiler von $\frac{p^{\tau n} - 1}{n}$.

c) $[DF(p^{\tau n}, p^\tau) : L] = \frac{\tau \cdot n}{\sigma}$.

d) Die Faktorgruppe $DF(p^{\tau n}, p^\tau)^*/L^*$ besitzt zwei Erzeugende A und B, die den Relationen

$$(5) \quad A^s = 1, \quad B^n = A^t, \quad B A B^{-1} = A^{p^\tau} \quad \textit{mit} \quad s = \frac{p^{\tau n} - 1}{n(p^\sigma - 1)}, \quad t = \frac{p^{\tau n} - 1}{n(p^\tau - 1)}$$

genügen.

Hieraus ersehen wir, daß die oben gestellte Aufgabe gleichwertig mit der folgenden ist: Für welche Quadrupel $\{p, \tau, n, \sigma\}$ natürlicher Zahlen sind die Bedingungen

(6) p *ist eine Primzahl,*

(7) $\{p^\tau, n\}$ *ist ein Dicksonsches Zahlenpaar,*

$$(8) \quad (p^\sigma - 1) \,\Big|\, \frac{p^{\tau n} - 1}{n},$$

$$(9)\quad \tau n = 2\sigma,$$

$$(10)\quad \frac{p^{\tau n}-1}{n(p^{\sigma}-1)}\,\Big|\,(p^{\tau}-1)$$

erfüllt?

Wegen (9) ist (8) gleichbedeutend mit

$$(11)\quad n \mid (p^{\sigma}+1)$$

und (10) gleichbedeutend mit

$$(12)\quad \frac{(p^{\sigma}+1)\tau}{2\sigma}\,\Big|\,(p^{\tau}-1).$$

Zu jeder Lösung dieser Aufgabe, d.h. zu jedem Quadrupel $\{p, \tau, n, \sigma\}$, das den Bedingungen (6), (7), (8), (9) und (10) genügt, gibt es einen Dicksonschen Fastkörper $DF(p^{\tau n}, p^{\tau})$ und einen Teilkörper L von $DF(p^{\tau n}, p^{\tau})$ mit $|L| = p^{\sigma}$, so daß für $DF(p^{\tau n}, p^{\tau})$ und L die Bedingungen (2), (3) und (4) erfüllt sind.

Zunächst fragen wir nach allen Lösungen $\{p, \tau, n, \sigma\}$, bei denen n ungerade ist. Nach (9) ist dann τ eine gerade Zahl. Daher können wir $\tau = 2\varrho$ und $\sigma = n\varrho$ setzen und die Bedingung (12) in der Form $\frac{p^{n\varrho}+1}{n}\,\Big|\,(p^{2\varrho}-1)$ schreiben. Aus dieser folgt $(p^{\varrho})^n < n\big((p^{\varrho})^2-1\big) < n(p^{\varrho})^2$ also $(p^{\varrho})^{n-2} < n$. Diese Ungleichung hat aber, da p eine Primzahl, also $p^{\varrho} \geqq 2$ sein soll, für $n > 4$ keine Lösung. Für $n = 3$ erhalten wir als einzige Lösung $p^{\varrho} = 2$, d.h. $p = 2$, $\varrho = 1$, $\tau = 2$ und $\sigma = 3$. Wie man sofort bestätigt, erfüllt das Quadrupel $\{2, 2, 3, 3\}$ die geforderten Bedingungen und ist daher eine Lösung unserer Aufgabe. Für $n = 1$ sind alle Quadrupel $\{p, 2\sigma, 1, \sigma\}$, wobei p eine Primzahl und σ eine beliebige natürliche Zahl ist, Lösungen der gestellten Aufgabe.

Nun bestimmen wir die Lösungen, bei denen n gerade ist. Es sei $n = 2\nu$. Aus (9) folgt dann $\sigma = \nu\tau$ und (12) nimmt die Gestalt

$$(13)\quad \frac{p^{\nu\tau}+1}{2\nu}\,\Big|\,(p^{\tau}-1)$$

an. Für jede Lösung gilt also $(p^{\tau})^{\nu} < 2\nu(p^{\tau}-1) < 2\nu p^{\tau}$ und daher auch $(p^{\tau})^{\nu-1} < 2\nu$. Da $p^{\tau} \geqq 2$ sein muß, haben diese Ungleichungen nur für $\nu = 1$, d.h. für $n = 2$ eine Lösung. Für $\nu = 1$ folgt aus (13) $(p^{\tau}+1) \mid 2(p^{\tau}-1)$. Diese Bedingung ist aber nur für $p^{\tau} = 3$ erfüllt. Hieraus erkennen wir, daß es für gerades n nur die eine Lösung $\{3, 1, 2, 1\}$ (diese erfüllt auch die anderen Bedingungen) gibt.

Die zu den Quadrupeln $\{p, 2\sigma, 1, \sigma\}$ gehörigen Dicksonschen Fastkörper $DF(p^{2\sigma}, p^{2\sigma})$ sind endliche Körper mit $p^{2\sigma}$ Elementen. Jeder dieser Körper enthält genau einen Teilkörper L mit $|L| = p^{\sigma}$ und $DF(p^{2\sigma}, p^{2\sigma})^*/L^*$ ist eine zyklische Gruppe.

Dem Quadrupel $\{3, 1, 2, 1\}$ entspricht der kleinste echte Fastkörper $DF(9,3)$ mit neun Elementen und ein Teilkörper L mit drei Elementen (nämlich sein Zentrum). Aus (5) folgt sofort, daß $DF(9,3)^*/L^*$ die Kleinsche Vierergruppe ist, da $s = t = 2$ ist.

Schließlich bleibt noch das Quadrupel $\{2, 2, 3, 3\}$ übrig. Der zugeordnete Dicksonsche Fastkörper $DF(64, 4)$ besteht aus 64 Elementen und der zugeordnete Teilkörper L aus acht Elementen. $DF(64, 4)^*/L^*$ ist nach (5) eine zyklische Gruppe der Ordnung 9, da $s = 3$ und $t = 7$ ist, d.h. da $A^3 = 1$ und $B^3 = A^7 = A$ ist.

Für den Beweis von Satz 2 haben wir noch nachzuweisen, daß keiner der sieben Zassenhausschen Ausnahmetypen (vgl. [8]) einen Teilkörper enthält, so daß die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind. Dies werden wir im nächsten Paragraphen im Anschluß an den Beweis von Satz 3 zeigen.

§ 3. Zentrale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe

Ist (F, K) ein normaler Fastkörper und liegt K^* im Zentrum von F^*, so heißt F *zentral* über K und das Paar (F, K) ein *zentraler Fastkörper*.

Zum Beweis von Satz 3 setzen wir jetzt voraus, daß (F, K) ein zentraler Fastkörper mit $[F:K] = 2$ und $G = F^*/K^*$ eine kommutative Gruppe ist. Dann liegen für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in F^*$ die Kommutatoren $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$ in K. Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor:

1. $\mathfrak{x}^2 \in K$ *für alle* $\mathfrak{x} \in F$. Dann folgt:

(14) *Für jedes* $\mathfrak{a} \in F$ *mit* $\mathfrak{a} \notin K$ *und jedes* $\alpha \in K^*$ *gilt* $[1 + \alpha\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = -1$ *und* $(1 + \alpha\mathfrak{a})^2 = 1 - \alpha^2\mathfrak{a}^2$.

Beweis. Es gilt (man beachte, daß F ein K-Linksvektorraum ist und K im Zentrum von F liegt):

$$\begin{aligned}(1 + \alpha\mathfrak{a})(1 + \alpha\mathfrak{a}) &= 1 + \alpha\mathfrak{a} + \alpha \cdot [1 + \alpha\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cdot (\mathfrak{a} + \alpha\mathfrak{a}^2) \\ &= 1 + \alpha \cdot [1 + \alpha\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\alpha\mathfrak{a}^2 + \alpha(1 + [1 + \alpha\mathfrak{a}, \mathfrak{a}])\mathfrak{a} \in K.\end{aligned}$$

Hieraus folgt aber (da der Koeffizient von $\mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{a} \notin K$ Null sein muß) $[1 + \alpha\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = -1$ und daher auch $(1 + \alpha\mathfrak{a})^2 = 1 - \alpha^2\mathfrak{a}^2$.

Ist $\mathfrak{a} \in F$ und $\mathfrak{a} \notin K$, so läßt sich (wegen $[F:K] = 2$) jedes $\mathfrak{b} \in F^*$ mit $K\mathfrak{b} \neq K, K\mathfrak{a}$ in der Form $\mathfrak{b} = \beta(1 + \alpha\mathfrak{a})$ mit $\alpha, \beta \in K$ darstellen. Beachtet man, daß K^* im Zentrum von F^* liegt, so erhält man aus (14):

(15) *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in F^*$ *gilt:*

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \begin{cases} 1 & \textit{falls } K\mathfrak{a} = K\mathfrak{b} \textit{ oder } \mathfrak{a} \in K \textit{ oder } \mathfrak{b} \in K \textit{ gilt} \\ -1 & \textit{falls } K\mathfrak{a} \neq K\mathfrak{b} \textit{ und } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \notin K \textit{ gilt.} \end{cases}$$

Aus (15) erkennen wir also, daß F ein kommutativer Körper ist, wenn die Charakteristik von K gleich 2 ist.

(16) *Ist die Charakteristik von K ungleich 2, so gilt $\mathfrak{a}^2 = \frac{1}{2}$ für alle $\mathfrak{a} \in F$ mit $\mathfrak{a} \notin K$.*

Beweis. Es gilt die Identität:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{a} - 1 &= \mathfrak{a} - (1 - \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} - (1 - \mathfrak{a})) \cdot (\mathfrak{a} + (1 - \mathfrak{a})) \\ &= [2\mathfrak{a} - 1, \mathfrak{a}] \cdot (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2) \\ &\quad + [2\mathfrak{a} - 1, 1 - \mathfrak{a}]([1 - \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cdot (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2) - (1 - \mathfrak{a})^2) \end{aligned}$$

Nach (15) gilt aber $[2\mathfrak{a} - 1, \mathfrak{a}] = [2\mathfrak{a} - 1, 1 - \mathfrak{a}] = [1 - \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = -1$ und nach (14) $(1 - \mathfrak{a})^2 = 1 - \mathfrak{a}^2$. Also erhalten wir aus der Identität:

$$2\mathfrak{a} - 1 = -(2\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}) - (2\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} - 1) = -4\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} + 1, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{a}^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Es sei die Charakteristik von K ungleich 2. Dann erhalten wir aus (16) für alle $\alpha \in K^*$ und alle $\mathfrak{a} \in F$ mit $\mathfrak{a} \notin K$:

$$\tfrac{1}{2} = (\alpha\mathfrak{a})^2 = \alpha^2\mathfrak{a}^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \text{d.h.} \quad \alpha^2 = 1.$$

Also gilt $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$ für alle $\alpha \in K^*$, d.h. K ist der Primkörper der Charakteristik 3. Daher besteht F wegen $[F : K] = 2$ aus neun Elementen. Da F kein kommutativer Körper ist, ist F der kleinste echte Fastkörper $DF(9, 3)$.

2. *Es gibt ein $\mathfrak{a} \in F$ mit $\mathfrak{a}^2 \notin K$.* Hier folgt:

(17) *Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in K$, so gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha$. Dann gilt, da K im Zentrum von F liegt:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\alpha^{-1}\alpha = \mathfrak{b}\alpha^{-1}\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{-1} \cdot \mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{a}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

(18) *Ist $\mathfrak{a}^2 \notin K$, so gibt es $\alpha, \beta \in K$ mit $(\alpha\mathfrak{a})^2 = \beta + \alpha\mathfrak{a}$.*

Beweis. Da $[F : K] = 2$ und $\mathfrak{a} \notin K$ ist, läßt sich $\mathfrak{a}^2$ in der Form $\mathfrak{a}^2 = \lambda + \mu\mathfrak{a}$ mit $\lambda, \mu \in K$ darstellen. Multiplizieren wir diese Gleichung mit μ^{-2}, so erhalten wir $(\mu^{-1}\mathfrak{a})^2 = \mu^{-2}\lambda + \mu^{-1}\mathfrak{a}$, d.h. $\alpha = \mu^{-1}$ und $\beta = \mu^{-2}\lambda$ sind die gesuchten Elemente aus K.

(19) *Ist $\mathfrak{a}^2 = \alpha + \mathfrak{a}$ mit $\alpha \in K$, so gilt $\mathfrak{a}(1 - \mathfrak{a}) = (1 - \mathfrak{a})\mathfrak{a} = -\alpha$.*

Beweis. Da $\mathfrak{a}(1 - \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 = -\alpha$ ist, folgt die Behauptung aus (17).

(20) *Ist $\mathfrak{a}^2 = \alpha + \mathfrak{a}$ mit $\alpha \in K$, so liegt $\mathfrak{a}$ im Zentrum von F.*

Beweis. Wir dürfen $\mathfrak{a} \notin K$ voraussetzen. Ist $\gamma \in K$, so gilt wegen (19)

$$\begin{aligned}(1-\mathfrak{a})(1+\gamma\mathfrak{a}) &= 1-\mathfrak{a}+\gamma(1-\mathfrak{a})\mathfrak{a} = 1-\gamma\alpha-\mathfrak{a}\\ &= [1-\mathfrak{a}, 1+\gamma\mathfrak{a}]\big(1+\gamma\mathfrak{a}-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot(\mathfrak{a}+\gamma\mathfrak{a}^2)\big)\\ &= [1-\mathfrak{a}, 1+\gamma\mathfrak{a}]\{1-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\gamma\alpha\\ &\quad+\big(\gamma-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot(1+\gamma)\big)\mathfrak{a}\}.\end{aligned}$$

Da 1 und $\mathfrak{a}$ K-unabhängig sind, folgt durch Koeffizientenvergleich aus der ersten und letzten Zeile:

$$\begin{aligned}1-\gamma\alpha &= [1-\mathfrak{a}, 1+\gamma\mathfrak{a}]\cdot(1-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot\gamma\alpha)\\ -1 &= [1-\mathfrak{a}, 1+\gamma\mathfrak{a}]\cdot\big(\gamma-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot(1+\gamma)\big)\end{aligned}$$

und hieraus:

$$-\big(\gamma-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot(1+\gamma)\big)\cdot(1-\gamma\alpha) = 1-[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot\gamma\alpha,$$

d.h.:

$$[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\cdot\big((1+\gamma)(1-\gamma\alpha)+\gamma\alpha\big) = 1+\gamma(1-\gamma\alpha).$$

Also ist $[1+\gamma\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$ für alle $\gamma \in K$; denn wegen $(1-\mathfrak{a})(1+\gamma\mathfrak{a}) = -\gamma^{-1}(\gamma^2\alpha-\gamma+\gamma\mathfrak{a})$ ist $\gamma^2\alpha-\gamma \neq 1$, d.h. $1+\gamma(1-\gamma\alpha) \neq 0$. Da sich (wegen $[F:K] = 2$) jedes Element $\mathfrak{x} \in F$ in der Form $\mathfrak{x} = \xi+\eta\mathfrak{a}$ darstellen läßt, erhalten wir schließlich, falls $\xi \neq 0$ ist:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\xi(1+\xi^{-1}\eta\mathfrak{a}) = \xi\mathfrak{a}(1+\xi^{-1}\eta\mathfrak{a}) = \xi(1+\xi^{-1}\eta\mathfrak{a})\mathfrak{a} = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{a}$$

und falls $\xi = 0$ ist: $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\eta\mathfrak{a} = \eta\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{x}\mathfrak{a}$.

Aus (18) und (20) erkennen wir, daß es Zentrumselemente gibt, die nicht in K liegen; ein solches Zentrumselement sei $\mathfrak{a}$. Dann gilt $F = K + K\mathfrak{a}$. Für $\mathfrak{x} = \xi_1+\xi_2\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{y} = \eta_1+\eta_2\mathfrak{a}$ mit $\xi_i, \eta_i \in K$ folgt $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(\eta_1+\eta_2\mathfrak{a}) = \mathfrak{x}\eta_1+\mathfrak{x}\eta_2\mathfrak{a} = \eta_1\mathfrak{x}+\eta_2\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \eta_1\xi_1+\eta_1\xi_2\mathfrak{a}+\eta_2\xi_1\mathfrak{a}+\eta_2\xi_2\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$. Also ist F in diesem Fall stets ein kommutativer Körper. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Um noch den Beweis von Satz 2 zu vervollständigen, zeigen wir:

(21) *Ist (F, K) ein normaler Fastkörper und P der Primkörper von K, so ist (F, P) ein zentraler Fastkörper.*

Beweis. Da $P \in K$ ist, ist P ein Teilkörper, für den das Axiom I erfüllt ist. Für jedes $\mathfrak{a} \in F^*$ ist die Abbildung $\xi \to \mathfrak{a}\xi\mathfrak{a}^{-1} : K \to K$ ein Automorphismus des Schiefkörpers K (vgl. [2] (9)). Jeder Automorphismus von K läßt aber den Primkörper elementeweise fest. Also gilt $\mathfrak{a}\xi\mathfrak{a}^{-1} = \xi$ für alle $\mathfrak{a} \in F^*$ und alle $\xi \in P$, d.h. P liegt im Zentrum von F.

Aus (21) folgt sofort:

(22) *Ist (F, K) ein endlicher normaler Fastkörper und ist $|F| = p^2$, wobei p eine Primzahl ist, so ist (F, K) ein zentraler Fastkörper.*

Jeder endliche Fastkörper F, der zu den Ausnahmetypen gehört, hat p^2 Elemente, wobei p eine Primzahl ist (vgl. [8]). Würde nun F einen Teilkörper K enthalten, so daß F normal über K und F^*/K^* kommutativ ist, so wäre (F, K) nach (22) ein zentraler Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe F^*/K^*. Nach Satz 3 sind aber bis auf den Dicksonschen Fastkörper $DF(9,3)$ alle zentralen Fastkörper (F, K) mit kommutativer Inzidenzgruppe F^*/K^* kommutative Körper. Also erfüllt kein endlicher Fastkörper, der zu den Ausnahmetypen gehört, die Voraussetzungen von Satz 2.

Literatur

[1] A. Brandis, Über die multiplikative Struktur von Körpererweiterungen. Math. Zeitschr. 87 (1965) 71—73.

[2] E. Ellers und H. Karzel, Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26 (1963) 55—57.

[3] E. Ellers und H. Karzel, Endliche Inzidenzgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 27 (1964) 250—264.

[4] H. Karzel, Kommutative Inzidenzgruppen. Arch. Math. 13 (1962) 535—538.

[5] H. Karzel, Ebene Inzidenzgruppen. Arch. Math. 15 (1964) 10—17.

[6] H. Karzel, Unendliche Dicksonsche Fastkörper. Arch. Math. Erscheint demnächst.

[7] H. Karzel, Projektive Räume mit einer kommutativen transitiven Kollineationsgruppe. Math. Zeitschr. 87 (1965) 74—77.

[8] H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1936) 187—220.